Sujet 1

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Trouver tous les $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a \wedge b = 30$ et $a \vee b = 600$.

Application cours 2

On s'intéresse au système suivant dans $\mathbb{Z}$:

$$(1)\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 7 \pmod{13} \end{cases}$$

1. Trouver une relation de Bézout entre les entiers 5 et 13.

2. En déduire une solution particulière du système (1).

3. Trouver toutes les solutions de (1).

Exercice 1

Soit x un nombre de 6 chiffres et y le nombre obtenu en déplaçant à la fin le premier chiffre de x. Montrer que y est divisible par 13 si et seulement si x l'est.

Exercice 2

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 2^{2n} + 15n - 1 \equiv 0 \pmod 9$.

Sujet 2

Cours

Attendre la question

Application cours 1

1. Montrer que si un entier n est congru à 3 modulo 4, alors il admet un facteur premier congru à 3 modulo 4.

2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Application cours 2

Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

Exercice 1

Calculer la valuation 2-adique de $5^{2^n} - 1$.

Sujet 3

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que si $a \equiv b \pmod{n}$, alors $a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$.

Application cours 2

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x \wedge y + x \vee y = y + 4$.

Exercice 1

Résoudre l'équation diophantienne d'inconnues $x, y \in \mathbb{N}$,

$$(x+1)(y+2) = 2xy.$$

Sujet 4

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Trouver tous les $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a \wedge b = 24$ et $a \vee b = 720$.

Application cours 2

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1 \equiv 0 \pmod 7$.

Exercice 1

Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $a^b = b^a$.

Sujet 5

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Résoudre l'équation diophantienne d'inconnues $x,\ y \in \mathbb{Z}$,

$$3x^2 + xy = 11.$$

Application cours 2

Montrer que la somme de deux nombres premiers consécutifs n'est jamais un produit de deux nombres premiers.

Exercice 1

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux. Montrer que $(a+b) \wedge (a^2 - 3ab + b^2) \in \{1, 5\}$.

Exercice 2

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1 \equiv 0 \pmod 7$.

Sujet 6

Cours

Attendre la question

Application cours 1

On s'intéresse au système suivant dans $\mathbb{Z}$:

$$(1)\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 5 \pmod{11} \end{cases}$$

1. Trouver une relation de Bézout entre les entiers 3 et 11.

2. En déduire une solution particulière du système (1).

3. Trouver toutes les solutions de (1).

Application cours 2

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x \wedge y + x \vee y = y + 9$.

Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}^\times$. On suppose qu'il existe $m, n \in \mathbb{N}$ premiers entre eux tel que x^m et x^n sont entiers. Montrer que x est un entier.