Allez, un nouveau chapitre.
Non, c'est bon, n'applaudissez pas comme à « chaque » nouveau chapitre en salle 210... vous aurez l'air idiots. Ou alors, attendez ce soir 20 heures, comme tous les soirs.

On continue dans l'algèbre linéaire, avec la troisième/quatrième couche ?

couche 0	manipulation	diagonalisation en taille 2 (voire 3)
couche 1	calcul et géométrie	déterminants en taille 2, 3 puis n, systèmes
couche 2	vision dans l'espace	familles libres, liées, bases, dimension
couche 3	linéarité	applications linéaires, noyaux, images, rang
couche 4	mesures dans l'espace	produits scalaires, normes, isométries

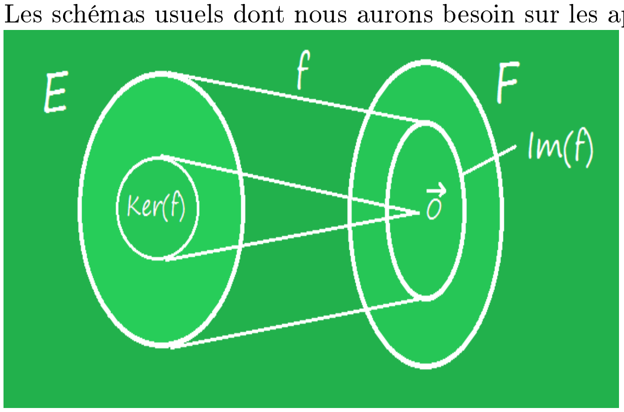
Dans ce chapitre, on parlera donc d'applications linéaires (vous connaissez déjà, et ça sera souvent avec des matrices)
de noyau (pour mesurer les dimensions d'espaces qu'elle perd)
d'image (pour voir ce qu'elle atteint vraiment)
On croisera plusieurs fois le mot rang :

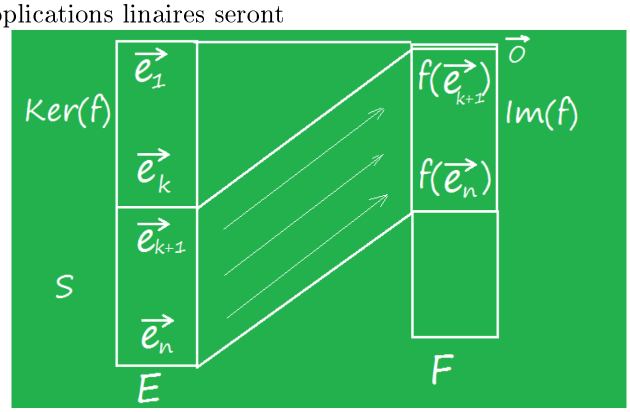
rang d'une famille de vecteurs	dimension de l'espace qu'elle engendre nombre de vecteurs indépendants
rang d'une application linéaire	dimension de son ensemble image
rang d'une matrice	nombre de colonnes linéairement indépendantes nombre de lignes linéairement indépendantes
rang d'un système linéaire	rang de sa matrice

Si vous vous dites que ces notions doivent se recouper vous avez raison.
Si vous vous dites qu'on doit pouvoir passer de l'une à l'autre, vous êtes sur la bonne piste.
Si vous vous dites que « faire de l'algèbre linéaire » ce sera justement passer de l'une à l'autre, et changer de point de vue sur un problème pour le ramener à un autre plus simple, plus visuel, plus classique pour vous, alors vous avez totalement compris.

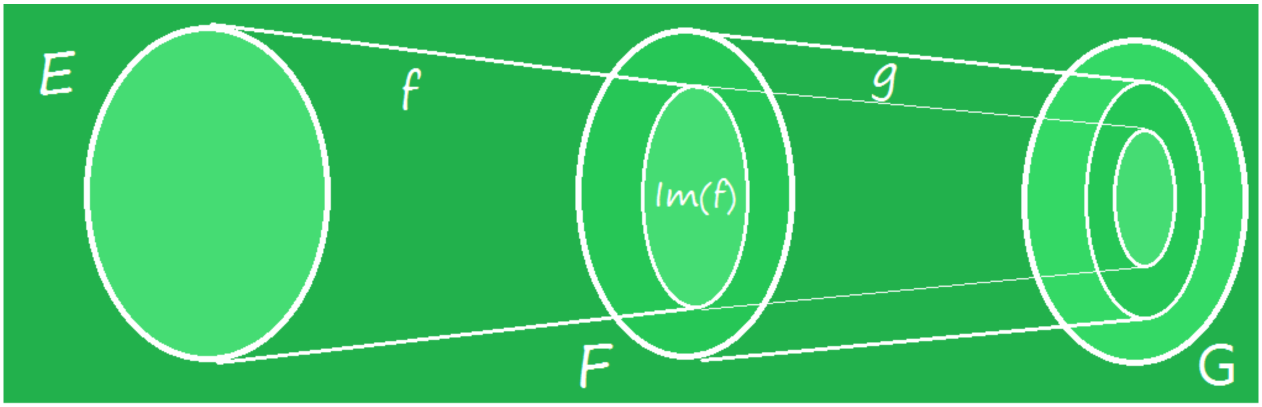
f linéaire de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$	• $\forall(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})\in E^2,\ f(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=f(\overrightarrow{a})+f(\overrightarrow{b})$ *et* $\forall\overrightarrow{a}\in E,\ \forall\alpha\in\mathbb{R},\ f(\alpha.\overrightarrow{a})=\alpha.f(\overrightarrow{a})$
	• $\forall(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})\in E^2,\ \forall(\alpha,\ \beta)\in\mathbb{R}^2\ f(\alpha.\overrightarrow{a}+\beta.\overrightarrow{b})=\alpha.f(\overrightarrow{a})+\beta.f(\overrightarrow{b})$
	• $\forall(\overrightarrow{a_1},\dots,\overrightarrow{a_p}),\ \forall(\alpha_1,\dots,\alpha_p),\ f\left(\sum_{i\leqslant p}\alpha_i.\overrightarrow{a_i}\right)=\sum_{i\leqslant p}\alpha_i.f(\overrightarrow{a_i})$

Les schémas usuels dont nous aurons besoin sur les applications linaires seront

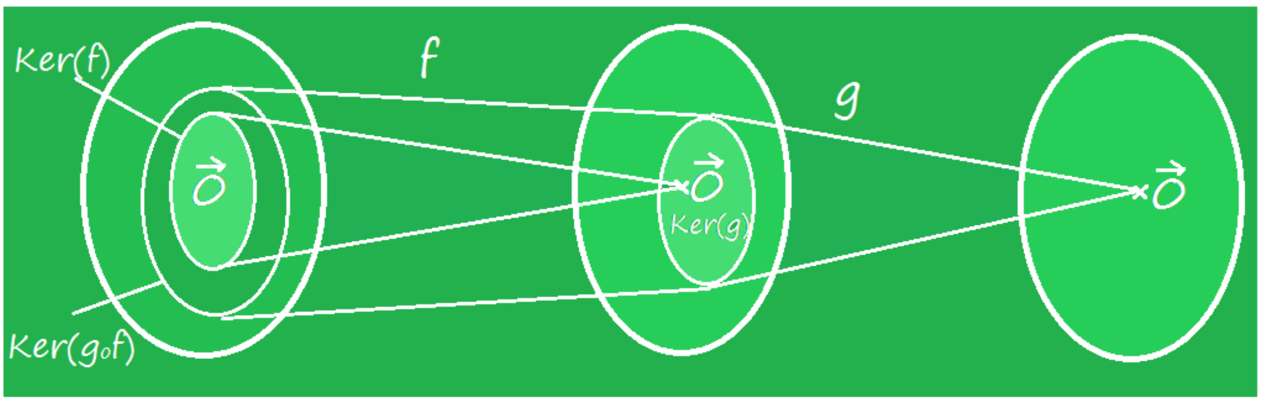




Après avoir défini noyau et image, j'ajouterai le schéma suivant :



$Im(g \circ f) \subset Im(g)$



$Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$

f linéaire de E dans F :	$Ker(f) = \{\overrightarrow{u} \in E \mid f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{O_F}\}$	$\subset E$
	$Im(f) = \{\overrightarrow{b} \in F \mid \exists \overrightarrow{a} \in E,\ f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{b}\}$	$\subset F$
	$Im(f) = \{f(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in E\}$	

Rappelons le vocabulaire déjà croisé :

morphisme	f linéaire de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$	$Ker(f) \subset E$	$Im(f) \subset F$
endomorphisme	f linéaire de $(E, +, .)$ dans $(E, +, .)$	$Ker(f) \subset E$	$Im(f) \subset E$
isomorphisme	f linéaire et bijective de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$	$Ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$	$Im(f) = F$
automorphisme	f linéaire et bijective de $(E, +, .)$ dans $(E, +, .)$	$Ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$	$Im(f) = E$
forme linéaire	f linéaire de $(E, +, .)$ dans $(\mathbb{R}, +, .)$	$Ker(f) \subset E$	$Im(f) \subset \mathbb{R}$

Auto signifie donc « endo+iso ».

Les théorèmes que nous croiserons sont à leur tour assez naturels :

une application linéaire ne peut que	au mieux conserver les dimensions, et même en perdre
une application linéaire bijective	conserve les dimension transforme les bases en bases
une application linéaire devient un isomorphisme si on se restreint	d'un supplémentaire du noyau vers l'espace image

$$\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(depart)$$

*La dernière formule s'appelle formule du rang, et elle donne lieu à un superbe pull de Pierre-Jean Desnoux (maths MP et bien plus pour le fonctionnement des Prépas de ce lycée) tricoté maison avec sur l'avers « à gros noyau... » et au revers « ...*petite image *».*[1].

1. et je me dis que j'aurais un avantage sur lui si je me faisais faire des pulls personnalisés, j'aurais même la place de faire rédiger la démonstration sur la partie ventrale..

1 °) Applications linéaires.

Dans ce qui suit, les espaces vectoriels seront des espaces vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des réels. Mais en toute généralité, il pourra s'agir d'un corps tel que $\mathbb{C}$ ou celui des entiers de 0 à $p-1$ pour des opérations modulo p (p premier).

Une application de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$ est linéaire si elle conserve ce qui fait la structure des espaces vectoriels : les combinaisons linéaires.
En mots : « l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images ».

En version quantifiée, il y a trois offres :

• $\forall(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) \in E^2,\ f(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}) = f(\overrightarrow{a}) + f(\overrightarrow{b})$ *et* $\forall \overrightarrow{a} \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha.\overrightarrow{a}) = \alpha.f(\overrightarrow{a})$	en deux fois
• $\forall(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) \in E^2,\ \forall(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2\ f(\alpha.\overrightarrow{a}+\beta.\overrightarrow{b}) = \alpha.f(\overrightarrow{a}) + \beta.f(\overrightarrow{b})$	petite combinaison
• $\forall(\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_p}),\ \forall(\alpha_1, \dots, \alpha_p),\ f\left(\sum_{i \leqslant p} \alpha_i.\overrightarrow{a_i}\right) = \sum_{i \leqslant p} \alpha_i.f(\overrightarrow{a_i})$	grande combinaison

Vous devez savoir passer d'un modèle à l'autre.

f prend un vecteur *(élément de $(E, +, .)$, et suivant ce qu'est E, ce peut être un réel, un vecteur à n composantes, une fonction, une matrice, un polynôme...)* et calcule un vecteur de F *(nouvel élément à p composantes, ou fonction, on réel, ou matrice).*
Ce qu'on demande, c'est que quand les causes s'additionnent, les effets s'additionnent aussi : $f(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}) = f(\overrightarrow{a}) + f(\overrightarrow{b})$.

> *Dans le nature, tous les phénomènes ne sont pas forcément linéaires. mais en première approximation, par un développement limité d'ordre 1 y compris sur plusieurs variables, ils le sont. C'est ce qui explique qu'on utilise souvent l'outil de l'algèbre linéaire.*

Je vous recommande l'approche par petite combinaison. Et en fait, en partant du membre $\alpha.f(\overrightarrow{a}) + \beta.f(\overrightarrow{b})$ pour arriver à $f(\alpha.\overrightarrow{a}+\beta.\overrightarrow{b})$.
Je vous recommande cette approche surtout pour la linéarité en analyse : la somme des intégrales est l'intégrale de la somme.

Souvent, la linéarité d'une application est une évidence et repose sur un argument de langage où le mot linéarité intervient déjà :
Vous serez amené à écrire
- « par linéarité de la dérivation » [a]
- « par linéarité de l'intégration »
- « par linéarité du passage à la limite » [b]

a. Oui, c'est bien la dérivation ($f \longmapsto f'$) qui est linéaire, pas la dérivée.
b. si chaque limite existe...

Parfois on vous dit dans l'énoncé que l'application est linéaire, donc pas besoin de le prouver
Exemple : f est linéaire de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ dans lui même et vérifie $f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i}-\overrightarrow{k}$, $f(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{i}$ et $f(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{j}-\overrightarrow{i}$. Pouvez vous calculer l'image de n'importe quel vecteur ?

Enfin, on pourra souvent prouver la linéarité d'une application sur $(\mathbb{R}^n, +, .)$ en la mettant sous forme matricielle.
Exemple : f est définie de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ dans lui même par $f(x.\overrightarrow{i}+y.\overrightarrow{j}+z.\overrightarrow{k}) = (x-y+z).\overrightarrow{i}+y.\overrightarrow{j}+(x-y-z).\overrightarrow{k}$.
Cette application a tout pour être linéaire, mais c'est lourd d'aller chercher $f(\alpha.(x.\overrightarrow{i}+y.\overrightarrow{j}+z.\overrightarrow{k}))$ et l'image d'une somme.
Autant écrire cette application sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
Il n'y a plus besoin d'écrire alors $M.(\alpha.U+\beta.V) = \alpha.M.U+\beta.M.V$.

Vocabulaire :
endo est une racine grecque qui signifie « dedans », qu'on retrouve dans « endogène », « endogame », « endocarde », « endométriose », « endocrine », mais je ne sais pas si ça vous avance beaucoup.

iso est aussi une racine grecque qui marque l'égalité

endomorphisme	d'un espace dans lui même	matrice carrée
isomorphisme	bijectif les deux espaces ont la même dimension (à prouver)	
automorphisme	endo+iso	matrice carrée inversible
forme	à valeurs dans $(\mathbb{R}, +, .)$	matrice ligne

dans ce tableau, je parle de matrices, mais il faudra quand même pour cela travailler en dimension finies et avoir choisi des bases.

Notons tout de suite que si f est un isomorphisme, son application réciproque f^{-1} est aussi un isomorphisme.

Facile : On se donne $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ainsi que a et b.
On veut vérifier $f^{-1}(\alpha.\overrightarrow{u} + \beta.\overrightarrow{v}) = \alpha.f^{-1}(\overrightarrow{u}) + \beta.f^{-1}(\overrightarrow{v})$.
Il suffit de montrer par injectivité que ces deux éléments de E ont la même image par f.
Ce qui ne pose aucun problème. Ceci prouve la linéarité. Et la bijectivité est acquise par définition.

Si on se fixe une matrice A à n lignes et k colonnes, l'application $U \longmapsto A.U$ est linéaire de $(R^k, +, .)$ dans $(R^n, +, .)$.
Si la matrice est carrée, on a un endomorphisme de $(\mathbb{R}^n, +, .)$.
Si M est carrée et inversible, on a un automorphisme de $(\mathbb{R}^n, +, .)$.
On peut se douter que si la matrice n'est pas carrée, le morphisme ne peut pas être bijectif.

2°) Propriétés élémentaires.

Je vais vous citer en premier lieu un résultat que je vais appeler théorème de Paris 6, avec une appellation que j'ai peut être déjà expliquée :

Il y a plusieurs années de ça, avant même que vos parents ne se connaissent peut être, je devais prévenir les élèves de HX3 (oui, avant la MPSI2, avant la réforme créant la PSI) désirant se réorienter à Paris 6 qu'ils devaient passer un examen oral, avec notamment un interrogateur dont ils devaient se méfier.
cet interrogateur leur demandait parfois en petite toute petite question de cous « définition d'une application linéaire ».
Les élèves, bien formés comme ils se doit, citaient la formule $\forall(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \in E^2$, $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ $f(\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b}) = \alpha.f(\overrightarrow{a}) + \beta.f(\overrightarrow{b})$ *et se tournaient vers l'interrogateur qui leur répondait d'un « et... » sous-entendant qu'il fallait encore autre chose.*
certains élèves se lançaient dans des explications sur la notion de combinaison linéaire, d'autres proposaient $\left(\sum_{i\leqslant p} \alpha_i.\overrightarrow{a_i}\right) = \sum_{i\leqslant p} \alpha_i.f(\overrightarrow{a_i})$... *Et l'interrogateur semblait toujours attendre un élément de réponse.*
Et l'élément de réponse attendu était $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$.
L'interrogateur estimait que cette propriété faisait partie de la définition.
Alors que c'est une conséquence de la définition.

Venons en à cette preuve : l'image du vecteur nul de l'espace de départ par une application linéaire est le vecteur nul de l'espace d'arrivée.

C'est direct : $f(\overrightarrow{0_E}) = f(0.\overrightarrow{0_E}) = 0.f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$. ☻

Remarque : *Un pur logicien vous dira : «* si l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des image, il suffit de prendre la combinaison vide, dont l'image est combinaison vide ».
On tient ainsi $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$

C'est un résultat que l'on utilisera parfois directement. Par exemple quand nous parlerons de noyau et d'injectivité.
On notera qu'il est possible qu'il y ait d'autres vecteurs que le vecteur nul de E qui aient pour image le vecteur nul de F.

Dans la même famille de formules, on a $f(-\overrightarrow{a}) = -f(\overrightarrow{a})$.

On peut montrer aussi que l'application $\overrightarrow{a} \longmapsto \overrightarrow{0_F}$ est linéaire de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$ est linéaire.
C'est la seule application constante qui soit linéaire, d'ailleurs...
On la notera $O_{L(E,F)}$ avec ce $L(E, F)$ qui est un ensemble dont nous allons bientôt parler.

La composée de deux applications linéaire est linéaire.

Il suffit d'écrire.

La somme de deux applications linéaire de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$ est linéaire.
Toute combinaison linéaire d'applications linéaires de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$ est encore linéaire.

On se donne les f_i et des λ_i, pus $\overrightarrow{a}$et $\overrightarrow{b}$et enfin α et β.
Il reste à comparer $\sum_{i=1}^{p} f_i(\alpha.\overrightarrow{a}+\beta.\overrightarrow{b})$ et $\alpha.\sum_{i=1}^{p} f_i(\overrightarrow{a})+\beta.+\beta.\sum_{i=1}^{p} f_i(\overrightarrow{b})$ en utilisant ce qu'est la définition de $\Big(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i.f_i\Big)(\overrightarrow{u})$.

On en profite alors pour définir des ensembles

$L(E,F)$	est l'ensemble des applications linéaires de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$
	(la vraie notation est $L_{\mathbb{R}}(E,F)$ qui précise qui est le corps où on va chercher les α_i).
$L(E,E)$	est l'ensemble des endomorphismes de $(E,+,.)$.
	On allège en $L(E)$.
$GL(E)$	est l'ensemble des automorphismes de $(E,+,.)$.
	On l'appelle groupe linéaire. Pourquoi groupe ? Réfléchissez.

.

On peut montrer (mais qu'est ce que c'est rasoir) :

$(L(E,F),+)$ groupe	$(L(E,F),+,.)$ espace vectoriel		
$(L(E),+)$ groupe	$(L(E),+,.)$ espace vectoriel	$(L(E),+,\circ)$ anneau	$(L(E),+,.,\circ)$ algèbre
$(GL(E),\circ)$ groupe			

Ce que vous devez surtout comprendre : ce tableau rappelle celui des additions, multiplications matricielles et multiplications par un réel :

$(M_{k,n}(\mathbb{R}),+)$ groupe	$(M_{k,n},(\mathbb{R})+,.)$ espace vectoriel		
$(M_n(\mathbb{R}),+)$ groupe	$(M_n(\mathbb{R}),+,.)$ espace vectoriel	$(M_n(\mathbb{R}),+,\circ)$ anneau	$(M_n(\mathbb{R}),+,.,\circ)$ algèbre
$(GL_n(\mathbb{R}),\circ)$ groupe			

où • $M_{k,n}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à k colonnes et n lignes
- $M_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de format n sur n (on peut les multiplier)
- $GL_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées inversibles de format n sur n

Attention, $GL_n(\mathbb{R})$ n'a aucune stabilité additive, de même que $GL(E)$ (prenez Id et $-Id$).

En fait, une matrice à k colonnes et n lignes représente une application linéaire de $(\mathbb{R}^n,+,.)$ dans $(\mathbb{R}^n,+,.)$: $U \longmapsto M.U$.
Et si les matrices sont carrées de même format, on peut les additionner (ou composer les morphismes [2]).

Avantage de la linéarité : on n'a pas besoin de donner les images de tous les vecteurs.
Regardez dans trois directions de $(\mathbb{R}^3,+,.)$, et vous savez ce qu'il se passe dans toutes les directions.

Une application linéaire est totalement déterminée si on connaît l'image d'une base de l'espace de départ.

En effet, si on connaît chaque $f(\overrightarrow{e_i})$ avec une notation naturelle, alors on connaît l'image de chaque $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{e_i}$.

2. dans ce cours, il m'arrivera d'écrire « morphisme » ou « application linéaire » puisque les deux sont synonymes, même si pour l'une j'ai moins de lettres à taper

Exercice : f est un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ vérifiant
$$\begin{array}{rcllll} f(\overrightarrow{i}) & = & 2.\overrightarrow{i} & +\overrightarrow{j} & +3.\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) & = & -\overrightarrow{i} & & +4.\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{k}) & = & 5.\overrightarrow{i} & -\overrightarrow{j} & \end{array}$$

Alors par linéarité (puis en regroupant)
$f(x.\overrightarrow{i}+y.\overrightarrow{j}+z.\overrightarrow{k}) = (2.x-y+5.z).\overrightarrow{i}+(x-z).\overrightarrow{j}+(3.x+4.y).\overrightarrow{k}$
qu'on trouve plus facilement en écrivant, sur la base canonique
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
L'écriture vous semble un peu renversée ? C'est compréhensible si on écrit plutôt
$$f(\overrightarrow{i}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ f(\overrightarrow{i}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } f(\overrightarrow{k}) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On complique un peu :

Exercice : f est un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ vérifiant
$$\begin{array}{rcllll} f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}) & = & \overrightarrow{i} & -\overrightarrow{j} & +2.\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j}) & = & \overrightarrow{i} & +\overrightarrow{j} & +3.\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}) & = & \overrightarrow{i} & -\overrightarrow{j} & +5.\overrightarrow{k} \end{array}$$

Alors tout vecteur $x.\overrightarrow{i}+y.\overrightarrow{j}+z.\overrightarrow{k}$ se décompose encore à l'aide de $(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k})$.

En effet, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ est non nul.

Je vous laisse finir le calcul.

Mais si vous êtes rusée, en combinant les deux premières lignes (L2-L1) et (2.L1-L2) :
$f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i}-3.\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ et $f(\overrightarrow{j}) = 2.\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$
et en reportant dans la troisième : $f(\overrightarrow{k}) =$.

A vous de voir le rapport avec $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(lisez vous par exemple en troisième colonne $\overrightarrow{k} = 1.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})+0.(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j})-1.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k})$.

Et voyez vous enfin $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ poindre à l'horizon ?

Sa première colonne donne bien $f(\overrightarrow{i})$. Et sa deuxième...

Pour aller plus loin :

Et si on vous donne juste l'image d'une famille libre ?
Et si on vous donne l'image d'une famille génératrice ?
Et si on vous donne l'image d'une famille liée ?

Avec juste l'image d'une famille libre, l'application n'est définie que sur le sous-espace vectoriel engendré par cette famille.
Si on vous donne l'image d'une famille liée, disons par une relation $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-4.\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$, il est important d'avoir aussi $f(\overrightarrow{a})+f(\overrightarrow{b})-4.f(\overrightarrow{c})=\overrightarrow{0}$, sinon, il y a une incohérence.
Si on vous donne l'image d'une famille génératrice de $(E,+,.)$ (pas de sens si on ne dit pas « de $(E,+,.)$ », il eut y avoir un problème.
Si la famille est liée par un certain nombre de relations, il faut regarder si on retrouve la même relation sur les images.
Si ce n'est pas le cas, c'est foutu, f n'existe pas, on vous a menti (la terre n'est pas plate, John Lennon est vraiment mort, le père Naël existe, l'homme de Roswell n'a jamais épousé le femme de Roswell...).
Sinon, effacez les images qui ne servent à rien, et vous êtes ramené à « image d'une base ».
Dans la pratique, demandez toujours à connaître l'image d'une base.

Autre avantage de la linéarité : il n'y a pas besoin de connaître l'application linéaire f sur l'espace tout entier...

Si vous connaissez f sur A et B deux sous-espaces vectoriels de $(E,+,.)$, mutuellement supplémentaire, alors vous connaissez f sur tout $(E,+,.)$

En effet, tout vecteur $\overrightarrow{u}$de $(E,+,.)$ se décompose d'une façon unique sous la forme $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ avec $\overrightarrow{a}$ dans A et $\overrightarrow{b}$dans B (définition de $E=A\oplus B$).
Son image est alors $f(\overrightarrow{u})=f(\overrightarrow{a})+f(\overrightarrow{b})$.☻

Que faire si la somme n'est pas directe ?
Si vous avez juste $E=A+B$ mais pas $A\oplus B$.
On vous a dit « pour $\overrightarrow{a}$ dans A, on a $f(\overrightarrow{a})=\dots$
« pour $\overrightarrow{b}$ dans B, on a $f(\overrightarrow{b})=\dots$
Votre réflexe devra être « mais si un élément $\overrightarrow{u}$est à la fois dans A et dans B, les deux définitions coïncident elles ?

Si non : il y a incompatibilité
Si oui : alors vous pourrez calculer l'image de tout vecteur de $E=A+B$

Exercice : f est un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ vérifiant $f(\overrightarrow{u})=2.\overrightarrow{u}$si $\overrightarrow{u}$ est dans le plan d'équation $x+y+z=0$
$f(\overrightarrow{u})=-\overrightarrow{u}$si $\overrightarrow{u}$ est dans le plan d'équation $x+2.y+3.z=0$
Il y a alors un problème par exemple pour l'image du vecteur $\overrightarrow{i}-2.\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$.
Une telle application f ne peut pas exister.

.
Exercice : f est un endomorphisme de $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$ vérifiant $f(S)=Tr(S).I_3$ si S est symétrique
$f(A)=-A$ si A est antisymétrique
$f(M)=3.M$ si $M\in Vect(I_3)$
Cette fois, c'est cohérent (pourquoi ?).
Calculez alors $f(\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix})$.
Existe-t-il M vérifiant $f(M)=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$?

