

## Applications linéaires

☆☆☆☆ **Exercice 18.1.** Calculer le noyau et l'image de  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x - 4y + 2z \\ 2x + 5y - z \end{pmatrix}$$

☆☆☆☆ **Exercice 18.2.** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  :

1. Montrer que  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$  et  $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$ .
2. Montrer que  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\} \iff \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$ .
3. Montrer que  $E = \text{Ker } f + \text{Im } f \iff \text{Im } f^2 = \text{Im } f$ .

☆☆☆☆ **Exercice 18.3.**

1. Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Établir l'équivalence :

$$g \circ f = 0 \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g.$$

2. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 + f - 2\text{Id}_E = 0$ .

- a. Montrer que  $(f - \text{Id}_E) \circ (f + 2\text{Id}_E) = (f + 2\text{Id}_E) \circ (f - \text{Id}_E) = 0$ .
- b. En déduire  $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$  et  $\text{Im}(f + 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ .
- c. Montrer que  $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$ .

☆☆☆☆ **Exercice 18.4.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On suppose que

$$\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda_x x.$$

Montrer que

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x$$

☆☆☆☆ **Exercice 18.5.**

1. Montrer que  $\varphi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$  est un isomorphisme.  

$$P \mapsto (P(0), P')$$
2. En déduire que  $\mathbb{K}[X]$  n'est pas de dimension finie.

☆☆☆☆ **Exercice 18.6.** Soit  $E$  un espace vectoriel,  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que si  $F \subset f(F)$ , alors  $f(F) = F$ .
2. Montrer que si  $f$  est injective et  $f(F) \subset F$ , alors  $f(F) = F$ .

☆☆☆☆ **Exercice 18.7.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer les équivalences suivantes :

1.  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \iff \text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ .
2.  $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff E = \text{Ker } f + \text{Im } f$ .

☆☆☆☆ **Exercice 18.8.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, soit  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$  tel que

$$E = \text{Im } f + \text{Im } g = \text{Ker } f + \text{Ker } g.$$

Montrer que ces sommes sont directes.

- ☆☆☆☆ **Exercice 18.9.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies et  $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ .
1. Montrer que  $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$ .
  2. En déduire  $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v)$ .
- ★★☆☆ **Exercice 18.10.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $\text{rg}(f^n) = \text{rg}(f^{n+1})$ .
- ★★☆☆ **Exercice 18.11.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soit  $p, q \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
1.  $p$  et  $q$  sont deux projecteurs de même noyau.
  2.  $p \circ q = p$  et  $q \circ p = q$
- ☆☆☆☆ **Exercice 18.12.** On pose  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = z\}$  et  $G = \text{Vect}(1, 1, 0)$ .
1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .
  2. Déterminer une expression explicite de la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ .
- ☆☆☆☆ **Exercice 18.13.** Montrer que les applications suivantes sont des applications linéaires, déterminer leur image et leur noyau, ainsi qu'une base de ces espaces-vectoriels :
1.  $\mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ .
  2.  $\mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^3, (x, y) \mapsto (x - y, y - x, 0)$ .
  3.  $\mathbb{K}_3[X] \rightarrow \mathbb{K}_3[X], P \mapsto P - (X + 1)P'$ .
  4.  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M \mapsto M + M^\top$ .
  5.  $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}, P \mapsto P(a)$  où  $a \in \mathbb{K}$ .
  6.  $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}^2, P \mapsto (P(a), P'(a))$  où  $a \in \mathbb{K}$ .
- ☆☆☆☆ **Exercice 18.14.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soit  $A \subset E$ . Montrer que  $f(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(f(A))$ .
- ☆☆☆☆ **Exercice 18.15.**
1. Exprimer l'ensemble des suites géométriques de raison  $q$  comme le noyau d'un endomorphisme de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
  2. Faire de même avec les suites récurrentes linéaires d'ordre 2,  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  où  $a$  et  $b$  sont fixés.
  3. Déterminer une base de ses espaces vectoriels.
- ☆☆☆☆ **Exercice 18.16.** Soit  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ . Montrer que :
1.  $\text{Ker } u \subset \text{Ker } v \iff \exists w \in \mathcal{L}(E), v = w \circ u$
  2.  $\text{Im } u \subset \text{Im } v \iff \exists w \in \mathcal{L}(E), u = v \circ w$
- ☆☆☆☆ **Exercice 18.17.** Soient  $E_1, \dots, E_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $f(\sum_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n f(E_i)$  et que si la première somme est directe et  $f$  injective, alors la seconde somme est directe.
- ☆☆☆☆ **Exercice 18.18.** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $p, q$  deux projecteurs de  $E$ . Montrer que :
1. Pour  $p \neq 0, p \neq id$ , montrer que :  $p - \lambda id \in GL(E) \iff \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .
  2.  $p \circ q = p \iff \text{Ker } q \subset \text{Ker } p$  et  $q \circ p = p \iff \text{Im } p \subset \text{Im } q$ .
  3. Pour  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $p \circ f = f \circ p$  si, et seulement si,  $\text{Ker } p$  et  $\text{Im } p$  sont stables par  $f$ .
- ☆☆☆☆ **Exercice 18.19.** Soit  $p_1$  et  $p_2$  deux projecteurs tels que  $p_1 \circ p_2 = 0$ . Montrer que  $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$  est un projecteur et que  $\text{Im } q = \text{Im } p_1 + \text{Im } p_2$  et  $\text{Ker } q = \text{Ker } p_1 \cap \text{Ker } p_2$ .

☆☆☆☆ **Exercice 18.20.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $\varphi : g \mapsto f \circ g - g \circ f$ .

1. Montrer que  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ .
2. Montrer que si  $f$  est nilpotente alors  $\varphi$  aussi.

☆☆☆☆ **Exercice 18.21.** Soit  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$  l'un d'eux inversible.

Montrer :

$$\text{id}_E - f \circ g \in GL(E) \iff \text{id}_E - g \circ f \in GL(E).$$

☆☆☆☆ **Exercice 18.22.** Soit  $\varphi : f \mapsto f + f'$  où  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme et déterminer  $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id})$ .
2. Montrer que pour  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , on a pour tout  $x \in \mathbb{R} : f(x) = e^{-x} f(0) + e^{-x} \int_0^x e^t (f(t) + f'(t)) dt$ .
3. Montrer que  $\varphi$  est surjective. Soit  $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ . Résoudre le système :  $\varphi(f) = g$  et  $f(0) = 0$ .

☆☆☆☆ **Exercice 18.23.** Soit  $H$  l'hyperplan de  $K^4$  d'équation  $x + y - z - t = 0$ . Soit  $D = \text{vect}((1, 1, 1, 0))$ . Montrer que  $K^4 = H \oplus D$  et déterminer la symétrie par rapport à  $H$  parallèlement à  $D$ .