

2019
2020

Mpsi 2 Charlemagne
Lundi 1 juin

TD29

◊0◊ a- Limite en 0 si elle existe de $x^{\frac{1}{1+2 \cdot \ln(x)}}$.

La fonction n'existe pas en 0 mais sur $]0, \frac{1}{\sqrt{e}}[$ elle est C^∞ et se met sous la forme $\exp\left(\frac{\ln(x)}{1+2 \cdot \ln(x)}\right)$.

Quand x tend vers 0^+ , son logarithme tend vers l'infini, et le quotient $\frac{\ln(x)}{1+2 \cdot \ln(x)}$ tend vers $\frac{1}{2}$ (équivalent du numérateur et du dénominateur, ou division en haut et en bas par $\ln(x)$).

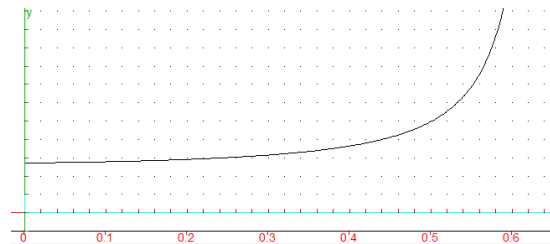
La quantité cherchée a pour limite $e^{\frac{1}{2}}$ c'est à dire $\sqrt{e}$.

b- Limite en 0 si elle existe de $x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

Même retour à l'exponentielle sur un intervalle convenable.

On étudie donc $\frac{\ln(x)}{\ln(e^x-1)} = \frac{\ln(x)}{\ln(x+o(x))} = \frac{\ln(x)}{\ln(x) + \ln(1+o(1))}$.

Ce terme tend vers 1. $\exp\left(\frac{\ln(x)}{\ln(e^x-1)}\right) \rightarrow_{x \rightarrow 0^+} e$



c- Limite en e si elle existe (par valeur inférieure) de $(\ln(x))^{\ln(e-x)}$.

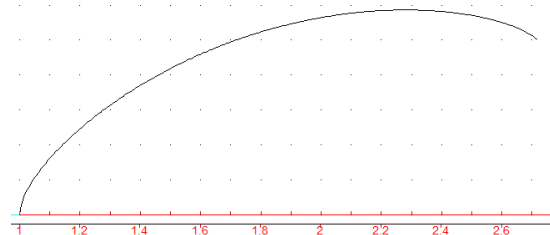
On pose impérativement $x = e - h$ avec h positif qui va tend vers 0.

$(\ln(x))^{\ln(e-x)} = \exp\left(\ln(\ln(e-h)) \cdot \ln(h)\right) = \exp\left(\ln\left(1 + \ln\left(1 - \frac{h}{e}\right)\right) \cdot \ln(h)\right)$

Or, $\ln\left(1 + \ln\left(1 - \frac{h}{e}\right)\right) \sim_{h \rightarrow 0^+} \ln\left(1 - \frac{h}{e}\right) \sim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{h}{e}$

et donc $\ln\left(1 + \ln\left(1 - \frac{h}{e}\right)\right) \cdot \ln(h) \sim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{h \cdot \ln(h)}{e}$ et ceci tend vers 0.

Notre quantité tend vers $\boxed{1}$



d- Limite en 0 si elle existe (par valeur supérieure) de $\frac{1}{x \cdot (x - \ln(x))^x}$.

On va étudier $(x - \ln(x))^x$ ou même son logarithme : $x \cdot \ln(x - \ln(x))$. Dans la parenthèse, c'est $-\ln(x)$ qui l'emporte.

Par souci de rigueur on écrit $x \cdot \ln(x - \ln(x)) = x \cdot \ln\left(-\ln(x) \cdot \left(1 - \frac{x}{\ln(x)}\right)\right) = x \cdot \ln(-\ln(x)) + x \cdot \ln\left(1 - \frac{x}{\ln(x)}\right)$

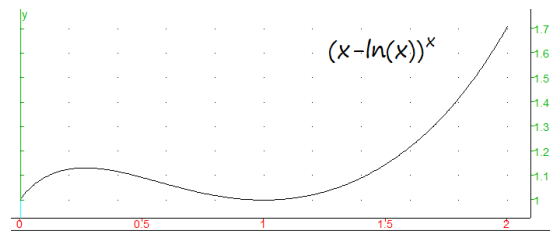
Quand x tend vers 0, $\frac{x}{\ln(x)}$ tend vers 0, et $x \cdot \ln\left(1 - \frac{x}{\ln(x)}\right)$ tend vraiment bien vers 0.

Mais que fait vraiment $x \cdot \ln(-\ln(x))$ de la forme $0 \cdot \ln(+\infty)$ avec des guillemets ?

Posons $x = e^{-t}$ avec t qui tend vers l'infini. Ce terme devient $e^{-t} \cdot \ln(t)$ et quitte à l'écrire $e^{-t} \cdot t \cdot \frac{\ln(t)}{t}$ il tend vers 0.

Bref : $x \cdot \ln(x - \ln(x))$ tend vers 0 et $(x - \ln(x))^x$ tend vers 1.

La fraction de l'énoncé tend vers l'infini, à la vitesse de $\frac{1}{x}$.



Et l'usage d'une calculatrice graphique est ici utile...

◊1◊

♥ Déterminez $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 4^3}{x^5 - 4^5}$.

a et b strictement positifs donné, déterminez si elle existe la limite de $\frac{x^a - \mu^a}{x^b - \mu^b}$ quand x tend vers μ avec $\mu = \frac{a+b}{2}$.

On peut écrire $\frac{x^3 - 4^3}{x^5 - 4^5} = \frac{(x-4).(x^2 + 4.x + 4^2)}{(x-4).(x^4 + 4.x^3 + 4^2.x^2 + 4^3.x + 4^4)}$ et passer à la limite après avoir simplifié par $x - 4$.

On peut aussi écrire $\frac{x^3 - 4^3}{x^5 - 4^5} = \frac{x^3 - 4^3}{x - 4} \cdot \frac{1}{\frac{x^4 - 4^5}{x - 5}}$ et voir des dérivées en 4 de deux polynômes.

On peut aussi utiliser la règle de l'Hospital qui est ici du zèle.

La limite vaut $\frac{3.4^2}{5.4^3}$ soit $\left(\frac{3}{5.4^2}\right)$

La suite de l'exercice est une généralisation. C'est par la limite de $\frac{x^a - \mu^a}{x - \mu} \cdot \frac{1}{\frac{x^b - \mu^b}{x - \mu}}$ qu'on l'attrape et on

trouve $\frac{a.\mu^{a-1}}{b.\mu^{b-1}}$. Le résultat est donc $\left(\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a-b}\right)$

◊2◊

♥ Donnez le développement limité d'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \tan(\pi.e^x)$.

Pas de problème d'existence tant que x reste par exemple sur $[-10^{-1}, 0[$ ou $]0, 10^{-1}]$.

On effectue un développement limité : $\pi.e^x = \pi + \pi.x + \frac{\pi.x^2}{2} + \frac{\pi.x^3}{6} + \frac{\pi.x^4}{24} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}$ (ça devrait suffire).

Par périodicité de la tangente, on va calculer $\tan(u)$ avec $u = \pi.x + \frac{\pi.x^2}{2} + \frac{\pi.x^3}{6} + \frac{\pi.x^4}{24} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}$.

On confirme : u tend vers 0 avec x . De plus $u = O(x)$, donc $u^3 = O(x^3)$ et $u^4 = O(x^4)$.

Dans le développement limité de la tangente en 0, le terme en $o(u^4)$ sera donc parfait :

$$\tan(u) = u + \frac{u^3}{3} + o(u^4)_{u \rightarrow 0}.$$

On développe u^3 commence par $\pi^3.x^3$ et le seul terme d'ordre inférieur ou égal à 4 est $3.(\pi.x)^2 \cdot \frac{\pi.x^2}{2}$ (terme $3.a^2.b$ dans $(a+b)^3$).

Tous calculs faits : $\tan(\pi.e^x) = \pi.x + \frac{\pi}{2}.x^2 + \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi^3}{3}\right).x^3 + \left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi^3}{2}\right).x^4 + o(x^4)_{x \rightarrow 0}$

◊3◊

♥ Donnez le développement limité d'ordre 5 en 0 de $\ln\left(\frac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)}\right)$.

Application définie sur $] -\pi/2, \pi/4[$ et de classe C^∞ (non, je ne vais pas utiliser la formule de Taylor).

On note que cette application est impaire (passage à $\ln\left(\frac{1}{u}\right)$ quand on remplace x par $-x$).

On peut développer $\ln\left(1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2.x^5}{15} + o(x^5)\right)\right) - \ln\left(1 - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2.x^5}{15} + o(x^5)\right)\right)$ en exploitant

$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + o(u^5)_{u \rightarrow 0}$ (et la moitié des termes s'en vont par imparité), sachant que u^3 ne contient plus que deux termes et u^5 un seul.

On peut aussi dériver et trouver $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \left(\frac{1}{1 + \tan(x)} + \frac{1}{1 - \tan(x)}\right)$ puis $x \mapsto \frac{2}{\cos^2(x).(1 - \tan^2(x))}$

et même $x \mapsto \frac{2}{\cos^2(x) - \sin^2(x)}$.

On développe $x \mapsto \cos(2x)$ en 0 : $1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$

On passe à son inverse (a priori et produit en croix ou $\frac{1}{1-u} = u + u^2 + o(u^{2,5})$) :

$$\frac{2}{\cos(2x)} = 2 + 4x^2 + \frac{20x^3}{3} + o(x^3).$$

Il ne reste qu'à intégrer $\ln\left(\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right) = 2x + \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{3} + o(x^5)_{x \rightarrow 0}$

valeur en 0	0	
dérivée en 0	2	pente 2
dérivée seconde en 0	0	inflexion d'abord au dessous puis au dessus de sa tangente

◊4◊ ♡ Donnez le développement limité d'ordre 4 en 0 de $x \mapsto e^{\sqrt{4+x}}$.

