

Rudiments de logique

Quantificateurs

☆☆☆☆

Exercice 1.1. VRAI ou FAUX ?

1. $P \implies (Q \implies P)$.
2. $P \implies Q$ est équivalent à $\neg Q \implies \neg P$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, n \leq N$.
4. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \leq N$.
5. $\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}, y = e^x$.
6. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, y = e^x$.

☆☆☆☆

Exercice 1.2. Donner la négation des proposition suivantes.

1. $P \implies Q$.
2. $P \wedge \neg Q$.
3. $P \wedge (Q \wedge R)$
4. $P \vee (Q \wedge R)$.
5. $(P \wedge Q) \implies (R \implies S)$.

☆☆☆☆

Exercice 1.3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Interpréter et donner la négation des propositions suivantes :

1. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) \geq 1) \vee (f(x) \leq -1)$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \implies x \geq 0$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \leq f(x) \leq 2x + y$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, (\exists y \in \mathbb{R}, f(x) \geq y) \implies (x \leq 0)$.

☆☆☆☆

Exercice 1.4. Pour chacune des propositions, dire si elle est vraie ou fausse et donner sa négation

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.

☆☆☆☆

Exercice 1.5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Ecrire à l'aide de quantificateurs les affirmations suivantes :

1. f est croissante.
2. f est périodique.
3. f s'annule sur $\mathbb{R}$.
4. f est la fonction nulle.
5. f prend au moins une fois la valeur 1.

★★☆☆

Exercice 1.6.

1. Exprimer $\exists!x, \mathcal{P}(x)$ avec les quantificateurs simples (sans le symbole d'unicité $\exists!$).
2. Exprimer la négation de $\exists!$.
3. Exprimer à l'aide de quantificateurs la propriété : « il existe au moins k éléments distincts vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ »

4. Exprimer à l'aide de quantificateurs la propriété : « il existe au plus k éléments distincts vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ »
5. Exprimer à l'aide de quantificateurs la propriété : « il existe exactement k éléments distincts vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ »

★★☆☆

Exercice 1.7. Exprimer à l'aide de quantificateurs

1. « il existe seulement un nombre fini d'éléments vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ »
2. « il existe une infinité d'éléments vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ »

Types de raisonnements

★★☆☆

Exercice 1.8. Vous êtes enfermé devant deux portes, verrouillées ou non. Il y a deux gardiens. Vous savez que les deux gardiens ont une honnêteté équivalente. Le premier affirme que l'une des deux portes au moins est ouverte tandis que le second affirme que la porte de droite est verrouillée. Pouvez-vous sortir à coup sûr de la cellule, du premier coup ?

★★☆☆

Exercice 1.9. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions affines et $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$.

Montrer que toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\mathcal{A}$ et d'un élément de $\mathcal{B}$.

★★☆☆

Exercice 1.10.

1. Montrer que toute fonction continue $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme $f = g + c$ où g est continue, $\int_0^1 g(t) dt = 0$ et $c \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que toute fonction continue $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme $f = g + h$ où g est une fonction affine et pour toute fonction affine P , $\int_0^1 P(t)h(t) dt = 0$.

☆☆☆☆

Exercice 1.11. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que f est strictement croissante si et seulement si

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b \iff f(a) \leq f(b)).$$

☆☆☆☆

Exercice 1.12. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n$.

★★☆☆

Exercice 1.13. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Même question avec $f(m+n) = f(m)f(n)$.

★★☆☆

Exercice 1.14. Soit $(x_1, \dots, x_{n+1})$ des réels compris entre 0 et 1. Montrer qu'il existe deux indices $i \neq j$ tels que $|x_i - x_j| \leq \frac{1}{n}$.

★★☆☆

Exercice 1.15. Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ possédant les trois propriétés

1. $1 \in A$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in A \implies 2n \in A$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \in A \implies n \in A$.

Déterminer A .