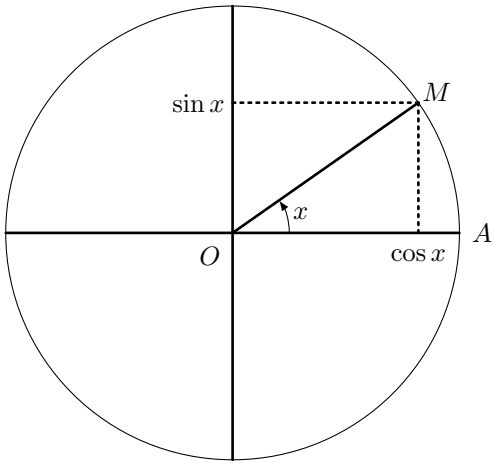
Trigonométrie

1 Cercle trigonométrique

Le plan est rapporté à un repère $(0; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
On note Γ le cercle de centre O et de rayon 1 et $A(1;0)$.

Une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}\right)$ est la « longueur » de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ à un nombre de « tours » près.



On définit alors $\cos x$ comme l'abscisse du point M et $\sin x$ comme l'ordonnée du point M.

Définition

Soit x et y deux nombres réels. x et y sont congrus modulo 2π si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $x = y + 2k\pi$.
On note $x \equiv y \pmod{2\pi}$.

Propriétés

Pour tout réel x,

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \qquad \sin(x+2\pi) = \sin(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(x+\pi) = -\cos(x) \qquad \sin(x+\pi) = -\sin(x)$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$
$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriété (formule d'addition)

Pour tous réels a et b ,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Preuve :

Soit A le point image de $-a$ et B le point image de b.
Une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$ est $a+b$.
On a $\overrightarrow{OA}(\cos a; -\sin a)$ et $\overrightarrow{OB}(\cos b; \sin b)$.
On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ de deux manières
D'une part, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA\cdot OB\cdot\cos\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = \cos(a+b)$.
D'autre part, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = xx' + yy' = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

Il en découle

Propriétés

Pour tous réels a et b ,

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

Corollaire

Pour tous réels a et b ,

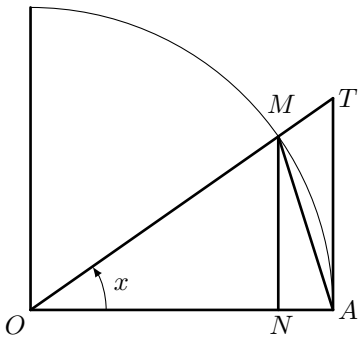
$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

Corollaire

Pour tous réels a et b ,

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

2 Fonctions trigonométriques



Pour $x \in \left[-\frac{\pi}{1}; \frac{\pi}{2}\right]$, MN est inférieur à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$, soit $|\sin(x)| \leqslant |x|$.
Il en découle que

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0.$$

Comme $\cos(x) = 1 - 2\sin^2(x/2)$, il vient

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1.$$

Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $x \neq 0$, en appliquant le théorème de Thalès dans le triangle OAT, on trouve

$$\frac{ON}{OA} = \frac{MN}{AT}$$

soit

$$\frac{|\cos(x)|}{1} = \frac{|\sin(x)|}{AT}$$

et donc $AT = \dfrac{|\sin(x)|}{|\cos(x)|}$
On en déduit les inégalités

$$|\sin(x) \leqslant |x| \leqslant \frac{|\sin(x)|}{|\cos(x)|}$$

et par suite

$$|\cos(x)| \leqslant \frac{|\sin(x)|}{|x|} \leqslant 1$$

.
On en déduit que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Proposition

La fonction $\sin$ est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$.

$$\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x}=\frac{\cos(x)-1}{x}=\frac{(\cos^2(x)-1)}{x(\cos(x)+1)}=-\frac{\sin(x)}{x}\times\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}$$ donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x}=0$$

Proposition

La fonction $\cos$ est dérivable en 0 et $\cos'(0)=0$.

Corollaire

La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$.
La fonction $\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$.

Preuve :

Soit a et h deux réels, $h \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} &= \frac{\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)-\sin(a)}{h}\\ &= \sin(a)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(a)\frac{\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

Il découle des deux proposition différentes que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \cos(a)$$

.
De l'égalité, $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ ont déduit que la fonction $\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos'(x) = \sin'\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x).$$

Soit $f : x \mapsto x - \sin(x)$ et $g : x \mapsto x + \sin(x)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 0$ et $g'(x) \geqslant 0$. Les deux fonctions sont croissantes et s'annule en 0. Il en découle qu'elles sont négatives sur $]-\infty;0]$ et positives sur $[0;+\infty[$.
D'où, pour tout $x \in]-\infty;0]$, $x \leqslant \sin(x) \leqslant -x$ soit $-|x| \leqslant \sin(x) \leqslant |x|$ et pour tout $x \in [0;+\infty[$, $-x \leqslant \sin(x) \leqslant x$ soit $-|x| \leqslant \sin(x) \leqslant |x|$
Il en découle

Proposition

Pour tout réel x,

$$|\sin(x)| \leqslant |x|.$$

3 La fonction tangente

On a l'équivalence

$$\cos(x) = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Définition

La fonction tangente est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

.

La fonction tangente est impaire et π-périodique. Elle est dérivable sur son ensemble de définition et

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$,

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

La restriction de $\tan$ à toute intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ est strictement croissante.
On a

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0 $\nearrow$ $+\infty$	$\|\|$

Propriétés

Pour tout réel x non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π,

$$\tan(\pi + x) = \tan(x) \qquad \tan(\pi - x) = -\tan(x)$$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Proposition

Soit a et b deux réels. Lorsque les tangentes sont bien définies :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

et

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}.$$

Proposition

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

et

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Preuve :

$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2t\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\cos(x) = 1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1-2t^2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1-\frac{2t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$