.
Exercice : ϕ est un endomorphisme de $(C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,.)$ vérifiant
$\phi(f)=f'$ si f est paire
$\phi(f)=x\longmapsto f(x+1)$ si f est impaire
Déterminez $\phi(\exp)$.
Pouvez vous choisir a pour que $t\longmapsto\cos(t+a)$ ait une image nulle par ϕ (attention, cos est paire, mais $t\longmapsto\cos(t+a)$ n'est en général ni paire, ni impaire).

3°) Morphismes et familles.

Premier résultat : une application linéaire ne peut pas libérer une famille. Elle ne gagne pas de dimension.

L'image d'une famille liée de $(E,+,.)$ par une application linéaire f de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$ est une famille liée.

C'est facile à démontrer. C'est la définition même de la linéarité qui sert.
On part d'une relation de dépendance linéaire $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i.\overrightarrow{a_i}=\overrightarrow{0_E}$ avec au moins un coefficient non nul.
On applique f linéaire : $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i.f(\overrightarrow{a_i})=f(\overrightarrow{0_E})=\overrightarrow{0_F}$.
Et il y a peut être encore d'autres relations de dépendances linéaires qui sont apparues pour les $f(\overrightarrow{a_i})$.

Maintenant, qu'en est il de l'image d'une famille libre de $(E,+,.)$?
Elle peut être liée. Pensez à f qui expédie tout le monde sur $\overrightarrow{0_F}$... C'est la solution de facilité.

Pensez aussi à une application linéaire quelconque, mais qui va de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ dans $(\mathbb{R}^2,+,.)$.
Une famille libre $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$ de trois vecteurs de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ est formée de trois vecteurs $(f(\overrightarrow{a}),\ f(\overrightarrow{b}),\ f(\overrightarrow{c}))$ dans $(\mathbb{R}^2,+,.)$.
Elle est forcément liée...

Exercice : f est un morphisme de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ vérifiant $f(\overrightarrow{i}) = 2.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$

$f(\overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$

$f(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$

Montrez que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est libre mais que sa famille image est liée.

Pouvez vous trouver une famille libre de deux vecteurs de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ dont la famille image est liée ?

On a quand même un résultat positif.

L'image d'une famille libre de $(E, +, .)$ par une application linéaire injective f de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$ est une famille libre.

☹ Quel est le mot en plus ? « Injectivité ». On va supposer f injective.
On prend une famille libre $(\overrightarrow{u_1}, \dots \overrightarrow{u_p})$ dans $(E, +, .)$. On regarde alors la famille image : $(f(\overrightarrow{u_1}), \dots f(\overrightarrow{u_p}))$.
On se donne des réels α_i et on suppose $\alpha_1.f(\overrightarrow{u_1}) + \dots + \alpha_p.f(\overrightarrow{u_p}) = \overrightarrow{0_E}$.
Par linéarité, ceci donne $f(\alpha_1.\overrightarrow{u_1}, \dots + \alpha_p.\overrightarrow{u_p}) = \overrightarrow{0_E}$.
Par notre résultat « image du neutre », on écrit même : $f(\alpha_1.\overrightarrow{u_1}, \dots + \alpha_p.\overrightarrow{u_p}) = f(\overrightarrow{0_E})$.
Par injectivité de f (il faut bien qu'elle serve) : $\alpha_1.\overrightarrow{u_1}, \dots + \alpha_p.\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0_E}$.
Par liberté de la famille de $(E, +, .)$: $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$. ☺

Exercice : Quand je collais encore en Sup, j'ai parfois croisé le « raisonnement » suivant :
« on suppose $\big(\alpha_1.\overrightarrow{u_1}, \dots + \alpha_p.\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0_E}\big) \Rightarrow \big(\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0\big)$
. on applique f : $\big(f(\alpha_1.\overrightarrow{u_1}, \dots + \alpha_p.\overrightarrow{u_p}) = f(\overrightarrow{0_E})\big) \Rightarrow \big(\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0\big)$
. par linéarité de f : $\big(\alpha_1.f(\overrightarrow{u_1}) \dots + \alpha_p.f(\overrightarrow{u_p}) = \overrightarrow{0_E}\big) \Rightarrow \big(\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0\big)$
. et c'est fini ».
On reconnaît à ce type de construction l'élève qui a vu faire des raisonnements, n'y a rien compris, mais en a retenu des mots, des tournures.
Un tel élève agit en copiste, mais n'arrive pas à saisir ce qu'est un raisonnement.
Que peut signifier « appliquer f sur l'hypothèse d'une implication ? ».
Je vous offre ça : on sait $(a = b) \Rightarrow (a + 1 = b + 1)$
on élève au carré : $(a^2 = b^2) \Rightarrow (a + 1 = b + 1)$
ou $(a^2 = b^2) \Rightarrow ((a + 1)^2 = (b + 1)^2)$
On prend alors $a = 1$ et $b = -1$ et c'est génial !

On verra plus tard un résultat plus fin :

Exercices : $\Big((\overrightarrow{u_1}, \dots \overrightarrow{u_p})\ libre\ et\ Vect(\overrightarrow{u_1}, \dots \overrightarrow{u_p}) \cap Ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}\Big) \Rightarrow \Big((f(\overrightarrow{u_1}), \dots f(\overrightarrow{u_p}))\ libre\Big)$

Sinon, pour ce qui est des familles génératrices : l'image d'une famille génératrice par une application linéaire est génératrice.
Cette phrase ne veut rien dire.

L'image d'une famille génératrice de $(E, +, .)$ par une application linéaire f de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$ est génératrice de$Im(f)$.

Pour certains, c'est même la définition de l'ensemble image !
Bon, on le fait quand même. On prend $(\overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_m})$ qui engendre $(E, +, .)$ et on prend $\overrightarrow{b}$ dans $Im(f)$.
Par définition même de l'image, il s'écrit $b = f(\overrightarrow{a})$ pour (au moins) un $\overrightarrow{a}$de $(E, +, .)$.
Et $\overrightarrow{a}$ s'écrit $\overrightarrow{a} = \lambda_1.\overrightarrow{g_1} + \dots + \lambda_p.\overrightarrow{g_p}$ pour au moins un p-uplet de réels.
Par linéarité, on a alors $\overrightarrow{b} = \lambda_1.f(\overrightarrow{g_1}) + \dots + \lambda_p.f(\overrightarrow{g_p})$. C'est ce qu'on voulait. ☺
On notera que la formulation « il s'écrit comme ceci ou comme celé » est la traduction rhétorique des ∃ dont vous truffez vos copies[3].

Reformulation : f est surjective de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$ si et seulement si l'image d'une famille génératrice de $(E, +, .)$ est une famille génératrice de $(F, +, .)$.

4°) Combien faut il de coefficients pour définir une application linéaire d'un espace de dimension k vers un espace de dimension p ?

3. *enfin, non, si vous en mettiez dans vos copies, ce serait bien, mais vous persistez à écrire des pâtés de formules où aucune variable n'est quantifiée ; quand donc vos copies de maths seront elles autre chose que des formules comme un mauvais rêve de SII et deviendront une histoire racontée ?*

On l'a compris, il n'y a pas besoin de donner l'image de chaque vecteur. Il suffit de donner l'image d'une base de $-(E,+,.)$; c'est à dire l'image de k vecteurs.
Et chaque image va s'exprimer dans l'ensemble d'arrivée avec n coefficients.
On a donc besoin de $k\times n$ coefficients.
Qu'on agencera dans une matrice.
Soyons un peu technique, avec pour base au départ $\mathcal{B}(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots\overrightarrow{\varepsilon_k})$
et pour base à l'arrivée $\mathcal{A}(\overrightarrow{e_1},\dots\overrightarrow{e_n})$

On exprime l'image de chaque vecteur $\begin{array}{rcllll} f(\overrightarrow{\varepsilon_1}) & = & a_1^1.\overrightarrow{e_1} & +\dots & +a_n^1.\overrightarrow{e_n} \\ f(\overrightarrow{\varepsilon_2}) & = & a_1^2.\overrightarrow{e_1} & +\dots & +a_n^2.\overrightarrow{e_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f(\overrightarrow{\varepsilon_k}) & = & a_1^k.\overrightarrow{e_1} & +\dots & +a_n^k.\overrightarrow{e_n} \end{array}$.

Les positions des indices vous semblent déroutantes, normal. Pensez que les vecteurs devraient être écrits en colonne.
On prend un vecteur qu'on décompose $\overrightarrow{u}=x_1.\overrightarrow{\varepsilon_1}+\dots+x_k.\overrightarrow{\varepsilon_k}$.
Par linéarité : $f(\overrightarrow{u})=x_1.(a_1^1.\overrightarrow{e_1}+\dots+a_n^1.\overrightarrow{e_n})+\dots+x_k.(a_1^k.\overrightarrow{e_1}+\dots+a_n^k.\overrightarrow{e_n})$.
On développe et regroupe : $f(\overrightarrow{u})=(a_1^1.x_1+\dots+a_1^k.x_k).\overrightarrow{e_1}+\dots+(a_n^1.x_1+\dots+a_n^k.x_k).\overrightarrow{e_n}$.
C'est déjà plus cohérent pour les indices « du bas » et « du haut », non ?
Proprement : $f\Big(\sum_{j=1}^k x_j.\overrightarrow{\varepsilon_j}\Big)=\sum_{j=1}^k x_j.\Big(\sum_{i=1}^n a_i^j.\overrightarrow{e_i}\Big)=\sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^k a_i^j.x_j\Big).\overrightarrow{e_i}$.
On exprime alors les composantes

$$f(\overrightarrow{u})_{|\mathcal{A}}=\begin{pmatrix} a_1^1.x_1 & +\dots & +a_1^k.x_k \\ a_2^1.x_1 & +\dots & +a_2^k.x_k \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1.x_1 & +\dots & +a_n^k.x_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^k \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^k \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}=Mat_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f).\overrightarrow{u}_{|\mathcal{B}}$$

La notation $\overrightarrow{u}_{|\mathcal{B}}$ traduit que vous exprimez le vecteur $\overrightarrow{u}$ sur la base $\mathcal{B}$.
La notation $Mat_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f)$ traduit que vous prenez la matrice de f de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{A}$.
Elle a $\dim(depart)$ colonnes et $\dim(arrivee)$ lignes, pour transformer un vecteur à k composantes en vecteur à n composantes.

Chaque colonne reprend une à une les composantes des images de vecteurs de la base de départ.
• Si la colonne j est nulle, c'est que $f(\overrightarrow{\varepsilon_j})$ est nul.
• Si deux colonnes sont égales (ou proportionnelles), vous déduisez que deux vecteurs de l'espace de départ ont la même image (ou des images colinéaires). Vous n'avez alors aucune difficulté à trouver un vecteur non nul dans le noyau.
• Si vous découvrez une relation de dépendance linaire entre les colonnes $\alpha_1.C_1+\dots+\alpha_k.C_k=0_n$, vous en déduisez qu'il y a une relation de dépendance linéaire entre les $f(\overrightarrow{\varepsilon_i})$.
○ On a perdu une dimension dans l'espace image ($f(\overrightarrow{\varepsilon_i})$ ne sert à rien, il s'exprime à l'aide des autres si α_1 est non nul).
○ Et on a gagné une dimension dans le noyau : $f(\alpha_1.\overrightarrow{\varepsilon_i}+\dots+\alpha_k.\overrightarrow{\varepsilon_i})=\overrightarrow{0_F}$.

Plus subtil, si une ligne est nulle, c'est que vous n'avez pas besoin de $\overrightarrow{e_i}$ pour exprimer les images des $f(\overrightarrow{\varepsilon_j})$.
C'est donc que $Im(f)$ n'a pas besoin de $\overrightarrow{e_i}$.
$Im(f)$ est inclus dans le sous-espace stricte $Vec(\overrightarrow{e_1},\dots\overrightarrow{e_{i-1}},\ \overrightarrow{e_{i-1}},\dots\overrightarrow{e_n})$. On note un défaut de surjectivité.

Précisément, l'élément de ligne i et de colonne j de la matrice est la composante suivant $\overrightarrow{e_i}$ de $f(\overrightarrow{\varepsilon_j})$. C'est ce qu'on note $\overrightarrow{e_i}^*\Big(f(\overrightarrow{\varepsilon_j})\Big)$, la notation $\overrightarrow{e_i}^*$ désignant la forme linéaire qui récupère la composante d'un vecteur de $(F,+,.)$ suivant le vecteur de base $\overrightarrow{e_i}$.

$$\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^k & \overrightarrow{e_i}^* \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^k & \overrightarrow{e_2}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^k & \overrightarrow{e_n}^* \\ & & & & \\ f(\overrightarrow{\varepsilon_1}) & f(\overrightarrow{\varepsilon_k}) & & f(\overrightarrow{\varepsilon_k}) & \end{array}$$

C'est cette formule un peu obscure $\Big(Mat_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f)\Big)_i^j=\overrightarrow{e_i}^*\Big(f(\overrightarrow{\varepsilon_j})\Big)$ qui permettra de démontrer que pour com-

poser les morphismes en dimension finie, il suffit de multiplier les matrices :
$Mat_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(g).Mat_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f)$ où les formats sont évidemment compatibles, puisque $\mathcal{A}$ est la fois base d'arrivée pour f et de départ pour g.[4]

Attention, la matrice d'un morphisme dépend des bases choisies.
Sauf pour le morphisme nul.
Et parfois, il sera judicieux de bien choisir chaque base.

Prenons par exemple de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ dans $(\mathbb{R}^2, +, .)$ l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2.x & -y & +z \\ x & +y & -z \end{pmatrix}$.

Si je vous demande sa matrice, vous allez me répondre avec un bel ensemble $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Et vous n'aurez raison que si vous me dite « j'ai pris sur $(\mathbb{R}^3, +, .)$ la base canonique de même sur $(\mathbb{R}^2, +, .)$ »
Et vous avez raison tant pour la matrice agissant sous la forme $U \longmapsto M.A$ que sous la forme « $\overrightarrow{i}$ a pour image $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{j}$ a pour image $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{k}$ (complétez).

Mais si je choisis une autre base au départ ? Par exemple $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$[5].

La matrice devient $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ puisque maintenant le dernier vecteur de base a une image nulle.

Et si dans $\mathbb{R}^2$ à l'arrivée je choisis la base $(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix})$?

La matrice devient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ puisque le premier vecteur de la base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ a pour image le premier vecteur de la base de $(\mathbb{R}^2, +, .)$, de même pour le second[6].

Question : Pouvez vous trouver une autre base $\mathcal{C}$ de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ telle que la matrice de f de $(\mathbb{R}^3, +, .), \mathcal{C}$ dans $(\mathbb{R}^2, +, .), canonique$ soit encore $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$?

Prenons un autre exemple, avec l'endomorphisme de $(\mathbb{R}_4[X], +, .)$ qui transforme $P(X)$ en $P(X+1) - P(X)$ (opérateur aux différences finies).

> Je compte sur vous pour un tel exercice pour démontrer la linéarité de cet opérateur[a]. Mais notez que cette question n'est pas si évidente. Il faut penser à nommer l'opérateur. Et la question devient juste $\phi(\alpha.P(X) + \beta.Q(X)) = \ldots$. Il est évident que l'élève qui part sur $P(\alpha.X + \beta.Y)$ n'a rien compris et s'est carrément trompé d'étage...
>
> *a.* phrase un peu idiote, dans la mesure où le mot « opérateur » en mathématiques est justement là pour désigner une application linéaire sur des espaces vectoriels de fonctions ou de matrices

La linéarité étant acquise, on prend un par un les vecteurs de la base canonique, et on calcule l'image de chacun, qu'on exprime sur la base canonique :

$$\begin{array}{lclclllll} \phi(1) & = & 1 & -1 & = & 0 & & & \\ \phi(X) & = & (X+1) & -X & = & 1 & & & \\ \phi(X^2) & = & (X+1)^2 & -X^2 & = & 1 & +2.X & & \\ \phi(X^3) & = & (X+1)^3 & -X^3 & = & 1 & +3.X & +3.X^2 & \\ \phi(X^4) & = & (X+1)^4 & -X^4 & = & 1 & +4.X & +6.X^2 & +4.X^3 \\ \phi(X^5) & = & (X+1)^5 & -X^5 & = & 1 & +5.X & +10.X^2 & +10.X^3 \quad +.X^4 \end{array}$$

d'où $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On lit tout de suite sur la matrice que le premier vecteur de la base canonique a une image nulle (application non injective, 0 et 1 ont la même image).
On lit aussi que $Im(\phi)$ est inclus dans $Vect(1,\ X,\ X^2,\ X^3,\ X^4)$ (dernière ligne nulle).

Mais je propose une autre base, classique de $(\mathbb{R}_5[X], +, .)$ formée des polynômes suivants :

1	X	$\frac{X.(X-1)}{2}$	$\frac{X.(X-1).(X-2)}{6}$	$\frac{X.(X-1).(X-2).(X-3)}{24}$	$\frac{X.(X-1).(X-2).(X-3).(X-4)}{120}$

---

4. Remarque : c'est Chasles avec $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$
5. je n'ai rien à faire que vous vous soyez convaincu que c'est une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$, il y a tant de chemins pour y parvenir (« bon cardinal et libre », « déterminant non nul », « bon cardinal et je reconstruis facilement la base canonique
6. Le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur la base canonique se décompose en combien de fois $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et combien de fois $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$... réponse « une fois et zéro fois, donc colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ».

que nous appellerons polynômes de Newton.
Ils forment bien une base de par leurs degrés échelonnés.

> On peut aussi partir de $a_0.1 + a_1.X + a_2.\frac{X.(X-1)}{2} + \ldots + a_n.\frac{X;(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$, puis calculer en 0, en 1, en 2 et ainsi de suite.

La matrice sur la nouvelle base est alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par exemple, $\phi\Big(\frac{X.(X-1).(X-2).(X-3)}{24}\Big) = \frac{(X+1).X.(X-1).(X-2)}{24} - \frac{X.(X-1).(X-2).(X-3)}{24}$
On factorise : $\phi\Big(\frac{X.(X-1).(X-2).(X-3)}{24}\Big) = \frac{X.(X-1).(X-2)}{24}.\Big(X+1-(X-3)\Big)$
On simplifie : $\phi\Big(\frac{X.(X-1).(X-2).(X-3)}{24}\Big) = \frac{X.(X-1).(X-2)}{24}.4 = \frac{X.(X-1).(X-2)}{6}$.
Chaque polynôme a pour image le précédent sur la base., d'où ces 1 « pas tout à fait sur la diagonale ».
Faites le proprement avec $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{X-k}{k+1}$.

Ce qu'on va pouvoir dire tout de suite avec un peu d'expérience.
• Si la matrice $Mat_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f)$ est carrée et inversible, le morphisme est un isomorphisme.

• Si la matrice a plus de colonnes que de lignes, on part d'un espace de dimension « trop grande ». Les bases $(\overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_k})$ de l'espace de départ sont envoyées sur des familles trop grandes $(f(\overrightarrow{e_1}), \ldots f(\overrightarrow{e_k}))$ à l'arrivée (de cardinal k plus élevé que la dimension n de l'arrivée). On crée un défaut d'injectivité. Le morphisme est non injectif, non inversible (sauf peut être d'un côté, comme on verra). [7]

• Si la matrice a plus de lignes que de colonnes, les images des bases de $(E, +, .)$ seront toujours des familles trop petites dans $(F, +, .)$. L'application aura un défaut de surjectivité. Et là encore, le morphisme ne sera pas un isomorphisme. Et il n'aura pas d'inverse (sauf là encore peut être d'un seul côté). [8]

Le fait d'assimiler les morphismes à des matrices en dimension finie une fois qu'on a une base va nous permettre de déterminer la dimension de $L(E, F)$ quand $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ sont deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et k [9] munis de bases B et C.
Cette identification crée une bijection entre $L(E, F)$ et $M_{n,k}(\mathbb{R})$.

> *Ah, il manque un détail dans un sens idiot pour la « bijection » : on sait que si on nous donne une application linéaire, on crée une matrice.*
> *Mais il faut dire aussi que si on nous a donné une matrice quelconque, on crée une application linéaire* $\overrightarrow{u} \longmapsto f(\overrightarrow{u})$ *où* $f(\overrightarrow{u})$ *est déterminé par « ses composantes sur la base sur la base* C *sont* $M.U$ *où* U *est formé des composantes de* $\overrightarrow{u}$ *sur la base* B.

Mais mieux encore, cette bijection est un morphisme.

> *Il faut vérifier de manière purement « technique » :* $Mat_C^B(f+g) = Mat_C^B(f) + Mat_C^B(g)$ *et* $Mat_C^B(\alpha.f) = \alpha.Mat_C^B(f)$.

Comme on a un isomorphisme entre $L(E, F), +, .)$ et $(M_{n,k}(\mathbb{R}), +, .)$ ces deux espaces ont la même dimension (on transforme une base en base).

---

7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a un inverse à droite (et même plusieurs). Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mais imppossible d'avoir $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \\ a" & b" \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Essayez... Et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est déjà liée, vous ne pourrez pas la libérer avec $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \\ a" & b" \end{pmatrix}$.

8. Non ! Vous voulez un exemple ? reprenez celui de la note précédente, et échangez le rôle des lignes et des colonnes ! Ouah trop bien vu !

9. le premier ou la première qui me demande ce qu'est une « dimension respective », je lui fais manger la dose d'hydroxychloroquine absorbée en une heure par Donald Trump

On en déduit $\boxed{\dim(L(E,F) = n \times k = \dim(E) \times \dim(F)}$ et vous vous en doutiez :
un morphisme = une matrice = le choix de $n \times k$ coefficients.
Et si on vous demande une preuve à un oral de concours dites simplement « je dote $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ d'une base chacun, et j'identifie les applications linéaires à leurs matrices ».

Corolaire : $\boxed{\dim(L(E)) = n^2}$ (endomorphismes, donc matrices carrées).

Corolaire : $\boxed{\dim(L(E,F)) = \dim(L(F,E))}$
On ne dira pas qu'il y a autant d'applications linéaire de E dans F que de F dans E puisque en termes de cardinaux, ces ensembles sont infinis.
Mais on dira en gros qu'il y a autant de choix dans un sens que dans l'autre (même si ce n'est pas évident).
Ce passage de $n \times k$ à $k \times n$ nous fait transformer des matrices à n colonnes et k lignes en matrices à n lignes et k colonnes. Mais l'interprétation géométrique de la transposition n'est pas évidente.

Corolaire : $\boxed{\dim(L(E,\mathbb{R})) = \dim(E)}$
On a autant de choix de vecteurs de $(E,+,.)$ que de formes linéaires de $(E,+,.)$ dans $(\mathbb{R},+,.)$.
Et ça, quand $(E,+,.)$ est le $(\mathbb{R}^n,+,.)$ que vous connaissez bien pour faire de la géométrie, c'est facile à comprendre.
Pour $\overrightarrow{a}$ donné, on crée la forme linéaire $\overrightarrow{u} \longmapsto \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{u}$ (produit scalaire).
Les formes linéaires sont alors vues comme des projections sur des axes.
Et elles s'écrivent $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- *Ce que je viens de dire vous semble obscur, pas grave, on en reparlera.*
- *Ce que je viens de dire éclaire la géométrie de loin, mais sous un angle différent : parfait...*

Piège : Quelle est la dimension de $GL(E)$ (les automorphismes).

C'est un piège, $GL(E)$ est un groupe « multiplicatif » ais pas un espace vectoriel Il n'a donc pas de dimension...

Exercice rapide : montrez que si f est un endomorphisme de $(\mathbb{R}^2,+,.)$ alors la famille $(Id_2,\ f,\ f^2,\ f^3,\ f^4)$ est liée.
Et même $(Id_2,\ f,\ f^2)$ est liée, pensez aux matrices 2 sur 2.

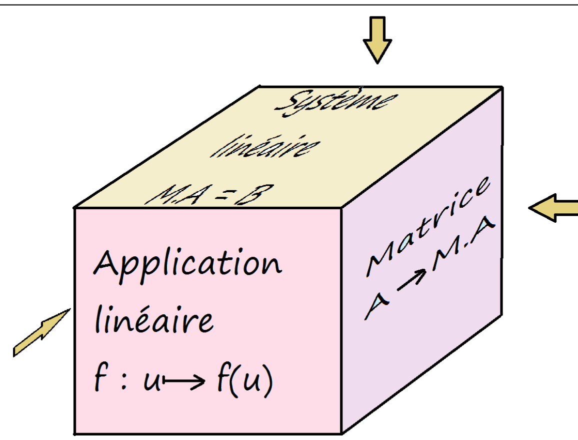
Attention, comme on est en algèbre linéaire, le seul sens à donner à f^2 est $f \circ f$ (on compose les morphismes, et on multiple les matrices...

En dimension infinie, le problème est qu'on n'a peut être même plus de base...

Que devez vous retenir de cette identification « applications linéaires matrices rectangulaires » ?

Une des idées de base en algèbre linéaire : un même problème peut être vu de plusieurs façons :

morphismes,
systèmes,
matrices,
géométrie...



on vous donne une application linéaire à étudier :	fixez des bases (bien choisies) et voyez la comme une matrice
on vous fait travailler sur une matrice A (diagonalisation...) :	voyez la comme l'application $U \longmapsto A.U$ et vice versa
on vous demande de trouver noyau et image de f :	cherchez l'image de $U \longmapsto A.U$ en lisant des choses sur les lignes et les colonnes
on vous donne un système à étudier :	voyez le comme une recherche d'antécédents d'un vecteur B par une application linéaire $X \longmapsto A.X$ il aura des solutions seulement si B est dans l'image toute solution sera déterminée « à un élément du noyau près » (solution particulière+solutions homogènes)
vous cherchez si un morphisme est injectif, surjectif :	étudiez le système associé

5°) Ensemble image d'une application linéaire.

On commence par définir l'ensemble image d'une application linéaire f de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$.
Mais, je n'ai même pas à le définir, c'est la définition ensembliste d'un ensemble image : les éléments de $(F,+,.)$ vraiment atteints par f/

$Im(f) = \{f(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in E\}$
un vecteur $\overrightarrow{b}$ de $(F,+,.)$ est dans $Im(f)$ si et seulement si il s'écrit $f(\overrightarrow{a})$ pour au moins un $\overrightarrow{a}$ de $(E,+,.)$.

On notera que la question « donnez moi un vecteur de $Im(f)$ est simple : prenez un vecteur de $(E,+,.)$ et calculez son image par f.
La question « le vecteur $\overrightarrow{b}$ est il dans $Im(f)$ » est plus compliquée. On se donne $\overrightarrow{b}$ et on doit chercher si il admet ou non un antécédent $\overrightarrow{a}$ dans $(E,+,.)$ vérifiant $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{b}$.
Ceci est plus tordu que la résolutions terre à terre d'un système. Il ne s'agit pas de « trouver les solutions » mais de voir « à quelle condition il y en a ».

