Séries numériques

★☆☆☆ **Exercice 22.1.** Déterminer la nature des séries et calculer la somme le cas échéant.

1. $\dfrac{1}{4n^2-1}$ **2.** $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{2n^2}\right)$ **3.** $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}$ **4.** $(n^2-3n+5)q^n$ **5.** $\dfrac{n^4-n+5}{n!}$ **6.** $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+n+n^2}\right)$ **7.** $\dfrac{1}{n^2+2n}$ **8.** $\dfrac{1}{2^n}\tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

pour les termes généraux suivants :

★☆☆☆ **Exercice 22.2.** Étudier la convergence des séries de termes généraux :

1. $\dfrac{n^n}{2^n}$ **2.** $\dfrac{1}{n^{\ln(n)}}$ **3.** $\sqrt{\mathrm{ch}\,\frac{1}{n}-1}$ **4.** $\dfrac{n!3^n}{n^n}$ **5.** $1-\cos\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$ **6.** $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ **7.** $\mathrm{e}^{1/n}-a-\frac{b}{n}$ **8.** $\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ **9.** $n\sin\frac{1}{n}$ **10.** $\dfrac{(-1)^n+n}{n^n-n}$ **11.** $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\right)$ **12.** $n\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ **13.** $\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)$ **14.** $\dfrac{1}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n}n}$ **15.** $q^{\sqrt{n}}$ **16.** $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ **17.** $\dfrac{\ln n}{\ln(e^n+n)}$ **18.** $\dfrac{n!}{n^n}$

19. $\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}$

★★☆☆ **Exercice 22.3.** **Énoncé :** Déterminer la nature des séries des termes généraux :

1. $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ **2.** $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ **3.** $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **4.** $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)^{\pi}$ **5.** $\ln(1+x^n)$ **6.** $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)-1$ **7.** $\dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$ **8.** $\dfrac{(-1)^n n+1}{n(n+1)}$ **9.** $\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ **10.** $\dfrac{(-1)^n+\ln n}{n\ln n}$ **11.** $\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+\ln n}$ **12.** $\sin\left(\sqrt{1+n^2\pi^2}\right)$ **13.** $(-1)^n\sqrt{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **14.** $\sin(n\pi+\dfrac{\pi}{n})$ **15.** $\sin(2\pi en!)$ **16.** $\sin(\pi en!)$

★★☆☆ **Exercice 22.4.** Déterminer tous les $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\sum a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}+c\sqrt{n+2}$ converge.

★★★☆ **Exercice 22.5.** **Énoncé :** Déterminer la nature des séries de termes généraux :

1. $\dfrac{1}{n^2}$ si n n'est pas un carré, $\dfrac{1}{n}$ sinon.

2. $\dfrac{1}{n}$ si l'écriture décimale de n n'a pas de 9, 0 sinon.

3. $x^{\ln(x)}$ pour $x\in\mathbb{R}_+$.

4. $\dfrac{2^n(\sin\alpha)^{2n}}{n^2}$

5. $\displaystyle\int_0^1 x^n\sin(\pi x)\mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\int_0^1 x^n\tan(x^n)\mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int_0^1 x^n(tanx)^n\mathrm{d}x$

8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)n}{(1+x^\alpha)^n}\mathrm{d}x$

9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x}\mathrm{d}x$

10. $\dfrac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n!)}$

11. $\mathrm{Arctan}(n)-\mathrm{Arctan}(\mathrm{n}+\mathrm{a})$

12. Pour $\alpha\in\mathbb{R}$ fixé, (x_n) définie par $x_0\in\mathbb{R}$ et $x_{n+1}=\dfrac{\mathrm{e}^{-x_n}}{n^\alpha}$

★☆☆☆ **Exercice 22.6.** Soit $p \geqslant 1$. Déterminer la nature et la somme de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p)}$.

★★☆☆ **Exercice 22.7.** Soit (u_n) positive. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ ont la même nature.

★★★☆ **Exercice 22.8.**
Soit (x_n) une suite définie par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$.

1. Étudier la convergence de (x_n).

2. On pose $u_n = 2^{-n} \ln x_n$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Étudier la série $\sum v_n$ puis la suite (u_n). En déduire un équivalent de (x_n).

★★★☆ **Exercice 22.9.** Soit (u_n) positive décroissante tendant vers 0 et U_n ses sommes partielles.

1. Que dire de la série de terme général (u_n) ? Quelles sont les possibilités ?

2. On suppose $(U_n - nu_n)$ bornée. Majorer U_n en fonction de U_{n+p}, u_{n+p} et u_p. Conclure.

3. Retrouver le résultat en utilisant la monotonie de $(U_n - nu_n)$.

★★★☆ **Exercice 22.10.** Montrer que $\cos(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ et en déduire que $\cos(1)$ est irrationnel.

★★★☆ **Exercice 22.11.** Soit $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^a}$. Discuter de la nature de $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

★★★☆ **Exercice 22.12.** Soit (u_n) strictement positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{x \to +\infty}{=} 1 - \frac{a}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. Donner une condition CNS pour que $\sum u_n$ converge.
Et si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{x \to +\infty}{=} 1 - \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n})$.

★★☆☆ **Exercice 22.13.** Déterminer un équivalent en 1^+ de la fonction $\zeta : s \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

★☆☆☆ **Exercice 22.14.** Soit (u_n) positive telle que $\sqrt[n]{u_n} \to l \in \overline{\mathbb{R}}$. Discuter de la nature de $\sum u_n$.

★★★☆ **Exercice 22.15.** Soit $f \in \mathcal{C}^0(]0,1], \mathbb{R}^+)$, croissante. Montrer que $\sum f(e^{-n})$ et $\sum \frac{1}{n} f(\frac{1}{n})$ ont même nature.