Nombres complexes

Manipulations élémentaires

☆☆☆☆ **Exercice 4.1.** Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1. $\dfrac{1+2i}{3-4i}$
2. $\dfrac{1}{(1+2i)^2}$
3. $\dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$
4. $\dfrac{1+i}{3-i}+\dfrac{1-i}{3+i}$
5. $\dfrac{1}{1+\frac{2}{i}}$
6. $(1+(1+(1+2i)2)^{-1})$

☆☆☆☆ **Exercice 4.2.** Déterminer les racines carrées complexes de $3-4i$, $8+6i$, $1-i$ et $24-7i$.

☆☆☆☆ **Exercice 4.3.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^4=2$.
2. $z^2+z+1=0$.
3. $z^2-(1+2i)z-1$.

★☆☆☆ **Exercice 4.4.** Montrer que pour tout $(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4$, il existe $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ tel que

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=m^2+n^2.$$

★☆☆☆ **Exercice 4.5.** Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1. $\left(\sqrt{3}-i\right)^{11}$
2. $(-1+i)^{17}$
3. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{-42}$

★☆☆☆ **Exercice 4.6.** Déterminer les racines 4-ème dans $\mathbb{C}$ de $-119+120i$.

★★☆☆ **Exercice 4.7.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z^2+(5-2i)z+5-5i=0$.
2. $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^4+\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^4=1$.
3. Pour $\alpha\in\mathbb{R}$. $z^4-2z^2\cos(\alpha)+1=0$.
4. Pour $n\in\mathbb{N}^*$. $z^n+2\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}z^k+1=0$.

★☆☆☆ **Exercice 4.8.** Montrer qu'un polynôme P à coefficients réels à ses racines complexes non réelles deux à deux conjuguées.

★☆☆☆ **Exercice 4.9.** Soit $u\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}\in\mathbb{R}\iff u\in\mathbb{U}$.

★☆☆☆ **Exercice 4.10.** Déterminer les racines du polynôme X^4+i.

Application à la trigonométrie

★★☆☆ **Exercice 4.11.** Soit $\theta\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $z=\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$.
Calculer Re z, Im z, $|z|$, arg z.

★★☆☆ **Exercice 4.12.** Soit $a\in[0;2\pi[$ et n un entier naturel. Déterminer le module et un argument de : $\left(1+i\mathrm{e}^{ia}\right)^n$.

★★★☆ **Exercice 4.13.** En exprimant $\cos(3\theta)$ et $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, montrer que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$ est irrationnel.

☆☆☆☆ **Exercice 4.14.** Linéariser les quantités suivantes :

1. $\cos^3(x)\sin^2(x)$.
2. $\cos^6(x)+\sin^6(x)$.

★☆☆☆ **Exercice 4.15.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\cos(x) \leqslant \cos(3x)+\cos(5x)$.

★★☆☆ **Exercice 4.16.** On cherche à trouver la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. En déduire sur $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine du polynôme $16X^4-20X^2+5$.
3. En déduire la valeur de $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$.
4. Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

★★★☆ **Exercice 4.17.** En exprimant $\cos(3\theta)$ et $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est irrationnel.

Géométrie

★☆☆☆ **Exercice 4.18.** Soit $(z,z')\in\mathbb{U}^2$ tels que $zz'\neq 0$.
Montrer que

$$\frac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbb{R}.$$

★☆☆☆ **Exercice 4.19.** Trouver tous les points M d'affixes $z\in\mathbb{C}$ telles que $z+\overline{z}=|z|$.

★★☆☆ **Exercice 4.20.** Déterminer tous les nombres complexes z tels que les points d'affixes respectives z, z^2 et z^4 soient alignés.

★☆☆☆ **Exercice 4.21.** Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.

★☆☆☆ **Exercice 4.22.** Soit A, B et C trois points, distincts deux à deux, d'affixes respectifs a, b et c. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

1. ABC est un triangle équilatéral.
2. j ou j^2 est racine du polynôme aX^2+bX+c.
3. $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$.
4. $(b-a)^2+(c-b)^2+(a-c)^2=0$.

★★☆☆ **Exercice 4.23.** Soit ABCD un carré. Montrer que si C et D ont des affixes entières, alors A et B également.

★★☆☆ **Exercice 4.24.**

1. Calculer $\sum_{k=0}^{4} \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}$.
2. Résoudre l'équation $z^4+z^3+z^2+z+1$ en posant $t=z+\frac{1}{z}$.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
4. Proposer une construction du pentagone régulier à la règle et au compas.