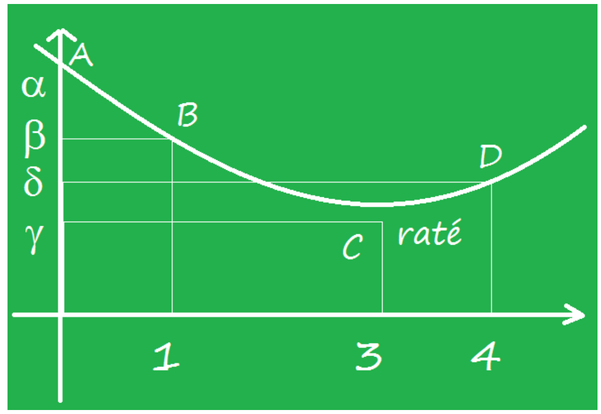
Un exemple : Prenons l'application linéaire de $(\mathbb{R}_2[X],+,.)$ dans $(\mathbb{R}^4,+,.)$ par $P(X) \longmapsto \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(3) \\ P(4) \end{pmatrix}$).

Cette application est bien linéaire, je ne vous le prouverai pas.
Ou plutôt si, je vous le prouverai en écrivant cette application sous forme matricielle sur les bases canoniques de nos deux espaces : $(1,\ X,\ X^2)$ et la base faite des quatre vecteurs avec un 1 qui s promène au milieu de zéros.

$a + b.X + c.X^2 \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ a+b+c \\ a+3.b+9.c \\ a+4.b+16.c \end{pmatrix}$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.

On se doute qu'on est bien présomptueux, pattant d'un espace de dimension 3 à vouloir remplir un espace de dimension 4.
Et je pose la question : à quoi ressemblent les éléments de $Im(f)$?

Il me semble impossible que si je me donne quatre nombres α, β, γ et δ je puisse trouver une parabole passant par $A(0,\ \alpha)$, $B(1,\ \beta)$, $C(3,\ \gamma)$ et $D(4,\ \delta)$.
Ou alors il faut bien les choisir (quatre points alignés ou au moins « co-parabolaires ».
Il me semble impossible que si on me donne quatre réels α, β, γ et δ je puisse trouver a, b et c vérifiant
$\left\{\begin{array}{cccccc} a & & & = & \alpha \\ a & +b & +c & = & \beta \\ a & +3.b & +9.c & = & \gamma \\ a & +4.b & +16.c & = & \delta \end{array}\right|$.



Ça n'est même pas de l'algèbre linéaire, c'est du simple bon sens sur le nombre d'inconnues et d'équations. Ah si, c'est de l'algèbre linéaire alors...

On connait des éléments de l'image : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (tricheur) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix}$.
Facile de les avoir ces trois là : ce sont les images des trois monômes de $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$.
Et on sait même que les images sont les combinaisons de ces trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
Oui, une idée ? $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 & \beta \\ 1 & 3 & 9 & \gamma \\ 1 & 4 & 16 & \delta \end{vmatrix} = 0$. Ça c'est une bonne idée ! Pourquoi avez vous attendu que ce soit Max (dit Monsieur 55 méga) qui la propose si vous l'aviez eue aussi ?
Ainsi, il n'y a presque jamais de parabole passant par les quatre points A, B, C et D.

Autre approche moins algébriste. On se donne α, β, γ et δ.
On laisse déjà δ de côté. On résout : $\left\{\begin{array}{cccccc} a & & & = & \alpha \\ a & +b & +c & = & \beta \\ a & +3.b & +9.c & = & \gamma \end{array}\right|$ (LA parabole passant par A, B et C).
On trouve $a = \alpha$, $b = \dfrac{-8.\alpha + 9.\beta - \gamma}{6}$ et $c = \dfrac{2.\alpha - 3.\beta + \gamma}{6}$ [10]. On reporte dans la dernière, et on trouve $\delta = \alpha - 2.\beta + 2.\gamma$. C'est à cette condition, et seulement avec celle ci qu'une parabole passera par les quatre points.

On note qu'on a l'équation d'un sous-espace de $(\mathbb{R}^4, +, .)$, de dimension 3. On ne pouvait pas faire plus...

Ce que j'en ai oublié de faire en filant sur mon exemple : montrer que $Im(f)$ est toujours un sous-espace vectoriel de $(F, +, .)$.

Et plus généralement, l'image d'un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ par une application linéaire est un sous-espace vectoriel de $(F, +, .)$.

En trois fois rien en dimension finie : prendre une base $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots \overrightarrow{\varepsilon_n})$ de E, et obtenir $Im(f) = Vect\big((\overrightarrow{\varepsilon_1}), \dots f(\overrightarrow{\varepsilon_n})\big)$.
En tant que $Vect(\dots)$ c'est un espace vectoriel.

Plus généralement, en redescendant aux vecteurs.

10. faites moi confiance pour le calcul, on est en maths, ce n'est pas ça le plus important

Preuve : $Im(f)$ est une partie de $(F, +, .)$ [a]
Le vecteur nul est dans $Im(f)$, c'est l'image de $\overrightarrow{0}$ (et de tous les éléments du noyau).
On prend ensuite $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ dans $Im(f)$ ainsi que α et β dans $\mathbb{R}$.
On écrit $\overrightarrow{a} = f(\overrightarrow{u})$ et $\overrightarrow{b} = f(\overrightarrow{v})$ pour au moins deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $(E, +, .)$.
Par linéarité de f, on a $\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b} = \alpha.f(\overrightarrow{u}) + \beta.f(\overrightarrow{v}) = f(\alpha.\overrightarrow{u} + \beta.\overrightarrow{v})$.
On reconnaît que $\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b}$ est dans $Im(f)$ en tant qu'image de $\alpha.\overrightarrow{u} + \beta.\overrightarrow{v}$.

a. $Im(f)$ est l'image et F est l'arrivée... quand cesserez vous de confondre ou d'utiliser l'un pour l'autre ?

. *Dans cette démonstration, rien. A part des variables qu'on présente dans le bon ordre.*
D'abord $\overrightarrow{a}$, puis $\overrightarrow{u}$ quantifié en quelque sorte par un $\exists$.
Il ne faut pas hésiter à introduire des variables au fur et à mesure.

Pour s'entrainer, quelques propriétés élémentaires :

Pour f et g dans $L(E, F)$, on a $Im(f + g) \subset Im(f) + Im(g)$ (pas égalité a priori)

Preuve : On prend $\overrightarrow{a}$ dans $Im(f + g)$. Il s'écrit $\overrightarrow{a} = (f + g)(\overrightarrow{u})$ pour au moins un $\overrightarrow{u}$de $(E, +, .)$.
On sépare par définition de la somme d'applications $\overrightarrow{a} = f(\overrightarrow{u}) + g(\overrightarrow{u})$.
On reconnaît la somme d'un élément de $Im(f)$ et d'un élément de $Im(g)$.
$\overrightarrow{a}$est dans $Im(f) + Im(g)$.

Remarques : En revanche, les éléments de $Im(f) + Im(g)$ s'écrivent $f(\overrightarrow{u}) + g(\overrightarrow{v})$ et on n'a aucune raison d'avoir $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.
L'inclusion est à sens unique.
Prenez par exemple $g = -f$: $Im(f) + Im(-f) = Im(f)$ et $Im(f + (-f)) = \{\overrightarrow{0_F}\}$.

En passant aux dimension :
$\dim(Im(f + g)) \leqslant \dim(Im(f) + Im(g)) \leqslant \dim(Im(f)) + \dim(Im(g))$. On en reparlera.

On aura aussi $Im(\alpha.f + \beta.g) \subset Im(f) + Im(g)$.

Pour f dans $L(E, F)$ et α non nul, on $Im(\alpha.f) = Im(f)$.

...et en particulier $Im(-f) = Im(f)$. Multiplier des images par α ne les fait pas déborder du sous-espace vectoriel.

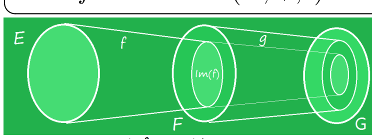
Preuve : On prend $\overrightarrow{a}$ dans $Im(\alpha.)$. Il s'écrit $\overrightarrow{a} = (\alpha.f)(\overrightarrow{u})$ pour au moins un $\overrightarrow{u}$de $(E, +, .)$.
Par définition de l'application $\alpha.f$: $\overrightarrow{a} = \alpha.f(\overrightarrow{u})$.
Par linéarité de f : $\overrightarrow{a} = f(\alpha.\overrightarrow{u})$.
On reconnaît que $\overrightarrow{a}$est dans $Im(f)$.

Et pour l'autre sens d'inclusion ? On applique notre résultat à $\alpha.f$ et $\frac{1}{\alpha}$. Réflexe de cours de maths.

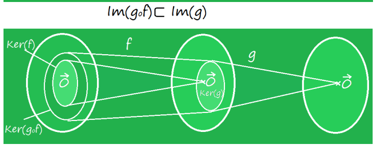
Vous aviez envie de dire qu'en passant de $Im(f)$ à $Im(\alpha.f)$ tous les vecteurs étaient multipliés par α. mais qu'est ce que ça change de multiplier les vecteurs de tout un plan par α ? Rien ! Ça reste le même plan.

Remarques : Et quitte à anticiper sur des définitions à venir : on obtient $rg(\alpha.f) = rg(f)$ pour f linéaire.

Pour f linéaire de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$ et g linéaire de $(F, +, .)$ dans $(G, +, .)$, on a $Im(g \circ f) \subset Im(g)$.



Im(g∘f)⊂ Im(g)



Ker(f)⊂Ker(g∘f)

Tout vecteur $\overrightarrow{b}$de $Im(g \circ f)$ s'écrit $g(f(\overrightarrow{a}))$ pour au moins un $\overrightarrow{a}$ de $(E, +, .)$. Il s'écrit donc $g(\overrightarrow{u})$ pour un $\overrightarrow{u}$de $(F, +, .)$ un peu particulier $(\overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{a}))$.
On a donc l'inclusion.
Et elle donne au passage $\dim(Im(g \circ f)) \leqslant \dim(Im(g))$.

Plus précisément, $Im(g \circ f) = g(Im(f))$ avec $Im(f) \subset F$.

Si f est surjective de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$ on a alors $Im(g \circ f) = Im(g)$.

Pourquoi ne compare-t-on pas $Im(g \circ f)$ et $Im(f)$? Ça se voit sur le dessin : $Im(f) \subset F$ et $Im(g \circ f) \subset G$. Ils ne sont pas dans le même espace vectoriel, comment les comparer !

On va quand même pouvoir dire que $\boxed{\dim(Im(g\circ f))\leqslant\dim(Im(f))}$ à partir de $Im(g\circ f)=g(Im(f))$.
En effet, si vous avez besoin de détails :
Prenez une base de $Im(f)$.Appliquez lui g, et vous obtenez une famille génératrice de $Im(g\circ f)$ (et plus forcément une base, on peut avoir perdu des dimensions).
Mais attention, l'inégalité $\dim(Im(g\circ f))\leqslant\dim(Im(f))$ ne vient pas directement d'une inclusion entre ensembles. méfiez vous aux oraux de concours. Si on vous demande de prouver $rg(g\circ f)\leqslant rg(f)$, l'argument n'est pas aussi rapide que pour $rg(g\circ f)\leqslant rg(g)$. Sauf si vous passez par les noyaux, mais patience.

Pour aller plus loin, un exercice :

Si $Im(f)\cap Ker(g)$ est réduit au seul vecteur nul, alors $\dim(Im(g\circ f))=\dim(Im(f))$.

Je vous laisse y réfléchir. Si vous avez encore un peu de mal, laissez de côté.

La propriété dans laquelle il n'y a rien

f est surjective de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$ si et seulement si $Im(f)=F$.

Que dire de plus que « c'est la définition de la surjectivité ?

Un classique pour s'entraîner : les images itérées (et bientôt les noyaux itérés).

Soit f un endomorphisme de $(E,+,.)$. Alors on a $E\supset Im(f)\supset Im(f^2)\supset Im(f^3)\supset Im(f^4)\ldots\supset Im(f^n)\supset Im(f^{n+1})\ldots$ où il faut comprendre $f^n=f\circ f\circ f\ldots\circ f$ et $E=Im(f^0)$. De plus, s'il y a égalité à un certain rang k, alors l'égalité est définitive $E\supset Im(f)\supset Im(f^2)\supset Im(f^3)\supset\ldots\supset Im(f^k)\supset Im(f^{k+1})=Im(f^{k+2})=\ldots=Im(f^n)\ldots$

Exemple : Vous avez deux visions possibles de cet emboitement : l'une sur les ensembles, l'autre sur les dimensions qui vont en diminuant.
Et vous avez des exemples avec la dérivation sur $(\mathbb{R}_d[X],+,.)$.
A chaque étape, l'ensemble image diminue car le degré de $P'(X)$ est strictement plus petit que celui de P.
En notant D la dérivation [a]

E	$Im(f)$	$Im(D^2)$	$Im(D^3)$	$\ldots$	$Im(D^d)$	$Im(D^{d+1})$	$Im(D^{d+2})$
$\mathbb{R}_d[X]$	$\mathbb{R}_{d-1}[X]$	$\mathbb{R}_{d-2}[X]$	$\mathbb{R}_{d-3}[X]$	$\ldots$	$\mathbb{R}_0[X]$	$\{0\}$	$\{0\}$

a. $D(f)=f'$ et $D(\alpha.f+\beta.g)=\alpha.D(f)+\beta.D(g)=\alpha.f'+\beta.g'$, $D^2(f)=f$"

On lit bien l'énoncé. On a un endomorphisme. On va donc de $(E,.+,.)$ dans $(E,+,.)$. On peut recommencer à composer et les différents ensembles images sont des sous-espaces vectoriels de $(E,+,.)$.

Chaque inclusion $Im(f^{n+1})\subset Im(f^n)$ est juste la relecture de la propriété $Im(g\circ f)\subset Im(g)$.
Mais si vous y tenez, un $\overrightarrow{a}$ de la forme $f^{n+1}(\overrightarrow{u})$ s'écrit aussi $f^n(f(\overrightarrow{u}))$ et est donc dans $Im(f^n)$.
Les images diminuent peu à peu. On perd des dimensions.
A chaque fois qu'on a un $f(\overrightarrow{u})$ qui est dans $Im(f)$ mais aussi dans $Ker(f)$, on sait que l'image suivante sera nulle.
Tout le problème va donc venir des $\overrightarrow{u}$de E dont l'une des images finit par tomber dans $Im(f)\cap Ker(f)$. Au rang suivant, son image est nulle, et on perd une dimension.

Le vrai intérêt de l'exercice : le caractère stationnaire.
Supposons maintenant qu'à un rang n, on a $Im(f^{n+1})=Im(f^n)$.
Qu'en est il au rang suivant ? On a déjà $Im(f^{n+2})\subset Im(f^{n+1})$. Mais l'autre sens ?
Prenons $\overrightarrow{a}$ dans $Im(f^{n+1})$. Il s'écrit $\overrightarrow{a}=f^{n+1}(\overrightarrow{b})$ pour au moins un $\overrightarrow{b}$de $(E,+,.)$.
On a pour objectif de l'écrire $\overrightarrow{a}=f^{n+2}(\overrightarrow{c})$ pour un $\overrightarrow{c}$ bien choisi[11]. Et on pourra utiliser $Im(f^{n+1})=Im(f^n)$.
Afin d'utiliser l'hypothèse, on écrit $\overrightarrow{a}=f(f^n(\overrightarrow{b}))$. Le vecteur $f^n(\overrightarrow{b})$ est dans $Im(f^n)$.
Par hypothèse « on n'a rien perdu de f^n à f^{n+1} », il est donc dans $Im(f^{n+1})$. Il s'écrit $f^n(\overrightarrow{b})=f^{n+1}(\overrightarrow{c})$ pour au moins un $\overrightarrow{c}$ de $(E,+,.)$.
Mais alors on a $\overrightarrow{a}=f(f^{n+1}(\overrightarrow{c}))$. C'est gagné, $\overrightarrow{a}$ est dans $Im(f^{n+2})$.

11. *oui, un nouveau vecteur $\overrightarrow{c}$*

On est donc passé de $Im(f^{n+1}) = Im(f^n)$ à $Im(f^{n+2}) = Im(f^{n+1})$ par double inclusion.
On passera de même de $Im(f^{n+2}) = Im(f^{n+1})$ à $Im(f^{n+3}) = Im(f^{n+2})$ et ainsi de suite.
L'ensemble image ne diminuera plus...

Exemple : Dans notre exemple avec la dérivation, il a dégringolé jusqu'à n'avoir plus rien, c'est un peu triste.

Avec $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4.x & -4.y & +6.z \\ -x & +y & +z \\ -4.x & +4.y & -4.z \end{pmatrix}$, je vous invite à déterminer $f \circ f$, f^3et ainsi de suite

et à compléter

	f^0	f	f^2	f^2	f^3	f^4
Ker						
Im						

$Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $Vect(\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix})$, $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$, $Vect(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix})$,
$Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, $Vect(\ )$

Vous devez voir les noyaux augmenter tandis que les images diminuent. Et ça doit vous sembler normal.

Encore un peu d'entrainement, en profitant des réflexes que vous devez avoir en tant que MPSI2.

On définit $\varphi = P(X) \longmapsto (P(2),\ P(4),\ P(5),\ P(7))$.
On l'étudie de $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$ dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$; déterminez son image.
On l'étudie de $(\mathbb{R}_4[X], +, .)$ dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$; déterminez son image.
On l'étudie de $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$ dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$; déterminez son image.

Cette application est évidemment linéaire. Et son ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}^4$. mais son ensemble image ? Qu'atteint on vraiment ?
Avec comme départ $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$ qui est de dimension 4, on peut espérer tout atteindre.
Un élève dira « par quatre points $A(2, a)$, $B(4, \beta)$, $C(5, \gamma)$ et $D(7, \delta)$, il va passer un polynôme de degré 3... pardon, inférieur ou égal à 3 » et il le prouvera en résolvant un système non dégénéré (et s'il vient de MPSI2, il dira « oh, un déterminant de VanDerMonde).
Mais il pourra dire aussi qu'il y a quatre éléments de $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$ bien pratiques :

$\dfrac{(X-4).(X-5).(X-7)}{(2-4).(2-5).(2-7)}$	$\dfrac{(X-2).(X-5).(X-7)}{(4-2).(4-5).(4-7)}$	$\dfrac{(X-2).(X-4).(X-7)}{(5-2).(5-4).(5-7)}$	$\dfrac{(X-2).(X-4).(X-5)}{(7-2).(7-4).(7-5)}$

Ils ont pour images respectives $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
La base canonique de $\mathbb{R}^4$ est dans l'ensemble image. L'ensemble image est $\mathbb{R}^4$...

Et si l'ensemble de départ est $(\mathbb{R}_4[X], +, .)$? Il contient déjà $\mathbb{R}_3[X]$ dont l'ensemble image est $\mathbb{R}^4$.
L'ensemble image sera encore $\mathbb{R}^4$, il ne va pas grandir encore.

On note au passage que cette fois on peut adjoindre à la famille $(X-2).(X-4).(X-5).(X-7)$ dont l'image est nulle. Ce sera d'ailleurs un vecteur générateur du noyau...

Et si l'ensemble de départ est $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$? L'ensemble image ne peut plus être $(\mathbb{R}^4, +, .)$.
L'ensemble image est engendré par $(\varphi(1),\ \varphi(X),\ \varphi(X^2))$. Sa dimension ne dépassera pas 3.

C'est une description plus facile que de donner des $\begin{pmatrix} a.4 & +b.2 & +c \\ a.16 & +b.4 & +c \\ a.25 & +b.5 & +c \\ a.49 & +b.7 & +c \end{pmatrix}$ *dont on ne voit pas au premier coup d'œil si ils recouvrent tout* $\mathbb{R}^4$ *ou juste une partie.*

Bon d'accord, avec ce qu'on a trouvé, on sait qu'on n'a pas tout $\mathbb{R}^4$ et qu'on a juste un sous-espace de dimension 3, ou 2 ou 1 ou 0 (enfin, 0 ça serait vu tout de suite, et 1 aussi).

Réflexe de MPSI2 : une famille génératrice de l'image est $\left(\begin{pmatrix}4\\16\\25\\49\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\5\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$; elle est libre car

$\begin{vmatrix}4&2&1\\16&4&1\\25&5&1\end{vmatrix}$ est non nul.

Et un vecteur est dans l'image si et seulement si $\begin{vmatrix}4&2&1&x\\16&4&1&y\\25&5&1&z\\49&7&1&t\end{vmatrix}$ est nul.

On trouve l'équation cartésienne de l'ensemble image : $x-5.y+5.z-t=0$.
Vous n'êtes pas convaincu ? Vérifiez pour chacun des trois vecteurs colonne écrits trois lignes plus haut.

Et maintenant, vous savez qu'une parabole passe par $A(2,x)$, $B(4,y)$, $C(5,z)$ et $D(7,t)$ si et seulement si on a $x-5.y+5.z-t=0$.

Et vous savez aussi que si P est de degré inférieur ou égal à 2, alors vous avez $P(7)=P(2)-5.P(4)+5.P(5)$.
Ah on en fait des choses en algèbre linéaire... Et cette fois encore, en sachant varier de point de vue au lieu de tout attaquer de face par le calcul.

6°) Noyau d'une application linéaire.

Cette fois, on regarde l'application dans le blanc des yeux de son ensemble de départ.
On cherche les vecteurs dont l'image est nulle. Pourquoi eux ? Parce que ce sont qui font perdre des dimensions.
Et ce sont ceux qui mesurent le défaut d'injectivité.
Tiens, avant d'attaquer, un petit tableau pour voir les liens :

noyau	départ	injectivité	inversible à gauche	familles libres
image	arrivée	surjectivité	inversible à droite	familles génératrices
		bijectivité	inversible	bases

Ne vous dites pas « je dois apprendre ce tableau par cœur, en mémoriser toutes les cases, avec des définitions et tout et tout, comme un missel ».
Non, on est en maths. Vous devez face à un exercice, une situation apercevoir ce tableau dans votre esprit, en flash, et faire naître des idées.
En maths, il faut plus des idées qui illuminent le chemin au loin que des boussoles systématiques apprises par cœur.

Allez, maintenant, un bloc avec des définitions et propriétés élémentaires :

0	$Ker(f)=\{\overrightarrow{u}\in E \mid f(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0_F}\}$ $Ker(f)=f^{-1}(\{\overrightarrow{0_F}\})$
1	$Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$ (départ)
2	L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de $(F,+,.)$ est toujours un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$ (contenant $Ker(f)$).
3	f est injective si et seulement si $Ker(f)$ est réduit à $\overrightarrow{0}$.
4	$Ker(\alpha.f)=Ker(f)$ (α non nul)
5	Si $Ker(f)$ est vide, alors f est bijective, et non surjective.
6	$Ker(f)\subset Ker(g\circ f)$
7	Pour f endomorphisme $\{\overrightarrow{0}\}\subset Ker(f)\subset Ker(f^2)\subset Ker(f^3)\ldots\subset Ker(f^n)\subset Ker(f^{n+1})\subset$ s'il y a égalité à un rang, il y a égalité partout après

Les deux lignes 0 sont une définition, pas la peine d'en faire des tonnes.
D'autant que comme approche, c'est facile.
Il suffit d'écrire une équation, un système et de résoudre.
Pas besoin d'avoir un cerveau, une moelle épinière suffit souvent. Ce n'est pas comme pour l'image où on doit se demander « quand est ce que le système que je regarde a ou non une solution ».[12]
C'est pour cela que profitant de la relation à venir $\dim(Im(f)=\dim(E)-\dim(Ker(f)$, on trouvera le noyau,

12. je n'ai jamais retrouvé dans ses œuvres la trace exacte de la citation attribuée à Albert Einstein : « pour marcher au pas derrière un drapeau, pas besoin de cerveau, une moelle épinière suffit ».

sa dimension, la dimension de l'image, et on aura juste besoin d'une inclusion...

Le 1 est rapide.
Le vecteur nul est dans $Ker(f)$.
Et si $\overrightarrow{u}$et $\overrightarrow{v}$ sont dans $Ker(f)$, alors $f(\alpha.\overrightarrow{u}+\beta.\overrightarrow{v})$ donne $\alpha.\overrightarrow{0}+\beta.\overrightarrow{0}$, ce qui fait bien $\overrightarrow{0}$.

Bonus : Si vous devez montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, vous montrez que c'est un sous-espace vectoriel d'un gros espace vectoriel connu.
Mais maintenant aussi :

> Si vous devez montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, vous montrez que c'est le noyau d'un morphisme.

Par exemple, les matrices de trace nulle forment un espace vectoriel parce que c'est le noyau de $A\longmapsto Tr(A)$.
Et comme cette application va de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$ (dimension n^2) dans $(\mathbb{R},+,.)$ (dimension 1), son ensemble image est au plus de dimension 1 (et ce n'est pas 0 car I_n a une image non nulle). Et on récupère alors que l'espace des matrices de trace nulle est de dimension n^2-1.
Petit problème quand même :
normalement, vous devez montrer que l'application que vous citez est bien linéaire, et c'est aussi long que la question initialement posée finalement...
Mais disons que vous utiliserez souvent cette locution quand même « espace vectoriel en tant que noyau d'une morphisme ».

Bonus (bis) : Avec les images, on l'avait aussi :

> Si vous devez montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, vous montrez que c'est l'image d'un morphisme.

Par exemple, pour A donné, les matrices de la forme $A.M-M.A$ forment un espace vectoriel ; il suffit de construire $M\longmapsto A.M-MA$.
On notera que si on connaît la dimension du noyau ($\{M \mid A.M=M.A\}$), on aura la dimension de l'image $\{A.M-M.A \mid M\in M_n(\mathbb{R})\}$).

Remarque : Sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, le noyau est donc soit réduit à un seule élément
soit de cardinal infini car contenant au moins une droite

Si $(G,+,.)$ est un sous-espace vectoriel de $(F,+,.)$, on montre la stabilité de $\{\overrightarrow{a}\in E \mid f(\overrightarrow{a})\in G\}$.
Si $f(\overrightarrow{a})$ et $f(\overrightarrow{b})$ sont dans G, alors $\alpha.f(\overrightarrow{a})+\beta.f(\overrightarrow{b})$ y est aussi...
Et le vecteur nul de E a bien son image dans G puisque G est un sous-espace vectoriel e E.

On note aussi que tout $\overrightarrow{k}$de $Ker(f)$ a pour image $\overrightarrow{0_F}$, qui est forcément dans G.

On écrit en fait $(H\subset G)\Rightarrow(f^{-1}(H)\subset f^{-1}(G))$ avec $H=\{\overrightarrow{0_F}\}$. Et la propriété $(H\subset G)\Rightarrow(f^{-1}(H)\subset f^{-1}(G))$ pouvait être démontrée dès le début de l'année et s'appeler « croissance ».

