DS 2 - Exercices et problèmes

Durée : 3h
Calculatrice interdite.
Copie double uniquement. Encadrer les résultats.
Ne passez pas trop de temps bloqué sur une question.

Exercice 1 - Application idempotente

Soit E un ensemble non vide et $f \in E^E$ une application de E dans E telle que $f \circ f = f$. On dit que l'application f est *idempotente.*

1) Démontrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

2) Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que

$$f^{-1}\left(f^{-1}(A)\right) = f^{-1}(A).$$

Exercice 2 - Étude du quotient $\dfrac{n^n}{n!}$

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) **a)** Déterminer deux réels $a, b \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall k \in \mathbf{N}\backslash\{0;1\}, \quad \frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}.$$

b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.

2) Soit $k \in [\![2;n]\!]$. Montrer que $\binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k(k-1)}$.

3) **a)** Montrer, à l'aide des questions précédentes, que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

b) Montrer alors que :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3.$$

4) En déduire, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant 2$:

$$\frac{n^n}{n!} \leqslant 2 \times 3^{n-2}.$$

Exercice 3 - Cantor-Bernstein

1) Soit E un ensemble.
On rappelle que $(\mathscr{P}(E), \subset)$ est un ensemble ordonné.
Soit $\varphi : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E)$ une application croissante au sens de l'inclusion, *i.e.* pour laquelle : $\forall A, B \in \mathscr{P}(E), \quad A \subset B \implies \varphi(A) \subset \varphi(B)$.
On pose $\mathscr{M} = \{A \in \mathscr{P}(E) \mid A \subset \varphi(A)\}$ et $M = \bigcup\limits_{A \in \mathscr{M}} A$.

- **a)** Soit $A \in \mathscr{M}$.
Comparer $\varphi(A)$ et $\varphi(M)$.
- **b)** Montrer que $M \in \mathscr{M}$.
- **c)** Montrer que $\varphi(M) = M$.

2) Soit E et F deux ensembles. On suppose qu'il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans E.
On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ A & \longmapsto & E \setminus g(F \setminus f(A)) \end{array}$.

- **a)** Montrer que φ possède un point fixe M.
- **b)** Montrer que $f_{|M}$ est bijective de M sur $f(M)$ et que $g|_{F\setminus f(M)}$ l'est de $F \setminus f(M)$ sur $E \setminus M$.
- **c)** En déduire que E et F sont équipotents *i.e.* il existe une bijection de E vers F (théorème de Cantor-Bernstein).

Problème - Homographies préservant le cercle unité

On introduit les parties de $\mathbb{C}$ suivantes :
- le cercle unité : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \left\{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\right\}$;
- le disque ouvert délimité par ce cercle : $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$;
- le demi-plan de Poincaré : $\mathscr{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ vérifiant $ad - bc \neq 0$.
La fonction $h : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, définie pour tout complexe z tel que $cz + d \neq 0$, est appelée une homographie.

Partie 1 : Exemples

1) Soit h l'homographie définie par $h(z) = i\frac{1+z}{1-z}$.
- **a)** Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, $h(z) \in \mathbb{R}$.
- **b)** Montrer que, pour tout $z \in \mathscr{D}$, $h(z) \in \mathscr{P}$.
- **c)** Déterminer les points fixes de h, *i.e.* les nombres complexes z tels que $h(z) = z$.
- **d)** Pour quel(s) nombre(s) complexe(s) Z l'équation $h(z) = Z$, d'inconnue z, possède-t-elle une solution sur $\mathbb{C}$?

2) Soit g l'homographie définie par $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$.
- **a)** Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $g(z) \in \mathbb{U}$.
- **b)** Montrer que, pour tout $z \in \mathscr{P}$, $g(z) \in \mathscr{D}$.

Partie 2 : Homographies conservant $\mathbb{U}$

1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie, dépendant de θ, $z \to \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{z}$ définie sur $\mathbb{C}^*$.

Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $h(z) \in \mathbb{U}$.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{U}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et h la fonction définie par $h(z) = \mathrm{e}^{i\theta}\frac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1}$.

a) Montrer que h est une homographie, bien définie sur $\mathbb{U}$.

b) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $h(z) \in \mathbb{U}$.

