

Proposition

Si f est décroissante sur I , alors $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et de sens contraires.

Preuve: • $f^2 = f \circ f$ est croissante et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f^2(u_n)$$

donc $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont croissantes

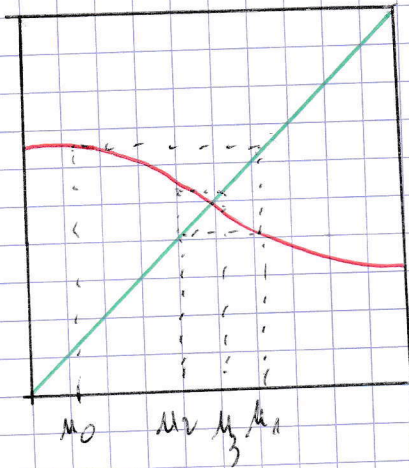
• si $u_0 \leq u_1$, alors grâce à la proposition 56, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leq u_{2n+2}$

En appliquant f (décroissante) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} \geq u_{2n+3}$

$(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

Lorsque f est continue et que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, alors elles convergent vers des points fixes de $f \circ f$ qui peuvent être distincts

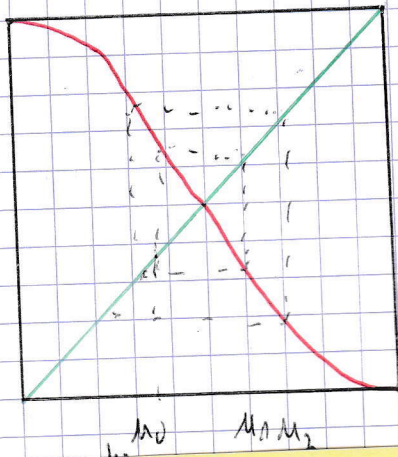


$$f \text{ continue}$$

$$u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$$

$$u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p \quad \text{car } f(u_{2n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$$

$$\text{Or } f(u_{2n}) \rightarrow p \text{ et } p \text{ est un point fixe de } f$$



$$u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l_1 \quad l_1 \neq l_2$$

$$u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l_2$$

$$l_1 \text{ et } l_2 \text{ ne sont pas des points fixes de } f, \text{ car } l_2 = f(l_1)$$