

Sujet 1

Cours*Attendre la question***Application cours 1**Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$P(-1) = 1, \quad P(0) = -1, \quad P(1) = -1.$$

Application cours 2Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.**Exercice 1**Soit $n \geqslant 1$. Factoriser $P = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ sur $\mathbb{C}$.En déduire une formule de $\prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Sujet 2

Cours*Attendre la question***Application cours 1**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$.

Montrer que

$$P(\omega X) = P(X) \iff \exists Q \in \mathbb{C}[X], \quad P(X) = Q(X^n).$$

Application cours 2

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels

$$\forall n \in \mathbb{C}[X], P(n) = n.$$

Exercice 1

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Sujet 3

Cours*Attendre la question***Application cours 1**Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.Donner le reste de la division euclidienne de $(\sin(\theta)X + \cos(\theta))^n$ par $X^2 + 1$.**Application cours 2**Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad P(xy) = P(x)P(y).$$

Exercice 1Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} & = & 1 \\ xyz & = & -4 \end{array} \right.$$

Sujet 4

Cours*Attendre la question***Application cours 1**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$.

Montrer que

$$P(\omega X) = P(X) \iff \exists Q \in \mathbb{C}[X], \quad P(X) = Q(X^n).$$

Application cours 2

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels

$$\forall n \in \mathbb{C}[X], P(n) = n^2 + (-1)^n.$$

Exercice 1

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Sujet 5

Cours*Attendre la question***Application cours 1**Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$P(-1) = -1, \quad P(0) = 1, \quad P(1) = 1.$$

Application cours 2Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad P(xy) = P(x)P(y).$$

Exercice 1Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$. P s'écrit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.On pose $R = \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)$.

1. Montrer que toutes les racines complexes de P ont un module inférieur ou égal à R .
2. Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et z une racine de P différente de 1. Montrer que $|z| < 1$.

Sujet 6

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Donner le reste de la division euclidienne de $(\sin(\theta)X + \cos(\theta))^n$ par $X^2 + 1$.

Application cours 2

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels

$$\forall n \in \mathbb{C}[X], P(n) = n.$$

Exercice 1

Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} & = & 1 \\ xyz & = & -4 \end{array} \right.$$