DS 1 - Exercices et problèmes

Durée : 2h
Calculatrice interdite.
Copie double uniquement. Encadrer les résultats.
Ne passez pas trop de temps bloqué sur une question.

Exercice 1

Les questions numériques sont indépendantes.

1) Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses (en justifiant) et donner leurs négations.

a) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*, x \leqslant y$.

b) $\exists x \in [-1;1],\ \forall y \in [-1;1], (x \leqslant y \implies x = y)$.

2) Soit n un entier naturel. Montrer que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 4, alors n est pair.

3) Déterminer toutes les fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ f(n+m) = f(n) + f(m).$$

Exercice 2

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=n}^{2n} (-2)^k$. Calculer explicitement S_n en fonction de n et des puissances de -1 et 2.

2) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_n = \sum_{n < i \leqslant j \leqslant 2n} \frac{i}{n+j+1}.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire en utilisant la notation factorielle,

$$P_n = \prod_{k=1}^{2n} \frac{4k+2}{3k}.$$

Problème

On pourra utiliser le résultat suivant : si P est un polynôme et a est une racine de P, alors $X - a$ divise P autrement dit il existe un polynôme Q tel que $P = (X-a)Q$.

1) On pose $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(2\sin(x) + \tan(x)\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$

On pose aussi, pour tout $x \in I$,

$$u(x) = f(x) - x \quad \text{et} \quad v(x) = g(x) - x.$$

a) Factoriser le polynôme $P = 2X^3 - 3X^2 + 1$ en produit de polynômes à coefficients réels.

b) Justifier que u est dérivable sur I et que, pour tout $x \in I$,

$$u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}.$$

c) En déduire les variations de u sur I.

d) Justifier que v est dérivable sur I et déterminer un polynôme à coefficients réels Q tel que, pour tout $x \in I$,

$$v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2+\cos(x))^2}.$$

e) En déduire les variations de v sur I.

f) Montrer que, pour tout $x \in I$,

$$g(x) < x < f(x).$$

2) On pose, pour tout entier naturel n,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) \qquad \text{et} \qquad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right).$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}}.$$

b) En déduire que

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

c) Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$9\times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

d) Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π quand n tend vers $+\infty$.

Bonus

Cette question sera corrigée uniquement si tout le reste du devoir est bien traité.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) + f(x+y) = xy.$$

DS 1 - Éléments de correction

Exercice 1

1) **a)** Prenons $x = -2$. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. On a $-2 \leqslant y$.
La proposition est vraie et sa négation est

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}_+^*, x > y.}$$

b) Prenons $x = 1$. Soit $y \in [-1;1]$
Supposons que $x \leqslant y$ *i.e.* $1 \leqslant y$. Comme $y \leqslant 1$, il en découle que $y = 1 = x$.
La proposition est vraie et sa négation est

$$\boxed{\forall x \in [-1;1],\ \exists y \in [-1;1],\ x \leqslant y \wedge x \neq y.}$$

2) Soit n un entier naturel. Supposons que n est impair. Il existe un entier naturel k tel que $n = 2k+1$. Alors $n^2 - 1 = 4(k+1)$. Or $k+1 \in \mathbb{N}$, il en découle que n^2-1 est divisible par 4.
On en déduit, par contraposition, le résultat cherché.

3) Voir exercice 1.13

Exercice 2

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-2 \neq 1$.

$$S_n = \frac{(-2)^n - (-2)^{2n+1}}{1-(-2)}$$

d'où

$$\boxed{S_n = 2^n \times \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}.}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{j=n+1}^{2n} \sum_{i=n+1}^{j} \frac{i}{n+j+1} \\
&= \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{n+j+1} \sum_{i=n+1}^{j} i \\
&= \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{n+j+1} \frac{(j-n)(n+j+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^{2n} (j-n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \qquad [k = j-n]
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{T_n = \frac{n(n+1)}{4}}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \frac{\prod_{k=1}^{2n} 2k+1}{\prod_{k=1}^{2n} k}.$$

Or
$$\prod_{k=1}^{2n} 2k+1 = \frac{\prod_{k=1}^{2n} 2k}{\prod_{k=1}^{2n} 2k} \times \prod_{k=1}^{2n} 2k+1 = \frac{(4n+1)!}{2^{2n}(2n)!}$$
.

On en déduit que
$$\boxed{P_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n \frac{(4n+1)!}{((2n)!)^2}.}$$

Problème

1) **a)** $2 \times 1^3 - 3 \times 1^2 + 1 = 0$ donc 1 est racine de P. Par suite, P est divisible par $X-1$. On obtient
$$\boxed{P = (X-1)(2X^2 - X - 1) = (X-1)(X-1)(2X+1).}$$

b) u est dérivable sur I comme combinaison linéaire de fonction dérivable sur I.
$$\forall x \in I,\ u'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{3}(2\cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)}) - 1 = \boxed{\frac{P(\cos(x))}{\cos^2(x)}}$$
.