Venons en au fait que le noyau mesure l'injectivité.
Premier sens : f injective implique noyau réduit à $\overrightarrow{0}$.
On sait déjà que $\overrightarrow{0}$ est dans le noyau (sous-espace vectoriel).
Montrons qu'il est tout seul. On prend $\overrightarrow{a}$ dans le noyau. On traduit $f(\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0_F}$.
Mais on a donc aussi $f(\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0_F}=f(\overrightarrow{0})$ comme on vient de le dire.
Par injectivité de f : $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$.
On a donc bien la double inclusion : $Ker(f)=\{\overrightarrow{0}\}$ tout seul.

Attention : C'est bien
- « noyau réduit à $\overrightarrow{0}$ »
- « noyau trivial »
- « noyau de dimension 0 »

Si vous dite « noyau vide », vous avez perdu ! Il y a toujours au moins le vecteur nul !

Réciproquement, supposons le noyau réduit à $\overrightarrow{0}$ (injectivité « sur le vecteur nul et c'est tout »).
On prend deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ayant la même image. Montrons qu'ils sont égaux.

On va « piano ma sanno » :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f(\overrightarrow{a})=f(\overrightarrow{b}) & \Rightarrow & f(\overrightarrow{a})-f(\overrightarrow{b})=\overrightarrow{0_F} \\ & \Rightarrow & f(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=\overrightarrow{0_F} \\ & \Rightarrow & \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\in Ker(f) \\ & \Rightarrow & \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0_E} \\ & \Rightarrow & \overrightarrow{a}=\overrightarrow{b} \end{array}}$$

Simple, de toute beauté. A vous de voir quand intervient l'hypothèse, quelles lignes sont des équivalences.
On a d'ailleurs montré que $f(\overrightarrow{a})=f(\overrightarrow{b})$ était équivalent à $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\in Ker(f)$.
Donc, dès lors que le noyau n'est pas réduit à $\overrightarrow{0}$, le défaut d'injectivité est partout.

Mais mieux encore, vous retrouvez une chose.
Regardons l'équation $f(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{c}$ d'inconnue $\overrightarrow{u}$.
Il y a deux possibilités :

$\overrightarrow{c}\notin Im(f)$	$\overrightarrow{c}\in Im(f)$
$S=\emptyset$	On note $\overrightarrow{b}$ un antécédent de $\overrightarrow{c}$ (solution particulière) L'équation devient $f(\overrightarrow{u})=f(\overrightarrow{b})$. On trouve $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{b}$ décrit $Ker(f)$ $S=\{\overrightarrow{b}+\overrightarrow{k}\mid\overrightarrow{k}\in Ker(f)\}$ $S=\{\overrightarrow{b}\}+Ker(f)$

Ça vous rappelle quelquechose ?

Tenez, un truc aussi très joli, et en rapport avec les noyaux.
Pour vous, c'est quoi un vecteur propre d'une matrice A (ou même d'un endomorphisme f).
C'est un vecteur U non nul vérifiant $A.U=\lambda.U$ pour un réel λ[13].
C'est un vecteur $\overrightarrow{u}$ vérifiant $f(`\overrightarrow{u})=\lambda.\overrightarrow{u}$.

On fait passer de l'autre côté : $A.U-\lambda.U=0_n$.
On rend ceci plus homogène : $A.U-\lambda.I_n.U=0_n$.
On factorise : $(A-\lambda.I_n).U=0_n$.
On en déduit que les vecteurs propres de A de valeur propre λ sont $Ker(A-\lambda.I_n)$.
Et pour qu'il y ait d'autres vecteurs que le seul vecteur nul dans ce noyau, il faut avoir $\det(A-\lambda.I_n)=0$.
Tiens, le polynôme caractéristique.

Pour information, diagonaliser $\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}$ *de spectre* $\{2,\ 5\}$ *c'est écrire* $\mathbb{R}^2=Ker(A-2.I_2)\oplus Ker(A-5.I_2)$.
On en reparlera.

On se donne ensuite α non nul, et on compare

$\{\overrightarrow{a}\in E\mid f(\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0_F}\}$	$\{\overrightarrow{a}\in E\mid\alpha.f(\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0_F}\}$

Il y a égalité.

Corolaire : Le sous espace propre de f de valeur propre λ c'est tout aussi bien $Ker(f-\lambda.d)$ que $Ker(\lambda.Id-f)$ suivant les auteurs. Ça ne change rien.
Et le noyau de f est d'ailleurs sous-espace propre de valeur propre 0 si 0 est valeur propre.
C'est le seul lien qu'il y a ait entre « diagonalisable » et « inversible ».
Je dis ça pour ceux qui confondent tout.
Ce qu'on peut dire : « f inversible implique 0 n'est pas valeur propre de f »
et « f non inversible implique 0 est valeur propre de f ».
Et d'ailleurs, ça se retrouve en disant que le déterminant est le produit des valeurs propres par formules de Viète dans le polynôme caractéristique...

Le 5 vous déroute ? Si $Ker(f)$ est vide, alors f est bijective, et non surjective.
Ne me dites pas que vous n'avez pas vu le piège gros comme une maison !
Il est impossible que $Ker(f)$ soit vide. Il y a toujours au moins le vecteur nul.
A hypothèse impossible, vous pouvez déduire ce que vous voulez, même un truc aussi contradictoire que ce que j'ai écrit.

---

13. nul ou non ; c'est U qui ne doit pas être nul

L'inclusion $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$ est juste l'implication $(f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0_F}) \Rightarrow (g(f(\overrightarrow{a})) = (\overrightarrow{0_F}) = \overrightarrow{0_G})$.

Par composition, le noyau ne peut que grossir. Toute dimension perdue est définitivement perdue.

Exemple : On sait que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ a un noyau non trivial. [a]
En effet, cette matrice représente une application qui va de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ dans $(\mathbb{R}^2, +, .)$.
La famille $(f(\overrightarrow{i}),\ f(\overrightarrow{j}),\ f(\overrightarrow{k})$ est formé de trois vecteurs dans $(\mathbb{R}^2, +, .)$, elle est liée.
Il y a donc à coup sûr une relation de dépendance linéaire sur les colonnes. Trouvez la si vous voulez.
Il s'ensuit que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ a aussi un noyau non trivial. la matrice 3 sur " obtenue est assurément non inversible...

a. je ne devrais pas parler du noyau d'une matrice M, mais du noyau de $U \longmapsto M.U$

Tenez, si on admet qu'on peut utiliser la formule du rang qui lie dimension du noyau et dimension de l'image, on obtient un truc assez sympathique : $E \underset{f}{\longrightarrow} F \underset{g}{\longrightarrow} G$.

On a $Im(g \circ f) \subset Im(g)$	donc	$\dim(Im(g \circ f)) \leqslant \dim(Im(g))$
On a $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$	donc	$\dim(Ker(f)) \leqslant \dim Ker(g \circ f))$
	puis	$\dim(E) - \dim(Ker(f)) \geqslant \dim(E) - \dim Ker(g \circ f))$
	et enfin	$\dim(Im(f)) \geqslant \dim(Im(g \circ f))$

La dimension des ensembles images ne peut que diminuer par composition... (sauf si on compose par des isomorphismes auquel cas elle se maintient).
Je retiens ceci en disant que les applications linaires ne peuvent que faire perdre des dimensions.

Remarque : Certains vont me dire : « mais madame, on peut construire une application linéaire de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$; la dimension augmente, non ? ».
Je répondrai : « certes $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, mais l'ensemble image est au mieux de dimension " ».
Même si ça ne saute pas aux yeux que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & +y & -z \\ x & -2.y & +z \\ -2.x & +y & \\ 3.x & -y & +z \end{pmatrix}$ rate la grand majorité des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et n'atteint qu'un sous-espace de dimension 3.
Ensuite, j'ajouterai que ça saute aux yeux que je ne m'appelle pas « madame ». Pour la peine [a] trouvez moi l'équation cartésienne de l'ensemble image.

a. mais il n'y a pas de « peine », voyons, si j'étais une dame, j'essayerais de faire plus ample connaissance avec moi

---

Le 7 parle de noyaux emboites. Pour un endomorphisme ils vont en grossissant.
Ils peuvent éventuellement stagner. Si on prend f injective, ses composées le sont encore, et on a $Ker(f) = Ker(f^2) = Ker(f^3) = \ldots = \{\overrightarrow{0}\}$.

Les inclusions $Ker(f^n) \subset Ker(f^{n+1})$ sont un cas particulier de $Ker(\varphi) \subset Ker(f \circ \varphi)$.

Supposons maintenant pour un n donné : $Ker(f^n) = Ker(f^{n+1})$ (et c'est l'inclusion $Ker(f^n) \supset Ker(f^{n+1})$ qui est une vraie information).
On veut montrer $Ker(f^{n+1}) = Ker(f^{n+2})$ et on a déjà $Ker(f^{n+1}) \subset Ker(f^{n+2})$.
Pour ce qui manque, on prend $\overrightarrow{a}$ dans $Ker(f^{n+2})$. On traduit : $f(\overrightarrow{a})$ est dans $Ker(f^{n+1})$ (oui, j'ai sauté l'étape $f^{n+1}(f(\overrightarrow{a})) = f^{n+2}(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$).
Mais comme $Ker(f^{n+1})$ est égal à $Ker(f^n)$, on a $f(\overrightarrow{a}) \in Ker(f^n)$.
Et si on revient à la définition : $f^n(f(\overrightarrow{a})) = \overrightarrow{0}$. On reconnaît $\overrightarrow{a} \in Ker(f^{n+1})$.

On vient de prouver « pas de grossissement de n à $n+1$ implique pas de grossissement de $n+1$ à $n+2$ ».
On met le phénomène en boucle, les dimensions des noyaux n'augmenteront plus.

Exemple : Prenons $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ou si vous préférez $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 2.z \end{pmatrix}$

exposant	0	1	2	3	4
matrice	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$
noyau	$\{\overrightarrow{0}\}$	$Vect(\overrightarrow{i})$	$Vect(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$	$Vect(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$	$Vect(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
image	$\mathbb{R}^3$	$Vect(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$	$Vect(\overrightarrow{k})$	$Vect(\overrightarrow{k})$	$Vect(\overrightarrow{k})$

Un résultat plus fin parle même ensuite de décroissance de la « hauteur des marches ». Je m'explique ou plutôt je vous provoque :

$\bullet_a$ Pouvez vous définir un endomorphisme f de $(\mathbb{R}^4, +, .)$ (par exemple par sa matrice sur la base canonique) vérifiant

$\dim(Im(f^0)) = 4$	$\dim(Im(f^1)) = 3$	$\dim(Im(f^2)) = 2$	$\dim(Im(f^3)) = 2$

$\bullet_b$ Pouvez vous définir un endomorphisme g de $(\mathbb{R}^4, +, .)$ (par exemple par sa matrice sur la base canonique) vérifiant

$\dim(Im(g^0)) = 4$	$\dim(Im(g^1)) = 2$	$\dim(Im(g^2)) = 1$	$\dim(Im(g^3)) = 1$

$\bullet_c$ Pouvez vous définir un endomorphisme h de $(\mathbb{R}^4, +, .)$ (par exemple par sa matrice sur la base canonique) vérifiant

$\dim(Im(h^0)) = 4$	$\dim(Im(h^1)) = 3$	$\dim(Im(h^2)) = 1$	$\dim(Im(h^3)) = 1$

Un critère pour avoir $Ker(f) = Ker(g \circ f)$.
Et si on en profitait aussi pour parler d'endomorphismes nilpotents et de leur indice de nilpotence ?

7°) Avec des images et des noyaux.

Je commence par un lemme hyper-classique. Il n'est pas dans le programme en tant que théorème. J'en fais donc un lemme car le tiens à ce que vous le connaissiez...

$g \circ f = 0 \Leftrightarrow Im(f) \subset Ker(g)$

On le démontre très facilement.

Et il a une application directe.

Scolie : Prenez une matrice carrée M de taille 2. Vous savez qu'on a immédiatement $M^2 - Tr(M).M + \det(M).I_2 = 0_{2,2}$ par simple calcul.
Si on note α et β les deux racines de l'équation caractéristique $X^2 - Tr(M).X + \det(M) = 0$, on peut reformuler la ligne du dessus en
$M^2 - (\alpha + \beta).M + \alpha.\beta..I_2 = 0_{2,2}$ (Viète)
et on factorise en $(M - \alpha.I_2).(M - \beta.I_2) = 0_{2,2}$ et aussi $(M - \beta.I_2).(M - \alpha.I_2) = 0_{2,2}$ car tout est permutable.
Et on a alors $Im(M - \alpha.I_2) \subset Ker(M - \beta.I_2)$ et $Im(M - \beta.I_2) \subset Ker(M - \alpha.I_2)$.
Ça ne vous dit rien ? Allez, on cherche un peu mieux.
Si vous avez une équation différentielle $y" - s.y' + p.y = 0$. Ses valeurs propres seront notées α et β.
Vous avez là dessus l'opérateur de dérivation.
Et l'opérateur identité.
Si vous prenez y et que vous appliquez $D - \alpha.Id$ et $D - \beta.I_2$, vous récupérez $y' - \alpha.y$ et $y' - \beta.y$ que vous notez u et v et qui sont dans $Im(D - \alpha.Id)$ et $Im(D - \beta.Id)$.
Et que montre-t-on ? Que u est dans $Ker(D - \beta.Id)$.
Que v est dans $Ker(D - \alpha.Id)$. Si si : $v' - \beta.v = 0$.

Oui, scolie est un mot pédant pour dire « commentaire ».

Bon, le temps de mon exemple, vous avez démontré $g \circ f = 0 \Rightarrow Im(f) \subset Ker(g)$ et $g \circ f = 0 \Leftarrow V$

$\Rightarrow$: On suppose $g \circ f = 0$.
On prend $\overrightarrow{a}$ dans $Im(g)$. On l'écrit $\overrightarrow{a} = f(\overrightarrow{u})$ pour au moins un $\overrightarrow{u}$de E. On calcule $g(\overrightarrow{a}) = g(f(\overrightarrow{u})) = \overrightarrow{0_G}$ par hypothèse.
On reconnaît $\overrightarrow{a} \in Ker(g)$

$\underline{\Leftarrow :}$ On suppose $Im(f) \subset Ker(g)$.
Pour prouver $g \circ f = 0$, on montre pour tout $\overrightarrow{u}$de $(E, +, .)$: $g(f(\overrightarrow{u})) = \overrightarrow{O_G}$, ce qui est évident car $f(\overrightarrow{u})$ est dans $Im(f)$ donc dans $Ker(g)$.

C'est un des théorèmes pour lesquels la preuve écrite est aussi rapide que le preuve visuelle.

Une application particulière est celle des endomorphismes nilpotents.
f est dit nilpotent si il existe un entier p non nul pour lequel on a $f^k = 0$ (au sens de $f \circ f \ldots \circ f$).
Le plus classique est la dérivation sur l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n. A trop dériver, il ne restera plus rien.
L'indice de nilpotence est le premier indice pour lequel on a $f^p = 0_{E \to E}$.
On définit aussi les matrices nilpotentes : $\exists p,\ M^p = 0_{n,n}$.
L'exemple type est la matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou le morphisme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ z \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ dans lequel je pousse peu à peu vers la sortie les quatre élèves du premier rang, en mettant des nuls à leur place.
Et si vous voulez une matrice où le phénomène est moins visible, prenez $P.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.P^{-1}$ avec P inversible.
C'est ainsi que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & -7 & -3 \end{pmatrix}$ "nilpote" à l'indice 3. Et si vous calculez son polynôme caractéristique, vous le comprenez.
Et quel rapport avec nos noyaux et images ? f est nilpotente d'indice p si et seulement si $f^p = 0_{E \to E}$.
Et ceci revient à dire (par exemple) : $Im(f) \subset Ker(f^{p-1})$ ou aussi $Im(f^{p-1}) \subset Ker(f)$.

Quelques exercices :

Si f et g sont nilpotents et vérifient $f \circ g = g \circ f$ alors $f + g$ et $f \circ g$ sont nilpotents. Toute matrice nilpotente a pour déterminant 0 (nécessaire, pas suffisant du tout). Toute matrice nilpotente a une trace nulle (oui, elle est carrée pour composer...). L'indice de nilpotence d'une matrice est forcément inférieur ou égal à son format.

Ce dernier résultat repose sur $\{\overrightarrow{0}\} \subset Ker(f) \subset Ker(f^2) \subset \ldots \subset Ker(f^p) = \mathbb{R}^n$.
Et à chaque étape, la dimension augment d'au moins une unité, sinon la croissance des noyaux s'arrête.
Saurez vous mettre en place les éléments de cette preuve ?

Quelques résultats négatifs :

Si f et g sont nilpotentes, $f + g$ et $f \circ g$ ne le sont pas forcément : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il y a un ensemble des matrices nilpotentes, mais pas un groupe, ni un espace. La dérivation n'est pas nilpotente sur $(\mathbb{R}[X], +, .)$.

En dimension 2, une matrice nilpotente vérifie donc directement $M^2 = 0_{2,2}$, et on a $Im(M) \subset Ker(M)$. Les deux colonnes de M sont proportionnelles (sinon matrice inversible), et sont dans le noyau. C'est normal, quand les colonnes tombent sur la matrice, on doit trouver 0.
Il est alors facile de construire soi même des matrices nilpotentes de taille 2. Trace nulle et colonnes promotionnelles : $\begin{pmatrix} 4 & -16 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ par exemple.
Et pour des endomorphismes nilpotentes d'indice 2, débrouillez vous juste pour avoir $Im(f) \subset Ker(f)$ (ce qui entraine au passage $\dim(Ker(f)) \geqslant \dim(Im(f))$).

J'ai une autre circonstance où on utilise cette comparaison noyau image : les symétries.
Une symétrie est une application σ qui vérifie $\sigma \circ \sigma = Id$.

Scolie : $M \longmapsto {}^t M$.
Ou $z \longmapsto \overline{z}$.
Ou $P \longmapsto P(-X)$
Une telle application est son propre inverse :
essayez avec $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -5.x & +6.y & +2.z \\ -8 & +11.y & +4.z \\ 12 & -18.y & -7.z \end{pmatrix}$.

Que fait vraiment une symétrie ?
Il y a des vecteurs sur lesquels elle ne fait rien (ceux qui sont « dans le plan du miroir ») :
$Ker(\sigma - Id) = \{\overrightarrow{a} \mid \sigma(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}\}$.
Et ceux qu'elle renverse (et remettra droits avec $\sigma \circ \sigma$) : $Ker(\sigma + Id) = \{\overrightarrow{b} \mid \sigma(\overrightarrow{b}) = -\overrightarrow{b}\}$.
Je vous invite à prouver alors $E = Ker(\sigma - Id) \oplus Ker(\sigma + Id)$.[14]

σ	$Ker(\sigma - Id)$	$Ker(\sigma + Id)$	somme directe
$M \longmapsto {}^t M$	$S_n(\mathbb{R})$	$A_n(\mathbb{R})$	$M = \dfrac{M + {}^t M}{2} + \dfrac{M - {}^t M}{2}$
$z \longmapsto \overline{z}$	axe réel	axe imaginaire	$z = \dfrac{z + \overline{z}}{2} + \dfrac{z - \overline{z}}{2}$
	fonctions paires	impaires	air connu
$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$	$Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix})$	$Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+y).\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (-x-2.y)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -5 & 6 & 2 \\ -8 & 11 & 4 \\ 12 & -18 & -7 \end{pmatrix}$	$Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix})$	$Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-2.x+3.y+z).\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \dots$

D'accord, me direz vous, mais là, on ne voit que des noyaux, et pas des images.[15]
Permettez moi d'écrire $\sigma^2 = Id$ sous la forme $(\sigma - Id) \circ (\sigma + Id) = 0_{E \to E}$ et aussi $(\sigma + Id) \circ (\sigma - Id) = 0_{E \to E}$.
Et alors, vous avez $Im(\sigma - Id) \subset Ker(\sigma + Id)$ et aussi $Im(\sigma + Id) \subset Ker(\sigma - Id)$.
En fait, on aura même ici égalité.

Et c'est ce qui explique que l'élément de $Ker(\sigma - Id)$ sera de la forme $(\sigma + Id)\left(\dfrac{\overrightarrow{a}}{2}\right)$. Facile à calculer sans résoudre de système finalement.

Allez, avec noyau et image, je vous offre deux exercices très classiques que vous trouverez dans tous les livres, et posés à toute colle de cette semaine de cours.
f est un endomorphisme de E.

On a alors

$Ker(f^2) = Ker(f)$	$\Leftrightarrow$	$(Ker(f) \cap Im(f) = \{\overrightarrow{0}\}$
$Im(f^2) = Im(f)$	$\Leftrightarrow$	$(Ker(f) + Im(f) = E$

Comme on compare $Im(f)$ et $Ker(f)$, il est sous-entendu que ce sont des sous-espaces vectoriels du même espace vectoriel $(E, +, .)$. D'où endomorphisme et existence de $f \circ f$.
Normalement, à ce stade, vous posez le stylo (ou le téléphone, ou le sur-ligneur de couleur), et vous essayez de démontrer le résultat. Sachant qu'il y a quatre implications. Et que chacune aboutit à une égalité de deux ensembles, donc à une double inclusion.

Ligne 1 : On suppose $Ker(f) = Ker(f^2)$.
Il faut montrer $Ker(f) \cap Im(f) = \{\overrightarrow{0}\}$.
On a déjà $\overrightarrow{0} \in Ker(f) \cap Im(f)$.
Réciproquement, soit $\overrightarrow{a}$ à la fois dans $Ker(f) \cap Im(f)$.
Il s'écrit $\overrightarrow{a} = f(\overrightarrow{u})$ et vérifie $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$.
A vous d'arriver à $\overrightarrow{a} = 0$ en utilisant l'hypothèse.

On suppose cette fois $Ker(f) \cap Im(f) = \{\overrightarrow{0}\}$.
L'inclusion $Ker(f) \subset Kerf(f^2)$ est toujours vraie.
Pour prouver $Ker(f^2) \subset Ker(f)$, on prend $\overrightarrow{u}$ dans $Ker(f^2)$.
Je vous laisse m'indiquer où est alors $f(\overrightarrow{u})$, et conclure.

14. analyse et synthèse
15. Et déjà certains se disent que c'est joli de dire « un vecteur qui ne change pas par σ est un vecteur de $Ker(\sigma - Id)$ ».

Ligne 2 :

On suppose $Im(f) = Im(f^2)$.
On a déjà $Im(f) + Ker(f) \subset E$, ça c'est sûr.
Mais pourquoi tout vecteur $\overrightarrow{a}$ est il la somme d'un $\overrightarrow{k}$ de $Ker(f)$ et d'un $f(\overrightarrow{b})$ de $Im('f)$?
Il faut utiliser l'hypothèse, et dire que $f(\overrightarrow{a})$ est dans $Im(f)$ donc dans $Im(f^2)$. Le vecteur $f(\overrightarrow{a})$ s'écrit $f^2(\overrightarrow{b})$ pour au moins un $\overrightarrow{b}$ de $(E, +, .)$.
Allez, vous y êtes presque...

On suppose $E = Ker(f) + Im(f)$.
On a déjà $Im(f^2) \subset Im(f)$.
Pour l'autre sens, on prend $\overrightarrow{b}$ dans $Im(f)$. On l'écrit $f(\overrightarrow{a})$.
On décompose alors $\overrightarrow{a}$ comme somme d'un $\overrightarrow{k}$ de $Ker(f)$ et d'un $f(\overrightarrow{c})$ de $Im(f)$.
Vous voyez comment finir ?

Et si on en venait maintenant au théorème fondamental de ce cours sur les morphismes ?

8°) Théorème du rang.

On nous donne une application linéaire de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$.
On veut en faire un isomorphisme.Comment la rendre surjective ? En restreignant l'espace d'arrivée. Inutile de regarder les vecteurs qui ne sont pas atteints.
On ne va plus de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$ mais de $(E, +, .)$ dans $(Im(f), +, .)$. Par définition même, elle devient surjective.

Et pour la rendre injective ? les défauts d'injectivité se lisent dans le noyau. Il faut donc le virer.
Comment virer un sous-espace vectoriel ?
En se plaçant sur un supplémentaire.[16]

On peut alors formuler le théorème :

Une application linéaire induit un isomorphisme d'un supplémentaire du noyau vers l'image.

Le verbe « induire » est un peu pédant pour dire « devient ».

De même que la notation qui est parfois utilisée : de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$, on note f
de $(S, +, .)$ (sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$), on note $f_{|S}$.

On prend donc f linéaire de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$.
On sait que $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$.
On choisit alors un supplémentaire S de $Ker(f)$ dans E : $E = Ker(f) \oplus S$.
Si on est en dimension finie : on prend une base de $Ker(f)$ $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k})$ (famille libre dans $(E, +, .)$) et on complète en base de $(E, +, .)$: $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{e_{k+1}}, \dots \overrightarrow{e_n})$.[17] On peut alors choisir $S = Vect(\overrightarrow{e_{k+1}}, \dots \overrightarrow{e_n})$. On note qu'alors $\dim(S) = \dim(E) - \dim(Ker(f))$.

L'application f peut calculer l'image d'un vecteur $\overrightarrow{s}$ de S, en tant que vecteur particulier de $(E, +, .)$.
Son image est dans $Im(f)$, en tant qu'image d'un élément de $(E, +, .)$.
f va bien de $(S, +, .)$ dans $(Im(f), +, .)$.
Elle est linéaire, puisque la relation $f(\alpha.\overrightarrow{s} + \beta.\overrightarrow{s'}) = \alpha.f(\overrightarrow{s}) + \beta.f(\overrightarrow{s'})$ est vraie pour les vecteurs de $(E, +, .)$ donc a fortiori pour ceux de $(S, +, .)$.

On montre qu'elle est bien surjective.
Il faut le prouver, car comme a a restreint l'espace de départ, on risque d'avoir perdu des images.
Soit $\overrightarrow{a}$ dans $Im(f)$. Par définition, il a au moins un antécédent $\overrightarrow{u}$...dans E. Il en faut un dans S.
Mais par définition de $E = Ker(f) \oplus S$, $\overrightarrow{u}$ s'écrit $\overrightarrow{k} + \overrightarrow{s}$ avec $\overrightarrow{k}$ dans $Ker(f)$ et $\overrightarrow{s}$ dans S.
On applique : $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} + f(\overrightarrow{s})$.
Le vecteur $\overrightarrow{a}$ s'écrit $f(\overrightarrow{s})$ pour un (et un seul ?) vecteur $\overrightarrow{s}$ de S. Il a un antécédent dans S, c'est ce qu'on voulait.

Passons à l'injectivité, ce qui se traduit par la recherche du noyau de la restriction de f à S.
On prend donc un $\overrightarrow{s}$ de S d'image nulle : $f(\overrightarrow{s}) = \overrightarrow{0_F}$. On déduit que $\overrightarrow{s}$ est dans $Ker(f)$ (le vrai).
Mais comme il est aussi dans S, l'hypothèse « somme directe » dit : $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{0}$.

