# Dénombrement

## Cardinal

★☆☆☆ **Exercice 23.1.** Soit $x_0, \dots, x_n$ des réels de l'intervalle $[0, 1[$. Prouver qu'il en existe deux qui sont à distance strictement inférieure à $1/n$ l'un de l'autre.

★★☆☆ **Exercice 23.2.** Soit $x_1, \dots, x_n$ des entiers. Montrer qu'il existe deux entiers $p \leq q$ de $[\![1, n]\!]$ tels que $x_p + x_{p+1} + \cdots + x_q$ soit un multiple de $n$.

★★☆☆ **Exercice 23.3.** *Formule du crible*
Prouver par récurrence sur $n \geqslant 2$ la formule du crible : si $A_1, \dots, A_n$ sont $n$ parties finies d'un ensemble $E$, alors

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

$$= \sum_{\emptyset \neq I \subset [\![1,n]\!]} (-1)^{\text{Card}(I)-1} \text{Card}\left( \bigcap_{i \in I} A_i \right).$$

**Application :** on note $D_n$ l'ensemble des dérangements de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire les éléments de $\mathfrak{S}_n$ sans points fixes. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $A_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) = i\}$. En appliquant la formule du crible astucieusement, prouver que :

$$\text{Card}(D_n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

★★★☆ **Exercice 23.4.** Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$. On souhaite déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$. Notons $\mathscr{C} = \{(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid A \subset B\}$.
Pour $(A, B) \in \mathscr{C}$, on note $\chi_{A,B}$ la fonction définie sur $E$ par :

$$\chi_{A,B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B \\ 1 & \text{si } x \in B \setminus A \\ 2 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Montrer que $\chi : \mathscr{C} \to \{0, 1, 2\}^E$ est bijective, et conclure.

## Dénombrement

★☆☆☆ **Exercice 23.5.** Combien y a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot INFO ? De 8 lettres ? De 9 lettres ?

★☆☆☆ **Exercice 23.6.** Lors de son inscription à un site de commerce en ligne, un utilisateur se voit demander un mot de passe contenant 6 à 8 caractères, un tel mot de passe étant formé de lettres majuscules et de chiffres, et contenant au moins une lettre. Combien de mots de passe sont-ils possibles ?

★☆☆☆ **Exercice 23.7.** Combien de relations d'ordre total existe-t-il sur un ensemble à $n$ éléments ?

★☆☆☆ **Exercice 23.8.** Déterminer le nombre d'anagrammes des mots suivants : COVID, CONFINE, CORONAVIRUS, CONFINEMENT.

★☆☆☆ **Exercice 23.9.** Soit $p \leqslant n$ deux entiers naturels non nuls. Combien existe-t-il de parties de $[\![1, n]\!]$ qui contiennent :

**1.** un seul élément de $[\![1, p]\!]$ ?

**2.** au moins un élément de $[\![1, p]\!]$ ?

★★☆☆ **Exercice 23.10.** On considère les entiers de 4 chiffres (en base 10), sous la forme $abcd$. On dit qu'un entier $abcd$ a ses chiffres croissants si $a < b < c < d$. Quel est le nombre d'entiers de 4 chiffres dont les chiffres vont en croissant ?

★★☆☆ **Exercice 23.11.** Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$. Déterminer le nombre de couples $(A, B)$ de parties de $E$ telles que $A \cup B = E$.

★★☆☆ **Exercice 23.12.** Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 2]\!]$ ? De $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 3]\!]$ ? De $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ ?

★★☆☆ **Exercice 23.13.** Si la MPSI2 avait été pleine (48 élèves), combien y aurait-il eu de manières de partitionner l'ensemble des en 16 trinômes de colle (khôlle ?) en début d'année ?

★★★☆ **Exercice 23.14.**

**1.** Combien y a-t-il de fonctions strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ ?

**2. a.** Soit $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$ croissante. Montrer que la fonction $g : k \mapsto f(k) + k - 1$ est strictement croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n+p-1]\!]$.

**b.** Soit $g : [\![1, p]\!] \to [\![1, n+p-1]\!]$ strictement croissante. Montrer que $f : k \mapsto g(k) - k + 1$ est croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

**c.** En déduire le nombre de fonctions croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

★★☆☆ **Exercice 23.15.** *Formule de Vandermonde*
Soient $(m, r, n) \in \mathbb{N}^3$. À l'aide d'arguments combinatoires, prouver la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{n+m}{r}$$

★★☆☆ **Exercice 23.16.** Rappelons qu'un jeu de poker contient 52 cartes (13 de chaque couleur). Une main est formée de 5 cartes. Combien y a-t-il de mains contenant :

**1.** une quinte flush (cinq cartes consécutives de même couleur) ?

**2.** une couleur (5 cartes de même couleur, qui ne forment pas une quinte flush) ?

**3.** exactement trois trèfles ?

**4.** exactement un as et deux cœurs ?

★☆☆☆ **Exercice 23.17.** (Banque CCINP 113)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $E$ un ensemble de cardinal $n$.

**1.** Déterminer le nombre $a$ de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.

**2.** Déterminer le nombre $b$ de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.

**3.** Déterminer le nombre $c$ de triplets $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$ tels que $A, B$ et $C$ soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

★★☆☆ **Exercice 23.18.** Soient $n \geqslant p$ deux entiers naturels. Prouver par dénombrement que :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

★☆☆☆ **Exercice 23.19.** Dans un polygone convexe, on appelle diagonale tout segment qui relie deux sommets non consécutifs. Combien de côtés doit posséder un polygone qui possède autant de sommets que de diagonales ?

★★★☆ **Exercice 23.20.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre d'applications $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telles que $f \circ f = f$.

★★☆☆ **Exercice 23.21.**

1. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, déterminer le DL à l'ordre $n$ en 0 de $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)}$.
2. En exprimant le même DL d'une autre manière, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le cardinal de l'ensemble $\{(k, l) \in \mathbb{N}^2 \mid k + 2l = n\}$.

★★★★ **Exercice 23.22.** (Oral X)
Montrer qu'un ensemble $E$ est infini si et seulement si pour toute application $f : E \to E$, il existe $A \in \mathscr{P}(E), A \neq \emptyset$ et $A \neq E$ tel que $f(A) \subset A$.

★★★★ **Exercice 23.23.** (Oral ENS)
Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal $q$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le cardinal de $GL_n(\mathbb{K})$.

★★★☆ **Exercice 23.24.** (ENS PC 2017)
Une partie $A$ de $\mathbb{N}$ est dite fade s'il n'existe pas de triplet $(x, y, z) \in A^3$ tel que $x + y = z$. Déterminer le cardinal maximal d'une partie fade de $\{1, \ldots, n\}$.