3) Réciproquement, nous allons montrer que les homographies précédentes sont les seules à vérifier :

$$\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}.$$

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tel que $ad - bc \neq 0$ et h l'homographie définie par $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ vérifiant, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $h(z) \in \mathbb{U}$.

a) Établir que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{a}b\mathrm{e}^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{c}d\mathrm{e}^{-i\theta})$$

b) En déduire que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et que $\overline{a}b = \overline{c}d$.

c) Si $a = 0$, que peut-on dire de h ?

d) On suppose dorénavant que $a \neq 0$. Montrer que

$$(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$$

e) Conclure.

DS 2 - Éléments de correction

Exercice 1 - Application idempotente

1) Raisonnons pas double implication.
($\Longrightarrow$) : Supposons f injective.
Soit $y \in E$. On pose $x = f(y) \in E$. Alors

$$f(x) = f(f(y)) = f(y).$$

Or f est injective, donc $y = f(y) = f(x)$.
Conclusion :

$$\forall y \in E,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$$

i.e. f est surjective.

($\Longleftarrow$) : Supposons f surjective.
Soit x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$.
Comme f est surjective, il existe $z \in E$ tel que $x = f(z)$ et $z' \in E$ tel que $x' = f(z)$.
Alors $f(f(z)) = f(f(z'))$ donc $f(z) = f(z')$ *i.e.* $x = x'$.
On a montré

$$\forall (x, x') \in E^2, \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)$$

i.e. f est injective.
Pour conclure,

$$\boxed{f \text{ est injective si, et seulement si, } f \text{ est surjective.}}$$

2) Soit $A \in \mathscr{P}(E)$.
Raisonnons par double inclusion.
$\subset$: Soit $x \in f^{-1}\left(f^{-1}(A)\right)$.
Par définition, $f(x) \in f^{-1}(A)$ et encore par définition $f(f(x)) \in A$.
Or f est idempotent, on en déduit que $f(x) = f(f(x)) \in A$ et par définition $x \in f^{-1}(A)$.
On vient de montrer :

$$f^{-1}\left(f^{-1}(A)\right) \subset f^{-1}(A).$$

$\supset$: Soit $x \in f^{-1}(A)$.
Alors $f(x) \in A$. Or f est idempotente donc $f(f(x)) = f(x) \in A$.
Par définition, $f(x) \in f^{-1}(A)$ et par suite $x \in f^{-1}\left(f^{-1}(A)\right)$.
On vient de montrer :

$$f^{-1}(A) \subset f^{-1}\left(f^{-1}(A)\right) f^{-1}(A).$$

Pour conclure,

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{P}(E), f^{-1}\left(f^{-1}(A)\right) f^{-1}(A) f^{-1}(A) = f^{-1}(A).}$$

Exercice 2 - Étude du quotient $\dfrac{n^n}{n!}$

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1)a) On a

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N} \setminus \{0;1\}, \quad \frac{1}{k(k-1)} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}.}$$

1)b) On déduit de la question précédente :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

On reconnaît une somme téléscopique donc

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}}$$

2) Soit $k \in [\![2;n]\!]$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\prod\limits_{i=n-k+1}^{n} i}{k!}$$

.

Or, pour tout $i \in [\![n-k+1;n]\!]$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Comme les termes de ces inégalités sont positifs, on obtient

$$\prod_{i=n-k+1}^{n} i \leqslant \prod_{i=n-k+1}^{n} n = n^k \qquad (1)$$

.

De plus, comme $k \geqslant 2$, $k! = k(k-1)(k-2)!$. Or $k(k-1) > 0$ et $(k-2)! \geqslant 1$, on en déduit que $k! \geqslant k(k-1) > 0$ et par passage à l'inverse $0 < \dfrac{1}{k(k-1)} \leqslant \dfrac{1}{k!}$ (2).

En multipliant (1) et (2) dont les membres sont positifs, on obtient

$$\boxed{\forall k \in [\![2;n]\!], \binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k(k-1)}.}$$

3a) On déduit de ce qui précède

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$$

.

