Sujet 1

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Trouver tous les sous-corps de $\mathbb{Q}$.

Application cours 2

1. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

2. Soit m et n deux entiers non nuls. Donner une CNS pour que $\mathbb{U}_m$ soit un sous-groupe de $\mathbb{U}_n$.

Exercice 1

Soit A et B deux parties d'un groupe fini G avec $|A| + |B| > |G|$.
Montrer que $AB = G$.

Sujet 2

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Soit G un groupe et $A \subset G$.
Montrer que l'ensemble des $g \in G$ tels que $gA = A$ est un sous-groupe de G.

Exercice 1

Soit A un anneau et E un ensemble. Montrer que $\mathrm{U}(\mathcal{F}(E, A)) = \mathcal{F}(E, \mathrm{U}(A))$.

Exercice 2

Montrer que le groupe $\mathbb{C}^*$ est isomorphe au groupe produit $\mathbb{U} \times \mathbb{R}_+^*$.

Sujet 3

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Soit $(G, +)$ un groupe commutatif. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G. Pour $f, g \in \mathrm{End}(G)$, on définit

$$\forall x \in G, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Montrer que $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ est un anneau.

Exercice 1

Soit G un groupe.
Montrer que le centre $Z(G)$ de G est un sous-groupe stable par tout automorphisme de G.

Sujet 4

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Application cours 1

Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{U}_8 & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & z^4. \end{array}$.

1. Montrer que φ est un morphisme de groupes.
2. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 1

Soit G, H deux groupes et $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(G)$ un morphisme de groupes. On définit la loi de composition interne $\star$ sur $G \times H$ par

$$\forall (g,h),(g',h') \in G \times H, \quad (g,h) \star (g',h') = (g \cdot \varphi(h)(g'), hh').$$

Montrer que $(G \times H, \star)$ est un groupe.

Sujet 5

Cours

Attendre la question

Application cours 1

1. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

2. Soit m et n deux entiers non nuls. Donner une CNS pour que $\mathbb{U}_m$ soit un sous-groupe de $\mathbb{U}_n$.

Exercice 1

Soit E l'ensemble des fonctions $f :]0;+\infty[\to]0;+\infty[$ telles qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ vérifiant :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = x^\alpha.$$

Montrer que $(E, \circ)$ est un groupe.

Exercice 2

Soit A un anneau commutatif intègre. On suppose que A est fini. Montrer que A est un corps.

Sujet 6

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Soit $(G;\cdot)$ un groupe. Pour $a \in G$, on note $\tau_a : G \to G$ défi
ni par $\tau_a(x) = axa^{-1}$.
Montrer que $\Theta = \{\tau_a, a \in G\}$ muni de la loi de composition, est un sous-groupe de l'ensemble des endomorphismes de G.

Exercice 1

Soit G un groupe fini et $\varphi : G \to C^*$ un morphisme de groupes. Calculer $\sum_{x\in G} \varphi(x)$.

Exercice 2

Soit $K = \{0, 1, a, b\}$ un corps que l'on suppose posséder quatre éléments.
Dresser les tables d'addition et de multiplication de K.