Exercice 15.30

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

∘ Montrons par récurrence $HR(n)$

" $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall k \in [\![0, 2^n]\!], f\left(\frac{k}{2^n} y + \left(1-\frac{k}{2^n}\right)x\right) \leq \frac{k}{2^n} f(y) + \left(1-\frac{k}{2^n}\right) f(x)$ "

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\cancel{*}$ $n=1$, $k=0$, $f\left(\frac{0}{2} y + \left(1-\frac{0}{2^n}\right)x\right) = f(x) \leq \frac{0}{2^n} f(y) + \left(1-\frac{0}{2^n}\right) f(x)$

$k=2$: analogue

$k=1$, $f\left(\frac{1}{2} y + \left(1-\frac{1}{2}\right)x\right) = f\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x\right) \underset{\text{hypothèse sur } f}{\leq} \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2} y + \left(1-\frac{1}{2}\right)x\right) \leq \frac{1}{2} f(y) + \left(1-\frac{1}{2}\right) f(x)$$

$\cancel{*}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $HR(n)$

Soit $k \in [\![0, 2^{n+1}]\!]$

1er cas : k est pair. Il existe $m \in [\![0, 2^n]\!]$ tel que $k = 2m$

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}} y + \left(1-\frac{k}{2^{n+1}}\right)x\right) = f\left(\frac{m}{2^n} y + \left(1-\frac{m}{2^n}\right)x\right)$$

$$\leq \frac{m}{2^n} f(y) + \left(1-\frac{m}{2^n}\right) f(x) \quad HR(n)$$

$$\leq \frac{k}{2^{n+1}} f(y) + 1 - \frac{k}{2^{n+1}} f(x)$$

2ème cas : k est impair. Il existe $m \in [\![0, 2^n - 1]\!]$ tel que $k = 2m+1$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2^n} y + \left(1-\frac{m}{2^n}\right)x + \frac{m+1}{2^n} y + \left(1-\frac{m+1}{2^n}\right)x\right)$$

$$= \frac{k}{2^{n+1}} y + 1 - \frac{k}{2^{n+1}} x$$

Alors $f\left(\frac{k}{2^{n+1}} y + \left(1-\frac{k}{2^{n+1}}\right)x\right) \leq \frac{1}{2} f\left(\left(\frac{m}{2^n} y + \left(1-\frac{m}{2^n}\right)x\right)\right.$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{m+1}{2^n} y + \left(1-\frac{m+1}{2^n}\right)x\right)\right)$$

Par hypothèse de récurrence car $m, m+1 \in [\![0 ; 2^n]\!]$

$$f\left(\frac{m}{2^n} y + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right) x\right) \leq \frac{m}{2^n} f(y) + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right) f(x)$$

$$f\left(\frac{m+1}{2^n} y + \left(1 - \frac{m+1}{2^n}\right) x\right) \leq \frac{m+1}{2^n} f(y) + \left(1 - \frac{m+1}{2^n}\right) f(x)$$

Alors,

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}} y + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right) x\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2^n} f(y) + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right) f(x) + \frac{m+1}{2^n} f(y) + \left(1 - \frac{m+1}{2^n}\right) f(x)\right)$$

$$\leq \frac{k}{2^{n+1}} f(y) + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right) f(x)$$

Ce qui prouve $HR(n+1)$

* D'après le princip de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad HR(n)$$

• Soit $t \in [0;1]$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n t - 1 < \lfloor 2^n t \rfloor \leq 2^n t$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t - \frac{1}{2^n} < \frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n} \leq t$$

$$t - \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} t \quad , \quad t \xrightarrow[n \to +\infty]{} t$$

D'après le théorème d'encadrement

$$\frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} t$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq 2^n t \leq 2^n$

$0 \in \mathbb{Z}$ et $2^n \in \mathbb{Z}$ donc $0 \leq \lfloor 2^n t \rfloor \leq 2^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

D'après $HR(n)$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n} y + \left(1 - \frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}\right) x\right)$$

$$\leq \frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n} f(y) + \left(1 - \frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}\right) f(x)$$

$$\frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} t$$

Par opération (combinaisons linéaires) sur les limites, $\frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n} y + \left(1 - \frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}\right) x \xrightarrow[n \to +\infty]{} ty + (1-t)x$

et $\frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n} f(y) + \left(1 - \frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}\right) f(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} t f(y) + (1-t) f(x)$

Or f est continue, par caractérisation séquentielle de la continuité,

$$f\left(\frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n} y + \left(1 - \frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}\right) x\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(ty + (1-t)x)$$

Par préservation des inégalités larges par passage à la limite

$$f(ty + (1-t)x) \leq t f(y) + (1-t) f(x)$$

On a montré

$\forall t \in [0,1], \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(ty + (1-t)x) \leq t f(y) + (1-t) f(x)$

donc f est convexe.