L'existence de la fonction est assurée sur $] -4, +\infty[$ et comme elle est C^∞ , on peut développer à tout ordre.

On commence par $\sqrt{4+x} =$

$$2\sqrt{1+\frac{x}{4}} = 2 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64} + \frac{x^3}{512} - \frac{5x^4}{16384} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}.$$

On place dans des exponentielle : $e \cdot e^{\frac{x}{4}} \cdot e^{-\frac{x^2}{64}} \cdot e^{\frac{x^3}{512}} \cdot e^{-\frac{5x^4}{16384}} \cdot e^{o(x^4)}$.

On développe chaque exponentielle à l'ordre adéquat :

$$e \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{64} + \frac{x^4}{8192} + o(x^4)\right) \cdot \left(1 + \frac{x^3}{512} + o(x^4)\right) \cdot \left(1 - \frac{5x^4}{16384} + o(x^4)\right)$$

C'est laborieux et inutile : $e^{\sqrt{4+x}} = e^2 \cdot \left(1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64} + \frac{x^3}{1536} - \frac{x^4}{49152} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}\right)$

valeur en 0	e^2	e^2
dérivée en 0	$\frac{e^2}{4}$	pente $e^2/4$
dérivée seconde en 0	$\frac{e^2}{32}$	localement convexe

◊5◊ $x \mapsto \frac{(1+x)^{1/x} - e^{\cos(x)}}{x}$ se prolonge par continuité en 0. Par quelle valeur ? (faites des développements limités en utilisant $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ quand u tend vers 0).

Voici le début du triangle de l'algorithme boustrophédon. Expliquez le. Écrivez un script Python qui pour n donné va calculer la ligne d'indice n :

$$\text{Surprise : } \tan(x) = 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2} + 2 \cdot \frac{x^3}{6} + 0 \cdot \frac{x^3}{24} + 16 \cdot \frac{x^3}{120} + \dots$$

$$0 \cdot \frac{x^3}{720} + 272 \cdot \frac{x^7}{5040} + o(x^7)_{x \rightarrow 0}$$

ne prouvez rien, mais énoncé le résultat qui semble vrai (et il l'est).

Cherchez le développement limité en 0 de $\frac{1}{\cos(\theta)}$ à l'ordre 7. Trouvez le rapport avec le tableau.

1							
0	1						
1	1	0	←				
0	1	2	2				
5	5	4	2	0	←		
0	5	10	14	16	16		
61	61	56	46	32	16	0	←
0	61	122	178	224	256	272	272
							272

◊6◊

◊7◊ ♡ Combien y a-t-il d'endomorphismes f de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ de noyau $\text{Vect}(\vec{i} + 2\vec{j})$ et vérifiant $f(\vec{i} - 3\vec{j}) = \vec{i}$?

Aucun ? Une infinité ?

Un seul. En effet, on doit avoir à la fois $f(\vec{i} + 2\vec{j}) = \vec{0}$ et $f(\vec{i} - 3\vec{j}) = \vec{i}$. $\left\{ \begin{array}{l} f(\vec{i}) + 2f(\vec{j}) = \vec{0} \\ f(\vec{i}) - 3f(\vec{j}) = \vec{i} \end{array} \right|$

On résout ce système, on trouve $f(\vec{i}) = \frac{2\vec{i}}{5}$ et $f(\vec{j}) = \frac{-\vec{i}}{5}$.

f est déterminée sur une base, elle est totalement déterminée.

Si vous y tenez : $x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \mapsto \frac{2x-y}{5} \cdot \vec{i}$, et sur la base canonique $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{2x-y}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

◊8◊

♥ Soient $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel et f un endomorphisme de $(E, +, \cdot)$ vérifiant : pour tout $\vec{u}$ de E , la famille $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ est liée. Il faut en déduire que f est une homothétie. Voici trois “preuves” :

- si f est une homothétie, elle est de la forme $\vec{u} \mapsto \lambda \cdot \vec{u}$ et chaque famille $(\vec{u}, \lambda \cdot \vec{u})$ est liée.
- Pour tout $\vec{u}$, la famille $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ est liée, donc de la forme $(\vec{u}, \lambda \cdot \vec{u})$. f est donc une homothétie de rapport λ .
- Pour tout $\vec{u}$, la famille $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ est liée, donc de la forme $(\vec{u}, \lambda_{\vec{u}} \cdot \vec{u})$. Il reste à prouver Que $\lambda_{\vec{u}}$ ne dépend pas de $\vec{u}$. Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est assez évident. Pour $(\vec{u}, \vec{v})$ formant une famille libre, on passe par $\lambda_{\vec{u}} \cdot \vec{u} + \lambda_{\vec{v}} \cdot \vec{v} = f(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda_{\vec{u} + \vec{v}} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$.

Expliquez l'erreur de chacun des deux premiers. Complétez proprement le raisonnement du dernier.

Exercice hyper-classique. pas forcément sous cette forme, car presque aucun livre ne propose de « corriger un raisonnement faux et pourtant classique ».

La première montre une condition suffisante :

« si f est une homothétie, chaque famille $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ est effectivement liée.

Mais la question posée est ici celle de la réciproque.

La seconde quantifie mal. Notre hypothèse nous dit bien « pour tout $\vec{u}$, $f(\vec{u})$ est colinéaire à $\vec{u}$ », et donc $\forall \vec{u}, \exists \lambda, f(\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$ (le vecteur nul pouvant être traité à part car la colinéarité ne sert pas...).

Mais il faut écrire $\forall \vec{u}, \exists \lambda_{\vec{u}}, f(\vec{u}) = \lambda_{\vec{u}} \cdot \vec{u}$.

Et à ce stade, $\lambda_{\vec{u}}$ dépend de $\vec{u}$. Pour avoir une homothétie, il faut encore qu'il ne dépende pas de $\vec{u}$.

On prend $\vec{a}$ et $\vec{b}$ il faut montrer $\lambda_{\vec{a}} = \lambda_{\vec{b}}$.

On va traiter deux cas suivant que $(\vec{a}, \vec{b})$ est libre ou liée.

Cas de la famille libre. On va transiter par leur somme.

L'énoncé nous dit trois choses :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } \vec{a} & f(\vec{a}) = \lambda_{\vec{a}} \cdot \vec{a} \\ \text{pour } \vec{b} & f(\vec{b}) = \lambda_{\vec{b}} \cdot \vec{b} \\ \text{pour } \vec{a} + \vec{b} & f(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda_{\vec{a} + \vec{b}} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \end{array}$$

Par linéarité en comparant les lignes : $\lambda_{\vec{a} + \vec{b}} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda_{\vec{a}} \cdot \vec{a} + \lambda_{\vec{b}} \cdot \vec{b}$.

Par liberté de la famille, on identifie les coefficients devant $\vec{a}$ et $\vec{b}$: $\lambda_{\vec{a} + \vec{b}} = \lambda_{\vec{a}}$ et $\lambda_{\vec{a} + \vec{b}} = \lambda_{\vec{b}}$.

Par transitivité : $\lambda_{\vec{a}} = \lambda_{\vec{b}}$.

Ensuite, on peut, si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, transiter par un troisième vecteur $\vec{c}$ colinéaire ni à $\vec{a}$ ni à $\vec{b}$.

On peut aussi dire, pour $\vec{a}$ et $\vec{b}$ colinéaires et non nuls, écrire $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$ puis $\begin{array}{l} f(\vec{a}) = \lambda_{\vec{a}} \cdot \vec{a} \\ f(\vec{b}) = \lambda_{\vec{b}} \cdot \vec{b} \end{array}$ mais aussi $f(\vec{b}) = f(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot f(\vec{a}) = \alpha \cdot \lambda_{\vec{a}} \cdot \vec{a} = \lambda_{\vec{a}} \cdot \alpha \cdot \vec{a} = \lambda_{\vec{a}} \cdot \vec{b}$. En comparant deux formules en $f(\vec{b})$: $\lambda_{\vec{b}} = \lambda_{\vec{a}}$.

Un exercice intéressant, car mine de rien, il permet de détecter les élèves qui raisonnent mal (bref, qui ne raisonnent pas).

On croise aux concours ceux qui ne voient pas la difficulté de « de qui dépend λ », et aussi ceux qui pour définir λ écrivent $\lambda = \frac{f(\vec{a})}{\vec{a}}$ qui n'a pas de sens (sauf peut être pour des vecteurs colinéaires, mais quand même...).

◊9◊

♥ f et g sont linéaires de $(E, +, \cdot)$ dans $(F, +, \cdot)$, α et β sont deux réels. Montrez : $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)$ et $\text{Im}(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.

On prend $\vec{a}$ dans $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$. On traduit : $f(\vec{a}) = \vec{0}_F$ et $g(\vec{a}) = \vec{0}_F$.

On calcule $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(\vec{a}) = \alpha \cdot f(\vec{a}) + \beta \cdot g(\vec{a})$ par définition de la somme d'applications.

On remplace : $(\alpha.f + \beta.g)(\vec{a}) = \alpha.\vec{0}_F + \beta.\vec{0}_F = \vec{0}_F$.
 On reconnaît : $\vec{a} \in \text{Ker}(\alpha.f + \beta.g)$.

