Sujet 1

Cours

Eléments symétrisables

Application cours 1

On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs.
On suppose que $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 1

Montrer que :

$$H = \{x + y\sqrt{3} \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 3y^2 = 1\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Sujet 2

Cours

Suites récurrentes d'ordre 2

Application cours 1

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Donner une formule explicite de la suite u.

Exercice 1

Soit G et G' deux groupes et f un morphisme de groupes de G dans G'.

1. Montrer que si G est commutatif, $\operatorname{Im} f$ l'est aussi.
2. Soit B' un sous-groupe commutatif de G'. Montrer que si f est injectif, alors $f^{-1}(B')$ est commutatif.

Sujet 3

Cours

Sous-groupe

Application cours 1

Montrer que $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{|x|} \end{array}$ est un morphise de groupe.

Déterminer son noyau et son image.

Exercice 1

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} = \frac{1}{3}\left(x_{n+2} + x_{n+1} + x_n\right).$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = x_{n+1} - x_n$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire l'expression de xn en fonction de n.

Sujet 4

Cours

Sous-groupe

Application cours 1

Soient A un ensemble non vide, $(G, \star)$ un groupe et $\varphi : A \longrightarrow G$ une application bijective. On définit sur l'ensemble A l'opération $\triangle$ par :

$$\forall a, b \in A, \quad a \triangle b = \varphi^{-1}(\varphi(a) \star \varphi(b)).$$

Montrer que $(A, \triangle)$ est un groupe.

Exercice 1

On veut déterminer la suite $(un)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n + 9n^2 (\star)$$

1. Montrer qu'il existe a, b, c dans $\mathbb{R}$ tels que la suite $(an^2 + bn + c)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation $(\star)$.
2. En déduire l'expression de la suite $(un)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sujet 5

Cours

Morphisme de groupes

Application cours 1

Montrer que $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \theta & \longmapsto & \mathrm{e}^{i\theta} \end{array}$ est un morphise de groupe.

Déterminer son noyau et son image.

Exercice 1

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} = \frac{1}{3}\left(x_{n+2} + x_{n+1} + x_n\right).$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = x_{n+1} - x_n$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire l'expression de xn en fonction de n.

Sujet 6

Cours

Groupe produit

Application cours 1

Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & \dfrac{z}{|z|} \end{array}$ est un morphise de groupe.

Déterminer son noyau et son image.

Application cours 2

Montrer que la suite u définie pour tout entier $n \geqslant 2$ par u_n est l'inverse du nombre de diviseurs premiers de n est divergente.

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Donner une formule explicite de la suite u.

Exercice 1

Soit G et G' deux groupes et f un morphisme de groupes de G dans G'.

1. Montrer que si G est commutatif, $\operatorname{Im} f$ l'est aussi.
2. Soit B' un sous-groupe commutatif de G'. Montrer que si f est injectif, alors $f^{-1}(B')$ est commutatif.