Ensembles et applications

Ensembles

☆☆☆☆ **Exercice 3.1.** Montrer que :

1. $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$.
2. $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$.
3. $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$.
4. $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$.

☆☆☆☆ **Exercice 3.2.** Montrer que $X \subset Y$ si, et seulement s'il existe Z tel que $X \cap Z \subset Y \cap Z$ et $X \cup Z \subset Y \cup Z$.

★☆☆☆ **Exercice 3.3.** Soit A, B, C et D quatre exemples. Montrer que si $A \subset C$, $B \subset D$, $C \cap D = \emptyset$ et $A \cup B = C \cup D$, alors $A = C$ et $B = D$.

☆☆☆☆ **Exercice 3.4.** Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(\{1,2\}\right)\right)$.

☆☆☆☆ **Exercice 3.5.** Soit $E = \{x, y, z\}$ un ensemble. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $x \in E$
2. $\{x\} \in E$
3. $\{x\} \subset E$)
4. $\emptyset \in E$
5. $\emptyset \subset E$
6. $\{\emptyset\} \subset E$
7. $\{x, y\} \subset E$
8. $\{y, z\} \subset E \backslash \{x\}$

☆☆☆☆ **Exercice 3.6.** Montrer que si F et G sont des sous-ensembles de E :

$$(F \subset G \iff F \cup G = G), \quad (F \subset G \iff F \cap G = F) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff \neg F \cup G = E).$$

En déduire que :

$$(F \subset G \iff F \cap \neg G = \emptyset).$$

☆☆☆☆ **Exercice 3.7.** Soit E un ensemble, A,B,C trois parties de E. Montrer les propriétés suivantes.

1. $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.
2. $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$.
3. $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

★★☆☆ **Exercice 3.8.** Soient E un ensemble et A, B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$. Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ les équations suivantes.

$$1) X \cup A = B \qquad 2) X \cap A = B \qquad 3) X \setminus A = B$$

★☆☆☆ **Exercice 3.9.** Soit X et Y deux ensembles. Montrer que $X \subset Y$ si, et seulement si, $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y)$.

★★☆☆ **Exercice 3.10.** Soit E un ensemble non vide, A et B deux parties de E, et $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ l'application définie par $f(X) = (A \cap X) \cup (B \cap \overline{X}$, où $\overline{X}$ désigne le complémentaire de X dans E.
Résoudre et discuter l'équation $f(X) = \emptyset$..

Applications

☆☆☆☆ **Exercice 3.11.** Soit $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$ et $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0\,; \\ x-1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases} \end{array}$

1. Préciser l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité éventuelle de f et g.
2. Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.

☆☆☆☆ **Exercice 3.12.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application strictement croissante. Montrer que f est injective.
Est-elle nécessairement surjective ?

★☆☆☆ **Exercice 3.13.** Soit $f : E \to F$ une application, $(x, y) \in E^2$, $z \in F$ et $A \in \mathcal{P}(E)$. Dire si les affirmations suivantes sont justes ou fausses. Dans ce dernier cas, proposer une hypothèse sur f pour la rendre vraie.

a. $x \notin A \implies f(x) \notin f(A)$.
b. $f(x) \notin f(A) \implies x \notin A$.
c. $z \notin f(A) \implies z \in f(A^c)$.
d. $f(x) = f(y) \implies x = y$.
e. $f(x) \neq f(y) \implies x \neq y$.
f. $x = y \implies f(x) = f(y)$.

☆☆☆☆ **Exercice 3.14.** Soit E un ensemble.

1. Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_{(A\cap B)} & = & \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \\ \mathbb{1}_{(A^c)} & = & 1 - \mathbb{1}_A \\ \mathbb{1}_{(A\cup B)} & = & \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \end{array}$$

2. Montrer que l'application $\mathbb{1} : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \{0;1\}^E \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$ est bijective.

