

Sujet 1

Cours

Enoncé l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas de nombres complexes.

Enoncé l'inégalité triangulaire dans le cas de nombres complexes.

Application cours 1

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E . Montrer que

$$A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$$

Application cours 2

Déterminer les entiers naturels n tels que $(1 + i)^n \in \mathbb{R}$.

Exercice 1

Soit θ .

Donner la forme trigonométrique de $1 + \sin(\theta) + i \cos(\theta)$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + (4 - 3i)z - 2 - 8i = 0.$$

Sujet 2

Cours

Application inversible à droite.

Application cours 1

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E . Montrer que

$$A \subset B \iff A \cup B = B$$

Application cours 2

On définit sur $\mathbb{C}$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad (z \mathcal{R} z' \iff |z| = |z'|)$$

- 1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$.
- 2) Interpréter géométriquement les classes d'équivalence.

Exercice

On considère le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

- 1) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $1 + j^k + j^{2k}$.
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Exprimer sous la forme d'une somme la quantité :

$$(1+1)^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n.$$

- b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}$.

Sujet 3

Cours

Formules de De Moivre.

Application cours 1

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E . Montrer que

$$A \cap B = A \cup B \iff A = B$$

Application cours 2

Déterminer les entiers naturels n tels que $(\sqrt{3} + i)^n \in i\mathbb{R}$.

Exercice

Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ en posant :

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), \quad X \mathcal{R} Y \iff X \cap A = Y \cap A.$$

- 1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.
- 2) Montrer que l'application bijective de $\mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ est bijective.

$$B \rightarrow \dot{B}$$

Sujet 4

Cours

Forme trigonométrique et existence

Application cours 1

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E . Montrer que

$$A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$$

Application cours 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$3z^2 - 5z + 8 = 0$$

Exercice

On définit une relation $\sim$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \sim y \iff \frac{\ln(x)}{y} = \frac{\ln(y)}{x}.$$

- 1) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x .

Sujet 5

Cours

Application inversible à gauche.

Application cours 1

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E . Montrer que

$$A \subset B \iff A \cup B = B$$

Application cours 2

Déterminer les entiers naturels n tels que $(1+i)^n \in \mathbb{R}$.

Exercice

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1) Vérifier que :

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad \frac{1}{z} = \bar{z}.$$

2) Soit la fonction $\varphi : z \mapsto |1+iz|^2 + |z+i|^2$.

Que peut-on dire de la restriction de φ à $\mathbb{U}$.

3) Pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, calculer $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right)$.

Sujet 6

Cours

Formules de De Moivre.

Application cours 1

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E . Montrer que

$$A \cap B = A \cup B \iff A = B$$

Application cours 2

Déterminer les entiers naturels n tels que $(\sqrt{3} + i)^n \in i\mathbb{R}$.

Exercice

On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\mathcal{J} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ par :

$$\forall z, z' \in \mathcal{J}, \quad z \preccurlyeq z' \iff (|z| < |z'| \text{ ou } (|z| = |z'| \text{ et } \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Re}(z'))).$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre totale sur $\mathcal{J}$.