On prend $\vec{b}$ dans $\text{Im}(\alpha.f + \beta.g)$. par définition, il s'écrit $(\alpha.f + \beta.g)(\vec{a})$ pour au moins un $\vec{a}$ de $(E, +, \cdot)$.
 On le développe en $\vec{b} = \alpha.f(\vec{a}) + \beta.g(\vec{a})$ et même $\vec{b} = f(\alpha.\vec{a}) + g(\beta.\vec{a})$.
 Le vecteur $f(\alpha.\vec{a})$ est dans $\text{Im}(f)$ et le vecteur $g(\beta.\vec{a})$ est dans $\text{Im}(g)$.
 Leur somme $\vec{b}$ est dans $\text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.

*Remarque : on prouve ainsi $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.
 Qu'est ce qui empêche d'écrire $\text{Im}(f) + \text{Im}(g) \subset \text{Im}(f + g)$?
 Que pensez vous de on prend $f(\vec{a}) + g(\vec{a})$ dans $\text{Im}(f) + \text{Im}(g)$. On l'écrit $(f + g)(\vec{a})$ et il est dans $\text{Im}(f + g)$.*

◊10◊

Le corps de base est l'ensemble des entiers de 0 à $p - 1$ (p est un nombre premier au moins égal à 5, je sais). On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. L'application linéaire est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Déterminez la dimension du noyau de f et de l'image de f (elle peut dépendre de p).
 Déterminez aussi la dimension du noyau et de l'image de $M \mapsto A.M$ de $M_{2,2}(\{0, \dots, p-1\})$ dans lui même.

L'application est bien linéaire car écrite sous forme matricielle.

Sinon, vérifiez $A.(\alpha.U + \beta.V) = \alpha.A.U + \beta.A.V$.¹.

Pour l'image, on se donne x et y et on résout $\begin{cases} 4.x + 3.y = 0 \\ x + 4.y = 0 \end{cases}$.

On peut avoir peur de « modulo p » et se dire je vais juste m'autoriser des combinaisons, avec des modulo p partout.

Mais en fait, on est dans un corps. Et il suffit de voir si la matrice est inversible.

Le déterminant vaut 13. Et la matrice est inversible si et seulement si il est non nul.

Comme le nombre 4 intervient, on va commencer à $p = 5$:

$p = 5$	$\det(M) = 3 \neq 0$	$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$	$\text{Im}(f) = \{0, \dots, 4\}$
$p = 7$	$\det(M) = 6 \neq 0$	$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$	$\text{Im}(f) = \{0, \dots, 6\}^2$
$p = 11$	$\det(M) = 2 \neq 0$	$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$	$\text{Im}(f) = \{0, \dots, 10\}^2$
$p = 13$	$\det(M) = 0$	$\text{Ker}(f) = ?$	$\text{Im}(f) = ?$
$p > 13$	$\det(M) \neq 0$	$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$	$\text{Im}(f) = \{0, \dots, p-1\}^2$

Hormis la ligne $p = 13$, tout devient simple. Le déterminant est non nul, la seule solution est $x = y = 0$,

donnée par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Et pour $\text{Im}(f)$? Pour a et b donnés (entiers plus petits que p) le système $\begin{cases} 4.x + 3.y = a \\ x + 4.y = b \end{cases}$ a une unique solution... $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Il faut traiter à part le cas $p = 13$, pour lequel les deux équations sont proportionnelles dans un rapport $L1 = 4 \times L2$ puisque $4 \times 4 = 3$.

$\begin{cases} 4.x + 3.y = 0 \\ x + 4.y = 0 \end{cases}$ équivaut à la seule équation $x = -4.y$ et même $x = 9.y$.

On vérifie alors $\text{Ker}(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}\right) : \begin{cases} 4.9 + 3.1 = 39 = 0 \\ 9 + 4.1 = 13 = 0 \end{cases}$.

1. savez vous qu'il y a des Sup pour lesquelles il faut démontrer ce genre de choses, et où c'est laborieux pour les élèves ; et qu'il y a aussi des professeurs qui prennent le temps de démontrer à coup de sigmas de taille n ce résultat et donnent l'impression à leurs élèves que les maths c'est plein de formules lourdes

Ensuite, pour que le système $\begin{cases} 4x + 3y = a \\ x + 4y = b \end{cases}$ ait une solution, il faut et il suffit qu'on ait $a = 4b$ (toujours $L1 = 4 \times L2$ et cette fois avec les deux côtés de l'équation).

Par exemple $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$ n'a pas de solution car $L1 - 4.L2$ donne $0 = -3$ impossible.

Par exemple : $\begin{cases} 4x + 3y = 8 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$ a pour solution $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et tous les $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme $\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\therefore \begin{cases} 44 + 3 = 47 = 39 + 8 \\ 11 + 4 = 15 = 13 + 2 \end{cases}$.

◊11◊

Pour quelles valeurs de a l'application $P \mapsto X.P' - a.P$ est elle injective de $(\mathbb{R}_5[X], +, \cdot)$ dans lui même ?
 Au fait, c'est bien un endomorphisme de $(\mathbb{R}_5[X], +, \cdot)$?
 Donnez sa matrice sur la base canonique de $(\mathbb{R}_5[X], +, \cdot)$.

On peut commencer par la deuxième question : on calcule l'image de $1, X, X^2, X^3, X^4$ et X^5 . Et on les exprime sur cette base. $X^k \mapsto (k - a).X^k$.

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5-a \end{pmatrix} \text{ et l'autre ordre si pour vous la base est } (X^5, X^4, \dots, 1).$$

Si a prend l'une des valeurs entières de 0 à 5, on détecte un défaut d'injectivité : 0 et X^a ont la même image nulle.

Même si on ne l'a pas encore dit dans le cours, il suffit d'un vecteur non nul dans le noyau pour créer un défaut d'injectivité.

Et le pire, c'est qu'on le retrouve partout alors, sur tout l'espace.

Pour toute autre valeur, l'application est injective. Et même bijective.

Puisque sa matrice est inversible à droite et à gauche.

Et la matrice M^{-1} (si M est la matrice ci-dessus) décrit sur la base canonique l'endomorphisme f^{-1} inverse de f (si f est le nom de notre application).

Si non, on revient aux questions sous-jacentes (celles qu'on vous reprochera de ne pas avoir traité) :

• endo² : on prend un polynôme, on calcule un nouveau polynôme, et le degré n'a pas pu augmenter ; il a peut être même diminué³

$$\begin{aligned} P(X) &\mapsto X.P'(X) & -a.P(X) \\ Q(X) &\mapsto X.Q'(X) & -a.Q(X) \\ \bullet \text{ morphisme : } \lambda.X.P'(X)(X) &\mapsto \lambda.X.P'(X) & -\lambda.a.P(X) \\ P(X) + Q(X) &\mapsto X.P'(X) + X.Q'(X) & -a.(P(X) + Q(X)) \end{aligned}$$

Vous voyez ce qu'il vous reste à faire.

◊12◊

Montrez que $P \mapsto P(0)$, $P \mapsto P'(1)$ et $P \mapsto \int_0^1 P(t).dt$ sont des formes linéaire sur $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$ (notées φ , ϕ et ψ).

Trouvez P vérifiant $(\varphi(P), \phi(P), \psi(P)) = (1, 0, 0)$.

Trouvez P vérifiant $(\varphi(P), \phi(P), \psi(P)) = (0, 1, 0)$.

Trouvez P vérifiant $(\varphi(P), \phi(P), \psi(P)) = (0, 0, 1)$.

Trouvez P vérifiant $(\varphi(P), \phi(P), \psi(P)) = (0, 0, 0)$.

Ces applications sont bien définies.

Elles prennent un polynôme et associent un réel. Elles vont de $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$ dans $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Pour la linéarité, j'écris en une fois : P et q donnés ainsi que α et β , on a bien

2. si on était en présentiel, c'est presque à chaque fois que j'insisterais : « vous oubliez trop souvent endo, persuadés qu'une question appelle une réponse en un seul argument... » ; c'est un devoir de maths et pas Donald face à la presse »

3. c'est pourquoi on insisté : $\mathbb{R}_5[X]$ est l'ensemble des polynômes « de degré inférieur ou égal à 5 » et pas « de degré 5 »

$(\alpha.P + \beta.Q)(0) = \alpha.P(0) + \beta.Q(0)$, $(\alpha.P + \beta.Q)'(1) = \alpha.P'(1) + \beta.Q'(1)$ et la dernière.
Conseil : utilisez P et q , et non pas P et P' .

Première requête : P doit vérifier $P(0) = 1$, $P'(0) = 0$ et $\int_0^1 P(t).dt = 0$.

On résout un petit système et on trouve $P_0(X) = \frac{3.X^2}{2} - 3.X + 1$ (vérifiez).

Le second système donne $P_1(X) = \frac{3.X^2}{4} - \frac{X}{2}$ et le dernier $P_2(X) = -\frac{3.X^2}{2} + 3.X$

Et le dernier ? Il donne le polynôme nul.

Montrez que (φ, ϕ, ψ) est libre.

Pour la liberté de (φ, ϕ, ψ) on se donne α, β et γ et on suppose $\alpha.\varphi + \beta.\phi + \gamma.\psi = 0$ (forme linéaire nulle).

Objectif : $\alpha = \beta = \gamma = 0$.⁴

Comme c'est vrai pour tout polynôme, on peut être tenté d'écrire

$\forall(a, b, c), (\alpha.\varphi + \beta.\phi + \gamma.\psi)(a.X^2 + b.X + c) = 0$ et d'en déduire des choses.

Mais comme c'est vrai pour tout polynôme, c'est vrai en particulier pour P_0, P_1 et P_2 .

Pour P_0 , cela donne $\alpha.1 + \beta.0 + \gamma.0 = 0$. D'où $\alpha = 0$.

