Matrices d'applications linéaires

★☆☆☆ **Exercice 19.1.** Soit h l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par rapport à deux bases $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathscr{C} = (f_1, f_2)$ par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ définie par : $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_3 + e_1$, $e'_3 = e_1 + e_2$. Quelle est la nouvelle matrice A_1 de h ?
2. On choisit pour base de $\mathbb{R}^2$ la nouvelle base $\mathscr{C}' = (f'_1, f'_2)$ définie par : $f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ et $f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$ en conservant la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la nouvelle matrice A_2 de h ?

★☆☆☆ **Exercice 19.2.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad AXB = 0$$

Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

★★☆☆ **Exercice 19.3.** Soit φ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même telle que $\varphi \neq 0$ et $\varphi^2 = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x) \neq 0$. Montrer que $\{x, \varphi(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de φ dans cette base.

☆☆☆☆ **Exercice 19.4.** Soit A une matrice carrée d'ordre 2, et soit φ l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même, envoyant M sur AM. Montrer que Φ est linéaire et déterminer sa matrice sur la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

★☆☆☆ **Exercice 19.5.**
Soit φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $P \mapsto (X^2 + 2)P'' + (X + 1)P' + P$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer Ker$(\varphi - 5Id)$. Calculer $\varphi(1)$ et $\varphi(X + 1)$.
4. En déduire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

★☆☆☆ **Exercice 19.6.**

1. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Donner une base de Ker f et Im f.
2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de f, ainsi qu'une base de son noyau et de son image. Donner une équation de l'image.

★★☆☆ **Exercice 19.7.** Soit $M = \begin{pmatrix} -35 & -7 & -22 \\ -6 & 0 & -4 \\ 57 & 11 & 36 \end{pmatrix}$.

1. En interprétant M comme étant la matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E, montrer qu'il existe une base (I, J, K) telle que cet endomorphisme a dans cette base pour matrice une matrice diagonale avec $1, 2, -2$ sur la diagonale.

2. Calculer alors M^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3. Exprimer en fonction de n les termes u_n, v_n, w_n de 3 suites vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -35u_n - 7v_n - 22w_n \\ v_{n+1} = -6u_n - 4w_n \\ w_{n+1} = 57u_n + 11v_n + 36w_n \end{cases}$$

avec $u_0 = v_0 = w_0 = 1$.

★☆☆☆ **Exercice 19.8.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Un endomorphisme f de E est représenté canoniquement par la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & c \\ 1 & -2 & d \\ a & b & f \end{pmatrix}$. Déterminer les réels a, b, c, d, f de façon que l'endomorphisme vérifie :

1. Ker f est engendré par le vecteur $u = e_1 + 2e_2 + 3e_3$;

2. Im f est engendré par les vecteurs $v = e_2 - 3e_3$ et $w = 3e_1 - 5e_3$.

★☆☆☆ **Exercice 19.9.** Calculer, s'il existe, l'inverse des matrices suivantes. Donner le rang des matrices non inversibles.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 13 & 2 & 1 & 9 \\ 7 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & \bar{z}^2 \\ z & 1 & \bar{z} \\ z^2 & \bar{z} & 1 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

★☆☆☆ **Exercice 19.10.** Montrer que $(X^3 + 2X + 1, X^3 - 2X^2 + 2, X^3 - 2X^2 + 1, X^3 + X)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ au moyen d'une technique matricielle.

★☆☆☆ **Exercice 19.11.** Soit $a, b \in \mathbb{R}$, et $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $rg(A) \geqslant 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $rg(A) = 2$?

★★☆☆ **Exercice 19.12.** Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $M^2 = 0$.

★☆☆☆ **Exercice 19.13.** Calculer les noyaux des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

★☆☆☆ **Exercice 19.14.** Discuter, selon le paramètre réel m, la dimension des ensembles de solutions des systèmes : 1) $(\mathcal{S}_1)$: $\begin{cases} x + my + z = 0 \\ mx + y + mz = 0 \end{cases}$ 2) $(\mathcal{S}_2)$: $\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases}$

☆☆☆☆ **Exercice 19.15.** Soit $M = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 14 \\ 1 & -1 & -1 \\ -8 & 5 & 11 \end{pmatrix}$.

Montrer que M est semblable à une matrice particulièrement simple, que l'on déterminera.

★★☆☆ **Exercice 19.16.** Résoudre l'équation $X^2 + X = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.