Devoir en temps libre 3

Pour le 30 septembre
Utiliser des copies doubles. Encadrer les résultats.

Exercice 1 Soit E un ensemble non vide et $f : E \to E$, une application.

$f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour n entier naturel non nul, $f^n = f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f$.
Pour tout entier naturel n, on note $F_n = \mathrm{Im}(f^n)$.

1. **a)** Quel est l'ensemble F_0 ?
   b) Montrer que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
2. On suppose dans cette question qu'il existe un entier p tel que $F_{p+1} = F_p$.
   a) Montrer que $\forall k > p, F_k = F_p$.
   b) Montrer que $\{k \in \mathbb{N} | F_{k+1} = F_k\}$ admet un plus petit élément.
3. On suppose dans cette question que f est injective.
   a) Montrer que si A et B sont deux parties de E telles que $f(A) = f(B)$, alors $A = B$.
   b) En déduire que, s'il existe un entier p tel que $F_{p+1} = F_p$, alors f est bijective.
4. Donner un exemple où l'application f est injective et où la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante pour l'inclusion.

Exercice 2

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Evaluer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{e}^{ik\theta} = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=h}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$.

   En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cos(k\theta)$ et de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\sin(k\theta)$