16. j'ai bien dit « supplémentaire non complémentaire »
17. il y a souvent plusieurs façons de compléter

Le noyau est réduit au seul vecteur nul, l'application est injective.

DeS dans $Im(f)$, f est devenue bijective.

Voyons tout de suite une application avec un sujet de concours assez joli, dont je ne vous livre ici qu'un extrait.
On considère l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n(\mathbb{R}[X], +, .)$.
On va montrer que pour tout polynôme Q donné de degré inférieur ou égal à $n-1$, il existe un unique polynôme P nul en 0 vérifiant $P(X+1) - P(X) = Q(X)$.
Approche laborieuse : on se donne Q avec des coefficients b_i et on résout un grand système avec les coefficients de P et des binomiaux partout.

Non ! On est en maths ! Le seul calcul qu'on va peut être faire sera juste du niveau de $0+0+0+0=0$.

On se fixe n et on pose $E = \mathbb{R}_n[X]$.
On définit $\Delta = (P(X) \longmapsto P(X+1) - P(X))$, opérateur aux différences finies.
Cet opérateur prend un polynôme et calcule un nouveau polynôme (dont au pire le degré a diminué).
Il est linéaire : $\Delta(\alpha.P(X) + \beta.Q(X)) = \ldots$.
Il va de $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$ dans lui même.[18]

Son noyau est formé des polynômes $P(X)$ vérifiant $P(X+1) = P(X)$.
Ce sont les polynômes constants.[19]
Le noyau est de dimension 1.

Un supplémentaire du noyau est formé des polynômes nuls en 0, espace qu'on va noter S..
En effet, tout polynôme P se décompose d'une façon unique en « un polynôme constant et un polynôme nul en 0 » : $P(X) = (P(X) - P(0)) + P(0)$.

L'application Δ induite donc un isomorphisme entre cet espace des polynômes nuls en 0 et l'espace image.

Mais qui est l'espace image ? Il est inclus dans $\mathbb{R}_n(X)$ et même dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ car si P est de degré d, $\Delta(P)$ semble bien être de degré strictement plus petit.

L'espace image est de inclus dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, mais on sait aussi qu'il est isomorphe à S.
Et S est de dimension n (supplémentaire dans $\mathbb{R}_n[X]$ d'un sous-espace de dimension &).
Par isomorphisme les dimensions se conservent (une base donne une base) : $Im(\Delta)$ est inclus dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et est de dimension n.
C'est $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Bilan : Δ est un isomorphisme entre S et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Et un isomorphisme ça veut dire quoi ? Qu'il y a une réciproque.
Pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à $n-1$ il existe un unique polynôme P nul en 0 vérifiant $P(X+1) - P(X) = Q(X)$.

Bilan du bilan : *aucun calcul, juste de petites idées qu'on emboîte, avec des jeux sur les dimensions.*
Pour certains, c'est totalement génial.
Pour d'autres, c'est flippant de savoir qu'on va vous juger non pas sur une capacité à apprendre treize formules, à connaître dix huit exercices classiques ou méthodes déposées dans des livres... c'est flippant, on va vous juger sur une capacité à inventer de touts petits arguments tout simples... on juge plus votre bon sens que votre travail... mais justement, on vous a sélectionné là dessus...

9°) Théorème du rang en dimension finie.

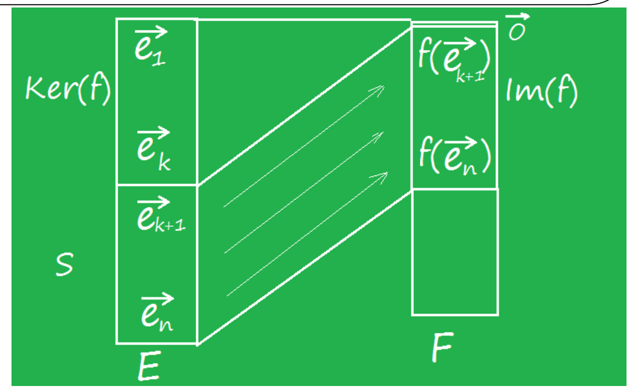
18. oui, je sais, le degré diminue, et certains piaffent d'impatience de me dire « non, on arrive dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$; mais on parle d'ensemble d'arrivée, et pas encore d'ensemble image, patience...

19. une preuve : on a donc polynômes périodiques, le polynôme $P(X) - P(0)$ admet une infinité de racines, il est donc nul, ou alors $P'(X)$ a une infinité de racines données par théorème de Rolle, il est donc nul, ou alors P est borné car continu et périodique, il ne peut être que constant...

On reformule en dimension finie du théorème du rang.

On se donne $(E,+,.)$ de dimension finie n.
On se donne f linéaire de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$.
On prend une base de $Ker(f)$: $(\overrightarrow{e_1},\dots\overrightarrow{e_k})$ (conseil pour comprendre dimension k avec un k qui veut dire « noyau ») et on complète en base de $(E,+,.)$: $(\overrightarrow{e_1},\dots\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{e_{k+1}},\dots\overrightarrow{e_n})$. On pose alors $S=Vect(\overrightarrow{e_{k+1}},\dots\overrightarrow{e_n})$ mais on s'en fout. Ce qui est important : $(f(\overrightarrow{e_{k+1}}),\dots f(\overrightarrow{e_n}))$ est une base de $Im(f)$.

Oui, c'est vraiment la même chose, mais narrée avec des bases...
Et cette fois, j'ai mon petit dessin.



On notera qu'on ne sait rien du « reste de F ».

Mais on peut se dire que c'est vraiment une partie d'espace qui ne sert à rien pour f.
.
.
.
Bon, on le fait.
Déjà, tout vecteur $\overrightarrow{a}$ de $Im(f)$ est l'image d'un vecteur $\overrightarrow{u}$de $(E,+,.)$.

On décompose ce vecteur $\overrightarrow{u}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{e_i}$.

On applique : $\overrightarrow{a}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.f(\overrightarrow{e_i})$ par linéarité.

On efface ce qui a une image assurément nulle : $\overrightarrow{a}=\sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i.f(\overrightarrow{e_i})$.

On vient de prouver que tout vecteur de $Im(f)$ se décompose à l'aide de $(f(\overrightarrow{e_{k+1}}),\dots f(\overrightarrow{e_n}))$.[20]

Et pour l'unicité de décomposition ? On prend un vecteur de $Im(f)$ qu'on décompose de deux façons : $\overrightarrow{a}=\sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i.f(\overrightarrow{e_i})=\sum_{i=k+1}^{n}\beta_i.f(\overrightarrow{e_i})$ (objectif : chaque α_i est égal à son β_i).

On fait passer de l'autre côté : $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{a}=\sum_{i=k+1}^{n}(\alpha_i-\beta_i).f(\overrightarrow{e_i})$.

On compacte par linéarité : $f\Big(\sum_{i=k+1}^{n}(\alpha_i-\beta_i).\overrightarrow{e_i}\Big)=\overrightarrow{0_F}$.

Le vecteur $\sum_{i=k+1}^{n}(\alpha_i-\beta_i).\overrightarrow{e_i}$ est dans $Ker(f)$. Il se décompose sous la forme $\sum_{i=1}^{k}\gamma_i.\overrightarrow{e_i}$.

On a donc $\sum_{i=k+1}^{n}(\alpha_i-\beta_i).\overrightarrow{e_i}=\sum_{i=1}^{k}\gamma_i.\overrightarrow{e_i}$ puis $\sum_{i=1}^{k}\gamma_i.\overrightarrow{e_i}+\sum_{i=k+1}^{n}(\beta_i-\alpha_i).\overrightarrow{e_i}=\overrightarrow{0}$.
Comme une base est une famille libre, chaque γ_i est nul, mais surtout chaque $\beta_i-\alpha_i$ est nul.[21]

Attention : Pour ce problème, il faut construire la base de départ de manière convenable.
Ce n'est pas « on nous donne une base, on isole les vecteurs qui sont dans le noyau ». Peut être qu'aucun n'y est, mais que les vecteurs du noyau sont des sommes de vecteurs de la base.
En fait, on prend un e base adaptée à notre morphisme : noyau et on agrandit...

Comme on a une base de l'image, on peut mesurer sa dimension : combien de vecteurs de $(\overrightarrow{e_{k+1}})$ à $(\overrightarrow{e_n})$?
Réponse : $n-k$.
On a donc $\dim(Im(f))=n-k$.

20. je sais, on passait aussi par « l'image d'une base de $(E,+,.)$ est une famille génératrice de $Im(f)$ »
21. il y a d'autres preuves plus élégantes avec tout ce qu'on a fait sur les familles libres

Et si on tient compte de qui est n et qui est k :

$\dim(Im(f) = \dim(E) - \dim(Ker(f))$

C'est ce que disait aussi l'isomorphisme entre noyau et supplémentaire de l'image, avec le fait qu'un isomorphisme conserve les dimensions. Ici, il a envoyé une base sur une base.

Je vous invite à distinguer théorème et formule

Théorème du rang	Formule du rang
f induit un isomorphisme entre un supplémentaire du noyau et l'image	$\dim(Im(f)) = \dim(E) - \dim(Ker(f))$

La formule est une conséquence du théorème. Elle ne fait que mesurer, alors que le théorème permet de construire des applications réciproques.

Attention : La formule du rang ne fait que comparer des dimensions. Elle ne dit pas grand choses de plus. [a]
Surtout, elle ne compare pas $Im(f)$ et $Ker(f)$. Juste leurs dimensions.
Et à cela, une raison simple : $Ker(f)$ est dans E et $Im(f)$ est dans f.

C'est pourquoi je vous recommande

dans E	dans F
$\dim(E) - \dim(Ker(f)$	$= \dim(Im(f))$

plutôt que $\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(E)$ qui est exacte mais vous pousse à rapprocher $Im(f)$ et $Ker(f)$ alors qu'ils se se côtoient que par l'intermédiaire du supplémentaire que j'ai appelé S.

a. mais c'est déjà énorme

Cette formule a beaucoup de conséquences.
Y compris des théorèmes pour flemmards.

Flemmard : Soit f un isomorphisme en dimension finie (f va de $(E, +, .)$ dans lui même, de dimension n).

Si f est injective, alors $Ker(f)$ est réduit à $\overrightarrow{0}$.
$Ker(f)$ est de dimension nulle.
$\dim(Im(f)) = \dim(E) - 0 = \dim(E)$
Comme $Im(f)$ est déjà inclus dans $(E, +, .)$, on a $Im(f) = E$.
f est surjective...

Si f est surjective alors $Im(f)$ est égal à E.
$\dim(Im(f)) = \dim(E) - Ker(f)$ donne $\dim(Ker(f)) = 0$
f est injective...

Ça vous rappelle les théorèmes libre et bon cardinal implique base
génératrice et bon cardinal implique base
Ici, la notion de bon cardinal, c'est « endomorphisme ».

Et ça vous donne envie d'écrire

Inversible à droite implique surjective implique injective implique inversible à gauche.

Et vice versa...

Détail : Attention, ces théorèmes pour flemmards ne sont valides qu'en dimension finie...
Prenez pour RE l'espace des suites réelles, et définissez

$\sigma =$	$(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots) \longmapsto (0,\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots)$
$\tau =$	$(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots) \longmapsto (a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots)$

je vous invite à vérifier

σ	injective	non surjective
τ	non injective	surjective

et aussi

$\sigma \circ \tau = ?$	$\tau \circ \sigma = Id_E$

Peut être avez vos envie aussi de raconter tout de suite des choses comme

linéaire de $(\mathbb{R}^5, +, .)$ dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ implique noyau au moins de dimension 2

Surtout, ne vous gênez pas pour le faire, on va voir de multiples exemples de ce type.
Mais j'ai envie de vous faire retrouver une autre formule.

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, .)$.
On crée alors l'application $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) \longmapsto \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ de $A \times B$ dans E.

Pourquoi pas.

Elle est linéaire. $\alpha.(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) = (\alpha.\overrightarrow{a}, \alpha.\overrightarrow{b}) \longmapsto \alpha.(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$ et $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \longmapsto (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{v})$.

Son ensemble image est fait des vecteurs de la forme $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ avec $\overrightarrow{a}$ dans A et $\overrightarrow{b}$ dans B : c'est $A+B$ (somme pas forcément directe).

Son noyau est formé des vecteurs d'image nulle.
Mais pour que l'image soit nulle, il faut que l'on soit parti d'un couple $(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u})$ avec $\overrightarrow{u}$ dans A et $-\overrightarrow{u}$ dans B.
Ce qui revient à exiger $\overrightarrow{u}$ dans $A \cap B$.
Le noyau n'est pas $A \cap B$, mais il y est isomorphe. Il a la même dimension.
Et la formule du rang donne alors $\boxed{(\dim(A) + \dim(B)) - \dim(A \cap B) = \dim(A + B)}$
La formule de Grassmann n'est qu'une conséquence de la formule du rang. Chapeau...

Comment il faut aussi savoir jouer avec la formule du rang.
Comme indiqué, on retrouve des choses directes :
• sachant $\dim(Im(f)) \leqslant \dim(F)$, on voit tout de suite qu'une application de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$ ne peut pas être injective : $5 - \dim(Ker(f)) \leqslant 3$.
• sachant que la dimension du noyau est positive ou nulle, une application linéaire de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ dans $(\mathbb{R}^5, +, .)$ ne peut pas être surjective, son ensemble image est au plus de dimension 3.

Sur un problème, comptez le nombre de dimensions dont vous disposez au départ (16 trinômes), le nombre de contraintes (la dimension du noyau) et arrivez à la conclusion que vous ne pourrez pas atteindre l'image imposée (un colloscope qui tourne).

Chaque équation vous fait perdre une dimension.
Dans $(\mathbb{R}^n, +, .)$, un espace défini par p équations est normalement de dimension $n - p$.

Exemple : Dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$, l'ensemble d'équation $\left\{\begin{array}{cccc} x & +y & -z & = 0 \\ x & +2.y & +3.z & = 0 \end{array}\right.$ est de dimension 1.
C'est une droite, en tant qu'intersection de deux plans.
Ou en tant que noyau de $(x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x & +y & -z \\ x & +2.y & +3.z \end{pmatrix}$ de départ $\mathbb{R}^3$ et d'image $\mathbb{R}^2$.

Rexemple : Dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$, l'ensemble d'équation $\left\{\begin{array}{cccc} x & +y & -z & = 0 \\ x & +2.y & +3.z & = 0 \\ 2.x & +3.y & +4.z & = 0 \end{array}\right.$ est de dimension 0.
C'est un point, en tant qu'intersection de trois plans.
Ou en tant que noyau de $(x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x & +y & -z \\ x & +2.y & +3.z \\ 2.x & +3.y & +4.z \end{pmatrix}$ de départ $\mathbb{R}^3$ et d'image $\mathbb{R}^3$.

Rrexemple : Dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$, l'ensemble d'équation $\left\{\begin{array}{cccc} x & +y & -z & = 0 \\ x & +2.y & +3.z & = 0 \\ 2.x & +3.y & +2.z & = 0 \end{array}\right.$ est de dimension 1.
C'est une droite, en tant qu'intersection de trois plans dont le troisième ne sert à rien.
Ou en tant que noyau de $(x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x & +y & -z \\ x & +2.y & +3.z \\ 2.x & +3.y & +2.z \end{pmatrix}$ de départ $\mathbb{R}^3$ et d'image de dimension 2.
En effet, ici, la dernière forme linéaire $(x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} 2.x & +3.y & +2.z \end{pmatrix}$ est la somme des deux premières.
L'ensemble image de $(x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x & +y & -z \\ x & +2.y & +3.z \\ 2.x & +3.y & +2.z \end{pmatrix}$ est formé de vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vérifiant $c = a + b$.

$\boxed{\text{Dans } (\mathbb{R}^n,+,.)\text{, un espace défini par } p \text{ équations linéairement indépendantes est de dimension } n-p.}$

Et je vous laisse broder sur
Dans $(\mathbb{R}^n,+,.)$, un espace défini par p équations est de dimension $n-p+k$ où k est le nombre de relations de dépendances linéaires qu'il y a entre les équations...
Oui, la phrase devient lourde...

Sachez aussi encadrer la dimension du noyau et de l'image.

Premier exemple.

L'application linéaire $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & +y & -2.z \\ 2.x & +y & -3..z \\ x & +4.y & -5.z \end{pmatrix}$ (notée f) va de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ dans lui même. Mais arrive-t-elle sur $\mathbb{R}^3$ entier ?

On détecte un vecteur dans le noyau : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le noyau est au moins de dimension 1.

L'image est donc au plus de dimension 2. Mais les deux vecteurs $f(\overrightarrow{i})$ et $f(\overrightarrow{j})$ sont indépendants car non colinéaires ($\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$).

L'image est donc exactement de dimension 2. Et le noyau est exactement de dimension 1.
On note d'ailleurs que les vecteurs $f(\overrightarrow{i})$ et $f(\overrightarrow{j})$ sont dans le plan d'équation $7.x-3.y-z=0$.
Par combinaison, il est est de même de $f(\overrightarrow{k})$ puis de tout vecter $f(\overrightarrow{a})$.
D'ailleurs, vérifiez : $7.(x+y-2.z)-3.(2.x+y-3.z)-(x+4.y-5.z)=0$ pour tout triplet. Oh non, cette forme n'est pas pertinente.

Je vous écris ça $\begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Vision :

La relation $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ livrait un vecteur dans le noyau de M [a].

La relation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne un vecteur dans le noyau de ${}^tM$.

Etrange.
Bon, il est vrai qu'on jongle avec M non inversible à gauche
M non inversible à droite
$\det(M)=0$
$\det({}^tM)=0$
${}^tM$ non inversible

a. appellation abusive : « noyau d'une matrice » à éivter aux concours

Tout cela est subtil. Je veux juste que vous aperceviez des touches de peinture sur la palette de l'algèbre linéaire....

Deuxième exemple.

Tenez, on va créer une application de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ dans $(\mathbb{R}^4,+,.)$ ni injective ni surjective.
On va avoir besoin d'une matrice à trois colonnes *(calcul de $f(\overrightarrow{i})$, $f(\overrightarrow{j})$ et $f(\overrightarrow{k})$)* et quatre lignes *(on arrive dans $\mathbb{R}^4,+,.)$)*.
Dictez moi les premiers coefficients :

$\begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & ? & ? \\ 2 & ? & ? \\ 1 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ? \\ 2 & 3 & ? \\ 1 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ? \\ 2 & 3 & ? \\ 1 & 2 & ? \\ 0 & 1 & ? \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
allez, j'écoute	merci Ornella	merci Chloé	merci Manon	merci Sucri

Vous comprenez tous et toutes l'idée de Sucri. Je demandais « non injective ». Il fallait donc avoir au moins un vecteur non nul dans le noyau. Il a pris $\overrightarrow{k}$ troisième vecteur de base.
Mais vous trouvez peut être que c'est trop visible, cette colonne de 0.

On va plutôt prendre $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ La troisième colonne est la somme des deux premières.

Vous voulez vraiment un vecteur dans le noyau ? Mais on a imposé ici $f(\overrightarrow{k}) = f(\overrightarrow{i}) = f(\overrightarrow{j})$. Le vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ est dans le noyau.

Ce se voit en « faisant tomber $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sur la matrice.

Ah, mais le noyau contient ce vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. Il est au moins de dimension 1.
Mais qui dit qu'on n'a pas raté d'autres vecteurs dans le noyau ? Autres que les multiples de $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.
Et Tristan me dit : les deux premières colonnes sont indépendantes, c'est bon ! ».

En effet : Le noyau est au moins de dimension 1. S'il était de dimension 2, alors par soustraction l'image serait de dimension 1. Les trois vecteurs colonnes devraient donc être colinéaires. Ce n'est pas le cas. L'image est au moins de dimension 2 et le noyau au moins de dimension 1.

On n'a plus le choix :

l'image est de dimension 2 : $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ et le noyau est de dimension 1 : $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$.

Bonus : Puisque l'image est de dimension 2 au sein de $(\mathbb{R}^4, +, .)$, elle est déterminée par deux équations (intersection de deux sous-espaces de dimension 3).

Lesquelles ? Vieux réflexe de début d'année : l'image est formé des $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ tels que $(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix})$ soit liée : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & y \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & y \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix} = 0$ par exemple.

Vérifiez : les images vérifient toutes $x - z = 0$ et aussi $2.x - y - t = 0$.
C'est vrai pour les trois colonnes de la matrice. Donc pour toutes leurs combinaisons.

Et aussi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Et pourquoi pas $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Et même $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$ est une base du noyau de la transposée de M. Oh il y a des choses là derrière...

10°) Théorème du rang version matricielle.

Reprenons le théorème du rang en dimension finie, avec un morphisme f de $(E_\beta, +, .)$ dans $(F_\Gamma, +, .)$.
C'est quoi cette notation E_β ? C'est pour dire que E est muni qu'une base β que l'on va considérer comme « canonique », donnée d'entrée de jeu.
Comme c'est celle dont a hérité de nos ancêtres, je la note avec une lettre grecque, et ses vecteurs sont notés $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots \overrightarrow{\varepsilon_n})$ *(information donné en passant,* $\dim(E) = n$*).*
Et évidemment, F_Γ signifie qu'on nous a donné cette fois une base Γ de F : $(\overrightarrow{\gamma_1}, \dots \overrightarrow{\gamma_p})$ (et cette fois, vous connaissez $\dim(F)$).

Notre morphisme f est alors donné par sa matrice M de E_β dans F_Γ *(les colonnes sont les* $f(\overrightarrow{\varepsilon_k})$*, exprimés sur la base* Γ*).* Je rappelle qu'il y a des choses qu'on peut déjà lire sur la matrice.

Mais ces deux bases ne sont pas adaptées du tout à notre morphisme.
Prenons comme ton bon « rangeur » une base de $Ker(f)$ que l'on complète en base de E. On a une nouvelle base, que l'on note B avec des lettres latines : $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{e_{k+1}} \dots \overrightarrow{e_n})$ *(le même n au total).*
Et du côté de F, on a la base de $Im(f)$: $(f(\overrightarrow{e_{k+1}}) \dots f(\overrightarrow{e_n}))$. On la complète en base de F : $(f(\overrightarrow{e_{k+1}}) \dots f(\overrightarrow{e_n}), \overrightarrow{g_{n+1}}, \dots)$ (et ici, à vous de me dire combien de vecteurs il a fallu ajouter :

p	$p-k$	$p-(n-k)$	$n-p$

nouvelle base d'arrivée qu'on va noter G.

On a alors deux univers pou décrire f : $\boxed{\begin{array}{cccc} E_\beta & \longrightarrow & F_\Gamma & \text{canonique} \\ E_B & \longrightarrow & F_G & \text{adaptée à } f \end{array}}$.

Dans le premier univers, la matrice s'appelle M et on l'a définie plus haut : les $f(\overrightarrow{\varepsilon_k})$ sur la base $(\overrightarrow{\gamma_1}, \dots \overrightarrow{\gamma_p})$.

$$\begin{array}{cccccccc}
\alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 & \dots & \alpha_1^n & \leftarrow & \overrightarrow{\gamma_1}^* \\
\alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 & \dots & \alpha_2^n & \leftarrow & \overrightarrow{\gamma_2}^* \\
\alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 & \dots & \alpha_3^n & \leftarrow & \overrightarrow{\gamma_3}^* \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\alpha_p^1 & \alpha_p^2 & \alpha_p^3 & \dots & \alpha_p^n & \leftarrow & \overrightarrow{\gamma_p}^* \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \\
f(\overrightarrow{\varepsilon_1}) & f(\overrightarrow{\varepsilon_2}) & f(\overrightarrow{\varepsilon_3}) & & f(\overrightarrow{\varepsilon_n}) & &
\end{array}$$

Mais dans le deuxième ? Ce n'est plus la même matrice, puisque les bases ont changé.
On doit exprimer les $f(\overrightarrow{e_k})$ sur la base G.
Et pour les k premiers, c'est facile ! $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2} \dots \overrightarrow{e_k}$ sont dans le noyau.
$f(\overrightarrow{e_1})$, $f(\overrightarrow{e_2}) \dots f(\overrightarrow{e_k})$ sont tous nuls.
Et pour écrire le vecteur nul, quelle que soit la base, c'est facile : une colonne de 0.

$$\begin{array}{cccccccc}
a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n & \leftarrow & f(\overrightarrow{e_{k+1}})^* \\
a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^n & \leftarrow & f(\overrightarrow{e_{k+2}})^* \\
a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \dots & a_3^n & \leftarrow & f(\overrightarrow{e_n})^* \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_p^1 & a_p^2 & a_p^3 & \dots & a_p^n & \leftarrow & \overrightarrow{g_{p-n+k}}^* \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \\
f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & f(\overrightarrow{e_3}) & & f(\overrightarrow{e_n}) & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & \dots & 0 & a_1^3 & \dots & a_1^n & \leftarrow & f(\overrightarrow{e_{k+1}})^* \\
0 & \dots & 0 & a_2^3 & \dots & a_2^n & \leftarrow & f(\overrightarrow{e_{k+2}})^* \\
0 & \dots & 0 & a_3^3 & \dots & a_3^n & \leftarrow & f(\overrightarrow{e_n})^* \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & a_p^3 & \dots & a_p^n & \leftarrow & \overrightarrow{g_{p-n+k}}^* \\
\uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \\
f(\overrightarrow{e_1}) & & f(\overrightarrow{e_k}) & f(\overrightarrow{e_{k+1}}) & & f(\overrightarrow{e_n}) & &
\end{array}$$

Ces k colonnes de 0 nous donnent tout de suite effectivement k vecteurs dans le noyau.
On se dit que les colonnes suivantes doivent être indépendantes, sinon le noyau serait encore plus gros.
On voit qu'un vecteur de $Ker(f)$, s'écrivant $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sur la base adaptée a une image nulle.

Et les colonnes suivantes ? Très difficile !
Comment le vecteur $f(\overrightarrow{e_{k+1}})$ se d »compose-t-il sur la base $(f(\overrightarrow{e_{k+1}}) \dots f(\overrightarrow{e_n}),\ \overrightarrow{g_{n+1}}, \dots)$?
Mais si ? Combien de fois le premier : une fois.
Combien de fois les suivants ? Zéro fois.
On a une colonne avec un 1 et des 0.
Pareil pour les suivants.

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \leftarrow & f(\overrightarrow{e_{k+1}})^* \\
0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 & \leftarrow & f(\overrightarrow{e_{k+2}})^* \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \leftarrow & f(\overrightarrow{e_n})^* \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \leftarrow & \overrightarrow{g_{p-n+k}}^* \\
\uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \\
f(\overrightarrow{e_1}) & & f(\overrightarrow{e_k}) & f(\overrightarrow{e_{k+1}}) & & f(\overrightarrow{e_n}) & &
\end{array}$$

Cette fois, il y a encore des choses à lire : $n-k$ images non nulles et même indépendantes.
des vecteurs qui ne servent pas dans l'ensemble d'arrivée de $\overrightarrow{g_{n+1}}$ au dernier
On lit facilement la dimension du noyau (colonnes nulles), et de l'image (lignes avec un 1).
On note qu'on relit aisément $\dim(Im(f)) = n-k = \dim(E) - \dim(Ker(f))$.
Il fut d'ailleurs un temps où la démonstration de la formule du rang en prépa H.E.C. passait par cet aspect matriciel.