Et pour P_1 ? On trouve $\beta = 0$.

Et pour P_2 : oui, c'est γ .

Les trois polynômes P_0, P_1 et P_2 forment d'ailleurs une base de $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$

(pour la liberté, partez de $a.P_0 + b.P_1 + c.P_2 = 0$ et appliquez φ , puis ϕ puis ψ).

On les appelle « base duale de (φ, ϕ, ψ) ».

◊13◊

Trouvez P et Q inversibles vérifiant $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} = P. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.Q$. Il n'y a pas unicité de la solution.

Poser dix huit coefficients n'est pas la meilleure idée..

◊14◊

♥ f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel $(E, +, .)$. On suppose $f \circ g = g \circ f$ (on dit que f et g sont permutables, et non pas que f et g commutent, mais l'erreur n'est pas grave). Montrez :

$\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(g)$ $\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(f)$

$\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), g(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$ $\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), f(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$

Je ne l'ai pas mis dans le cours, ça ?

Alors on y va. Tout ce qu'on pourra utiliser c'est $f \circ g = g \circ f$.

$\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(g)$ $\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(f)$

$\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), g(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$ $\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), f(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$

On prend $\vec{u}$ dans $\text{Ker}(g)$ (on traduit et on s'en servira : $f(\vec{u}) = \vec{0}$).

On regarde si $f(\vec{u})$ est encore dans $\text{Ker}(f)$. On calcule donc : $g(f(\vec{u})) = g \circ f(\vec{u}) = f \circ g(\vec{u}) = f(\vec{0}) = \vec{0}$.

On reconnaît $f(\vec{u}) \in \text{Ker}(g)$.

$\text{Ker}(g)$ est « stable par f ».

Le résultat $\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(g)$ résulte de la symétrie des rôles.

$\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(g)$ $\forall \vec{u} \in \text{Ker}(f), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(f)$

$\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), g(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$ $\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), f(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$

La question $\forall \vec{u} \in \text{Ker}(f), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(f)$ est idiote : si $\vec{u}$ est dans $\text{Ker}(f)$, alors $f(\vec{u})$ est égal à $\vec{0}$. Et

4. pensez dans ces petits raisonnements à indiquer votre objectif

$\vec{0}$ est dans $\text{Ker}(f)$!

$\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(g)$	$\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(f)$
$\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), g(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$	$\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), f(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$

On prend cette fois $\vec{u}$ dans $\text{Im}(g)$. On l'écrit $\vec{u} = g(\vec{a})$ pour au moins un $\vec{a}$ de $(E, +, \cdot)$.

On calcule $f(\vec{u}) = f(g(\vec{a})) = g(f(\vec{a}))$. Quitte à poser $\vec{b} = f(\vec{a})$, on vient d'écrire $f(\vec{u})$ sous la forme $g(\vec{b})$. Il est dans $\text{Im}(g)$.

$\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(g)$	$\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(f)$
$\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), g(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$	$\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), f(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$

Quant à $\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), g(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$, c'est vrai. Que $\vec{u}$ soit dans $\text{Im}(g)$ ou pas...

◊15◊

Sur les huit sommets d'un cube, on a placé les nombres entiers 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19. Les sommes des quatre sommets sur les six faces sont toutes égales. Pouvez vous donner une solution. Pouvez vous les donner toutes ?

Réponse : non.

Preuve : j'ai cherché et je n'ai pas trouvé.

Plus sérieusement : la somme des nombres vaut 76.

Chaque sommet est compté pour trois faces. Total : 228.

Et il y a six faces. Le total de chaque face sera donc 38.

C'est ainsi que 19 sera couplé avec des triplets de sommets de total 19 : (13, 5, 1), (11, 5, 3) et (11, 7, 1).

Ceci nous livre que le sommet opposé de 19 est par élimination 17.

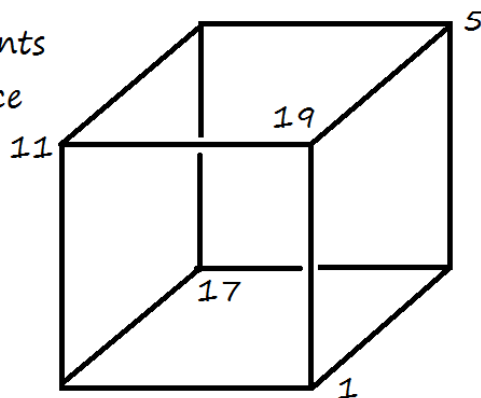
Et les trois arêtes issues de 19 sont [19, 11], [19, 5] et [19, 1] (les nombres qui servent deux fois).

A rotation et symétrie près, il ne va y avoir que ce modèle.

Oui, je n'ai pas tout indiqué, mais on n'a plus le choix pour les sommets qui restent.

Et on n'a même pas besoin de vérifier la cohérence des autres faces, la somme globale nous le garantit...

38 points
par face



◊16◊

Donnez le développement limité d'ordre 5 en 0 de $\text{Arctan}(\cos(t))$.

Pas de chance, on connaît bien le développement de $\cos$ en 0, mais il nous amène en 1 et on ne connaît pas trop le développement de l'arctangente en 1.

On va commencer par dériver notre application.

Ah tiens, problème habituel. Comment noter cette dérivée ?

• $\text{Arctan}(\cos(t))'$? Pas de sens.

• $\text{Arctan}'(\cos(t))$? Non, ce serait juste $\frac{1}{1 + \cos^2(t)}$ ça.

• $(t \mapsto \text{Arctan}(\cos(t)))'$? Correct. Mais vite lourd.

C'est pourquoi on va nommer la fonction pour commencer.

On pose donc $f = x \mapsto \text{Arctan}(\cos(x))$ et on dérive : $f = x \mapsto \frac{-\sin(x)}{1 + \cos^2(x)}$.

On va devoir développer $\cos^2(x)$. Plutôt que d'élever $\cos(x)$ au carré, je passerai par $\frac{1 + \cos(2x)}{2}$.

$$\cos^2(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)_{x \rightarrow 0}$$

On connaît celui du sinus. On peut poser une division ou passer par le produit en croix. C'est ce que je vais faire.

On justifie que $x \mapsto \frac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$ admet un développement limité à tout ordre (C^∞), avec seulement des termes d'exposant impair.

Son équivalent en 0 est d'ailleurs $\frac{x}{2}$ qui nous donne le premier terme.

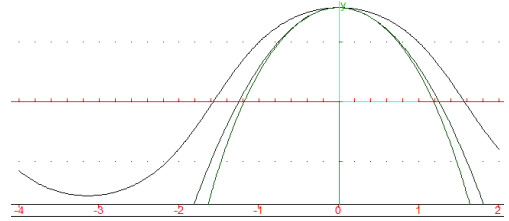
On écrit juste $\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}\right) = \left(2 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}\right) \cdot \left(\frac{x}{2} + a \cdot x^3 + o(x^4)_{x \rightarrow 0}\right)$.

Sans effort : $a = \frac{1}{6}$ et $\frac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)} = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}$. Et c'est $f'(x)$.

On intègre $f'(x)$ de $x = 0$ à $x = t$ qui tend vers 0 : $f(t) - f(0) = -\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)_{x \rightarrow 0}$.

Résumé :

$$\boxed{\text{Arctan}(\cos(x)) = \frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)_{x \rightarrow 0}}$$



◊17◊ Donnez le développement limité d'ordre 5 en 0 de $(1+t)^{\frac{1}{t}}$.

On revient à la forme $\exp\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)$ (non définie en 0, mais au moins sur $] -1, 0[\cup] 0, +\infty[$ et de classe C^∞).

On comprend bien que le quotient nous fait perdre un ordre.

On écrit donc le logarithme à l'ordre 6 et on a $\exp(1+u)$ avec $u = -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} + \frac{t^4}{5} - \frac{t^5}{6} + o(t^5)_{t \rightarrow 0}$.

On vérifie : $e^{1+u} = e \cdot e^u$ avec u qui tend vers 0.

On va avoir besoin de u^2 , u^3 , u^4 et même u^5 calculés par produits successifs :

$$\begin{aligned} u &= -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} + \frac{t^4}{5} - \frac{t^5}{6} + o(t^5)_{t \rightarrow 0} \quad \times 1 \\ u^2 &= \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{13 \cdot t^4}{36} - \frac{11 \cdot t^5}{30} + o(t^5)_{t \rightarrow 0} \quad \times \frac{1}{2} \\ u^3 &= -\frac{t^3}{8} + \frac{t^4}{4} - \frac{17 \cdot t^5}{48} + o(t^5)_{t \rightarrow 0} \quad \times \frac{1}{6} \\ u^4 &= \frac{t^4}{16} - \frac{t^5}{6} + o(t^5)_{t \rightarrow 0} \quad \times \frac{1}{24} \\ u^5 &= -\frac{t^5}{32} + o(t^5)_{t \rightarrow 0} \quad \times \frac{1}{120} \end{aligned}$$

On combine courageusement : $(1+t)^{\frac{1}{t}} = e \cdot \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{11 \cdot t^2}{24} - \frac{7 \cdot t^3}{16} + \frac{2447 \cdot t^4}{5760} - \frac{959 \cdot t^5}{2304} + o(t^5)_{t \rightarrow 0}\right)$

On se dit qu'ici, un logiciel de calcul forme serait le bienvenu...

