Devoir en temps libre 6

Pour le 25 novembre
Utiliser des copies doubles. Encadrer les résultats. Laisser une marge.
Traiter au choix (1 et 2) ou (1 et 3)

Exercice 1

On définit la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\ln(k+2) - \ln(k+1)).$$

Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 2

Soit r un réel tel que $r > 1$. On considère les suites a et b définies par :

$$a_0 = 1, \quad b_0 = r \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1. Montrer que les suites a et b sont correctement définies et à termes strictement positifs.

2. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(b_n - a_n)^2}{2(b_n + a_n)}.$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b_n$.

4. Étudier la monotonie des suites a et b.

5. Démontrer que les suites a et b convergent vers deux réels notés ℓ_a et ℓ_b.

6. Démontrer que $\ell_a = \ell_b$. On notera désormais ℓ leur limite commune.

7. En considérant la suite $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer la valeur de ℓ.

8. **a)** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_n b_n - a_n^2}{a_n b_n + a_n^2} \leqslant \frac{r-1}{r+1}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{(r-1)}{2(r+1)}(b_n - a_n)$.

9. On suppose désormais que $r = 2$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \frac{1}{6^n}$.

b) Déterminer un entier n tel que a_n et b_n constituent un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude au plus 10^{-12}.

c) Écrire un script Python permettant de calculer, pour tout entier naturel $k \in [\![0;14]\!]$, à l'aide des suites a et b un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude au plus 10^{-k}.

Exercice 3

Dans cet exercice, on considère l'ensemble, noté $\mathcal{S}$, des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs réelles et telles que

$$u_{n+1} = \frac{\exp(u_n)}{n+1}$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.
Pour tout nombre réel x, on note $u(x)$ la suite appartenant à $\mathcal{S}$ et dont le premier terme vaut x. On note également $u_n(x)$ le terme d'indice n de cette suite. Ainsi, $u_0(x) = x$ et $u_1(x) = \exp(x)$.

1. Démontrer que toute suite appartenant à $\mathcal{S}$ est strictement positive à partir du rang 1.

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathcal{S}$. Démontrer que s'il existe un rang $N \geqslant 2$ pour lequel $u_N \leqslant 1$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathcal{S}$. Démontrer que si cette suite ne converge pas vers 0, alors elle diverge vers $+\infty$.

Ci-dessous, on note E_0 l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $u(x)$ converge vers 0, et E_∞ l'ensemble des réels x pour lesquels $u(x)$ diverge vers $+\infty$.

4. Démontrer que $E_0 \neq \emptyset$.

5. **a)** Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 0$, que la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que, si x est un élément de E_0, alors l'intervalle $]-\infty, x]$ est inclus dans E_0.

6. **a)** Démontrer que la fonction $x \mapsto \exp(x) - x(x+1)$ est strictement positive sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

b) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathcal{S}$. Démontrer que, s'il existe un rang $N \geqslant 1$ pour lequel $u_N \geqslant N+1$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.

c) Démontrer que $1 \in E_\infty$.

7. Démontrer que, si x est un élément de E_∞, alors l'intervalle $[x, +\infty[$ est inclus dans E_∞.
Nous allons maintenant démontrer qu'il existe un nombre réel δ tel que l'intervalle $]-\infty, \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $[\delta, +\infty[$ est inclus dans E_∞.
On admet que $0 \in E_0$.

8. On définit deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ de la façon suivante. Tout d'abord, on pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Puis, pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n \quad \text{si} \quad \frac{a_n + b_n}{2} \in E_0,$$

et on pose

$$a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{sinon.}$$

a) Démontrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes et ont même limite.

b) Soit δ la limite commune aux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$. Démontrer que l'intervalle $]-\infty, \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $]\delta, +\infty[$ est inclus dans E_∞.

9. On définit la suite $(\mathrm{v}_n)_{n\geqslant 2}$ par $v_2 = 2$ et par la relation de récurrence, pour tout entier $n \geqslant 2$, $v_{n+1} = (n+1)^{v_n}$.
On définit la suite $(w_n)_{n\geqslant 2}$ par, pour tout entier $n \geqslant 2$ par $w_n = \ln^n(v_n)$ où on a posé $\ln^2 = \ln \circ \ln$ et pour tout entier $n \geqslant 2$, $\ln^{n+1} = \ln \circ \ln^n$.
On admet que pour tout entier naturel n, l'ensemble de définition de $\ln^n$ est un intervalle non majoré.

a) Justifier que la suite $(w_n)_{n\geqslant 2}$ est bien définie.

b) Monter que pour tout entier $n \geqslant 2$, $w_n \in E_0$.

c) Démontrer que la suite $(w_n)_{n\geqslant 2}$ converge.

10. Démontrer que $\delta \in E_\infty$.