Sujet 1

Cours

Suites adjacentes.

Application cours 1

Soit u une suite.
Montrer que si u est croissante et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors u converge.

Application cours 2

Déterminer une expression explicite de la suite u définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n+1$.

Exercice 1

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de termes générales $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ et $v_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)u_n$ convergent vers une même limite.

Sujet 2

Cours

Suites extraites

Application cours 1

Montrer que la suite u définie pour tout entier $n \geqslant 2$ par u_n est l'inverse du nombre de diviseurs premiers de n est divergente.

Exercice 1

Soient $a, b > 0$. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite.

Sujet 3

Cours

Caractérisation séquentielle de la borne inférieure

Application cours 1

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} - 2u_n = 0.$$

Donner une formule explicite de la suite u.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} (e^{u_{n+1}} - e^{u_n})$.
3. En déduire que $\dfrac{u_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Sujet 4

Cours

Suites extraites des rangs pairs et de rangs impairs.

Application cours 1

Montrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sin\left(\frac{n^2\pi}{3}\right)$ diverge.

Application cours 2

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites de termes généraux respectifs :

$$u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{10^n}$$

Montrer que les deux suites sont adjacentes.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \left(e^{u_{n+1}} - e^{u_n}\right)$.
3. En déduire que $\frac{u_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Sujet 5

Cours

Convergence des suites à valeurs complexes

Application cours 1

Soit u une suite.
Montrer que si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors u converge.

Application cours 2

Déterminer une expression explicite de la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3 - \frac{u_n}{2}$.

Exercice 1

Soit u une suite vérifiant la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.
Etudier la convergence de la suite u.

Sujet 6

Cours

Suites récurrentes d'ordre 1

Application cours 1

Soit u une suite.
Montrer que si u est décroissante et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors u converge.

Exercice 1

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et } v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers une même limite. On admet que leur limite commune est la constante e.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_n - e| \leqslant \frac{1}{n \cdot n!},$$

puis en déduire que e est irrationnel.