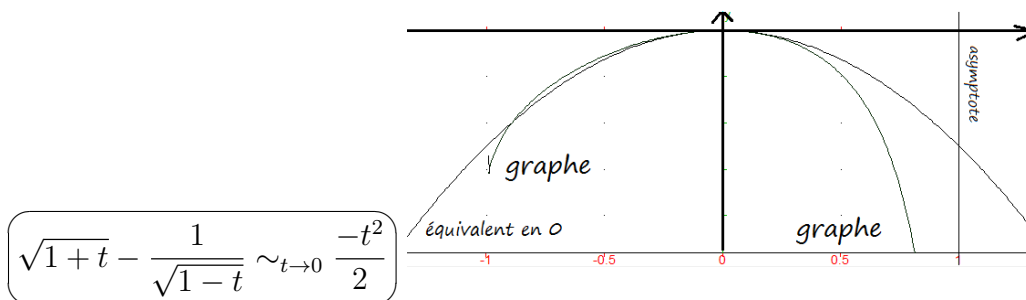
On aurait pu aussi développer $e^1 \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot e^{\frac{t^2}{3}} \cdot e^{\frac{t^3}{4}} \cdot e^{-\frac{t^4}{5}} \cdot e^{-\frac{t^5}{6} + o(t^5)}$.

◊18◊ Donnez un équivalent en 0 de $\sqrt{1+t} - \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ de la forme $a \cdot t^\alpha$.

On va effectuer un développement limité à un ordre suffisant de $(1+t)^{\frac{1}{2}} - (1-t)^{-\frac{1}{2}}$ pour qu'il reste au moins un terme non nul.

On devine que le terme constant s'en va. le terme en $\frac{t}{2}$ fait tout pour partir.

On compte sur le suivant : $\begin{aligned} (1+t)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)_{t \rightarrow 0} \\ (-1-t)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{t}{2} + \frac{3 \cdot t^2}{8} + o(t^2)_{t \rightarrow 0} \end{aligned}$. Et c'est bon !



$$\sqrt{1+t} - \frac{1}{\sqrt{1-t}} \sim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^2}{2}$$

◊19◊

Montrez : $\sqrt[n]{n} - 1 \sim \frac{\ln(n)}{n}$ quand n tend vers l'infini.

On écrit $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln(n)}{n}}$ et on pose $u = \frac{\ln(n)}{n}$. Il tend vers 0.

On a donc $e^u = 1 + u + o(u)$. Et c'est fini.

◊20◊

Montrez que $z \mapsto a.z + b.\bar{z}$ est linéaire de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ dans lui même (vu comme $\mathbb{R}$ espace vectoriel). Trouvez a et b sachant que 1 a pour image $2 - i$ et que son spectre est $\{3, 5\}$.

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 (base canonique $(1, i)$).

L'application va bien de $\mathbb{C}$ dans lui même.

On vérifie sa linéarité. On la nomme f_a et on calcule (z et z' dans $\mathbb{C}$ et α dans $\mathbb{R}$ (oui, $\mathbb{R}$) :

$$f_a(z) + f_a(z') = a.z + b.\bar{z} + a.z' + b.\bar{z}' = a.(z + z') + b.(\bar{z} + \bar{z}') = f_a(z + z')$$

$$\alpha.f_a(z) = \alpha.a.z + \alpha.b.\bar{z} = a.(\alpha z) + b.(\alpha \bar{z}) \text{ et il était capital qu'ici } \alpha \text{ soit réel.}$$

Oh, pour une fois, j'ai rédigé dans le bon sens !

On notera que a et b peuvent être complexes, et pas forcément réels.

On impose cette fois $a.1 + b.1 = 2 - i$. C'est sûr, a et b sont complexes.

On peut travailler matriciellement..

On calcule l'image de 1 et de i . Mais celle de 1 est connue : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Et celle de i va porter un nom avec deux composantes α et β .

La matrice de $f_{a,b}$ sur la base canonique est alors $\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ -1 & \beta \end{pmatrix}$.

Et on pense aux deux valeurs propres. cette matrice doit se diagonaliser en $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Comme deux matrices semblables ont même trace et même diagonale : $2 + \beta = 8$ et $2.\beta + \alpha = 15$.

La matrice cherchée est donc $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

Mais ça ne nous donne pas a et b .

Revenons quand même à ce que dit cette matrice : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ (voyez le en lisant le contenu des colonnes, ou en posant le vecteur sur la matrice c'est pareil).

On reformule en termes de vecteurs de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$: $1 \mapsto 2 - i$ et $i \mapsto -3 + 6.i$.

On revient à la définition : $a + b = 2 - i$ et $a.i - b.i = -3 + 6.i$.

On résout et on trouve $a = 4 - 2.i$ et $b = -2 + i$

On vérifie : • $z \mapsto (4 - 2i).z + (-2 + i).\bar{z}$ est linéaire de $(\mathbb{C}, +, .)$ dans lui même

• $1 \mapsto (4 - 2i).1 + (-2 + i).\bar{1} = 2 - i$

• $i \mapsto (4 - 2i).i + (-2 + i).\bar{i} = 4.i + 2 + 2.i + 1 = 3 + 6.i$

• mais aussi • $1 + i \mapsto (4 - 2i).(1 + i) + (-2 + i).(1 - i) = 5 + 5.i$

• $3 + i \mapsto (4 - 2i).(3 + i) + (-2 + i).(3 - i) = 9 + 3.i$

avez vous reconnu les deux vecteurs propres ?

• Et on vérifie aussi $x + i.y \mapsto (4 - 2i).(x + i.y) + (-2 + i).(x - i.y) = (2.x + 3.y) + (-x + 6.y).i$

d'où la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

◊21◊

♡ Soit f une forme linéaire de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ vérifiant $f(A.B) = f(B.A)$ pour tout couple (A, B) de $(M_n(\mathbb{R}))^2$. Donnez un exemple autre que l'application nulle.

Montrez que deux matrices semblables ont la même image.

Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont la même image.

Calculez $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déduisez que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a pour image 0. Montrez que f est un multiple de la trace.

Rédigez la démonstration en dimension n .

La trace est bien une forme linéaire (elle prend une matrice carrée et associe un nombre). Et elle est bien linéaire, depuis le temps qu'on le dit...

On prend maintenant f vérifiant cette propriété « commutative », et on va montrer qu'à constante multiplicative près, c'est la trace.

On prend A semblable à B via une matrice inversible P (cette formulation quantifie à la fois A , B et P).

On a alors $f(A) = f(P.B.P^{-1}) = f((P.(B.P^{-1}))) = f((B.P^{-1}).P) = f(B)$.

Les trois matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Il faut donner une matrice de passage P^5 . Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est aussi son propre inverse.

Étant semblables, elles ont la même image par f . On va noter α cette image commune.

On va finir par montrer que f est « à cette constante α près » l'application trace.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En faisant jouer à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ les rôles de A et B dans l'hypothèse $f(A.B) = f(B.A)$, on trouve

que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont la même image. Qui ne peut être que 0 par linéarité.

5. attention : l'égalité de leurs polynômes caractéristiques, traces, déterminants n'est pas une preuve, c'est juste une condition nécessaire

Par symétrie des rôles, avec des produits comme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on montre que toutes les matrices de la forme « j'ai juste un coefficient non nul, égal à 1, et il est hors de la diagonale » ont une image nulle.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	image α
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	image 0
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	

On a l'image de la base canonique ? On a toutes les images.

Toute matrice $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}$ a pour image $a_1^1.\alpha + a_2^1.0 + a_3^1.0 + \dots$, ce qui fait $(a_1^1 + a_2^2 + a_3^3).\alpha$.

On en déduit $\forall A, f(A) = \alpha.Tr(A)$ et même plus proprement : $\boxed{f = \alpha.Tr}$ et donc $f \in Vect(Tr)$

Vous ne confondrez pas Tr (forme linéaire) et $Tr(A)$ (image d'une matrice), sinon, tous les cours depuis le début de l'année ne vous ont servi qu'à savoir convertir un angle donné en degré en angle en radians et vice versa (je ne vise personne voyons).

◇22◇

♥ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. Montrez que $M \mapsto A.M.B$ est un endomorphisme de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ noté f .

Explicitiez sa réciproque.

On donne les quatre matrices de la base canonique $E_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculez l'image de chacune. Explicitiez $Mat_C^C(f)$, puis inversez la.

Dans endomorphisme, il y a un morphisme et endo.

Endo : on prend une matrice de format 2 sur 2 et on trouve une autre matrice de format 2 sur 2.

Morphisme : $A.(M + N).B = A.M.B + A.N.B$ et $A.(\alpha.M).B = \alpha.(A.M.B)$

On doit calculer quatre images :

matrice	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
image	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}$
sur base	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? \\ 1 & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & ? & ? \\ 0 & 2 & ? & ? \\ 1 & -4 & ? & ? \\ 0 & 2 & ? & ? \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & ? \\ 0 & 2 & 0 & ? \\ 1 & -4 & 3 & ? \\ 0 & 2 & 0 & ? \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -12 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

La matrice cherchée est de format 4 sur 4 et c'est

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -12 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

On retrouve quatre copies de tB . Multipliées par les coefficients de $A : \begin{pmatrix} {}^tB & 2.B \\ B & 3.B \end{pmatrix}$. C'est un « produit tensoriel ».

On peut aussi voir son action ainsi

matrice	sur canonique	image	calcul	matrice
$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -12 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x & -4.y & +2.z & -8.t \\ & 2.y & & +4.t \\ x & -4.y & +3.z & -12.t \\ & 2.y & & +6.t \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x-4.y+2.z-8.t & 2.y+4.t \\ x-4.y+3.z-12.t & 2.y+6.t \end{pmatrix}$

Et vérifiez $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-4.y+2.z-8.t & 2.y+4.t \\ x-4.y+3.z-12.t & 2.y+6.t \end{pmatrix}$.

On veut inverser la matrice ? C'est une 4 sur 4.