Un exemple pour bien suivre ?
Au hasard : $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & +2.y & +3.z \\ 2.x & +3.y & +5.z \\ x & +2.y & +3.z \\ & y & +z \end{pmatrix}}$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur la base canonique de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ au départ et celle de $(\mathbb{R}^4, +, .)$ à l'arrivée. Oui, c'est le hasard.

Comme premier vecteur, on prend $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, d'image nulle. Et on complète avec $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ parce qu'on a le choix.
Un vecteur qui s'écrivait $x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k}$ sur la base canonique s'écrit maintenant $-z.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) + (x+z).\overrightarrow{i} + (y+z).\overrightarrow{j}$.

Et réciproquement, $x'.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k})+y'.\overrightarrow{i}+z'.\overrightarrow{j}$ *(coordonnées x', y' et z' sur cette base)* s'écrit $(x'+y').\overrightarrow{i}+(x'+z').\overrightarrow{j}-x'.\overrightarrow{k}$ sur la base canonique.

Et même : Si vous y tenez, je vous offre deux matrices de passages, inverse l'une de l'autre.
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ Saurez vous les interpréter pour les vecteurs de base ?
Et pour les coordonnées ?

Et à l'arrivée, on prend quatre vecteurs de $(\mathbb{R}^4,+,.)$. D'abord les images de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ (sachant que $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ est une base du supplémentaire S choisi du théorème du rang).

Et on complète au hasard, avec des vecteurs qui ne seront pas dans l'image : $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ Nouvelle base G.

Et même : Et je vous l'inverse : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Et ce n'est pas si difficile à obtenir.
Le premier vecteur de la base canonique est le troisième vecteur de G.
Le deuxième vecteur de la base canonique est le quatrième vecteur de G.
Pour les deux derniers, c'est moins pratique.

On vérifie que c'est une base de $(\mathbb{R}^4,+,.)$ en calculant le déterminant (non nul).
On lit alors vecteur de nouvelle base par vecteur de nouvelle base : $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$ a pour image $\overrightarrow{0}$
$\overrightarrow{i}$ a pour image le premier vecteur de la nouvelle base de $(\mathbb{R}^4,+,.)$
$\overrightarrow{j}$ a pour image le premier vecteur de la nouvelle base de $(\mathbb{R}^4,+,.)$

La matrice du morphisme est alors $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ c'est $Mat_G^B(f)$. On la note $I_{3,4,2}$ trois colonnes (départ)
quatre lignes (arrivée)
deux 1 (image)

On vérifie $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{|B} \longmapsto \begin{pmatrix} y' \\ z' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{|G}$.

Oui, c'est peu parlant : on arrange $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{|B} \longmapsto x'.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{|cano} + y'.\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{|cano}$.

C'est donc $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{|B} \longmapsto \begin{pmatrix} x'+2.y' \\ 2.x'+3.y' \\ x'+2.y' \\ y' \end{pmatrix}_{|cano}$.

Et si on reliez $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{|B}$ à $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{|cano}$, on revient à la formule initiale.

Énigme : Je vous laisse cogiter une peu sur la relation

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Déjà, je serai heureux si vous me dites que les format sont compatibles.
Et si vous voyez que ce sont des matrices déjà croisées...

Et j'ajoute une version approfondie du schéma initial : $\boxed{\begin{array}{cccc} & f & & \\ E_\beta & \longrightarrow & F_\Gamma & \text{canonique} \\ Id_3\downarrow & & \uparrow Id_4 & \\ E_B & \longrightarrow & F_G & \text{adaptées à } f \\ & f & & \end{array}}$

Et j'écris $\begin{array}{ccccccc} & \mathbb{R}^4 & \leftarrow & \mathbb{R}^4 & \leftarrow & \mathbb{R}^3 & \leftarrow & \mathbb{R}^3 \\ f = & & Id_4 & \circ & f & \circ & Id_3 & \end{array}$ et le traduis sous forme matricielle :
$Mat(f) = Mat_\Gamma^G(Id_4).Mat_G^B(f).Mat_B^\beta(Id_3)$
Et n'oubliez pas que la matrice de l'identité de $\mathbb{R}^3_{|\beta}$ dans $\mathbb{R}^3_{|B}$ n'est pas la matrice I_3.
On n'a pas la même base au départ et à l'arrivée...
Ah, vous commencez à comprendre des choses. Laissez vous porter. On va avancer encore un peu. Pas tout de suite.

Surprise : ...mais ce qui vous a peut être échappé ci dessus dans la relation

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .. \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ ont fait mine de rien des opérations sur les colonnes et sur les lignes.
Karl Friedrich Gauss est dans le coin, avec son pivot !

Les matrices de Gauss à droite	agissent sur les colonnes de la matrice
	travaillent dans l'espace de départ
	servent à trouver le noyau
Les matrices de Gauss à gauche	agissent sur les colonnes
	travaillent dans l'espace d'arrivée
	servent à trouver l'image

Ça va trop vite ? On va y revenir. Avec des exemples.

Mais avant, puisqu'on passe notre temps à parler de théorème du rang, c'est quoi le rang ?
Ou plutôt « les rangs » car en algèbre, le mot revient souvent. [22]

11°) A propos du mot rang.

22. en contrepèterie aussi avec « le centurion présente un rang de glaives » , « c'est tout mon rang qui traverse votre globe »

rang d'une famille de vecteurs	• dimension de l'espace vectoriel qu'ils engendrent • nombre de vecteurs linéairement indépendants dans la famille • nombre total de vecteurs moins nombre de relations de dépendance linéaire
rang d'un morphisme	• dimension de son ensemble image • nombre de vecteurs linéairement indépendants dans $(f(\overrightarrow{e_1}), \dots f(\overrightarrow{e_n}))$ • dimension de l'espace de départ moins dimension du noyau
rang d'une matrice	• dimension de l'ensemble image du morphisme associé • nombre de vecteurs colonne linéairement indépendants • nombre de colonnes moins nombre de relations sur les colonnes
rang d'une matrice	• nombre de vecteurs ligne linéairement indépendants • nombre de 1 sur la diagonale de $I_{n,p,k}$ quand on l'écrit $P.I_{n,p,k}.Q$ comme ci dessus
rang d'un système linéaire	• rang de sa matrice • dimension de l'ensemble image quand on écrit le système $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}$ •nombre de lignes utiles quand on applique la méthode du pivot de Gauss

Question : Vous ai-je convaincu avec ce tableau que c'est douze fois la même définition ?
J'espère...

Prochainement dans cette page, pour le rang des morphismes :

$rg(f) \leqslant \dim(arrivee)$	inclusion image
$rg(f) \leqslant \dim(depart)$	formule du rang
$rg(g \circ f) \leqslant rg(g)$	inclusion images
$rg(g \circ f) \leqslant rg(f)$	inclusion noyaux + formule du rang
composer par un isomorphisme ne modifie pas le rang	
$rg(f+h) \leqslant rg(f) + rg(h)$	$Im(f+h) \subset Im(f) + Im(h)$

Pour répondre à la question « c'est la même chose » :

si je vous donne une matrice à n colonnes et p lignes, que voyez vous ?		
•	une famille de n vecteurs dans $\mathbb{R}^p$	
	et vous cherchez alors à savoir	si ils forment une famille libre
		s'il y a une relation qui les lie,
		et même combien de relations les lient
	vous cherchez la dimension du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent dans $\mathbb{R}^p$	
	vous savez que cette dimension est inférieure à n (nombre de vecteurs) et p (dimension de l'espace)	
•	la matrice d'une application linéaire	
	mais alors les colonnes sont les images des n vecteurs de la base canonique, c'est donc une famille de n vecteurs dans $\mathbb{R}^p$	
	chercher si une combinaison les lie	c'est savoir si il y a des vecteurs dans le noyau
	trouver le nombre de combinaisons	c'est trouver la dimension du noyau
	trouver la dimension de l'espace engendré	c'est trouver la dimension de l'image
		cette dimension se majore par dimension de l'arrivée et par dimension du départ
•	la matrice d'un système linéaire	
	ce système s'écrit $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{b}$ d'inconnue $\overrightarrow{a}$	où f est l'application linéaire dont vous avez la matrice
	le vecteur $\overrightarrow{b}$ est il alors dans l'ensemble image	condition sur les lignes
	la dimension du noyau	vous donne les solutions homogènes à additionner

Et je vous pense capable de trouver d'autres associations de ce type.
La seule chose qui peut rester un peu confuse : pourquoi le rang en lignes est il égal au rang en colonnes.
Pourquoi le nombre de lignes indépendantes est il égal au nombre de colonnes indépendantes.
Les lignes n'ont pas le même rôle que les colonnes...

	lignes	colonnes
système	une ligne = une équation	une colonne = coefficients d'une inconnue
matrice	les coefficients suivant $\overrightarrow{arrivee_i}$	les coefficients de $f(\overrightarrow{depart_k})$
vecteurs	les coefficients suivant $\overrightarrow{base_i}$	les coefficients de $\overrightarrow{famille_k}$

Une petite idée quand même sur les matrices, pas si évidente :
l'existence d'une relation sur les colonnes, c'est l'existence d'un vecteur U vérifiant $M.U = 0_k$, un vecteur du noyau.
l'existence d'une relation sur les lignes, c'est l'équation d'un sous-espace qui contient l'ensemble image.

Exemple : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ n'est

pas injective car $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ a une image nulle, il est dans le noyau

pas surjective car toutes les images sont dans le plan d'équation $x + y - z = 0$

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ n'est

pas inversible à gauche car $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (et si un inverse à gauche existait, en multipliant...)

pas inversible à droite car $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (noyau de ${}^tM$?)

Exemple : Le système $\begin{array}{cccccc} 2.x & +y & +z & = & a \\ x & +3.y & +2.z & = & b \\ 3.x & +4.y & +3.z & = & c \end{array}$ n'est pas de Cramer

car si on remplace $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} x & +\lambda \\ y & +3.\lambda \\ z & -5.\lambda \end{pmatrix}$ on a encore une solution (pas d'unicité)

et si am, $b$et c né vérifient pas $a+b-c=0$ il n'y a pas de solution (pas forcément d'existence)

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible par pivot car vérifie à la fois

$C_1 + 3.C_2 - 5.C_3 = 0$

et $L_1 + l_2 - L_3 = 0$

On réduira $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ en $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ par exemple, de rang 2.

Pour ce qui est du pivot, je vous le fais

Pivot : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ vous retrouvez l'équation de l'image en bas

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc|c|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ d'où $\begin{array}{ccccc} x & = & -\frac{z}{5} & +\frac{3.a}{5} & -\frac{b}{5} \\ y & = & -\frac{3.z}{5} & -\frac{a}{5} & +\frac{2.b}{5} \\ z & = & z & & \end{array}$ et on retrouve le noyau

en $Vect(\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix})$.

Ces digressions étant passées, revenons au rang d'une application linéaire.

En maths, c'est comme ça qu'on parlera de rang. [23].

On redonne la définition : $\boxed{\text{rang d'un morphisme} = \text{dimension de l'ensemble image}}$

Idiot : Le rang d'une forme linéaire vérifie $r^2 = r$.

23. j'ai crû comprendre qu'en S.I.I. c'est plus le rang d'un système linéaire qui va vous intéresser

Locution : Que peut signifier la locution « de rang maximum » ?
$\bullet_1$ Que signifie « la famille $(\overrightarrow{u_1}, \dots \overrightarrow{u_4})$ est de rang maximum dans $(\mathbb{R}^5, +, .)$ » ?
$\bullet_2$ Que signifie « la famille $(\overrightarrow{u_1}, \dots \overrightarrow{u_4})$ est de rang maximum dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ » ?
$\bullet_3$ Que signifie « la famille $(\overrightarrow{u_1}, \dots \overrightarrow{u_4})$ est de rang maximum dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$ » ?
$\bullet_4$ Que signifie « la matrice à 4 lignes et 5 colonnes est de rang maximum » ?
$\bullet_5$ Que signifie « la matrice à 4 lignes et 4 colonnes est de rang maximum » ?
$\bullet_6$ Que signifie « la matrice à 5 lignes et 4 colonnes est de rang maximum » ?
Réponses dans le désordre : *base, libre, génératrice, inversible à droite, à gauche, déterminant non nul.*

Propriété élémentaires pour f de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$.

$rg(f) \leqslant \dim(F)$	puisque $Im(f)$est un sous-espace vectoriel de $(F, +, .)$
$(rg(f) = \dim(F)) \Leftrightarrow (f\ surjective)$	par définition même (inclusion, égalité des dimension)
$rg(f) \leqslant \dim(E)$	par la formule du rang ou par image d'une base du départ
$(rg(f) = \dim(E)) \Leftrightarrow (f\ injective)$	par la formule du rang
Le rang d'une matrice est majoré par son nombre de lignes et de colonnes.	

Majorations dans $L(E, F)$.

$rg(f) = rg(\alpha.f)$ pour α non nul.

$rg(f + h) \leqslant rg(f) + rg(h)$ pour f et g de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$ $\quad E \overset{f}{\underset{h}{\longrightarrow}} F$

Multiplier les vecteurs par α les fait rester sur les mêmes droites, dans les mêmes plans.
On a $Im(f+) \subset Im(f) + Im(g)$. Les vecteurs de la forme $f(\overrightarrow{a}) + g(\overrightarrow{a})$ sont des cas particuliers de vecteurs de la forme $f(\overrightarrow{u}) + g(\overrightarrow{v})$.
Ensuite, on passe aux dimensions et $\dim(Im(f) + Im(g)) \leqslant \dim(Im(f)) + \dim(Im(g))$ par la formule de Grassmann.
On notera que quand $rg(f) + rg(g)$ est « trop grand », cette majoration ne sert à rien.

Propriété fondamentale :

Par composition, le rang ne peut que diminuer. $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$: $rg(g \circ f) \leqslant \begin{matrix} rg(f) \\ rg(g) \end{matrix}$

Il suffit d'écrire $Im(g \circ f) \subset Im(g)$ (dans G à l'arrivée) pour obtenir $rg(g \circ f) \leqslant rg(g)$

Plus loin : Les éléments de la forme $g(f(\overrightarrow{a}))$ sont des $g(\overrightarrow{b})$ particuliers.
A quelle condition sur $Im(f)$ et $Ker(g)$ va-t-on avoir $rg(g \circ f) = rg(g)$?

En écrivant $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$, on a $\dim(Ker(f)) \leqslant \dim(Ker(g \circ f))$ puis $\dim(E) - \dim(Ker(f)) \geqslant \dim(E) - \dim(Ker(g \circ f))$.

Plus loin : La relation $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$ implique $g(f(\overrightarrow{a})) = \overrightarrow{0}$, dans un sens.
A quelle condition sur $Im(f)$ et $Ker(g)$ va-t-on avoir $rg(g \circ f) = rg(f)$?

Pour ceux qui veulent bien voir les choses : $\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G \\ Ker(f) & & Im(f) & & Im(g \circ f) \\ Ker(g \circ f) & & Ker(g) & & Im(g) \end{array}$ et éviter d'écrire des bêtises.

Propriété fondamentale (suite) :

Le rang se conserve par composition par des isomorphismes.

Sans se fatiguer (mais est on sûr que c'est une preuve) : les isomorphismes transforment les bases en bases et conservent les dimensions.
Mais j'ai plus simple. Si g est un isomorphisme, elle admet une réciproque linéaire g^{-1}.
On utilise le résultat précédent « le rang diminue par composition » : $\begin{array}{l} rg(g \circ f) \leqslant rg(f) \\ rg(f) = rg(g^{-1} \circ g \circ f) \leqslant rg(g \circ f) \end{array}$

Une pure preuve de matheux. deux lignes : pas de gras, juste du muscle.

Subtil : La relation $rg(g \circ f) = rg(f)$ n'implique pas g bijective. Contre-exemple ?
La relation $\forall f,\ rg(g \circ f) = rg(f)$ implique-t-elle g bijective ?

Corolaire : Deux matrices équivalentes ont le même rang.

Pardon ? C'est quoi des matrices équivalentes ? Je ne l'ai pas dit ?

Définition : Deux matrices A et B de même format n colonnes et p lignes sont équivalentes équivalentes si
il existe N inversible de taille n sur n
il existe P inversible de taille p sur p
vérifiant $A = N.B.P$

(vérifiez les formats)

Retour : Deux matrices équivalentes ont le même rang.

On prend A et B de taille n sur p, équivalentes.
On écrit alors $A = N.B.P$.
Comme N est inversible, c'est la matrice d'un isomorphisme, et donc $rg(N.B.P) = rg(B.P)$.
Comme P est inversible, c'est la matrice d'un isomorphisme de $(\mathbb{R}^p, +, .)$ et donc $rg(B.P) = rg(B)$.
Par transitivité : $rg(A) = rg(B)$.

Bonus : Les opérations de type pivot de Gauss ne modifient pas le rang.

Faire des opérations sur les lignes, c'est multiplier à gauche par des matrices inversibles.
Faire des opérations sur les colonnes, c'est multiplier à droite par des matrices inversibles.
Aucune des deux opérations ne va modifier le rang.

Exemples de matrices de Gauss utilisées : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice : montrez que la relation « est équivalente à » est une relation d'équivalence au sein de l'ensemble des matrices à n colonnes et p lignes.

Réflexive. On se donne A, il faut écrire $A = N.A.P$ avec N et P bien choisies inversibles... Difficile !
Symétrique. On se donne A et B qu'on suppose liées par une relation $A = N.B.P$ et il faut arriver à $B = N'.A.P'$ avec N' inversible, comme N !
Transitive.

Confusion : Ne confondez pas équivalentes et semblables.

équivalentes	semblables
matrice rectangulaires	matrices carrées
morphismes	endomorphismes
$A = N.B.P$	$A = P^{-1}.B.P$
une matrice de chaque côté (format $n \times n$et $p \times p$)	une matrice et son inverse

12°) Rang des lignes, rang des colonnes.

Allez, il est temps pour moi de vous convaincre que le rang des lignes est égal au rang des colonnes.
Je commence par le cas favorable des matrices carrées.
Et même encore plus favorables : des matrices carrées inversibles.

Facile : Si les n colonnes de la matrice carrée M sont de rang n, alors les n lignes de la matrice sont de rang n.
Reformulation : si les n colonnes sont indépendantes, alors les n lignes sont indépendantes.
Le cours sur le déterminant nous dit
n colonnes indépendantes dans $(\mathbb{R}^n, +, .)$ équivaut à déterminant non nul.
Or, le déterminant de la matrice est égal au déterminant de sa transposée.
Donc les n lignes sont indépendantes.
Oui, transposer, c'est faire que les lignes deviennent des colonnes.

Poursuivons avec les matrices de rang 0.

Facile : Si la matrice est de rang 0, toutes ses colonnes sont nulles.
Donc toutes ses lignes aussi.

Et celles de rang 1.

Agréable : Si les n colonnes de la matrice carrée M sont de rang 1, alors elles sont toutes proportionnelles à une même colonne.

La matrice est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha_1.a_1 & \alpha_2.a_1 & \dots & \alpha_n.a_1 \\ \alpha_1.a_2 & \alpha_2.a_2 & \dots & \alpha_n.a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1.a_n & \alpha_2.a_n & \dots & \alpha_n.a_n \end{pmatrix}$ qu'on écrit même $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Sa transposée est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ toutes ses colonnes sont proportionnelles, elle est aussi de rang 1.

On note au passage qu'on a établi un truc classique : les matrices de rang 1 sont de la forme colonne fois ligne.

C'est un truc à retenir.

Et vous pouvez (devez) le voir comme un passage $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Et celles de rang r ?

Je vous offre un lemme :

Le rang d'une matrice est égal à la taille du plus grand déterminant non nul.

Définition concise qui pose problème : il y a des élèves qui ont beau la relire trois fois, ils ne comprennent pas.

Je vous le redis en version allégée :

Si on trouve dans M un déterminant de taille k non nul, alors le rang de M vaut au moins k.

Et je vous le montre sur un exemple :

De quel rang est $\begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 13 & 5 & -3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$?

Réponse 1 : entre 0 et 5 car ce sont 5 vecteurs.

Réponse 2 : entre 0 et 4 car ce sont des vecteurs de $(\mathbb{R}^4, +, .)$.

Réponse 3 : entre 1 et 4 car il y a au moins un vecteur non nul : $7 \neq 0$.

Réponse 4 : entre 2 et 4 car il y a au moins deux vecteurs non colinéaires. $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Réponse 5 : entre 3 et 4 car il y a au moins trois vecteurs non coplanaires. $\begin{vmatrix} 7 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.

En quoi ce déterminant non nul prouve-t-il que $\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$ est libre ?

Parce que si elle était liée, après projection sur $\mathbb{R}^3$, $\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ serait liée aussi. Ce qui n'est pas le cas grâce à son déterminant. Bien vu, non ?

Facile : Trouver un déterminant de taille 3 nul ne prouverait rien. Il dirait juste qu'après projection, on a obtenu une famille liée. mais peut être a-t-on mal projeté. Je rappelle que si on projette $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (famille libre de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ on obtient $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ qui est liée dans $(\mathbb{R}^2, +, .)$.

ce qui compte donc est « j'ai détecté un déterminant non nul ».

On tente le même coup avec un déterminant de taille 4 ?

Mauvaise nouvelle : $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 9 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 7 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 13 & -3 & 9 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 13 & 5 & 9 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 7 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \\ 13 & 5 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 7 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 3 \\ 13 & 5 & -3 & 9 \end{vmatrix}$

sont tous nuls (faites moi confiance, ou perdez votre temps).
Nos vecteurs sont tous cospaciaux.

Bilan : la matrice est de rang 3.

Exercice : Trouvez l'équation cartésienne du sous-espace de dimension 3 contenant tous ces vecteurs.
C'est une équation de la forme $a.x+b.y+c.z+d.t=0$ que vérifient ensemble les cinq vecteurs colonne.
Ou c'est une relation du type $\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 13 & 5 & -3 & 9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On retient : un déterminant de taille k sur k non nul, et voilà la matrice au moins de rang k (les k vecteurs concernés donnent une famille libre après projection sur un sous-espace de dimension k).

Attention : Le déterminant de taille k sur k que vous allez chercher n'est pas forcément fait de colonnes et lignes contigües (toutes côte à côte). Il faut peut être aller chercher des choses comme $\begin{pmatrix} \bullet & \smiley & \bullet & \smiley & \smiley \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \smiley & \bullet & \smiley & \smiley \\ \bullet & \smiley & \bullet & \smiley & \smiley \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \smiley & \smiley & \bullet & \bullet & \smiley \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \smiley & \smiley & \bullet & \bullet & \smiley \\ \smiley & \smiley & \bullet & \bullet & \smiley \end{pmatrix}$.
Mais quand même pas $\begin{pmatrix} \bullet & \smiley & \bullet & \smiley & \smiley \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \smiley & \smiley & \smiley \\ \bullet & \smiley & \bullet & \smiley & \smiley \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \smiley & \smiley & \bullet & \bullet & \smiley \\ \bullet & \smiley & \bullet & \bullet & \bullet \\ \smiley & \bullet & \bullet & \bullet & \smiley \\ \smiley & \smiley & \bullet & \bullet & \smiley \end{pmatrix}$, soyez logiques !

Et maintenant, de quel rang est la transposée de $\begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 13 & 5 & -3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Réponse 1 : entre 0 et 5 car ce sont des vecteurs de $(\mathbb{R}^5, +, .)$.
Réponse 2 : entre 0 et 4 car ce sont des 4 vecteurs.
Réponse 3 : entre 1 et 4 car il y a au moins un vecteur non nul : $7 \neq 0$.
Réponse 4 : entre 2 et 4 car il y a au moins deux vecteurs non colinéaires. $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$.
Réponse 5 : entre 3 et 4 car il y a au moins trois vecteurs non coplanaires. $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.

Et tous les déterminants de taille 4 sont nuls. On aura beau projeter de multiples façons, les quatre vecteurs tombent toujours dans des sous-espaces de dimension 3. Ils doivent bien former une famille liée.

Futé : N'auriez vous pas trouvé $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ qui donne ladite combinaison ?
A moins que de le lire comme un noyau qui fait perdre une dimension à l'image...

Sur cet exemple, vous devez voir compris que ces calculs de déterminants donnent le même rang à A et à sa transposée.

Allégé : Si vous utilisez juste la propriété « A contient au moins un déterminant de taille k sur k non nul implique A est au moins de dimension k », pouvez vous prouver
$rg(A) \geqslant rg({}^tA) \geqslant rg({}^t({}^tA)) = rg(A)$?

On a donc (au moins en expliquant sur un exemple) démontré $rg(A) = rg({}^tA)$ pour toute matrice A.

Cette démonstration ne vous plait pas ?
Pas grave, j'en ai une autre.

Toute matrice A à n colonne est p lignes est équivalente à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ de même format qu'elle, avec un certain nombre de 1 sur la « diagonale qui n'en est même pas une ».

- *Par exemple* $\begin{pmatrix} 11 & 2 & 15 \\ 5 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & 10 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Elle a donc le même rang que la matrice du milieu notée J.

- Ici, $\begin{pmatrix} 11 & 2 & 15 \\ 5 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & 10 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont de rang 3.

Mais quand on transpose, on trouve ${}^tA = {}^tP.{}^tJ.{}^tN$ avec ${}^tP$ et ${}^tN$ inversibles.

- *Ici,* $\begin{pmatrix} 11 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 15 & 7 & 10 & 8 \end{pmatrix} = . \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

${}^tA$ a donc le même rang que ${}^tJ$.
Mais J et ${}^tJ$ ont le même rang. Il suffit de compter les colonnes indépendantes, c'est à dire les 1.

- *Ici* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *sont de rang* 3.

Par transitivité, A et ${}^tA$ ont le même rang.

Joli, non ?

Il manque quand même le lemme de départ :

Toute matrice rectangulaire est équivalente à une matrice comme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Mais vous avez tous les éléments en main pour le prouver.