On a obtenu

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leqslant 1 - \frac{1}{n}.}$$

3b) En utilisant la formule du binôme, on obtient

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} 1^{n-k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

De plus, $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant 1$. On en déduit, grâce à **3)a)**

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3.}$$

4) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose $\mathrm{HR}(n)$: « $\frac{n^n}{n!} \leqslant 2 \times 3^{n-2}$. »
Montrons, pour tout $n \geqslant 2$, $\mathrm{HR}(n)$.
• Pour $n = 2$, $\dfrac{n^n}{n!} = 2$ et $2 \times 3^{n-2} = 2$ donc $\dfrac{n^n}{n!} \leqslant 2 \times 3^{n-2}$. Ce qui prouve $\mathrm{HR}(2)$.
• Soit $n \geqslant 2$. Montrons $\mathrm{HR}(n) \implies \mathrm{HR}(n+1)$.
On suppose $\mathrm{HR}(n)$.

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{(n+1)^n}{n!} \\
&= \frac{n^n}{n!} \times \frac{(n+1)^n}{n^n} \\
&= \frac{n^n}{n!}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&\leqslant \frac{n^n}{n!} \times 3 && \left(\text{d'après } \mathbf{3)b)} \text{ et } \frac{n^n}{n!} \geqslant 0\right) \\
&\leqslant 2 \times 3^{n-2} \times 3 && (\mathrm{HR}(n) \text{ et } 3 \geqslant 0) \\
&\leqslant 2 \times 3^{n-1}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve $\mathrm{HR}(n+1)$.
• Conclusion : d'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}, \frac{n^n}{n!} \leqslant 2 \times 3^{n-2}.}$$

Exercice 3 - Cantor-Bernstein

1)a) Soit $A \subset \mathscr{M}$. Alors, par définition de M, $A \subset M$. Par croissance de φ, $\varphi(A) \subset \varphi(M)$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M},\ \varphi(A) \subset \varphi(M).}$$

1)b) On veut montrer que $M \subset \varphi(M)$.
Soit $x \in M$. Il existe $A \in \mathscr{M}$ tel que $x \in A$.
Or $A \in \mathscr{M}$ donc $A \subset \varphi(A)$ et par suite, d'après **1)a)**, $x \in \varphi(M)$.
On vient de montrer que

$$\boxed{M \in \mathscr{M}.}$$

1)c) On a montré que $M \subset \varphi(M)$. Il reste à montrer l'inclusion $\varphi(M) \subset M$.
Comme φ est croissante $\varphi(M) \subset \varphi(\varphi(M))$. On en déduit que $\varphi(M) \in \mathscr{M}$ et donc par définition de M, $\varphi(M) \subset M$.
Il en découle, par double inclusion, que $\varphi(M) = M$.
On a montré le théorème de Tarski

$$\boxed{\text{Toute application } \varphi : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E) \text{ croissante au sens de l'inclusion admet un point fixe.}}$$

2)a) Montrons que φ est croissante au sens de l'inclusion.
Soit A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$ tel que $A \subset B$.
Alors $f(A) \subset f(B)$, puis par passage au complémentaire dans F, $F \setminus f(B) \subset F \setminus f(A)$. Il en découle que $g(F \setminus f(B)) \subset g(F \setminus F(A))$. Pour finir, par passage au complémentaire dans E, $E \setminus g(F \setminus f(A)) \subset E \setminus g(F \setminus F(P))$ *i.e.* $\varphi(A) \subset \varphi(B)$.
On a montré

$$\boxed{\forall A, B \in \mathscr{P}(E),\ (A \subset B \implies \varphi(A) \subset \varphi(B).}$$

On en déduit que φ est croissante et donc, d'après **1)**, elle admet un point fixe M.
2)b) Comme f est injective, $f_{|M}$ l'est aussi.
Pour tout $x \in M$, $f_{|M}(x) = f(x) \in f(M)$ donc $\mathrm{Im}(f_{|M} \subset f(M)$.
Réciproquement, soit $y \in f(M)$. Il existe $x \in M$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in M$, $y = f(x) = f_{|M}(x) \in \mathrm{Im}(f_{|M})$.
Il en découle que $f(M) \subset \mathrm{Im}(f_{|M})$.
On a montré que $\mathrm{Im}(f_{|M}) = f(M)$.
Il vient alors $f_{|M} : M \Longrightarrow f(M)$ est surjective
En conclusion