On peut appliquer le pivot avec domino. Ou la calculatrice $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 12 & -4 & -8 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Mais on peut aussi inverser le morphisme : $\begin{matrix} M & \longrightarrow & A.M.B \\ A^{-1}.N.B^{-1} & \longleftarrow & N \end{matrix}$. C'est vrai, non ?

Et donc, il suffit de bâtir sur le même modèle la matrice associée non pas à A et B

mais à $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & 3/2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ pas mal, non ? ${}^t(B^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

◊23◊

Donnez un endomorphisme f de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ vérifiant $\text{Vect}(\vec{i} + \vec{j}) = \text{Ker}(f) \subset \text{Im}(f) = \{(x, y, z) \mid x - y + 2.z = 0\}$, par exemple en donnant sa matrice sur la base canonique. Déterminez alors $f \circ f$, puis $f \circ f \circ f$.

Sa matrice sur la base canonique est faite de neuf nombres : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$, formées des images respectives

de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ exprimées justement sur la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Mais on a des infos. L'ensemble image est un plan dont on a l'équation.

$$a - a' + 2.a'' = 0$$

Chaque vecteur colonne est dans ce plan : $\begin{pmatrix} b & -b' & +2.b'' \\ c & -c' & +2.c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$c - c' + 2.c'' = 0$$

je vous laisse vous convaincre que si on a ces trois relations, alors pour tout triplet $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on a aussi

$$(a.x + b.y + c.z) - (a.x + b.y + c.z) + 2.(a.x + b.y + c.z) = 0 \text{ (mais c'est la linéarité ! il n'y a rien à prouver calculer !)}.$$

La matrice est donc de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a + 2.a'' & b + 2.b'' & c + 2.c'' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$.

On note qu'on partait avec des matrices évoluant dans un espace de dimension 9 et que les voilà évoluant dans un espace de dimension 6 à cause de la contrainte « image incluse dans le plan ».

Il nous reste aussi le noyau. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a nécessairement une image nulle.

Ceci nous fait perdre encore trois dimension. Les deux premières colonnes sont opposées l'une de l'autre :

$$\begin{pmatrix} a & -a & c \\ a+2.a'' & -a-2.a'' & c+2.c'' \\ a'' & -a'' & c'' \end{pmatrix}$$

Toutes les matrices de cette forme conviennent. Enfin, non, pas toutes.

Ah bon, il faut se prendre la tête avec nos quatre coefficients ?

Non, c'est juste que la matrice nulle est associée au morphisme nul, qui vérifie $Vect(\vec{i} + \vec{j}) \subset \mathbb{R}^3 = Ker(f) \not\subset Im(f) \subset \{(x, y, z) \mid x - y + 2.z = 0\}$. le noyau grandit tout à coup, et l'image réduit.

Mais si on « filtre » suivant a , a' et ainsi de suite, on a quatre matrices fondamentales

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On prend $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? Ah non, tiens, raté encore. Le noyau est plus grand que la droite indiquée. Il

contient certes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et ses multiples, mais aussi $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ suivant la ligne que vous lisez dans le tableau.

Pour ces quatre matrices, le noyau est de dimension 2 et l'image de dimension 1.

Et on veut noyau de dimension 1 et image de dimension 2.

Mais si on combine ? $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient. Et ce n'est pas la seule.

Ah oui, j'ai dit « la seule » car je parle de matrices.

Mais avec les morphismes : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ x & -y & +2.z \\ z \end{pmatrix}$.

On veut $f \circ f : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C'est $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2.z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, de noyau $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ contenant $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ (c'est $Ker(f)$)

d'image $Vect(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ inclus dans $Im(f)$

Le noyau a grandi, et l'image a réduit. Normal, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans $Im(f)$. Et quand $f(\vec{a})$ tombe sur lui, $f(f(\vec{a}))$ est nul...

Encore ? $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est la même. le noyau arrête de grandir...

◊24◊ Donnez un endomorphisme f de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ vérifiant $\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(f)$ et qui ne soit pas un automorphisme (quelle sera alors la dimension de $\text{Ker}(f)$ et la dimension de $\text{Im}(f)$?).

Bon, le hasard m'a fait placer cet exercice à la suite du précédent... Trop facile.

Sinon, on peut même prendre $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$ de noyau $\text{Vect}(\vec{i})$ et d'image $\text{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$.

◊25◊ ♡ Trouvez quatre points A, B, C et D dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que aucun des milieux des côtes du quadrilatère (A, B, C, D) ne soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
 Pouvez vous trouver A, B, C et D dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que aucun des milieux des côtes du quadrilatère (A, B, C, D) , ni même le centre du quadrilatère ne soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Le carré de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ et $(0, 1)$ convient pour les deux.

◊26◊ Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt[n]{\frac{\ln(n)}{n}}$.
 Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $n^{1/\sqrt{n}}$.
 Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt[n]{n^{1/n}}$.
 Trouvez le plus de coefficients du développement asymptotique :
 $\sqrt{n^4 + n^3} - n^2 = a.n + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \rightarrow +\infty}$.

◊27◊ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de $\sqrt{n^2 + 2.n + 5} - n$. Déduisez que $(\sqrt{n^2 + 2.n + 5} - n)^n$ est une forme indéterminée. Calculez quand même sa limite, quitte à revenir à $\left(1 - (\sqrt{n^2 + 2.n + 5} - n - 1)\right)^n$ et à la forme logarithmique (*indication* : e^2).

La première étape, c'est des quantités conjuguées : $\sqrt{n^2 + 2.n + 5} - n = \frac{n^2 + 2.n + 5 - n^2}{\sqrt{n^2 + 2.n + 5} + n}$. Ce quotient est équivalent à $\frac{2.n}{n + n}$. Il tend vers 1.

Mais on peut aussi le jouer « avec des gros outils » :

$$\sqrt{n^2 + 2.n + 5} = n \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2.n + 5}{n^2}\right)} = n \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2.n + 5}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)_{n \rightarrow +\infty}\right)$$

en utilisant $\sqrt{1 + u} = 1 + \frac{u}{2} + o(u)_{u \rightarrow 0}$.

On soustrait : $\sqrt{n^2 + 2.n + 5} - n = \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{2.n + 5}{n^2}\right) + n \cdot o\left(\frac{1}{n}\right)_{n \rightarrow +\infty}$.

Évidemment on retrouve la limite 1.

1^∞ est une forme indéterminée. On va la lever en étudiant un logarithme et en forçant l'apparition de $1 + u$ avec u tendant vers 0 :

$$n \cdot \ln\left(\frac{2.n + 5}{\sqrt{n^2 + 2.n + 5} + n}\right) = n \cdot \ln\left(1 + \left(\frac{2.n + 5}{n + \sqrt{n^2 + 2.n + 5}} - 1\right)\right) \sim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{2.n + 5}{n + \sqrt{n^2 + 2.n + 5}} - 1\right)$$

Reste à trouver la limite de ce $n \cdot \left(\frac{n + 5 - \sqrt{n^2 + 2.n + 5}}{n + \sqrt{n^2 + 2.n + 5}}\right)$ et moi, je conjugue encore

$$\frac{n}{n + \sqrt{n^2 + 2.n + 5}} \cdot \frac{n^2 + 10.n + 25 - (n^2 + 2.n + 5)}{n + 5 + \sqrt{n^2 + 2.n + 5}}.$$

La limite vaut $\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{2}$ ce qui ne fait pas loin de e (à 1 près).

La limite cherchée est donc $\boxed{e^2}$

Remarque : `limit(n*log(sqrt(n*n+2*n+5)-n), n=+infinity)` donne la réponse 2 tout de suite avec Xcas...

Et sinon, la ligne mis en valeur plus haut se tape

```
n.\ln\Big(\frac{2.n+5}{\sqrt{n^2+2.n+5}+n}\Big)
=n.\ln\Big(1+\Big(\frac{2.n+5}{n+\sqrt{n^2+2.n+5}}-1\Big)\Big)
\sim_{n\rightarrow\infty}
n.\Big(\frac{2.n+5}{n+\sqrt{n^2+2.n+5}}-1\Big)
```

mis entre des \$ pour passer en mode mathématique.

Et pour que la ligne soit centrée, avec des fractions « généreuses », mettez \$\$ au début de la formule et \$\$ à la fin.

Vous passerez en mode « emphatique » dit aussi « hors-ligne ».

◊0◊

Donnez la limite en π de $\frac{\sin(x/2) + \cos(x)}{1 + \sin^2(x) + \cos(x)}$.

Même si l'énoncé semble nous dire que la limite existe, on va juste travailler sur la fonction, en surveillant d'ailleurs que tout existe.

Comme x va tendre vers π (et en π on a bien une forme indéterminée), on va pose $x = \pi + h$ avec h qui va tendre vers 0.

$$\frac{\sin(x/2) + \cos(x)}{1 + \sin^2(x) + \cos(x)} = \frac{\cos(h/2) - \cos(h)}{1 + \sin^2(h) - \cos(h)}.$$

S'il vous plaît, ne perdez pas de temps à rédiger $\cos(\pi + h) = -\cos(h)$.

Même si pour vous (à cause d'une pratique sclérosée dans le secondaire) ce n'est pas évident, pour le correcteur, c'est du cours.

Si vous passez par $\cos(\pi + h) = \cos(\pi) \cdot \cos(h) - \sin(\pi) \cdot \sin(h)$ écrit noir sur blanc sur votre copie, vous dites au correcteur « je suis encore en première, ne m'en veuillez pas, mais je veux quand même entrer à Centrale ».

Et d'ailleurs, si vous passez par de telles formules au lieu de passer par un dessin sur le cercle trigonométrique, vous lui répétez « en plus, je n'ai aucun sens pratique, mais ne m'en veuillez pas, je veux quand même entrer à Télécom ».

