Integration

★★★☆ **Exercice 21.1. (Continuité uniforme)**

c. Soit f continue et périodique. Montrer que f est uniformément continue.

d. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue qui converge en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

e. Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f est uniformément continue si et seulement si elle admet une limite finie en b.

f. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer : $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant \alpha|x| + \beta$. Réciproque ?

★☆☆☆ **Exercice 21.2.** Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.
Montrer : f est T-périodique si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,dt$ est constante.

★☆☆☆ **Exercice 21.3.** Déterminer toutes les fonctions continues $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_a^b f = (b-a)\sup|f|$.

★★☆☆ **Exercice 21.4.** Soit f continue qui converge vers 1 en $+\infty$. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ converge vers 1 en $+\infty$. La réciproque est-elle vraie ?

★★★☆ **Exercice 21.5.** Trouver toutes les fonctions continues $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ telles que

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

★★☆☆ **Exercice 21.6.** Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ continue.
On suppose que $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = 0$.
Montrer : $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)\,\mathrm{d}x = 0$. En déduire que f s'annule au moins deux fois.

★★☆☆ **Exercice 21.7.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\displaystyle\left(\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x\right)$ converge vers $f(0)$.

★★★☆ **Exercice 21.8.** Déterminer un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

★★★★ **Exercice 21.9.** Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$. Donner un développement asymptotique en $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ de $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$. On pourra commencer par le cas $f(1)=0$. Même question avec $f \in \mathscr{C}^1([0,1])$ en $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

★★★☆ **Exercice 21.10.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)e^{inx}\,\mathrm{d}x$ converge vers 0.
Montrer que le résultat subsiste si f est continue par morceaux.

☆☆☆☆ **Exercice 21.11. (Sommes de Riemann).** Calculer, sans utiliser de primitives :

a. $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$. b. $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$. c. $\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x$. d. $\int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x$.

★★☆☆ **Exercice 21.12.** Déterminer les limites éventuelles suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

c. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$

d. $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$

e. $\displaystyle\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$

★★★☆ **Exercice 21.13. (Formule de la moyenne et sommes de Riemann)**

a. Soit f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et g positive. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

b. Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,\pi])$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$.

★★★☆ **Exercice 21.14.** Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$. Montrer que $\displaystyle\left(\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$ converge vers $\max|f|$.

★☆☆☆ **Exercice 21.15.** Soient f et g continues sur $[a,b]$.

Montrer que $\displaystyle\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$.

On pourra considérer $\displaystyle\lambda \mapsto \int_a^b (\lambda f+g)^2$. Déterminer les cas d'égalité.

★☆☆☆ **Exercice 21.16.** Donner une valeur approchée à 10^{-4} de $\sqrt{101}$.

★★★★ **Exercice 21.17.** Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,1])$ telle que $f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=f'(1)=0$. Montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $|f''(a)| \geqslant 4$.

★☆☆☆ **Exercice 21.18.** Déterminer les sommes suivantes, après avoir justifié qu'elles existent :

a. $\displaystyle\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}+\dots$

b. $\displaystyle 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\dots$