

Sommes et calculs

Sommes

☆☆☆☆

Exercice 2.1. Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Quelles sont les expressions toujours égales entre elles ?

$$1. \sum_{k=1}^n a_k b_k, \sum_{k=1}^n a_{n+1-k} b_{n+1-k}, \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 - \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)^2 \right)$$

$$2. \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right), \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{p=1}^n b_p \right), \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n a_k b_p, \sum_{k=1}^n \left(a_k \sum_{p=1}^n b_p \right), \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

☆☆☆☆

Exercice 2.2. Montrer que pour toute famille $(z_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n z_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n z_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i z_j.$$

Quel résultat bien connu cette formule généralise-t-elle ?

★☆☆☆

Exercice 2.3.

1. Trouver un polynôme P de degré 3 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) - P(x) = x^2$.

2. En déduire $\sum_{k=0}^n k^2$.

3. Calculer $\sum_{k=0}^n k^3$, $\sum_{k=0}^n k^4$.

☆☆☆☆

Exercice 2.4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

★☆☆☆

Exercice 2.5. Calculer

$$1. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$$

$$3. \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$$

$$2. \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{2}{k(k+1)} \right)$$

$$4. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

★☆☆☆

Exercice 2.6. Calculer $\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$.

★☆☆☆

Exercice 2.7. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$.

★☆☆☆

Exercice 2.8. Donner une expression simplifiée des quantités suivantes.

1. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i \cdot j$

2. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i + j$

3. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i - j$

4. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$

Mêmes questions en remplaçant $1 \leq i, j \leq n$ par $1 \leq i \leq j \leq n$, puis par $1 \leq i < j \leq n$.

★☆☆☆

Exercice 2.9. Écrire avec des factorielles les quantités suivantes.

1. $\prod_{k=n}^m k$ pour $0 < n < m$.

3. $\prod_{k=1}^p \frac{n-p+k}{k}$ pour $1 \leq p \leq n-1$.

2. $\prod_{k=1}^p n-p+k$ pour $p \leq n$.

4. $\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k}$.

★☆☆☆

Exercice 2.10. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la fonction $f : x \rightarrow (1+x)^n$, calculer les quantités suivantes.

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

2. $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.

3. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Systemes

☆☆☆☆

Exercice 2.11. Déterminer l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants :

1.
$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x - 2y + z = 3 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x - 2y + z = 3 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

★☆☆☆

Exercice 2.12. Soit a un nombre réel. On étudie le système linéaire suivant.

$$(S) \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x - y + az = 1 \end{cases}$$

1. En fonction des valeurs du paramètre a , déterminer si le système S_a peut :

- (a) n'admettre aucune solution ;
- (b) admettre exactement une solution ;
- (c) admettre une infinité de solutions.

2. Résoudre le système (S) lorsque celui-ci admet une (des) solution(s).

★☆☆☆

Exercice 2.13. Discuter et résoudre suivant les valeurs de λ , a , b et c le système :

$$(S) \begin{cases} (1+\lambda)x + y + z = a \\ x + (1+\lambda)y + z = b \\ x + y + (1+\lambda)z = c \end{cases}$$

Trigonométrie

☆☆☆☆

Exercice 2.14. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\sin x = \frac{1}{2}$

3. $\cos x = -1$

5. $\cos(4x) = -\frac{1}{2}$

2. $\tan x = \sqrt{3}$

4. $\sin(3x) = 1$

6. $\sin(x) \cos(x) = 1$

★☆☆☆

Exercice 2.15. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\tan(2x) = 1$

4. $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

2. $\sin x + \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}$

5. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

3. $\cos(5x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$

6. $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$

★☆☆☆

Exercice 2.16. Résoudre sur \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $\tan x \geq 1$

3. $2 \sin^2 x \leq 1$

2. $\cos\left(\frac{x}{3}\right) \leq \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

4. $\cos^2 x \geq \cos(2x)$

★★☆☆

Exercice 2.17. Pour quelles valeurs de m l'équation $\sqrt{3} \cos x - \sin x = m$ admet-elle des solutions ? Les déterminer lorsque $m = \sqrt{2}$.

★☆☆☆

Exercice 2.18. Soit x un réel. Simplifier les écritures :

1. $A = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}$

2. $B = \sqrt{\frac{1 - \sin(x)}{1 + \sin(x)}}$

★★☆☆

Exercice 2.19. Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation

$$7 \cos^2(x) - 6 \sin(x) \cos(x) - \sin^2(x) = 0.$$