$$\boxed{f_{|M} \text{ est bijective de } M \text{ sur } f(M).}$$

Comme g est injective, $g_{|F \setminus f(M)}$ l'est aussi.
Pour tout $x \in F \setminus f(M)$, $g_{|F \setminus f(M)}(x) = g(x) \in g(F \setminus f(M))$. Or $M = E \setminus F \setminus f(M)$ d'après **2)a)** donc $g_{|F \setminus f(M)}(x) \in E \setminus M$ et par suite $\mathrm{Im}(g_{|F \setminus f(M)} \subset E \setminus M$.
Réciproquement, soit $y \in E \setminus M = g(x) \in g(F \setminus f(M))$, il existe $x \in F \setminus f(M)$ tel que $y = g(x)$. Comme $x \in F \setminus f(M)$, $y = g(x) = g_{|M}(x) \in \mathrm{Im}(g_{|F \setminus f(M)})$.
Il en découle que $E \setminus M \subset \mathrm{Im}(g_{|F \setminus f(M)})$.
On a montré que $\mathrm{Im}(g_{|F \setminus f(M)}) = E \setminus M$.
Il vient alors $g_{|F \setminus f(M)} : F \setminus f(M) \Longrightarrow E \setminus M$ est bijective.
En conclusion

$$\boxed{g_{|F \setminus f(M)} \text{ est bijective de } F \setminus f(M) \text{ sur } E \setminus M.}$$

2)c) On pose $h : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f_{|M}(x), & \text{si } x \in M\,; \\ g^{-1}_{F \setminus f(M)}(x) & \text{si } x \in E \setminus M. \end{cases} \end{array}$

et $k : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f^{-1}_{|M}(x), & \text{si } x \in f(M)\,; \\ g_{F \setminus f(M)}(x) & \text{si } x \in F \setminus f(M). \end{cases} \end{array}$.

Montrons que $k \circ h = \mathrm{Id}_E$ et $h \circ k = \mathrm{Id}_F$. Ainsi h et k sont bijectives et réciproque l'une de l'autre.
Soit $x \in E$. Raisonnons par disjonction des cas.
<u>Cas $x \in M$:</u> $k(h(x)) = k(f_{|M}(x))$. Or $f_{|M}(x) \in f(M)$ donc $k(h(x)) = f^{-1}_{|M}(f_{|M}(x)) = x$.
<u>Cas $x \in E \setminus M$:</u> $k(h(x)) = k(g^{-1}_{F \setminus f(M)}(x))$.
Or $g^{-1}_{F \setminus f(M)}(x) \in F \setminus f(M)$
donc $k(h(x)) = g_{F \setminus f(M)}(g^{-1}_{F \setminus f(M)}(x)) = x$.
Dans tous les cas, $(k \circ h)(x) = x$.
On a montré que $\boxed{k \circ h = \mathrm{Id}_E}$.
Par un raisonnement analogue on montre que $\boxed{h \circ k = \mathrm{Id}_F}$.

Problème

Partie 1 : Exemples

1) a) Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Il existe un réel $\theta \in]0; 2\pi[$ tel que $z = \mathrm{e}^{i\theta}$.
Alors

$$h(z) = i\frac{1 - \mathrm{e}^{i\theta}}{1 + \mathrm{e}^{i\theta}} = i\frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}} = -\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Il en découle,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{U} \setminus \{1\},\ h(z) \in \mathbb{R}.}$$

1)b) Soit $z \in \mathscr{D}$. $\mathrm{Im}(h(z)) = \dfrac{h(z) - \overline{h(z)}}{2i}$. On en déduit,

$$\mathrm{Im}(h(z)) = \frac{1}{2i}\left(i\frac{1+z}{1-z} + i\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}\right) = \frac{(1+z)(1-\overline{z}) + (1-z)(1+\overline{z})}{2|1-z|^2} = \frac{(1-|z|^2)}{|1-z|^2}$$

Or pour tout $z\mathscr{D}$, $(1 - |z|^2) > 0$ donc

$$\boxed{\forall z\mathscr{D},\ h(z) \in \mathscr{P}.}$$

1)c) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned} h(z) = z &\iff h(z) - z = 0 \\ &\iff \frac{i + iz - z + z^2}{1 - z} = 0 \\ &\iff z^2 + (-1+i)z + i = 0 \qquad (z \neq 1) \end{aligned}$$