Soit par pivot de Gauss, soit par
$$\boxed{\begin{array}{cccc} & f & & \\ E_\beta & \longrightarrow & F_\Gamma & \text{canonique} \\ Id_3\downarrow & & \uparrow Id_4 & \\ E_B & \longrightarrow & F_G & \text{adaptées à } f \\ & f & & \end{array}}$$

On nous a donné une matrice M, on la voit comme matrice d'un morphisme de E dans F sur des bases « canoniques » β et Γ.
Et on construit des bases adaptées.
Sur E, on prend une base du noyau qu'on complète en base de $(E, +, ..)$.
Petit détail, cette fois, on écrit en premier les vecteurs d'un supplémentaire du noyau, et on rejette en fin de base les vecteurs du noyau : $B = (\overrightarrow{e_{k+1}}, \dots \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k})$.
On sait ensuite que $\Big(f(\overrightarrow{e_{k+1}}), \dots f(\overrightarrow{e_n})\Big)$ est une base de $Im(f)$. On la complète en base de $(F, +, .)$. Notée G

On regarde le schéma plus haut, et on écrit une formule idiote : $f = Id_F \circ f \circ Id_E$.
Mais il faut bien voir qu'on va regarder des espaces munis de bases adaptées ou non à notre problème. Et Id_E va permettre de passer d'une base de E à l'autre.
On transcrit $f = Id_F \circ f \circ Id_E$ matriciellement : $\boxed{Mat_\Gamma^\beta(f) = Mat_\Gamma^G(Id_F) \times Mat_G^B(f) \times Mat_B^\beta(Id_E)}$

On vérifie visuellement l'enchaînement des bases $\underset{\Gamma}{\overset{\beta}{Mat}}(f) = \underset{\Gamma}{\overset{G}{Mat}}(Id_F) \times \underset{G}{\overset{B}{Mat}}(f) \times \underset{B}{\overset{\beta}{Mat}}(Id_E)$:

$$\begin{array}{ccccccc} \textit{depart} & G & & B & & \beta & & \beta \\ & & \searrow & & \searrow & & = & \\ \textit{arrivee} & \Gamma & & G & & B & & \Gamma \end{array}$$

et le format des matrices $\begin{pmatrix} \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \\ \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \\ \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \\ \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \\ \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \end{pmatrix}$

Chaque matrice $Mat_\Gamma^G(Id_F)$ et $Mat_B^\beta(Id_E)$ est une matrice inversible (d'inverses $Mat_G^\Gamma(Id_F)$ et $Mat_\beta^B(Id_E)$).

Attention : La matrice de l'identité n'est pas forcément la matriceunité I_n. C'est pour cela qu'on a des noms différents :
matrice unité
application identité
Ce qui est vrai, c'est que $Mat_\beta^\beta(Id_E)$ est bien la matrice $I_{\dim(E)}$. Mais sinon, c'est juste une matrice inversible.

Et maintenant, on regarde la matrice de f avec base de départ B et base d'arrivée G .
On l'a déjà fait.
L'image du premier vecteur de B est le premier vecteur de G.
L'iimage du deuxième vecteur de B est le deuxième vecteur de G.
Et ainsi de suite.
Jusqu'à ce qu'on arrive sur des vecteurs du noyau. Et eux, ils ont une image nulle, d'où colonne de 0.

On arrive bien à la forme $\begin{pmatrix} \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \\ \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \\ \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \end{pmatrix}$

qu'on écrit même $M = P.J.N$ avec P et N inversibles.
Et la matrice du milieu a le même format que M, et a juste quelques 1 sur la diagonale.
Combien ? Autant que de vecteurs dans le suppélementaire S du noyau. Donc autant que dans l'image. Le rang.

Notation : $J_{n,p,r}$ est la matrice à n colonnes, p lignes, avec r nombres 1 sur la « diagonale ».

```
def J(n,p,r) :
....M = [[0 for k in range n] for i in range p]
....for k in range(r) :
........M[k][k]=1
....return(M)
```

Trouvez plus court...
Montrez que r est entre 0 et $Min(n, p)$. Retrouvez que le rang est majoré par la dimension départ et la dimension arrivée.

Allez, à lire vite et interpréter vite :

$\begin{pmatrix} \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \\ \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \\ \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \end{pmatrix}$	matrice nulle, rang nul
$\begin{pmatrix} \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \\ \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \\ \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \end{pmatrix}$	rang 1, du type colonne fois ligne
$\begin{pmatrix} \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \\ \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \\ \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \end{pmatrix}$	surjective, non injective
$\begin{pmatrix} \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \\ \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \\ \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \\ \text{☻} & \text{☻} & \text{☻} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \\ \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} & \text{☹} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \\ \text{☺} & \text{☺} & \text{☺} \end{pmatrix}$	injective, non surjective

On résume : toute matrice M d'un morphisme de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$ est équivalente à $J_{dim(E),\ dim(F),\ rang}$.
La matrice inversible à droite correspond au changement de base dans l'espace de départ ($S \oplus Ker(f)$).
La matrice inverible à gauche correspond au changement de base à l'arrivée ($Im(f) \oplus reste$).

Et la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ correspond à la « mise sous pivot » du système.

Peu de sujets de concours demandent d'effecuer vraiment cette transformation.

Utilité : Cette écriture $M = P.J_{n,p,r}.N$ avec P et N inversibles est un résultat théorique.
Il permet d'écrire $rg(M) = rg(J_{n,p,r})$ et ${}^tM =^{Pt} N.J_{p,n,r}.{}^tP$ et d'aboutir à $rg(M) = rg({}^tM)$.
Mais ensuite, il ne sert à rien.
Si vous devez résoudre $M.X = B$ d'inconnue X, autant le résoudre que de déterminer P, N et d'écrire ensuite $P.J.N.X = B$ dont on ne sait même plus qu'oi faire...
Si vous voulez composer des morphismes, vous obtenez des $Q'.J_{p,q,r'}.P'.P.J_{n,p,r}.N$ et vous ne savez rien en faire...

Bref, c'est bien moins utile que les matrices semblables.

Mais bon, il faut quand même avoir vu ce résultat, et mettre dans un même panier
f induit un isomorphisme de'un supplémentaire du noyau sur l'image
M peut s'écrire sous la forme $P.J_{n,p,r}.N$

$$\begin{array}{cccl} & M & & \\ E_\beta & \longrightarrow & F_\Gamma & \text{canonique} \\ N\downarrow & & \uparrow P & \\ E_B & \longrightarrow & F_G & \text{adaptées à } f \\ & J_{n,p,r} & & \end{array}$$

$\dim(Im(f)) = \dim(E) - \sim (Ker(f))$
Et si on vous dit « rang d'un morphisme/d'une matrice », vous devez avoir tout cela à l'esprit.

Exercice : La relation « être équivalente à » est (on l'a vu) une remation d'équivalence sur $M_{n,p}(\mathbb{R})$.
Pourquoi $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est elle pas équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?
Pourquoi $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est elle équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$?
Pourquoi $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est elle équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?
Une matrice M est elle équivalente à $2.M$?
Pourquoi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ est elle équivalente à $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \\ 7 & 14 & 0 \end{pmatrix}$?
Combien de matrices sont équivalentes à la matrice nulle de taille n sur p ?
Montrez qu'il y a 5 classes d'équivalence pour cette relation dans $(M_4(\mathbb{R}), +, .)$.
Combien y -a-t-il de classes d'équivalence pour cette relation dans $(M_{4,5}(\mathbb{R}), +, .)$.

Après avoir vu des matrices N et P inversibles, j'en profite pour vous indiquer
Il faut savoir regarder de plusieurs façons une matrice carrée inversible.
matrice d'une famille de vecteurs formant une base
matrice de passage d'une base à une autre
matrice d'un système de Cramer
matrice d'un isomorphisme (qui transforme une base en base...)

Énervement : La définition de « matrice de passage de β vers B est
« j'écris en colonne sur la base β (l'ancenne) les composantes des vecteurs de B (nouvelle).
On l'a dit et redit, c'est une matrice facile à écrire, mais elle ne sert à rien.
Elle dit « donne moi les composantes du vecteur sur la nouvelle base B, et je te les donnerai sur l'ancienne β ».
C'est d'ailleurs $Mat_\beta^B(Id)$ (B en haut au départ, β en bas à l'arrivée, on comprend qu'il faudra l'inverser...).

Il faut savoir regarder aussi de plusieurs façons les notions de matrices équivalentes et matrices semblables.

13°) Ce que Numpy sait en algèbre linéaire.

A l'oral de Centrale-SupElec, vous avez une épreuve où on vous fournit un ordinateur avec `Python` et divers modules, et on vous donne un exercice de mathématiques pour lequel on vous demande d'effectuer déjà quelques calculs à l'ordinateur pour ensuite émettre une conjecture que vous démontrez alors avec vos neurones et une craie.

Certains concernent l'analyse, d'autres les probabilités, et d'autres enfin l'algèbre linéaire.

Exemple : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on définit $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & & n \\ 1 & 0 & 3 & & n \\ 1 & 2 & 0 & & n \\ & & & & \\ 1 & 2 & 3 & & 0 \end{pmatrix}$ et la fonction $f_n = x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x+k} - 1$.

1°) Tracez le graphe de f_n pour n entre 3 et 8.
2°) Donnez alors la valeur approchée de la solution de $f_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^+$.
3°) Créez une fonction qui prend en entrée n et retourne A_n.
4°) Calculez les valeurs propres de A_n pour n entre 3 et 8.
5°) Émettez une conjecture.
6°) La matrice A_n est elle diagonalisable.

Si vous devez faire tout ça avec la version de base de `Python` et le seul module `math`, une heure d'interrogation orale ne suffira pas.
Alors, il y a des modules installés. Comme `numpy`, `mathplotlib`.
Ceci doit vous rassurer pour la question 1

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def f(x, n) :
....S = -1
....for k in range(1, n+1) :
........S += k/(x+k)
....return(S)
X = np.arange(0, 10, 0.05)
Y = [f(x,3) for x in X]
plt.plot(X, Y)
plt.show()
```

Et même pour la question 2.

```
import numpy as np
import scipy.optimize as resol
import scipy.integrate as integr
resol.fsolve(f)
```

Non ! Vrai, il y a ça, on n'est pas obligé d'écrire une dichotomie ?
Et c'est quoi ce module `integrate` ?

Et pour les matrices ? Oui, il sait les créer et travailler dessus.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
A = np.array([[0, 2, 3], [1, 0, 2], [1, 2, 0]])
```

l'addition matricielle se fait avec un simple +, et la multiplication avec un simple *

Chance : Sans numpy, si vous avez défini `A =[[1, 2], [3, 4]]`
et `B=[[1, 3], [0, 1]]`
l'addition `A+B` ne donne pas `[[2, 5], [3, 5]]`
mais `[[1, 2], [3, 4], [1, 3], [0, 1]]`.
Et le produit `2*A` ne donne rien (mais `A*2`, si, mais ne vous faites pas avoir).

Avec `numpy`, si vous avez défini `A =np.array([[1, 2], [3, 4]])`
et `B=np.array([[1, 3], [0, 1]])`
les formules `A+B` et `3*B` donnent ce que vous souhaitez.

Le produit matriciel se fait avec `np.dot(A,B)`.
Et `numpy` se charge à votre place des calculs rébarbatifs :

$A.B$	$Tr(A)$	${}^tA$	$\det(A)$	A^{-1}	$rg(A)$	$Spectre(A)$
`np.dot(A,B)`	`np.trace(A)`	`np.transpose(A)`	`np.det(A)`	`alg.inv(A)`	`alg.matrix_rank(A)`	`alg.eigvals(A)`
https ://www.concours-centrale-supelec.fr/CentraleSupelec/SujetsOral/Multi/Python-matrices.pdf						

C'est décevant pour qui aime faire ses boucles imbriquées ou des combinaisons.

C'est rassurant pour beaucoup.
Mais c'est plus lourd que Xcas, Derive, Maple, Mathematica...

Bon et maintenant, on l'attaque ce sujet d'oral de Centrale ?
Ou je vous en donne un autre ?

Exemple :

Pour a et b dans $\mathbb{C}$, on définit $M_{a,b} = \begin{pmatrix} 3.a+b & -3.a-b & 2.a \\ 2.a+b & -2.a-b & -2.a \\ b & -b & a \end{pmatrix}$.
1°) Écrivez une procédure qui prend en entré a ,b et retourne $M_{a,b}$.
2°) Calculez avec Python $M_{0,1}.M_{1,0}$, $M_{1,0}.M_{0,1}$, $(M_{1,0})^2$ et $(M_{0,1})^2$.
3°) Montrez que $\{M_{a,b} \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$ (noté F) est un sous-espace vectoriel de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$, mais pas une algèbre. Donnez sa dimension.
4°) Déterminez la plus petite sous-algèbre de $(M_3(\mathbb{R}), +, ., \times)$ contenant F. Est elle commutative ?
5°) Pour tout n, on note $R_n = \{M \in F \mid M^n = I_3\}$. Déterminez R_n avec l'aide de Python...
6°) Montrez : $M_{a,b}$ diagonalisable implique $b.M_{0,1}$ diagonalisable.
7°) Qui sont les éléments de F diagonalisables ?
8°) Déterminez une matrice P qui diagonalise $M_{1,0}$ et trigonalise $M_{0,1}$.
Et encore deux questions Python pour décrocher le 20 sur 20.

14°) Projecteurs.

C'est drôle, il y a des années où les projecteurs sont le morceau central de mon cours d'algèbre linéaire.
Et là, je les rejette à la fin... Étrange.

Un projecteur de $(E, +, .)$ est un endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$.

Les projecteurs sont des applications linéaires.
Ils vont de E dans E, même si en général, leur ensemble image est loin d'être E tout entier.
Id est un projecteur. C'est d'ailleurs le seul projecteur inversible. Les autres projecteurs auront un noyau.
L'application nulle est un projecteur (noyau égal à E, image égale à $\{\overrightarrow{0}\}$).

Citation :

Pour moi, un projecteur, comme son nom l'indique, prend un vecteur de $(E, +, .)$ et le projette en dessinant son ombre sur un sous-espace vectoriel.
Et la propriété $p \circ p = p$, c'est juste pour dire que l'ombre de l'ombre, c'est l'ombre elle même.
Et en général, j'en profite pour citer Jacques Brel :
laisse moi devenir l'ombre de ton ombre, l'ombre de ta main, l'ombre de ton chien, ne me quitte pas, ne me quitte pas... moi je t'offrirai des perles de pluie venues de pays où il ne pleut pas....
Ou alors je cite la bande dessinée de Fred, où Philémon rencontre un tailleur d'ombres qui se plante et lui taille une ombre trop grande, puis trop petite... mais ce n'est pas grave car il y a deux soleils.

Construis toi même tes projecteurs.

dimension 0	
dimension 1	
dimension 2	
dimension 3	

• Pourquoi une matrice de trace 1 et de déterminant nul fonctionne en taille 2 ?
Essayez : $\begin{pmatrix} 3 & \\ & -2 \end{pmatrix}$ pour trace 1 puis $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ pour déterminant nul.
Vérifiez : $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
C'est un projecteur. D'image $Vect(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix})$ et de noyau $Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix})$.
Pourquoi ça marche ? On rappelle en taille 2 : $M^2 - Tr(M).M + \det(M).I_2 = 0_{2,2}$. Si on prend trace et déterminant convenable, on a alors $M^2 - M = 0_{2,2}$.

• Et en dimension 3, essayez ces matrices comme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Elles sont leur propre carré.

Sont ce les seules solutions en taille 3 ? Non, on peut ensuite cacher les choses avec $M = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.P^{-1}$ avec P inversible. On a alors $M^2 = P.D^2.P^{-1} = P.D.P^{-1}$.
Pardon ? Pourquoi je l'appelle D ? Parce qu'elle est diagonale. Avec sur sa diagonale des 0 et des 1...

Remarque : On verra plus loin que l'on a donné ici la forme de toutes les matrices de projecteurs...
Il s'ensuivra qu'un projecteur se diagonalise avec pour seules valeurs propres 0 et 1.

Normal : si on a un vecteur propre $p(\overrightarrow{u}) = \lambda.\overrightarrow{u}$ alors on a $p(p(\overrightarrow{u})) = p(\lambda.\overrightarrow{u}) = \lambda.p(\overrightarrow{u}) = \lambda^2.\overrightarrow{u}$.
Et si on a un projecteur : $p \circ p(\overrightarrow{u}) = p(\overrightarrow{u})$ d'où $\lambda^2.\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{u}$ puis $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$.

Double toi même le nombre de projecteurs que tu as trouvés.

Si p est un projecteur de $(E, +, .)$ alors $Id - p$ est aussi un projecteur de $(E, +, .)$.
De plus, p et $Id - p$ se sont échangé noyau et image.

Sur nos exemples de dimension 2 et 3, ce n'est pas trop un scoop.
On vérifie quand même : $I_2 - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. Son carré est elle même. Son noyau est $Vect(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix})$ et son image $Vect(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Preuve : On suppose juste $p \circ p = p$.
On calcule alors $(Id - p) \circ (Id - p) = Id \circ Id - p \circ Id + Id \circ (-p) - p \circ (-p)$
et même $(Id - p) \circ (Id - p) = Id - 2.p + p \circ p = Id - p$.

Normal diront certains. Si p a pour valeurs propres 0 et 1, alors $Id - p$ a pour valeurs propres $1 - 0$ et $1 - 1$.

Ensuite, on a $Im(p) = Ker(Id - p)$.
Une inclusion sans effort : $Im(p) \subset Ker(Id - p)$ car $(Id - p) \circ p = 0$ (fonction nulle) [a].
Et pour l'autre. Si on prend $\overrightarrow{a}$ vérifiant $(Id - p)(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$, alors on a $\overrightarrow{a} = p(\overrightarrow{a})$ et il est dans $Im(p)$. [b]

On montre de même $Ker(p) = Im(Id - p)$. Ou alors on applique le résultat précédent à $Id - p$ au lieu de p.

---

a. retour du lemme $g \circ f = 0 \Leftrightarrow Im(f) \subset Ker(g)$
b. il faut vraiment que je vous fasse un dessin pour vous dire de qui $\overrightarrow{a}$ est l'image ?

Bonus : Si p est un projecteur, alors $Id - p$ est aussi un projecteur,
et donc $Id - (Id - p)$ est un projecteur...
Bof, rien de bien nouveau...

Construis toi même un projecteur de $(\mathbb{C}, +, .)$ vu comme $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
Pourquoi pas $z \longmapsto \Re\text{e}(z)$?

Construis toi même des projecteurs dans $(\mathbb{R}[X], +, .)$.
Choisis un polynôme Q non nul, et construis l'application qui à tout polynôme A associe le reste de la division euclidienne de A par Q (le R tel que $A = B.Q + R$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$).
Vous devez vérifier que $p \circ p = p$? Franchement, si vous voulez poser la division euclidienne du reste R par Q, ça fait « il y va zéro fois, et il reste R.

Construis toi même un projecteur de $(\mathbb{R}^4, +, .)$.

Choisis un sous-espace vectoriel P par exemple l'hyperplan d'équation $x+y-z+2.t=0$. Choisis un supplémentaire de P, donc une droite D engendrée par un vecteur qui n'est pas dans P : $Vect(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. On sait alors que tout vecteur $\overrightarrow{u}$de $(\mathbb{R}^4,+,.)$ se décompose d'une façon unique comme somme d'un vecteur de P et d'un vecteur de D : $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{p}+\overrightarrow{d}$. On considère alors l'application $\overrightarrow{u}\longmapsto$ (celui des deux vecteurs qui est dans P).

Chaque vecteur a bien une image, puisque tout vecteur se décompose.
Et cette image est définie sans ambigüité, puisque la décomposition est unique.
On a défini ainsi une application qui va de $\mathbb{R}^4$ dans P. Mais autant dire qu'elle va globalement de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ (et P sera son ensemble image).

Ce qu'on oublie toujours de vérifier : la linéarité.

Preuve :
On prend deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ qu'on décompose en $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{p}+\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{p'}+\overrightarrow{d'}$.
On se donne deux réels α et β.
On constate : $\alpha.\overrightarrow{u}+\beta.\overrightarrow{v}=(\alpha.\overrightarrow{p}+\beta.\overrightarrow{p'})+(\alpha.\overrightarrow{d}+\beta.\overrightarrow{d'})$.
Comme $(\alpha.\overrightarrow{p}+\beta.\overrightarrow{p'})$ est dans P (sous-espace vectoriel) et $(\alpha.\overrightarrow{d}+\beta.\overrightarrow{d'})$ dans d, on déduit que c'est la décomposition de $\alpha.\overrightarrow{u}+\beta.\overrightarrow{v}$ en $P\oplus D$.
Par définition du projecteur, on a donc $p(\alpha.\overrightarrow{u}+\beta.\overrightarrow{v})=\alpha.\overrightarrow{p}+\beta.\overrightarrow{p'}=\alpha.p(\overrightarrow{u})+\beta.p(\overrightarrow{v})$.

Et ensuite, $p\circ p=p$.

Preuve :
On prend un vecteur $\overrightarrow{u}$ qu'on décompose en $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{p}+\overrightarrow{d}$.
On calcule son image $\overrightarrow{p}$ qu'on écrit $\overrightarrow{p}+\overrightarrow{0}$ afin de le décomposer suivant $P\oplus D$.
L'image de $\overrightarrow{p}$ est donc $\overrightarrow{p}$: $p(m(\overrightarrow{u}))=p(\overrightarrow{u})$.

On a construit un projecteur.
Son image est l'hyperplan P (toutes les images sont dans P, et tout vecteur de P est atteint au moins une fois.... comme image de lui même).
Son noyau est la droite D (un vecteur $\overrightarrow{u}$ a une image nulle si et seulement si il se décompose en $\overrightarrow{0}+\overrightarrow{d}$).

Et le projecteur associé est celui qui projette sur D en effaçant P.

Peut on être plus précis sur ce projecteur ? Peut on l'expliciter.

• Démarche de tricheur.

Pour l'expliciter, il suffit de donner l'image des quatre vecteurs d'une base de $(\mathbb{R}^4,+,.)$.
Mais pas la base canonique ! Trop lourd.

La base $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Preuve :
D'où sort elle ?
Mon premier est dans P.
Mon second est dans P.
Mon troisième est dans P.
Mon quatrième est dans D.
Mon tout est une base de $P\oplus D$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Les vecteurs de P sont envoyés sur eux même. Et ceux de D sont envoyés sur 0.

On peut étendre : $\alpha.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\gamma.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\delta.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\longmapsto\alpha.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\gamma.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matriciellement c'est (mais sur cette base) : $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$, de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tiens tiens...

• Démarche d'escamoteur..

Le coup de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est bien, mais ça ne marche que sur une base bien choisie, écrite plus haut, totalement adaptée à notre problème...
Mais sur la base canonique ?

Simple. On fait un aller retour $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}$ en $P.D.P^{-1}$.

Vérifiez. En l'écrivant $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ on voit que les images sont dans P (trois colonnes) et qu'on a perdu D (dernière colonne).
Et vous pouvez calculer l'image des trois vecteurs basiques de P.

Ensuite, élevez au carré cette $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et vous retrouvez la même.

Simple :

Et si on cherchait l'autre projecteur : $Id - p$.

Sa matrice est $I_4 - M$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Oui, une matrice de rang 1. Normal, son ensemble image est D.

Et elle s'écrit $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.Normal, son noyau a pour équation $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$.

• Démarche décomposition.

Tout vecteur $\overrightarrow{u}$de $(\mathbb{R}^4, +, .)$ se décompose d'une façon unique comme somme d'un vecteur $\overrightarrow{p}$ de P et d'un vecteur de D qu'on va écrite $\mu.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Faisons passer sur notre vecteur $\overrightarrow{u}$la forme linéaire $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto x + y - z + 2.t$ (notée φ celle qui sert d'équation à P).

On a alors $\varphi(\overrightarrow{u}) = \varphi(\overrightarrow{p}) + \mu.\varphi(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Or, $\varphi(\overrightarrow{p})$ est nul, et $\varphi(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ vaut 1.

Ceci nous donne $\mu = \varphi(\overrightarrow{u}) = x + y - z + 2.t$.

On a donc le vecteur de D : $(x+y-z+2.t).\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ et

$$\boxed{\overrightarrow{u}=\left(\overrightarrow{u}-(x+y-z+2.t).\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)+(x+y-z+2.t).\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}$$

Il ne reste plus qu'à projeter $\overrightarrow{u}$

sur P	sur D
$\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-(x+y-z+2.t).\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$	$(x+y-z+2.t).\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}2&1&-1&2\\-1&0&1&-2\\-1&-1&2&-2\\-1&-1&1&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&-1&1&-2\\1&1&-1&2\\1&1&-1&2\\1&1&-1&2\end{pmatrix}$

Cette méthode est sans doute la plus efficace ici quand l'un des espaces est de dimension 1 (et l'autre déterminé comme noyau d'une forme linéaire φ).

On va montrer qu'en fait, tout projecteur fait ceci. Il est associé à une somme directe $P\oplus D$ (pas forcément hyperplan et droite, mais sous-espaces de dimension p et $n-p$), et il ne garde que la partie du vecteur qui est dans P.
On dit alors qu'on projette sur P en effaçant D (ou « parallèlement à D »).
Et on a aussi la formule capitale écrite plus haut : $\overrightarrow{u}=p(\overrightarrow{u})+(\overrightarrow{u}-p(\overrightarrow{u}))$ que vous apercevez plus haut...

Si p est un projecteur de E alors on a $E=Im(p)\oplus Ker(p)$
$$Im(p)=Ker(Id-p).$$
$$Ker(p)=Im(Id-p)$$

Tout ce qu'on a le droit d'utiliser : p est linéaire de E dans E et $p\circ p=p$. Mais c'est déjà beaucoup.
Comme p est un endomorphisme, on a $Im(p)$ et $Ker(p)$ qui sont des sous-espaces de $(E,+,.)$, et leur somme aussi.

Même si ça ne sert à rien (à part à s'entraîner) : $Ker()\cap Im(p)=\{\overrightarrow{0}\}$.

. : Une inclusion est évidente.
Pour l'autre, on prend $\overrightarrow{u}$ dans $Ker(p)\cap Im(p)$. Il s'écrit $\overrightarrow{u}=p(\overrightarrow{a})$ et vérifie $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$.
On applique : $\overrightarrow{u}=p(\overrightarrow{a})=p(p(\overrightarrow{a}))=p(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$.

Maxou : Qui est capable à partir de $Ker(p)\cap Im(p)=\{\overrightarrow{0}\}$ et la formule du rang de conclure $E=Ker(p)\oplus Im(p)$ si on est en dimension finie ?

Analyse.
Si $\overrightarrow{u}$ se décompose en $\overrightarrow{v}=p(\overrightarrow{a})$ dans $Im(p)$ et $\overrightarrow{k}$ dans $Ker(p)$,alors on a $\overrightarrow{u}=p(\overrightarrow{a})+\overrightarrow{k}$ puis on applique $p(\overrightarrow{u})=p(p(\overrightarrow{a}))+p(\overrightarrow{k})=p(\overrightarrow{a})+\overrightarrow{0}$.
On n'a pas le choix, le vecteur de $Im(p)$ est $p(\overrightarrow{u})$ lui même. Et par soustraction, le vecteur dans $Ker(p)$ est $\overrightarrow{u}-p(\overrightarrow{u})$.

Bonus : On note qu'on a prouvé au passage :
tout vecteur $\overrightarrow{v}$de $Im(p)$ vérifie $p(\overrightarrow{v})=\overrightarrow{v}$.

