

Calculs de sommes

L'objectif du devoir est de démontrer les trois formules suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Partie 1

On définit la fonction *tangente* sur l'intervalle $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ pour tout $x \in I$.

- 1) a) Justifier que la fonction $\tan$ est bien définie sur l'intervalle I .
- b) Montrer que la fonction $\tan$ est dérivable sur I et exprimer sa fonction dérivée en fonction de $\tan$.
- c) Montrer que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leq \tan x \leq 1$.

On définit la suite (u_n) par $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \, dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \tan^{2k} x \, dx$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

- 3) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}.$$

- 4) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- b) Simplifier $u_n + u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{4n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- c) En déduire la première limite cherchée.

Partie 2

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$.

- 5) a) Montrer, sans calculer l'intégrale, que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout entier $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k^p} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^p} \, dx.$$
- b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$.
- c) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note α sa limite.
- d) Exprimer a_{2n+1} en fonction de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{3\alpha}{4}$.

Partie 3

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $d_n = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$.

- 6) a) Montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$.
 b) Montrer que la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et exprimer sa limite en fonction de α .
 7) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, :

$$c_n^2 = d_n + \frac{1}{2} \sum_{\substack{-n \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i} \left(\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2j+1} \right) = d_n + \sum_{\substack{-n \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \frac{(-1)^{i+j}}{(j-i)(2i+1)}.$$

- 8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $s_{n,i} = \sum_{\substack{-n \leq j \leq n \\ i \neq j}} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i}$.

a) Montrer que $s_{n,-i} = -s_{n,i}$ pour tout $i \in \llbracket -n; n \rrbracket$, puis calculer $s_{n,0}$.

b) En déduire que $c_n^2 - d_n = \sum_{i=1}^n \frac{s_{n,i}}{2i+1} + \sum_{i=1}^n \frac{s_{n,i}}{2i-1}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p_0, \dots, p_n$ $n+1$ réels tels que $0 \leq p_n \leq p_{n-1} \leq \dots \leq p_0$.

Montrer que

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k p_k \right| \leq p_0.$$

d) Montrer en posant $k = j - i$ que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $s_{n,i} = \sum_{k=n-i+1}^{n+i} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

En déduire que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $|s_{n,i}| \leq \frac{1}{n-i+1}$.

e) En déduire que $|c_n^2 - d_n| \leq \frac{4}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- 9) Conclure quant aux deux dernières limites cherchées.