Notons Δ le discriminant de cette dernière équation $\Delta = (-1+i)^2 - 4i = -6i = \left(\sqrt{6}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^2$.
Le polynôme a deux racines $\dfrac{(1-\sqrt{3}) + i(-1+\sqrt{3})}{2}$ et $\dfrac{(1+\sqrt{3}) + i(-1-\sqrt{3})}{2}$.

$$\boxed{\text{Les points fixes de } h \text{ sont les points d'affixes respectives } \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1-i) \text{ et } \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i).}$$

1)d) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $Z \in \mathbb{C}$.

$$h(z) = Z \iff h(z) - Z = 0 \iff \frac{i + iz - Z + Zz}{1 - z} = 0 \iff (Z + i)z = Z - i$$

.
L'équation possède une solution si et seulement si $Z \neq -i$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\left\{\frac{Z - i}{Z + i}\right\}}$$

2)a) Soit $z \in \mathbb{R}$.

$$|g(z)|^2 = \frac{z-i}{z+i} \times \overline{\frac{z-i}{z+i}} = \frac{(z-i)(z+i)}{(z+i)(z-i)} = \frac{z^2+1}{z^2+1} = 1$$

donc

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{R},\ g(z) \in \mathbb{U}.}$$

2)a) Soit $z \in \mathscr{P}$.

$$|g(z)|^2 = \frac{|z|^2 - 2\,\mathrm{Im}(z) + 1}{|z|^2 + 2\,\mathrm{Im}(z) + 1}$$

Or $\operatorname{Im}(z) > 0$ donc $0 \leqslant |z|^2 - 2\operatorname{Im}(z) + 1 < |z|^2 + 2\operatorname{Im}(z) + 1$.
On en déduit,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{R},\ g(z) \in \mathscr{D}.}$$

Partie 2 : Homographies conservant $\mathbb{U}$

1) Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

$$|h(z)|) = \frac{\left|e^{i\theta}\right|}{|z|}$$

d'où

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{U},\ h(z) \in \mathbb{U}}$$

.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

2)a) On pose $a = e^{i\theta}$, $b = \alpha e^{i\theta}$, $c = \overline{\alpha}$ et $d = 1$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{\alpha}z + 1 \neq 0$, $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.
De plus, $ad - bc = e^{i\theta}\left(1 - |\alpha|^2\right)^2 \neq 0$ car $\alpha \notin \mathbb{U}$.
h est une homographie.
Si $\alpha = 0$, h est définie sur $\mathbb{C}$ et en particulier sur $\mathbb{U}$.
Si $\alpha \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\overline{\alpha}z + 1 = 0 \iff z = -\frac{1}{\overline{\alpha}}$$

.
Or $\left|-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}\right| = \dfrac{1}{|\alpha|} \neq 1$ car $\alpha \notin \mathbb{U}$. On en déduit que dans ce cas également, h est définie sur $\mathbb{U}$.
Conclusion,

$$\boxed{h \text{ est une homographie bien définie sur } \mathbb{U}.}$$

2)b) Soit $z \in \mathbb{U}$.

$$\begin{aligned}
|h(z)|^2 &= \frac{e^{i\theta}(z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1} \times \frac{e^{-i\theta}(\overline{z}+\overline{a}}{\alpha\overline{z}+1} \\
&= \frac{|z|^2 + \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + |\alpha|^2}{|\alpha|^2|z|^2 + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + 1} \\
&= \frac{1 + \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + |\alpha|^2}{|\alpha|^2 + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + 1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{U},\ h(z) \in \mathbb{U}.}$$

3) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tel que $ad - bc \neq 0$ et h l'homographie définie par $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ vérifiant, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $h(z) \in \mathbb{U}$.

3)a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$. Il en découle que $h\left(e^{i\theta}\right) \in \mathbb{U}$.
Alors, $\left|ae^{i\theta} + b\right|^2 = \left|ce^{i\theta} + d\right|^2$.
Il vient,

$$\left(ae^{i\theta} + b\right)\left(\overline{a}e^{-i\theta} + \overline{b}\right) = \left(ce^{i\theta} + d\right)\left(\overline{c}e^{-i\theta} + \overline{d}\right)$$

soit

$$|a|^2 + a\mathrm{e}^{i\theta}\overline{b} + \overline{a}\mathrm{e}^{-i\theta}b + |b|^2 = |c|^2 + c\mathrm{e}^{i\theta}\overline{d} + \overline{c}\mathrm{e}^{-i\theta}d + |d|^2$$