On développe et on garde le premier terme non nul : $\begin{aligned} \cos\left(\frac{h}{2}\right) &= 1 - \frac{h^2}{8} + o(h^2) \\ \cos(h) &= 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2) \end{aligned}$ donc $\cos\left(\frac{h}{2}\right) -$

$\cos(h) \sim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2}{8}$ (là, l'équivalent exprime des choses correctes, mais si vous avez écrit $\cos(h) \sim 1 - \frac{h^2}{2}$, retournez moisir en amphi 21).

$$1 + \sin^2(h) - \cos(h) = 1 - \cos(h) + \frac{1 - \cos(2h)}{2} = \frac{h^2}{2} + o(h^2) + h^2 + o(h^2) \sim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2}{2}.$$

Le quotient est équivalent à un réel, il tend vers ce réel : $\frac{\sin(x/2) + \cos(x)}{1 + \sin^2(x) + \cos(x)} \xrightarrow{h \rightarrow \pi} \frac{1}{4}$ ou

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x/2) + \cos(x)}{1 + \sin^2(x) + \cos(x)} = \frac{1}{4}$$

◊1◊

Donnez la limite en $+\infty$ de $\left(\frac{\text{Arctan}(1+x)}{\text{Arctan}(x)}\right)^{x^2}$.

Les deux arctangentes tendent vers $\frac{\pi}{2}$, le quotient tend vers 1 et l'exposant tend vers l'infini. C'est une forme indéterminée (visible quand on passe au logarithme).

Certes, mais que faire de $\ln\left(\frac{\text{Arctan}(x+1)}{\text{Arctan}(x)}\right)$?

Comme x tend vers $+\infty$, on va poser $x = \frac{1}{h}$ et l'idée va vous venir à l'esprit assez spontanément.

$$\ln\left(\frac{\text{Arctan}(x+1)}{\text{Arctan}(x)}\right) = \ln\left(\frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{h}+1\right)}{\text{Arctan}\left(\frac{1}{h}\right)}\right)$$

Vous la voyez l'idée ? $\text{Arctan}\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(h)$ en tout cas pour h positif, ce qui est ici le cas.

$$\ln\left(\frac{\operatorname{Arctan}(x+1)}{\operatorname{Arctan}(x)}\right) = \ln\left(\frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{h}+1\right)}{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{h}\right)}\right) = \ln\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{h}{1+h}\right)}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(h)}\right) = \ln\left(\frac{1 - \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{Arctan}\left(\frac{h}{1+h}\right)}{1 - \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{Arctan}(h)}\right)$$

On effectue des développements trop poussés : $\operatorname{Arctan}(h) = h - \frac{h^3}{3} + o(h^3)_{h \rightarrow 0}$ (c'est du cours).

$$\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + o(u^3)_{u \rightarrow 0} \text{ (cours)}$$

$$\ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{Arctan}(h)\right) = -\frac{2 \cdot h}{\pi} + \frac{2 \cdot h^2}{\pi^2} + o(h^2) \text{ composition}$$

On s'arrête à l'ordre 2 car devant la parenthèse on a x^2

On continue : $\frac{h}{1+h} = 1 - h + h^2 + o(h^2)_{h \rightarrow 0}$

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{h}{1+h}\right) = h - h^2 + \frac{2 \cdot h^3}{3} + o(h^3) = h - h^2 + o(h^2)$$

$$\ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{Arctan}\left(\frac{h}{1+h}\right)\right) = -\frac{2 \cdot h}{\pi} + \frac{(2 \cdot \pi - 2) \cdot h^2}{\pi^2} + o(h^2)_{h \rightarrow 0}$$

On soustrait : $\ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{Arctan}\left(\frac{h}{1+h}\right)\right) - \ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{Arctan}(h)\right) = \frac{2 \cdot h^2}{\pi} + o(h^2)_{h \rightarrow 0}$

On multiplie par x^2 c'est à dire $\frac{1}{h}$.

$$x^2 \cdot \ln\left(\frac{\operatorname{Arctan}(x+1)}{\operatorname{Arctan}(x)}\right) \text{ converge vers } \frac{2}{\pi}.$$

$$\text{Et } \left(\frac{\operatorname{Arctan}(x+1)}{\operatorname{Arctan}(x)}\right)^{x^2} \text{ converge vers } \boxed{e^{\frac{2}{\pi}}}$$

Et là encore, un dixième de seconde pour Xcas...

◊2◊

Racines carrées de la dérivation (*oral de concours*). On note $(E, +, \cdot)$ l'espace vectoriel des polynômes et D l'endomorphisme de dérivation. On cherche à savoir si il existe un endomorphisme T de E vérifiant $T \circ T = D$ (*racine carrée de la dérivation*). On suppose qu'un tel endomorphisme T existe. Montrez alors $\{0\} \subset \operatorname{Ker}(T) \subset \mathbb{R}_0[X]$. Déduisez que la dimension de $\operatorname{Ker}(T)$ vaut 0 ou 1.

On a su définir la dérivation d'ordre $\frac{1}{2}$ sur les fonctions dans le cours d'analyse. Celle qui, quand on l'applique deux fois, donne la dérivation classique.

On a tout fait pour qu'elle soit linéaire. Mais elle a un défaut : elle transforme les polynômes en choses avec des exposants non entiers et des $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ qui traînent...

Mais ne peut-on rêver de créer une application linéaire qui fasse « la moitié du chemin de la dérivation » ? On veut $T \circ T = (P \mapsto P')$.

On va montrer par argument de dimensions que c'est impossible.

En gros, la dérivation d'ordre 1 a un noyau de dimension 1 (les constantes), quelle devrait être la dimension du noyau de la dérivation d'ordre $\frac{1}{2}$.

Pour la cohérence aussi, le noyau de $P \mapsto P''$ est de dimension 2 formé des fonctions affines.

C'est parti. Le cours nous assure que le vecteur nul (ici le polynôme nul) est dans le noyau de T du moment que T est bien un morphisme.

En effet, $T(0) = 0$ par théorème dit de Paris 6.

Ensuite, si P est dans $\operatorname{Ker}(T)$, alors on a $T(P) = 0$ et donc $T(T(P)) = T(0) = 0$ (en fait, je devrais écrire 0 avec une flèche au dessus pour bien dire « polynôme nul »).

On reconnaît que P est dans $\operatorname{Ker}(T \circ T)$.

Mais comme $T \circ T$ est la dérivation, ceci signifie $P' = 0$. P est donc un polynôme constant.

On a prouvé $P \in \operatorname{Ker}(T) \Rightarrow P \in \mathbb{R}_0[X]$.

L'inclusion des espaces se traduit sur les dimensions : $0 = \dim(\{0\}) \leq \dim(\operatorname{Ker}(T)) \leq \dim(\mathbb{R}_0[X]) = 1$.

Montrez que si $\text{Ker}(T)$ est de dimension 0, alors $\text{Ker}(T^2)$ l'est aussi. Concluez.

On suppose donc $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$, c'est à dire $\text{Ker}(T) = \{0\}$.

On s'interroge sur $\text{Ker}(T^2)$ sans retourner dire que c'est $\text{Ker}(P \mapsto P')$.

Soit P dans $\text{Ker}(T^2)$. On traduit : $T(T(P)) = 0$. On reconnaît $T(P) \in \text{Ker}(T)$.

Comme on a supposé $\text{Ker}(T) = \{0\}$, ceci donne $T(P) = 0$.

Et en re-commençant : $P = 0$.

En fait, on a aussi directement $(\text{Ker}(T) = \{0\}) \Rightarrow (T \text{ injective}) \Rightarrow (T^2 \text{ injective}) \Rightarrow (\text{Ker}(T^2) = \{0\})$.

Mais on avait $\text{Ker}(T^2) = \mathbb{R}_1[X]$ d'où contradiction.

$\text{Ker}(T)$ ne peut pas être de dimension 0.

Il est donc de dimension 1 ? Beh non..

Montrez que si $\text{Ker}(T)$ est de dimension 1, alors $\text{Ker}(T^3)$ et $\text{Ker}(T^4)$ sont aussi de dimension 1. Concluez.

Si l'on suppose $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$, alors on a $\text{Ker}(T) = \mathbb{R}_1[X] = \text{Ker}(T^2)$.

Regardons alors $\text{Ker}(T^3)$.

On prend P dans $\text{Ker}(T^3)$. On traduit $T^3(P) = 0$ et donc $T^2(T(P)) = 0$.

$T(P)$ est dans $\text{Ker}(T^2)$. Mais notre hypothèse sur les dimensions dit $\text{Ker}(T^2) = \text{Ker}(T)$.

Ayant $T(P) \in \text{Ker}(T)$, on a donc $T(T(P)) = 0$ soit $P \in \text{Ker}(T^2)$.

On vient de prouver $\text{Ker}(T^3) \subset \text{Ker}(T^2)$. Et on a toujours $\text{Ker}(T^2) \subset \text{Ker}(T^3)$.

On vient d'arriver à $\text{Ker}(T^3) = \text{Ker}(T^2) = \text{Ker}(T)$.

On poursuit avec un résultat déjà acquis $\text{Ker}(T^3) \subset \text{Ker}(T^4)$ (facile : $(T^3(P) = 0) \Rightarrow (T(T^3(P)) = 0)$).

On prend P dans $\text{Ker}(T^4)$. On traduit : $T^4(P) = 0$ et même $T^2(T^2(P)) = 0$.

On reconnaît $T^2(P) \in \text{Ker}(T^2)$.

Mais comme $\text{Ker}(T^2)$ est égal à $\text{Ker}(T)$, on a donc $T^2(P) \in \text{Ker}(T)$.

