

Analyse asymptotique

Comparaison

☆☆☆ **Exercice 20.1.** Classer les suites suivantes de sorte que chacune soit négligeable devant la suivante :

▶ $n^2 + 1$	▶ $\frac{1}{n}$	▶ $n \ln(n)$	▶ $\frac{2}{\sqrt{n}}$	▶ $\frac{n!}{n^4}$
▶ $n^3 + n$	▶ $\frac{\ln n}{n}$	▶ $e^{-n}n^2$	▶ $e^n \sqrt{n}$	▶ $\frac{1}{n \ln n}$

☆☆☆ **Exercice 20.2.** Montrer que $\sum_{k=0}^n k! \sim n!$, puis que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{n} \sim \ln(n)$

☆☆☆ **Exercice 20.3.** Soit (u_n) une suite décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
2. En déduire un équivalent simple de (u_n) .

☆☆☆ **Exercice 20.4.** Soit (u_n) et (v_n) deux suites qui tendent vers $+\infty$ et telles que $u_n =_{n \rightarrow +\infty} o(v_n)$. Montrer qu'il existe une suite (w_n) telle que $u_n =_{n \rightarrow +\infty} o(w_n)$ et $w_n =_{n \rightarrow +\infty} o(v_n)$.

☆☆☆ **Exercice 20.5.** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 + x$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que si $f^{-1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{1/3}$.
3. Déterminer un équivalent simple de $f^{-1}(x) - x^{1/3}$ en $+\infty$.

☆☆☆ **Exercice 20.6.** Déterminer un équivalent simple de $u_n = \sqrt{n}^n + n^{\sqrt{n}} + n^{n/2}$.

☆☆☆ **Exercice 20.7.** Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{2^n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}}$	3. $u_n = \sqrt[n]{n}$	6. $u_n = n \sqrt{\ln \left(1 + \frac{2}{n^2+1}\right)}$
2. $u_n = \frac{2^n \sin n}{n^4 + \frac{e^n}{n}}$	4. $u_n = \frac{n! + \sqrt{n}}{3^n + 4^n}$	7. $u_n = \frac{\text{ch}(\text{sh}(n))}{\text{sh}(\text{ch}(2n))}$
	5. $u_n = \left(1 + \sin \left(\frac{\sqrt{n-1}}{n+1}\right)\right)^{n^2-n}$	

☆☆☆ **Exercice 20.8.** Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{n \sin n}{1 + n^2}$	3. $u_n = n^2 \left(\cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n+1}\right)$	5. $u_n = \frac{3n^2 + (-1)^n}{\sqrt{n^2 + 2} + \ln(n)}$
2. $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$	4. $u_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2}$	

☆☆☆ **Exercice 20.9.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution strictement positive que l'on notera u_n .
2. Montrer que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.
3. Prouver que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, puis que $u_n =_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

★★★★ **Exercice 20.10.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = X^3 - (n+2)X^2 + (2n+1)X - 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand, P_n possède trois racines a_n, b_n et c_n vérifiant :

$$0 < a_n < 1 < b_n < 3 < \frac{2n+1}{3} < c_n$$

2. Prouver alors successivement :

$$c_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty, \quad a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0, \quad c_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n, \quad b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2, \quad a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

★★★★ **Exercice 20.11.** Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Déterminer un équivalent de (u_n) .

On pourra commencer par prouver que si une suite converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors

$$\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$$

(théorème de Cesàro).

Développements limités

☆☆☆☆ **Exercice 20.12.** Calculer les développements limités suivants à l'ordre n en 0 :

1. $\cos(x) - \sin(x), n = 4$

3. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \ln(1+2x), n = 3$

2. $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}, n = 3$

4. $e^{-x} + \ln(1+x), n = 5$

☆☆☆☆ **Exercice 20.13.** Calculer les développements limités suivants à l'ordre n en 0 :

1. $\sin(x) \tan(x), n = 3$

3. $\sin(x) \sqrt{1+x} \ln(1-2x), n = 4$

5. $x^3 \sqrt{1+x}, n = 5$

2. $\frac{e^x}{1-x}, n = 3$

4. $\frac{\sinh(3x)}{\sqrt[3]{1-2x}}, n = 3$

6. $\frac{\ln(1+x)}{1+x}, n = 5$

★★☆☆ **Exercice 20.14.** Déterminer, avec le moins de calculs possibles, les développements limités suivants en 0 à l'ordre n indiqué :

1. $(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2})(\cos x - 1), n = 6$

2. $(1 - \cos(2x))(e^{-x} - 1)(x - \sin(x)), n = 7$

★★☆☆ **Exercice 20.15.** Calculer les développements limités suivants en 0 à l'ordre n indiqué :

1. $e^{\sin x}, n = 4$

3. $\arctan(e^x), n = 3$

5. $\sqrt{1 + \sqrt{1+x}}, n = 3$

2. $\sqrt{1 + \sin(x)}, n = 3$

4. $e^{\sqrt{1+x}}, n = 3$

☆☆☆☆ **Exercice 20.16.** Calculer les développements limités suivants en 0 à l'ordre n :

1. $\frac{1}{1+e^x}, n = 3$

3. $\tanh(x), n = 5$

5. $\frac{1 - e^{-x^2}}{x \arctan(x)}, n = 5$

2. $\frac{x}{e^x - 1}, n = 2$

4. $\frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}, n = 3$

★★☆☆ **Exercice 20.17.** Déterminer le développement limité à l'ordre 22 au voisinage de 0 de :

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{20} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\right)$$

★★☆☆ **Exercice 20.18.** Soit $f : x \mapsto \frac{-x^3 + 5x}{x^2 + 3}$.

Sans calculer f' , déterminer l'équation de la tangente Δ à \mathcal{C}_f en 0, et déterminer la position relative de \mathcal{C}_f et Δ .

★★☆☆ **Exercice 20.19.** Former un développement asymptotique en 0 de la fonction $x \mapsto (ex)^x$, à la précision $x^2 \ln^2(x)$.

★★☆☆ **Exercice 20.20.** Former un développement asymptotique en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \ln(x \tan(\frac{1}{x}))$, à la précision $\frac{1}{x^6}$.

★★☆☆ **Exercice 20.21.** Déterminer les asymptotes obliques au voisinage de $+\infty$ des fonctions f suivantes, et déterminer leur position par rapport à \mathcal{C}_f :

1. $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

2. $f(x) = \frac{x^2}{x+1} \operatorname{Arctan}(x)$

★★☆☆ **Exercice 20.22.** Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle contenant 0. Déterminer l'existence et la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x) - 2f(0)}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x) - f(0)}{x}}{x}$$

★★☆☆ **Exercice 20.23.** Déterminer le développement limité à l'ordre n en 0 de $x \rightarrow e^{-1/x^2}$ en prolongeant en 0 (s'il il existe).

★★☆☆ **Exercice 20.24.** Montrer que $f : x \mapsto xe^{x^2}$ est bijective sur \mathbb{R} et donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f^{-1} .

★★☆☆ **Exercice 20.25.** Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

★★☆☆ **Exercice 20.26.** Soit $f : x \mapsto \exp(\operatorname{Arctan} x)$.

Trouver une relation entre f et f' et déterminer un développement limité en 0 à l'ordre 6 de f .

★★☆☆ **Exercice 20.27.** Déterminer un développement asymptotique en $\pm\infty$ en $o\left(\frac{1}{x}\right)$ de $\sqrt{x^4 + x^3 + 1}$.

Montrer que $y^2 = x^4 + x^3 + 1$ admet un nombre fini de solutions entières.