En remarquant que $a\mathrm{e}^{i\theta}\overline{b} = \overline{\overline{a}\mathrm{e}^{-i\theta}b}$ et $c\mathrm{e}^{i\theta}\overline{d} = \overline{\overline{c}\mathrm{e}^{-i\theta}d}$,
On obtient,

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\ |a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{a}b\mathrm{e}^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{c}d\mathrm{e}^{-i\theta}).}$$

3)b) En appliquant le résultat précédent à $\theta = 0$, on obtient

$$|a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{a}b) = |c|^2 + |d|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{c}d). \qquad (1)$$

Et pour $\theta = \pi$,

$$|a|^2 + |b|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{a}b) = |c|^2 + |d|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{c}d). \qquad (2)$$

En ajoutant $(1)et(2)$ on en déduit que

$$\boxed{|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2.}$$

Il s'en suit que pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, $\mathrm{Re}\left(\overline{a}b\mathrm{e}^{-i\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\overline{c}d\mathrm{e}^{-i\theta}\right)$.
Pour $\theta = 0$, on obtient $\mathrm{Re}\,(\overline{a}b) = \mathrm{Re}\,(\overline{c}d)$.
En remarquant que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(-iz) = \mathrm{Im}(z)$, on obtient, pour $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{Im}\,(\overline{a}b) = \mathrm{Im}\,(\overline{c}d)$.
En conclusion,

$$\boxed{\overline{a}b = \overline{c}d.}$$

3)c) Supposons que $a = 0$.
De **3)b)** on déduit que $\overline{c}d = 0$ or $-bc \neq 0$. Donc $c \neq 0$ et $d = 0$. De plus, toujours d'après **3)b)**, il vien t alors $|b| = |c|$ donc $\dfrac{b}{c}\in\mathbb{U}$.
On en déduit qu'il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $\dfrac{b}{c} = \mathrm{e}^{i\theta}$.
En conclusion,

$$\boxed{\exists\theta\in\mathbb{R},\quad h : z \to \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{z}.}$$

3)d) On a

$$(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = |a|^4 - |a|^2|d|^2 - |a|^2|c|^2 + |c|^2|d|^2$$

Or, d'après **3)b)**, $|c|^2|d|^2 = |\overline{c}|^2|d|^2 = |\overline{c}d|^2 = |\overline{a}b|^2 = |a|^2|b|^2$.
On en déduit

$$\begin{aligned}(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) &= |a|^4 - |a|^2|d|^2 - |a|^2|c|^2 + |a|^2|b|^2\\ &= |a|^2\left(|a|^-|d|^2 - |c|^2 + |b|^2\right)\end{aligned}$$

D'après **3)b)**, il vient

$$\boxed{(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0.}$$

3)e) Montrons par l'absurde que $|a|^2 - |c|^2 \neq 0$.
Supposons que $|a|^2 - |c|^2 = 0$ alors $|a| = |c|$.
De **3)b)**, on déduit que $c\overline{a}b = |c|^2 d = |a|^2 d = a\overline{a}d$.
Or $\overline{a} \neq 0$ donc $cb = ad$ ce qui contredit $ad - bc \neq 0$.

Donc $|a|^2 - |c|^2 \neq 0$ et d'après **3)d)** il en découle que $|a| = |d|$. On en déduit que $d \neq 0$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{a}{d} = \mathrm{e}^{i\theta}$.
De plus, d'après **3)b)**, $|b| = |c|$.
On pose $\alpha = \dfrac{b}{a}$.

$$|\alpha| = \frac{|b|}{|a|} = \frac{|c|}{|a|} \neq 1.$$

Donc $\alpha \notin \mathbb{U}$.
Pour finir,

$$\frac{c}{d} = \frac{|c|^2}{d\overline{c}} = \frac{|b|^2}{\overline{a}b} = \frac{\overline{b}}{\overline{a}} = \overline{\alpha}$$

et, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $cz + d \neq 0$,

$$h(z) = \frac{a}{d} \times \frac{z + \frac{b}{a}}{\frac{c}{d}z + 1}.$$

On en déduit qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $cz + d \neq 0$,

$$\boxed{h(z) = \mathrm{e}^{i\theta}\,\frac{z + \alpha}{\overline{\alpha}z + 1}.}$$