Sujet 1

Cours

Attendre la question

Application cours 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il n'existe pas de matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = A$.

Application cours 2

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec des 2 sur la diagonale et des 1 partout ailleurs. Calculer A^k pour tout k de $\mathbb{N}$.

Exercice 1

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente.

1. Montrer que $I_n + N$ est inversible et donner son inverse.
2. Montrer que si A et N commutent, alors $A + N$ est inversible.

Sujet 2

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Déterminer les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = 0$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.
On définit $A = (a_{k,l})_{1 \leqslant k,l \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par, pour tout $(k,l) \in [\![1;n]\!]^2$, $a_{k,l} = \omega^{(k-1)(l-1)}$.
Déterminer A^2.

Sujet 3

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Déterminer la matrice inverse de $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Application cours 2

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on considère les matrices

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M(x, y) = xI_2 + yJ$$

de $\mathcal{M}_2(R)$.
Résoudre l'équation d'inconnues x et y : $M(x, y)^2 = I_2$.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le produit de n matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nul.

Sujet 4

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + I_n$. Montrer que A et B commutent.

Application cours 2

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Montrer que si les matrices A et B sont nilpotentes et commutent, alors la matrice $A + B$ est nilpotente.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de A, puis détermminer une racine carrée de A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Sujet 5

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Déterminer la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Application cours 2

Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $M + M^{-1} = I_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, déterminer $M^p + M^{-p}$.

Exercice 1

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice triangulaire supérieure.

Sujet 6

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Déterminer la matrice inverse de $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \end{pmatrix}$

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.
On définit $A = (a_{k,l})_{1 \leqslant k,l \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par, pour tout $(k,l) \in [\![1;n]\!]^2$, $a_{k,l} = \omega^{(k-1)(l-1)}$.
Déterminer A^2.