c) Pour tout $x \in I$, $\cos(x) >$ et par suite $2\cos(x) + 1 > 0$. De plus, pour tout $x \in I$,
$$u'(x) = \frac{(\cos(x) - 1)^2(2\cos(x) + 1)}{\cos^2(x)}$$
On en déduit que pour tout $x \in I$, $u'(x) > 0$ et par suite $\boxed{u \text{ est strictement croissante sur } I.}$

d) Pour tout $x \in I$, $2 + \cos(x) \neq 0$ donc g est définie sur I. Elle est dérivable sur I comme quotient de deux fonctions dérivables sur I.
Il en découle que v est dérivable sur I comme somme de fonction dérivable sur I.
Pour tout $x \in I$,
$$g'(x) = \frac{3\cos(x)(2+\cos(x)) - 3\sin(x)(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^2} = \frac{6\cos(x) + 3\cos^2(x) + 3\sin^2(x)}{(2+\cos(x))^2} = \frac{6\cos^2(x) + 3}{(2+\cos(x))^2}$$
On en déduit que pour tout $x \in I$,
$$v'(x) = g'(x) - 1 = \frac{-\cos^2(x) + 2\cos(x) - 1}{(2+\cos(x))^2}$$
En posant $Q = -X^2 + 2X - 1 = -(X-1)^2$, on obtient
$$\boxed{\forall x \in I,\ v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2+\cos(x))^2}.}$$

e) De la question précédente, on déduit que pour tout $x \in I$, $v'(x) < 0$ et donc que la fonction $\boxed{v \text{ est strictement décroissante sur } I.}$

f) On a $u(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Comme u est strictement croissante sur I, il en découle que u est strictement positive sur I. Ainsi,
$$\forall x \in I, f(x) > x$$

$v(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Comme v est strictement décroissante sur I, il en découle que v est strictement négative sur I. Ainsi,
$$\forall x \in I, g(x) < x$$
Par suite,
$$\boxed{\forall x \in I, g(x) < x < f(x).}$$

2) On commence par remarquer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{\pi}{3\times 2^n} \in \left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$ et donc pour tout entier naturel n, $a_n \geqslant 0$ et $b_n \geqslant 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1-b_n}{2} = \frac{1-\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)}{2} = \frac{2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)}{2} = a_{n+1}^2$$

Comme $a_{n+1} \geqslant 0$, il vient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}}.}$$

$$\frac{1+b_n}{2} = \frac{1+\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)}{2} = \frac{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)}{2} = b_{n+1}^2$$

Comme $b_{n+1} \geqslant 0$, il vient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}}.}$$

3) On a $b_1 = cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Par suite,

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = b_2 = \sqrt{\frac{1+b_1}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{16}}$$

Or $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2 = 8+4\sqrt{3}$.
Comme $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} > 0$, on en déduit

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

.

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = a_2 = \sqrt{\frac{1-b_1}{2}} = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{16}}$$

En conclusion,

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\dfrac{\pi}{3\times 2^n} \in I$, on peut appliquer les inégalités de la question 1)f) à $\dfrac{\pi}{3\times 2^n}$. On obtient

$$g\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) < \frac{\pi}{3\times 2^n} < f\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)$$

Ainsi,

$$\frac{3a_n}{2+b_n} < \frac{\pi}{3\times 2^n} < \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right)$$

En multipliant ces inégalités par $3\times 2^n > 0$, il vient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 9\times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).}$$

5) Soit n un entier naturel.

$$\frac{3\times 2^n}{\pi}a_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)}{\frac{\pi}{3\times 2^n}}$$

$\frac{\pi}{3\times 2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc $\frac{3\times 2^n}{\pi}a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et par suite $2^n a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{3}$.
De plus, $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Par les opérations sur les limites, $9\times 2^n\frac{a_n}{2+b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 9\times\frac{\pi}{3}\times\frac{1}{3}$ et donc

$$\boxed{9\times 2^n\frac{a_n}{2+b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi}$$

et $2^n\left(2a_n+\frac{a_n}{b_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$ et donc

$$\boxed{2^n\left(2a_n+\frac{a_n}{b_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi.}$$

Bonus

Raisonnons par analyse-synthèse :

Analyse Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x)f(y)+f(x+y)=xy.$$

On a $f(0)^2+f(0)=0$ donc $f(0)=0$ ou $f(0)=-1$.
Cas $f(0)=0$: pour tout réel x, $f(x)f(0)+f(x+0)=0$ soit $0+f(x)=0$.
La fonction f est la fonction nulle.
Cas $f(0)=-1$: de l'équation fonctionnelle on déduit

$$f(1)f(-1)+f(0)=1\times(-1)=-1$$

donc $f(1)f(-1)=0$.
Sous-cas $f(1)=0$: de l'équation fonctionnelle, on déduit que pour tout réel x,

$$f(x-1)f(1)+f(x-1+1)=(x-1)\times 1$$

soit $f(x)=x-1$
Sous-cas $f(-1)=0$: de l'équation fonctionnelle, on déduit que pour tout réel x,

$$f(x+1)f(-1)+f(x+1-1)=(x+1)\times(-1)$$

soit $f(x)=-x-1$.

Synthèse
Soit f la fonction nulle, alors $f(1)f(1)+f(1+1)=0\neq 1\times 1$. La fonction nulle ne vérifie pas l'équation fonctionnelle.
Soit $g:x\mapsto x-1$.

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, g(x)g(y)+g(x+y)=(x-1)(y-1)+(x+y-1)=xy$$

g vérifie bien l'équation fonctionnelle.
Soit $h:x\mapsto -x-1$.

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, h(x)h(y)+h(x+y)=(-x-1)(-y-1)+(-x-y-1)=xy$$

h vérifie bien l'équation fonctionnelle.
Conclusion : les fonctions de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui vérifient l'équation fonctionnelle sont

$$\boxed{g:x\mapsto x-1 \qquad \text{et} \qquad h:x\mapsto -x-1}$$