

Sujet 1

Cours

Inégalités triangulaires dans le cas réel.

Application cours 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$,

$$|x + 7| \leq |x^2 - 16|.$$

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto (3 - x^2)e^{-x}$. Discuter, en fonction de la valeur réelle m , du nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = m$$

d'inconnue x .

Exercice 2

- 1) Montrer que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ pour tous $x, y > 0$.
- 2) En déduire que pour tous $a, b, c > 0$:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

À quelle condition a-t-on égalité ?

Sujet 2

Cours

Caractérisation des réels de l'intervalle $[a; b]$

Application cours 1

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x+2} - e^2}{x}$$

.

Application cours 2

Résoudre l'équation

$$e^z = 3\sqrt{3} - 3i.$$

.

Exercice

Soit $f : x \mapsto \exp(\ln^2 x)$. Montrer que f est bijective de $[1, +\infty[$ sur son image (à préciser) et calculer une expression explicite de sa réciproque.

Sujet 3

Cours

Parties bornées de $\mathbb{R}$.

Application cours 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$,

$$|x + 1| + |x - 3| \leq 6$$

Application cours 2

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k! \leq (n+1)!$$

Exercice

Déterminer les réels b tels que la fonction $f : x \mapsto x^3 + bx^2 + x$ est injective sur $\mathbb{R}$.

Sujet 4

Cours

Fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornée.

Application cours 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$,

$$|x + 1| + |x - 3| \leq 6$$

Application cours 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$z^6 = \frac{-4}{1 + i\sqrt{3}}.$$

Exercice

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$. Discuter, en fonction de la valeur réelle m , du nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = m$$

d'inconnue x .

Sujet 5

Cours

Solutions de $e^z = a$.

Application cours 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$,

$$z^5 = \frac{(1 + i\sqrt{3})^4}{(1 + i)^2}.$$

Application cours 2

Etudier la dérivabilité de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Exercice

Déterminer les réels b tels que la fonction $f : x \mapsto x^3 + bx^2 + x$ est injective sur $\mathbb{R}$.

Sujet 6

Cours

Minorant et plus petit élément.

Application cours 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$|2x - 4| \leq |x + 2|.$$

Application cours 2

Résoudre l'équation

$$e^z = 3\sqrt{3} - 3i.$$

.

Exercice

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On note

$$g : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2x - 1) & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Étudier la dérivabilité de g .