Synthèse.
On propose $\overrightarrow{u}=(p(\overrightarrow{u}))+(\overrightarrow{u}-p(\overrightarrow{u}))$.
On vérifie que $p(\overrightarrow{u})$ est dans $Im(p)$ (plus con que ça, comme question, j'ai pas, à part « si on remplace l'atome de cobalt du CoVid par un atome de Sodium, qu'obtient on ? »)
Et si on applique p à $(\overrightarrow{u}-p(\overrightarrow{u}))$ on trouve bien $\overrightarrow{0}$ grâce à $p\circ p=p$.

On a bien $E=Im(p)\oplus Ker(p)$.
Mais comme je vous le dirai plus loin, ne retenez pas ça. Retenez $\overrightarrow{a}=(p(\overrightarrow{a}))+(\overrightarrow{a}-p(\overrightarrow{a}))$ ce n'est pas plus long et ça dit tout.

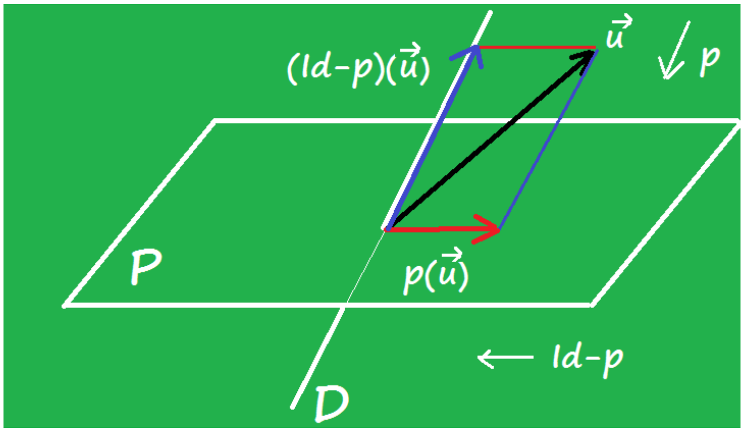
Inclusion.
On prend $\overrightarrow{u}$ dans $Im(p)$, on l'écrit $\overrightarrow{u} = p(\overrightarrow{a})$, on applique p : $p(\overrightarrow{u}) = p^2(\overrightarrow{a}) = p(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{u}$.
Oui, on l'a déjà dit : $\overrightarrow{u}$ de $Im(p)$ est invariant par p. Il est donc dans $Ker(Id-p)$ [24].

Rapide : A la façon d'un cours qui ne asse pas trois fois sur la même idée : $(Id-p)\circ p = 0_E$.
On a donc $Im(p) \subset Ker(Id-p)$ par le lemme $g \circ f = 0 \Leftrightarrow Im(f) \subset Ker(p)$.

.noisulcnI
On prend $\overrightarrow{u}$ dans $Ker(Id-f)$. Il vérifie $f(\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
Mais alors il est dans $Im(f)$... en tant qu'image de lui même.

Remarque : Un vecteur propre de f de valeur propre non nulle est toujours dans $Im(f)$ (c'est $f\Big(\frac{\overrightarrow{u}}{\lambda}\Big)$.
Un vecteur propre de f de valeur propre nulle n'est pas forcément dans $Im(f)$. mais il est dans $Ker(f)$.

On a prouve $Ker(Id-p) = Im(p)$.
En l'appliquant à $Id-p$, on trouve $Ker(p) = Im(Id-p)$.
Et avec un petit dessin, on retrouve cet échange des rôles entre les deux projecteurs associés p et $Id-p$.
.
.
.



On retient :
si on a une somme directe $E = P \oplus D$, alors il existe deux projecteurs :
un qui projette sur P en effaçant D
un qui projette sur D en effaçant P
leur somme fait Id_E
si on a un projecteur : il projette sur $Im(p)$ en effaçant $Ker(p)$
$E = Im(p) \oplus Ker(p)$
$E = Ker(Id-p) \oplus Ker(p)$
$Ker(p) = Im(Id-p)$ et $Im(p) = Ker(Id-p)$
la décomposition suivant $Im(p) \oplus Ker(p)$ est $p(\overrightarrow{a}) + (\overrightarrow{a} - p(\overrightarrow{a}))$

Attention : Ne vous focalisez pas sur $E = Im(p) \oplus Ker(p)$.
C'est juste une conséquence de « p est un projecteur ».
La vraie caractérisation à retenir est $Ker(Id-p) \oplus Ker(p) = E$.
Elle est très bien en ce sens qu'il y a équivalence entre « $Ker(Id-p) \oplus Ker(p) = E$ » et « p est un projecteur ».
Un sens est connu.
Pour l'autre : Si vous avez $E = Ker(Id-p) \oplus Ker(p)$, alors écrivez $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$
avec $\overrightarrow{a}$ dans $Ker(Id-p)$ et $\overrightarrow{b}$ dans $Ker(p)$.
Appliquez p : $p(\overrightarrow{u}) = p(\overrightarrow{a}) + p(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a}$
Ré-appliquez $p(p(\overrightarrow{u})) = p(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}$.
Constatez $p \circ p = p$.
Et méfiez vous, tout automorphisme (endo+iso) f vérifie $Im(f) \oplus Ker(f) = E$. mais ce n'est pas un projecteur.

Des projecteurs cachés.
Maintenant que vous avez la relation $E = Ker(p) \oplus Ker(Id-p)$ pour un projecteur, vous pouvez « casser » certains exercices.
Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 - 7.f + 10.Id_E = 0_E$. Montrez alors $E = Ker(f-5.Id) \oplus Ker(f-2.Id)$.
On en a fait plusieurs des comme ça.

24. oh, un sous-espace propre

Et on les a exploités pour décrire les suites récurrences linéaires $u_{n+2} = 7.u_{n+1} - 10.u_n$
les solutions d'équations différentielles $y"_t = 7.y'_t - 10.y_t$
On a raisonné par analyse et synthèse, aboutissant ici à $\overrightarrow{u} = \dfrac{f(\overrightarrow{u}) - 2.\overrightarrow{u}}{3} + \dfrac{5.\overrightarrow{u} - f(\overrightarrow{u})}{3}$ (refaites le si vous ne me croyez pas).
Mais en fait, c'est tout bête.
On pose $p = \dfrac{f - 2.Id}{3}$ et on calcule comme par hasard : $p^2 = \dfrac{f - 2.Id}{3} \circ \dfrac{f - 2.Id}{3} = \dfrac{f^2 - 4.f + 4.Id}{9}$ par linéarité [25].
$p^2 = \dfrac{(7.f - 10.Id) - 4.f + 4.Id}{9}$ par hypothèse.
$p^2 = \dfrac{3.f - 6.Id}{9} = \dfrac{3.f - 6.Id}{9} = p$!
C'est fou ! p est un projecteur. [26]
On a donc $E = Ker(p) \oplus Ker(Id - p) = Ker\Big(\dfrac{f - 2.Id}{3}\Big) \oplus Ker\Big(Id - \dfrac{f - 2.Id}{3}\Big) = Ker(f - 2.Id) \oplus Ker(f - 5.Id)$ [27]
Et mieux encore, tout vecteur $\overrightarrow{a}$ s'écrit $\overrightarrow{a} = \dfrac{f - 2.Id}{3}(\overrightarrow{a}) + \Big(\overrightarrow{a} - \dfrac{f - 2.Id}{3}(\overrightarrow{a})\Big)$! Ne me remerciez pas, c'est cadeau...

Divination :

> Mais comment avoir pensé à $p = \dfrac{f - 2.Id}{3}$ qui fonctionnait si bien ?
> Parce que franchement, avec $p = \dfrac{f - 7.Id}{5}$ ça ne donnait pas du tout $p \circ p = p$.
>
> Alors, si vous manquez de recul, je vous dis : posez $p = \alpha.f + \beta.Id$ et tentez votre chance :
> vous calculez par linéarité $p^2 = \alpha^2.f^2 + 2.\alpha.\beta.f + \beta^2.Id$
> remplacez $p^2 = \alpha^2.(7.f - 11.Id) + 2.\alpha.\beta.f + \beta^2.Id = (\ldots).f + (\ldots).Id$
> et arrangez vous pour avoir $p^2 = p$, ça vous donne un petit système en α et β.
>
> Si vous avez assez de recul. Dites vous que f vérifiant $f^2 - 7.f + 10.Id = 0_E$ doit avoir pour valeurs propres 2 et 5 (équation caractéristique).
> Et un projecteur a pour valeurs propres 0 et 1.
> Effectuez la transformation affine qui va envoyer 2 sur 0 et 5 sur 1, et vous savez comment passer de f à p. Génial, non ?

Après, pour les exercices du type $f^3 - 2.f^2 - 11.f + 12.d_E = 0_E \Rightarrow E = Ker(f - Id) \oplus Ker(f - 4.Id) \oplus Ker(f + 3.Id)$, c'est plus difficile.
Pourtant, derrière un tel exercice se cachent des choses : trois projecteurs p_1, p_2 et p_3 vérifiant $p_i \circ p = 0_E$ pour i différent de j, et $Id = p_1 + p_2 + p_3$ et $f = 1.p_1 + 4.p_2 - 3.p_3$.
Mais ça mérite un exercice de T.D.

Et aussi, à propos de sommes de projecteurs.

Exercice :

> Les valeurs propres d'un projecteur de $(\mathbb{R}^2, +, .)$ valent 0 et 1.
> Mais qu'en est il de la somme de deux projecteurs ?
> Réponse 1 : en sommant : 0 et 2.
> Réponse 2 : 0, 1 ou 2 selon qui va avec qui.
> Réponse 3 : la preuve : $P.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.P^{-1} + P.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.P^{-1}$ ou $P.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.P^{-1} + P.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.P^{-1}$.
> Réponse 4 : ce qu'on veut.
> Les quatre réponses sont fausses. Expliquez pourquoi.
> Construisez deux projecteurs p et q tel que leur somme admette pour valeur propre 4. Quelle est alors l'autre valeur propre ?

15°) Symétries.

Petit dernier pour la route : les symétries.

25. avec des applications classiques, ça ne marche pas, mais ici, elles sont linéaires, c'est un produit... matriciel
26. plus rapide encore : $p \circ (Id - p) = \frac{f-2.Id}{3} \circ \frac{5.Id-p}{3} = \ldots$
27. en utilisant $Ker(\alpha.h) = Ker(h)$ pour α non nul

Une symétrie est un endomorphisme de $(E, +, .)$ vérifiant $\sigma \circ \sigma = Id$.
C'est donc un automorphisme qui est son propre inverse. Matriciellement : $M^2 = I_n$et $M^{-1} = M$ (conséquence nécessaire, non suffisante : déterminant égal à 1 ou -1).
Id et $-Id$ sont deux symétries classiques.

Construis toi même des symétries en dimension 3.

I_3	$P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.P^{-1}$	$P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.P^{-1}$	$-I_3$

Et en dimension 4. Prenons deux plans, supplémentaires l'un de l'autre : $P \oplus Q = \mathbb{R}^4$.
Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose en $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ avec $\overrightarrow{a}$ dans A et $\overrightarrow{b}$ dans B.
On pose alors $\sigma(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$.
On conserve les vecteurs de A et on change le signe de ceux de B.
Et si on recommence $\sigma(\sigma(\overrightarrow{u})) = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.
On a bien $\sigma^2 = Id$.

Exercice :

On pose A d'équation $\left\{ \begin{array}{ccccc} x & +y & +z & +t & =0 \\ x & -y & +2.z & & =0 \end{array} \right|$. C'est bien un plan (dimension 2 comme noyau d'une application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$).

On pose B d'équation $\left\{ \begin{array}{ccccc} x & +2.y & & +t & =0 \\ x & -y & +2.z & +t & =0 \end{array} \right|$. C'est encore un plan.

$P \cap Q$ est réduit au seul vecteur nul car $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$ [a]

Par formule de Grassmann : $A \oplus B = \mathbb{R}^4$.

[a]. deux visions : le système est non dégénéré et n'a qu'une solution ; ou alors les quatre formes linéaires sont indépendantes

Mon boulot :

On se donne un vecteur $\overrightarrow{u}$. Il faut le décomposer en $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$.

On fait passer sur la relation $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}=\overrightarrow{u}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} a\\ a'\\ a"\\ a'"\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b\\ b'\\ b"\\ b'"\end{pmatrix}$ les quatre formes linéaire définissant A et B. Les unes effacent les termes de $\overrightarrow{a}$ et les autres ceux de $\overrightarrow{b}$:

$\begin{array}{ccccccccc} x & +y & +z & +t & = & b & +b' & +b" & +b'" \\ x & -y & +2.z & & = & b & -b' & +2.b" & \\ x & +2.y & & +t & = & a & +2.a' & & +a'" \\ x & -y & +2.z & +t & = & a & -a' & +2.a" & +a'" \end{array}$ sachant aussi

$\begin{array}{cccccc} a & +a' & +a" & +a'" & = & 0 \\ a & -a' & +2.a" & & = & 0 \\ b & +2.b' & & +b'" & = & 0 \\ b & -b' & +2.b" & +b'" & = & 0 \end{array}$

Huit équations, huit inconnues, se cassant en deux systèmes 4 sur 4 « de Carmer ».
Le reste n'est que calcul.

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4.x+5.y++2.z+4.t\\ -2.x-y--2.z-2.t\\ -3.x-3.y-2.z-3.t\\ x-y+2.z+t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3.x-5.y-2.z-4.t\\ 2.x+2.y+2.z+2.t\\ 3.x+3.y+3.z+3.t\\ -x+y-2.z\end{pmatrix}$$

Et la symétrie est $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 4.x+5.y++2.z+4.t\\ -2.x-y--2.z-2.t\\ -3.x-3.y-2.z-3.t\\ x-y+2.z+t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3.x-5.y-2.z-4.t\\ 2.x+2.y+2.z+2.t\\ 3.x+3.y+3.z+3.t\\ -x+y-2.z\end{pmatrix}$

Vous voyez le signe moins qui a changé ?

Tous calculs faits $\boxed{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 7 & 10 & 4 & 8\\ -4 & -3 & -4 & -4\\ -6 & -6 & -5 & -6\\ 2 & -2 & 4 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}}$

Ne me remerciez pas d'avoir calculé pour vous...

Votre boulot :

On pose $S=\begin{pmatrix} -7 & -10 & -4 & -8\\ 4 & 3 & 4 & 4\\ 6 & 6 & 5 & 6\\ -2 & 2 & -4 & -1\end{pmatrix}$. calculez se trace, son carré, son déterminant.

Donnez ses valeurs propres.

Donnez un sous-espace propre de valeur propre... ah non, je ne vous grille pas les valeurs.

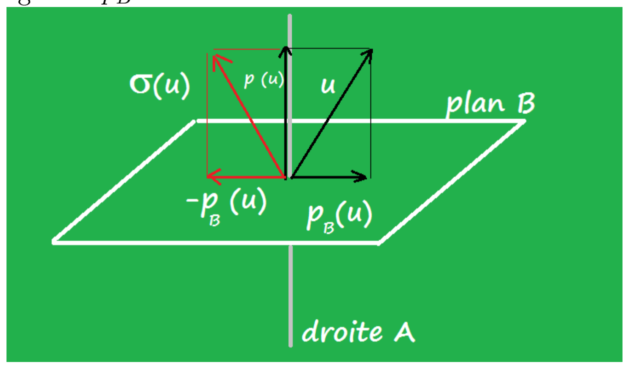
Donnez un polynôme annulateur de cette matrice.

On pose $2.P=S+I$. Calculez P^2. Diagonalisez P.

Normalement, il n'y a aucune calcul...

Et même : $Dans \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4.x+5.y++2.z+4.t \\ -2.x-y--2.z-2.t \\ -3.x-3.y-2.z-3.t \\ x-y+2.z+t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3.x-5.y-2.z-4.t \\ 2.x+2.y+2.z+2.t \\ 3.x+3.y+3.z+3.t \\ -x+y-2.z \end{pmatrix}$
vous devez reconnaitre un bloc qui projette sur A en effaçant B
un bloc qui projette sur B en effaçant A.
Et la symétrie garde p_A et change le signe de p_B.

Sur le dessin ci contre dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$, A est une droite et B un plan. On a représenté en rouge la symétrie qui préserve A et renverse B.



On peut montrer que toutes les symétries vectorielles sont de cette forme : une somme directe, des vecteurs inchangés et d'autres transformés en leurs opposés.
Et on montre aussi $E = Ker(\sigma - Id) \oplus Ker(\sigma + Id)$ $Ker(\sigma - Id)$ est formé des vecteurs invariants
$Ker(\sigma + Id)$ est formé des vecteurs transformés en leur opposé
Et la décomposition est $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{u} + \sigma(\overrightarrow{u})}{2} + \dfrac{\overrightarrow{u} - \sigma(\overrightarrow{u})}{2}$.
On peut l'obtenir par analyse et synthèse.
Et vérifier $\sigma\Big(\dfrac{\overrightarrow{u} + \sigma(\overrightarrow{u})}{2}\Big) = \dfrac{\overrightarrow{u} + \sigma(\overrightarrow{u})}{2}$ puis $\sigma\Big(\dfrac{\overrightarrow{u} - \sigma(\overrightarrow{u})}{2}\Big) = \dfrac{-\overrightarrow{u} + \sigma(\overrightarrow{u})}{2}$.

Souvenir : $M = \dfrac{M +^t M}{2} + \dfrac{M -^t M}{2}$
$z = \dfrac{z + \overline{z}}{2} + \dfrac{z - \overline{z}}{2}$

Mais en fait, non ! Il y a tellement plus rapide.
Si σ est une symétrie, alors $\dfrac{\sigma + Id}{2}$ est un projecteur.
On a alors $E = Ker\Big(\dfrac{\sigma + Id}{2}\Big) \oplus Ker\Big(Id - \dfrac{\sigma + Id}{2}\Big) = Ker(\sigma + Id \oplus Ker(\sigma - Id)$.
Et la décomposition est celle indiquée...

Remarque : Si p est un projecteur, alors $2.p - Id$ est une symétrie.

16°) Trace et déterminant d'endomorphismes.

La question qui suit, pour étrange qu'elle soit, va être en rapport direct avec ce qui précède :
Quelle est la trace et le déterminant de la transposition ?
Et la réponse sera : ça dépend du format des matrices.
Là, certains se disent : « ah, je croyais pourtant avoir bien retenu : $Tr(M) = Tr(^tM)$ et $\det(M) = \det(^tM)$.
Je leur répondrai « c'est vrai, à condition d'avoir bien précisé que M était carrée ; mais ça n'a rien à voir avec ma question ».
Ma question n'est pas quelle est la trace de la transposée. mais quelle est la trace de la transposition.
La transposée d'une matrice est une matrice. la transposition est une action sur les matrices.
Ce que je vous demande : c'est $Tr(M \longmapsto^t M)$, où $M \longmapsto^t M$ est un endomorphisme de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$.

somme	produit	transposée	dérivée	quotient	intégrale	solution
addition	multiplication	transposition	dérivation	division	intégration	résolution

Tiens, avec ce petit tableau, certains sont peut être en train de se rendre compte qu'ils mélangent tout depuis leur plus jeune âge, alors que tout était à portée de leur main et de leur cerveau...

La transposition est un endomorphisme de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$, qui a donc une trace et un déterminant.

$Tr(M \longmapsto {}^t M)$	$Tr(M \longmapsto {}^t M)$

Et là, si ma question est devenue plus claire, ma réponse ne l'est pas forcément...
Et c'est normal que vous vous posiez des questions... On va y venir.

Mais il faut que je définisse proprement la « trace et le déterminant d'un endomorphisme de $(E, +, .)$ ».

Définition : la trace d'un endomorphisme f de $(E, +, .)$ est la trace de sa matrice.
le déterminant d'un endomorphisme f de $(E, +, .)$ est le déterminant de sa matrice.

Exemple : $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & +y & -z \\ x & -y & +2.z \\ & y & +3.z \end{pmatrix}$ a pour trace $1 - 1 + 3$ et pour déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Bon, ça va, ce n'est pas compliqué.
Revenons à notre exemple de la transposition sur $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. La base canonique de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ est connue

base	$\overrightarrow{E_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{E_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{E_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{E_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
image	$\overrightarrow{E_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{E_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{E_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{E_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	

La trace cherchée vaut $1 + 0 + 0 + 1$ ce qui fait 2.
Le déterminant cherché vaut -1 après calcul.

Et en taille 3 ? La matrice de la transposition sur la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sa trace vaut 3 (grâce aux trois matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de la base canonique.
Son déterminant -1 vaut car on a juste une matrice de permutation $\overrightarrow{(2\ 4)} \circ \overrightarrow{(3\ 7)} \circ \overrightarrow{(6\ 8)}$.

Je n'ai pas envie d'écrire la matrice pour $(M_4(\mathbb{R}), +, .)$. Elle sera de taille 16 sur 16 avec une immense majorité de 1. Sa trace vaudra 4 (quatre & sur la diagonale) et son déterminant $(-1)^{(16-4)/2}$.

Généralisation : Dans $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ qui est de dimension n^2 (avec ses n^2 matrices de la base canonique), la matrice est un grand carré de taille n^2 sur n^2, du type « permutation ».
La trace vaut n à cause de matrices de la base canonique invariantes.
Et le déterminant est celui d'une matrice de permutation avec $\dfrac{n^2 - n}{2}$ couples échangés.

On peut donc maintenant demander « quelle est la trace et le déterminant de la dérivation ?
Euh, non. Il faut préciser sur quel ensemble.

Dérivation : Sur $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$, la dérivation a pour trace 0 et pour déterminant 0. Matrice telle que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sur l'espace des solutions de $y"_t + y_t = 0$, la dérivation a pour trace 0 et pour déterminant 1.

Base (sin, cos),matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sur l'espace des solutions de $y"_t - 3.y'_t + 2.y_t = 0$, la dérivation a pour trace 3 et pour déterminant 2.

Base $(t \longmapsto e^{2.t},\ t \longmapsto e^t)$,matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $\varphi = M \longmapsto A.M.B$, on calcule les images des vecteurs de la base canonique

base	$\overrightarrow{E_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{E_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{E_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{E_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ -3 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$
image	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$	

(je vous demande juste de me faire confiance sur le calcul).

Naïf : L'élève : mais je ne peux pas multiplier une matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ par cette matrice $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ -3 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$... C'est quoi ce bazar ?

Évidemment, mais $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ est un élément de (M_2 (\R),+,.) et pas son écriture sur la base canonique.

Or, la matrice 4 sur 4 est la matrice de φsur la base canonique. On l'utilise donc ainsi :

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ devient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ sur la base canonique.

On applique $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ -3 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 5.y & & +10.t \\ -x & +y & -2.z & +2.t \\ & +15.y & & +20.t \\ -3.x & +3.y & -4.z & +4.t \end{pmatrix}$

et on refait une matrice 2 sur 2 : $\begin{pmatrix} 5.y + 10.t & -x + y - 2.z + 2.t \\ 15.y + 20.t & -3.x + 3.y - 4.z + 4.t \end{pmatrix}$

La trace vaut 5 et le déterminant -10.

Mais là, un élève me dit « monsieur, je n'ai pas les mêmes canons que vous ». Il veut dire par là qu'il n'a pas choisi ses vecteurs de la base canonique dans le même ordre...

base	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 15 & 20 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
image	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$	

Et là, ce n'est plus la même matrice...

Oui, mais c'est la même trace et le même déterminant...

$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ -3 & 3 & -4 & 4 \end{vmatrix}$	$L_2 \leftrightarrow L_3$	$-$	$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -4 & 4 \end{vmatrix}$	$C_2 \leftrightarrow C_3$	$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 15 & 20 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

La question est maintenant plus générale.

On a dit qu'on posait

$\det(f)$	$=$	$\det(Mat_C^C(f))$
morphisme		matrice

.

Mais si on décide de changer de base ?
On doit alors calculer $\det(Mat_B^B(f))$. Ce ne sera pas la même matrice !
Oui, mais les deux matrices seront semblables $Mat_B^B(f) = Mat_B^C(Id).Mat_C^C(f).Mat_C^B(Id) = P.Mat_C^C(f).P^{-1}$.
Et elles ont même trace et même déterminant.

Bien dit : les matrices d'un endomorphisme f sont toutes semblables entre elles.
Elles ont toutes la même trace, le même déterminant, qu'on appelle alors trace et déterminant de l'endomorphisme.

Mieux dit : La vraie formule est de dire « trace et déterminant sont des quantités intrinsèques », qui ne dépendent pas de la base canonique.
Il y a a aussi la somme des mineurs de taille 2, et autres choses de ce type.

Vous pouvez donc dire « la trace de telle application est... ».
Vous ne pouvez pas dire « la matrice de tel endomorphisme est.. ; » si vous ne dites pas sur quelle base...

Donc, à toute question « calculez la trace de tel endomorphisme », fixes vous une base
déterminez la matrice de f sur cette base
calculez sa trace.

Le correcteur n'a pas la même base que vous ?
Il n'aura pas la même matrice.
Mais il aura le même déterminant...
Si vous regardez le copie du voisin, ne soyez pas surpris de ne pas avoir la même matrice. Ce qui compte est sa trace et don déterminant.

Pour vérifier. On se donne $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
Donnez la trace et le déterminant de $\overrightarrow{u} \longmapsto \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u}$.
La matrice est $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ car $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix} = c.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - b.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
sa trace est nulle, et son déterminant aussi.

Rapide : On savait que le déterminant allait être nul.
Cet endomorphisme n'est pas bijectif non injectif $noyau = Vect(\overrightarrow{a})$
non surjectif $image = (\overrightarrow{a})^\perp$ (plan)
Si on choisit de travailler sur une base de premier vecteur $\overrightarrow{a}$, la matrice M cherchée a une première colonne nulle...

Pour en revenir à la question de départ.
Sur $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$, la transposition est une symétrie ($\sigma \circ \sigma = Id$).
On a donc $M_n(\mathbb{R}) = Ker(\sigma - Id) \circ Ker(\sigma + Id) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
Si on prend alors une base de $S_n(\mathbb{R})$ ($\dfrac{n.(n+1)}{2}$ matrices symétriques), suivie d'une base de $A_n(\mathbb{R})$ ($\dfrac{n.(n-1)}{2}$ matrices symétriques), alors on a une base de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$, adaptée à notre transposition.
la matrice de la transposition est alors diagonale, avec des 1puis des -1. Et c'est tout.
Combien de 1 ? $\dfrac{n.(n+1)}{2}$
Combien de -1 ? $\dfrac{n.(n-1)}{2}$.
La trace devient $\dfrac{n.(n+1)}{2} \times 1 + \dfrac{n.(n-1)}{2} \times (-1)$.
Le déterminant devient $1^{\frac{n.(n+1)}{2}}.(-1)^{\frac{n.(n-1)}{2}}$
C'est tout !

Remarques : La trace d'un projecteur est égale à son rang.
Et son déterminant est nul(sauf projecteur identité).

La trace d'un endomorphisme est la somme de ses valeurs propres.

La trace d'un endomorphisme nilpotent vaut 0.