Devoir en temps libre 2

Pour le 23 septembre
Utiliser des copies doubles. Encadrer les résultats.

Exercice 1 - Différence symétrique

Soit E un ensemble. Soit A et B deux sous-ensembles de E. On rappelle que la différence symétrique de A et B est l'ensemble noté $A\Delta B$ et défini par $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1) Montrer qu'on a également $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

2) Montrer que la différence symétrique est une opération associative.

3) Montrer que l'intersection est distributive par rapport à la différence symétrique : si A, B et C sont trois sous-ensembles de E, alors

$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C).$$

4) Montrer que l'union n'est pas distributive par rapport à la différence symétrique.

5) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, il existe un unique ensemble $B \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A\Delta B = \emptyset$.

6) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, il existe un unique ensemble $B \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A\Delta B = E$.

7) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ B & \longmapsto & A\Delta B \end{array}$.

Pour tout sous-ensemble B de E, déterminer $\varphi(\varphi(B))$.
Que peut-on en déduire pour φ ?

Exercice 2

On cherche l'ensemble des applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(f(n)) < f(n+1).$$

1) Soit f une telle application. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel p, $[\![p, +\infty[\![$ est stable par f , c'est-àdire $f\left([\![p, +\infty[\![\right) \subset [\![p, +\infty[\![$.

2) Montrer par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) < f(n+1)$. En déduire que f est strictement croissante.

3) En déduire que $\forall n \in N, f(n) < n+1$.

4) Trouver toutes les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, f(f(n)) < f(n+1)$.