★☆☆☆ **Exercice 3.15.** Soit E, F, G trois ensembles, $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$. Établir les résultats suivants.

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
4. Si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

★★★☆ **Exercice 3.16.** Soient E, E', F, F' quatre ensembles, $u : E' \mapsto E$, $v : F \mapsto F'$ deux applications. On définit l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} F^E & \to & F'^{E'} \\ f & \mapsto & v \circ f \circ u \end{array}$.

1. Vérifier que φ est bien définie.
2. Montrer que si v est injective et u surjective alors φ est injective.
3. Montrer que si v est surjective et u injective alors φ est surjective.

★★☆☆ **Exercice 3.17.** Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que, pour toute partie A de E, $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si, pour toute partie A de E, $f^{-1}(f(A)) = A$.

3. Montrer que, pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si, pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$.

★★☆☆ **Exercice 3.18.** Soit E, F deux ensembles, soit $f : E \to F$.
Montrer que f est injective si et seulement si :

$$\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), f(A \cap A') = f(A) \cap f(A').$$

★★★☆ **Exercice 3.19.** Soit $f \in F^E$

1. Montrer que pour tout $x \in E, x \in f^{-1}(f(x))$. Donner un exemple pour lequel $f^{-1}(f(x))$ contient au moins deux éléments.
2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$. Exemple d'inclusion stricte ?
3. Soit $S = \{X \in \mathcal{P}(E) | f^{-1}(f(X)) = X\{$. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $A' = f^{-1}(f(A))$. Montrer que $A' \in S$.
   Montrer que A' est le plus petit ensemble de S contenant A.
4. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est injective ;
   (b) $\forall x \in E, x \in S$;
   (c) $S = \mathcal{P}(E)$;
   (d) le seul élément X de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant $f^{-1}(f(A)) = E$ est E lui-même.

★★★★ **Exercice 3.20.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, (|y - x| < \eta \implies |f(y) - f(x) < \epsilon.$$

On dit qu'un sous-ensemble U de $\mathbb{R}$ est ouvert si et seulement si :

$$\forall x \in U, \exists \delta > 0,]x - \delta; x + \delta[\subset U.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Relations binaires

☆☆☆☆ **Exercice 3.21.** Étudier la relation définie sur $\mathbb{N}$ par : $x\mathcal{R}y \iff \exists n \in N^*, y = x^n$.

☆☆☆☆ **Exercice 3.22.** Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$X\mathcal{R}Y \text{ si } (X = Y \text{ ou } \forall x \in X \forall y \in Y x \leqslant y).$$

Vérifier que c'est une relation d'ordre.

★☆☆☆ **Exercice 3.23.** Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall (x, y) \in R^2, xRy \iff xe^y = ye^x.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer, pour $x \in R$, le cardinal de la classe d'équivalence de x.

3. Déterminer les classes d'équivalences incluses dans $\mathbb{N}$.

★★★☆ **Exercice 3.24.** Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire réflexive et transitive sur un ensemble E. On définit la relation $\mathcal{S}$ sur E par : $x\mathcal{S}y$ si $(x\mathcal{R}y \text{ et} y\mathcal{R}x)$.
Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence et que $\mathcal{R}$ permet de définir une relation d'ordre sur les classes d'équivalences de $\mathcal{S}$.

★★☆☆ **Exercice 3.25.** Soit $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ croissante pour l'inclusion. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{P}(E), X = f(X)$.

★★☆☆ **Exercice 3.26.** (Construction de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$)

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par :
$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff a+d=b+c.$$
est une relation d'équivalence.
2. Expliquer en quoi l'ensemble quotient (l'ensemble des classes d'équivalence) pour cette relation permet de définir $\mathbb{Z}$.
3. Montrer que la loi d'addition sur $\mathbb{N}^2$ est compatible avec la relation $\mathcal{R}$ et qu'elle coïncide, par passage au quotient, avec l'addition de $\mathbb{Z}$.