

Sujet 1

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $X^2 + X + 1$ divise $(X^4 + 1)^n - X^n$.

Exercice 1

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq m$.

1. Calculer la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$.
2. En déduire que $(X^m - 1) \wedge (X^n - 1) = X^{m \wedge n} - 1$.

Exercice 2

Soit $n \geq 1$ et $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$.

1. Les racines de P_n sont-elles simples ?
2. Déterminer le nombre de racines réelles de P_n .

Sujet 2

Cours*Attendre la question***Application cours 1**

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \bar{z}$.

Application cours 2

Déterminer le PGCD et le PPCM de : $2X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 2X + 1$ et $3X^3 + 4X^2 + 4X + 1$.

Exercice 1

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$. P s'écrit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

On pose $R = \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)$.

1. Montrer que toutes les racines complexes de P ont un module inférieur ou égal à R .
2. Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et z une racine de P différente de -1 . Montrer que $|z| < 1$.

Sujet 3

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{2n} X^k$.

Montrer que $P(X)$ divise $P(X^2)$.

Application cours 2

Déterminer les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ unitaires de degré 3, divisibles par $X - 1$ et tels que les restes des divisions euclidiennes par $X - 2$, $X - 3$ et $X - 4$ sont égaux.

Exercice 1

Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} &= 1 \\ xyz &= -4 \end{cases}$$

Sujet 4

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Calculer le PGCD et le PPCM de : $2X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 2X + 1$ et $3X^3 + 4X^2 + 4X + 1$.

Application cours 2

Soit $x, y, z \in \mathbb{C}$ tels que $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Montrer que le triplet (x, y, z) est proportionnel à $(1, j, j^2)$ ou à $(1, j^2, j)$.

Exercice 1

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Im}(z)|^n \leq |P(z)|$.

Sujet 5

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Soit $P = X^{311} + X^{82} + X^{15}$ et $Q(X) = X^2 + X + 1$.

Montrer que $Q(X)$ divise $P(X)$.

En est-il de même pour $Q(X)^2$?

Application cours 2

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

Montrer que $A \wedge B = 1$ si et seulement si $(A + B) \wedge (AB) = 1$.

Exercice 1

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients entiers.

On suppose que $P(0)$ et $P(1)$ sont impairs. Montrer que P n'a pas de racine entière.

Sujet 6

Cours

Attendre la question

Application cours 1

Déterminer la factorisation en facteurs irréductibles de $X^4 - 4$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Application cours 2

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que si P et P' sont premiers entre eux, alors P est à racines simples.
2. Montrer que la réciproque est vraie si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mais fausse si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exercice 1

Soit P un polynôme de degré $n \geq 0$. $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout réel x , $P(x) \geq 0$.

On pose $Q = P + P' + P'' + \dots + P^{(n)}$.

Montrer que pour tout réel x , $Q(x) \geq 0$.