

Sujet 1

Cours

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Application cours 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

Exercice 1

Montrer que $A = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \mid (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$ admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

Exercice 2

Soit E et F deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $E \subset F$ et F est bornées.

1. Montrer que E et F admettent des bornes inférieures et supérieures.
2. Montrer que $\inf F \leq \inf E \leq \sup E \leq \sup F$.

Sujet 2

Cours

Résolution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants dans $\mathbb{C}$.

Application cours 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' + 4y = x^2 + 3x - 1$.

Application cours 2

Pour chacun des ensembles suivants. Dire s'ils admettent une borne inférieure (resp. une borne supérieure). Le cas échéant, préciser s'il s'agit d'un minimum (resp. d'un maximum).

1. $A = \left\{ \frac{3n}{3n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.
2. $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \geq 9\}$.

Exercice 1

Montrer qu'entre deux réels distincts, il existe une infinité de rationnels.

Sujet 3

Cours

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Application cours 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = \sin(3x)$.

Exercice 1

Montrer que $A = \left\{ \frac{2xy}{x^2 + y^2} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \right\}$ admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

Exercice 2

Montrer que toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.

Soit E une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que l'intervalle $[\inf E, \sup E]$ est le plus petit intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ tel que $E \subset [a, b]$.

Sujet 4

Cours

Caractérisations de la borne supérieure.

Application cours 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos(x)$.

Exercice 1

Montrer que $A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2} \mid (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$ admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

Exercice 2

Montrer qu'entre deux réels distincts, il existe une infinité de rationnels.

Sujet 5

Cours

Lien pge et borne supérieure.

Application cours 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = xe^x$.

Application cours 2

Pour chacun des ensembles suivants. Dire s'ils admettent une borne inférieure (resp. une borne supérieure). Le cas échéant, préciser s'il s'agit d'un minimum (resp. d'un maximum).

1. $A = \left\{ \frac{3n}{3n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.
2. $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \geq 9\}$.

Exercice

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On rappelle que $A^c = \mathbb{R} \setminus A$.

1. Donner un exemple de A tel que A^c soit majoré ; minoré ; borné.
2. Montrer que si A^c alors $\sup A^c$ est le plus petit réel tel que $]M, +\infty[\subset A$.
3. Montrer qu'on ne peut pas avoir à la fois A et A^c majorés

Sujet 6

Cours

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Application cours 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' + 4y = e^{-x} \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1

Montrer que toute partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pose

$$f^*(y) = \sup_{x \leq y} f(x).$$

1. Illustrer cette définition de f^* sur différents exemples de fonctions f dessinées à main levée.
2. Déterminer f^* dans le cas où f est croissante.
3. Étudier la monotonie de f^* .