Ceci se traduit par $T(T^2(P)) = 0$ et P est dans $\text{Ker}(T^3)$.

On a donc $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(T^2) = \text{Ker}(T^3) = \text{Ker}(T^4)$ en ayant juste utilisé $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(T^2)$.

Mais T^4 n'est autre que $P \mapsto P''$ et il a pour noyau $\mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2.

On a une contradiction.

Bref, $\text{Ker}(T)$ ne peut être que de dimension 0 ou 1, et chacun des deux cas conduit à une contradiction. On ne peut trouver T vérifiant $T^2 = (P \mapsto P')$.

Plusieurs parties de cet exercice correspondant au grand classique des noyaux itérés :

$\text{Ker}(Id) \subset \text{Ker}(f) \subset (\text{Ker}(f^2) \subset (\text{Ker}(f^3) \dots \subset \text{Ker}(f^n) \subset \text{Ker}(f^{n+1}) \subset$
et si à un moment le noyau n'a pas augmenté, il n'augmentera plus.

◊3◊

Montrez que la dérivation est un endomorphisme de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y^{(3)} + 6.y = 2.y'' + 5.y'$.

Donnez une base de cet espace vectoriel des solutions, puis donnez la matrice de la dérivation sur cette base.

Si f vérifie $f^{(3)}(t) + 6.f(t) = 2.f''(t) + 5.f'(t)$ pour tout t , alors elle est C^∞ en mettant en boucle « $f^{(3)} = 2.f'' + 5.f' - 2.f$ est dérivable quand on la regarde comme membre de droite ».

On dérive : $f^{(4)}(t) + 6.f'(t) = 2.f^{(3)}(t) + 5.f''(t)$ pour tout t .

On pose $\varphi = f'$ et on reconnaît que φ est encore solution de l'équation différentielle...

Sinon, que la dérivation soit linéaire, c'est acquis : $(\alpha.f + \beta.g)' = \alpha.f' + \beta.g'$, que f et g soient ou non solutions d'équations différentielles, du moment qu'elles sont dérivables.

Le cours d'analyse nous donne une base de l'espace des solutions, en résolvant l'équation caractéristique $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ d'inconnue (réelle/complex) λ .

Le spectre réel est $[3, 1, -2]$.

Une base des solutions est $(t \mapsto e^{3.t}, t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-2.t})$.

Et l'ensemble des solutions est $Vect(t \mapsto e^{3.t}, t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-2.t})$.

Et les solutions s'écrivent $t \mapsto A.e^{3.t} + B.e^t + C.e^{-2.t}$ avec A, B et C dépendant des conditions initiales.

Choisissez la formulation que vous voulez parmi les trois ci dessus... Et dites moi si le physicien a vraiment conscience qu'il fait de l'algèbre linéaire.

On dérive chaque vecteur de la base proposée et on écrit alors la matrice de la dérivation : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

La trace vaut 2 et le déterminant -6 .

Question : d'accord, mais c'est parce qu'on a choisi cette base là... mais si on en avait pris une autre, comme $(t \mapsto e^{-2.t}, t \mapsto e^{3.t}, t \mapsto e^t)$ ou même $(t \mapsto e^{3.t} + e^{2.t}, t \mapsto e^t - e^{2.t}, t \mapsto 3.e^{-2.t})$ ou pire encore...

Eh bien, la matrice n'aurait pas été la même, mais elle aurait été semblable à celle ci.

Et on aurait eu la même trace et le même déterminant...

Une étourderie m'a fait taper $y'' + 6.y = 2.y'' + 5.y'$ comme énoncé.

Le raisonnement est le même, mais cette fois, le spectre est $[1, -6]$.

On a alors $Vect(t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-6.t})$ et la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.

◊4◊

Je crois que $832! + 1$ est un multiple de 2017. Écrivez un script Python qui va le prouver.

On doit calculer $832! + 1$. Python réussit à manipuler des entiers aussi grands qu'on veut. On va calculer cette factorielle par une boucle `for`. Attention, on rappelle que `range(832)` donne tous les entiers de 0 à 831 (et il y en a 832). Et nous on veut les entiers de 1 à 832. On va ajouter 1.

```
facto = 1 #initialisation
for k in range(832) :
    ....facto = facto*(k+1) #ou facto*=k+1
```

Le nombre `facto` est alors égal à $832!$. On lui ajoute 1 :

```
facto = facto+1 #ou facto+=1
```

Il reste à voir si il est multiple de 2017.

Le réflexe de calculette : on calcule le quotient et on regarde si il est entier. C'est gentil, mais ça ne fait de vous que des élèves de Terminale, et pas des scientifiques.

Le réflexe d'ordinateur : on fait une division euclidienne. Et on ne regarde que le reste :

```
facto%2017
```

Si ce nombre vaut bien 0, on a gagné.

Le test est même `(facto%2017)==0`

Juste pour le plaisir :

```
1171638480037146610897629164169359266562844056916094280285422134797763463140850936275395505296745901415
7191814117612417331431770578801961043507494544512090799281926985036103443873445298164185559368135622237
9575725674456967985782640020362846822249295033211046058240168306860120370551078892681761636609914917763
5813384851405857107451580400755096174903904495617754171386553426456370329734141621726389585411202937704
3228471996800859740889341995263741363489459333634160843117861153143276957863788867044674286666529955900
9582104913569493786419393786839599809753016138673856698435821666260815251952831092259211396155606782225
7697888789863310108839132508926551902009571329487009556307452202945350052314349410659070729478751142091
5473117791699102626045194241305979933982726271751566091774051063484171238053349727417633432155777602902
2607985909868300407486910722672281095164513265754822917512037255360427712542315025902251857998392217911
8948666173918746879823468426122078224960077147884676644191202380752708192460738839235891814831844122355
5675173631218118388208628551818236999678629353324948595320523531898310401914632348143450691445927371471
4549964066263757574388841193083568619686783442637483474476153947114020459837892322788376902251043152981
```


◊6◊

2020 n'est pas un palindrome, mais c'est la somme de deux entiers palindromes.

Trouvez les.

Et pour les millésimes suivants ?

Attention, correction datant de 2017...

Effectivement, on n'a pas $2017 = 7102$. Ce n'est pas un palindrome.

Mais on a $2017 = 1331 + 686$. Et les deux nombres 1331 et 686 sont des palindromes.

Comment les trouver ? On veut $2017 = abba + cddc$ ou $2017 = abba + cdc$ ou $2017 = abba + cc$ ou $2017 = abba + c$ ou $2017 = aba + cdc$ suivant que les deux nombres cherchés ont deux, trois ou quatre chiffres.

On élimine tout de suite certains cas tels que $2017 = abba + c$, même avec une retenue.

On s'attaque au cas "le plus probable" : un palindrome à quatre chiffres et un à trois chiffres.

On traite donc
$$\begin{array}{r} a \ b \ b \ a \\ + \ c \ d \ c \end{array}$$
. Nécessairement, a vaut 1 ou 2.

Si a vaut 2, alors on est en face de
$$\begin{array}{r} 2 \ b \ b \ 2 \\ + \ c \ d \ c \end{array}$$
. c vaut donc 5. Il s'ensuit que la somme des centaines

$$\begin{array}{r} 1 \ b \ b \ 1 \\ + \ 5 \ d \ 5 \end{array}$$
 a une retenue pour obtenir le chiffre 0, et on a un millier de trop. Échec.

Si a vaut 1, alors, c vaut 6. On en est à
$$\begin{array}{r} 1 \ b \ b \ 1 \\ + \ 6 \ d \ 6 \end{array}$$
. On trouve la valeur de b : 4 avec cette fois une

retenue favorable égale à 1. On ne trouve pas d car on a une retenue en trop
$$\begin{array}{r} 1 \ 4 \ 4 \ 1 \\ + \ 6 \ d \ 6 \end{array}$$
. Mais on s'en

sort avec $b = 3$ et une retenue issue de $b + d$ (qu'on pouvait deviner d'ailleurs dès le début) : on peut vérifier

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\ + \ 6 \ 8 \ 6 \\ \hline 2 \ 0 \ 1 \ 7 \end{array}$$

Pour les années à venir :
$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 2 \ 1 \\ + \ 7 \ 9 \ 7 \end{array}, \begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ + \ 9 \ 0 \ 9 \end{array}, \begin{array}{r} 1 \ 8 \ 8 \ 1 \\ + \ 1 \ 4 \ 1 \end{array}$$
 tandis que 2019 et 2021 ne sont pas sommes de deux palindromes.

Albert, Barbara, Charles and David are the cause of much confusion in our village. Each of them owns a cat named after one of the other three, and a dog named after another of them. No two cats have the same name. No two dogs have the same name. David's dog and Charles' cat are both namesakes of the owner of the cat Charles. The name of Barbara's cat is the owner of the cat whose namesake owns the dog called Albert.

Who owns the dog David.

owner	A	B	C	D
dog				x
cat		y	x	

On doit remplir un tableau avec des A, B, C et D.

fils	A	B	C	D
chien				x
chat			x	

si on veut faire croire qu'il y a des maths partout. Le nom x désigne tout autant le chien de David que le chat de Charles. C'est donc soit Albert, soit Barbara, car personne ne donne son propre prénom à un de ses animaux.

Supposons que ce x soit Albert. Alors, l'énoncé nous dit que le chat d'Albert s'appelle Charles :

Comme les lettres de chaque ligne sont toutes différentes et à prendre dans la liste [A, B, C, D], on sait que sur chaque ligne, chaque lettre est présente une fois et une seule. La ligne des chats doit encore contenir B et D. Mais Barbara n'appelle pas son chat Barbara. On est est à (*voir ci contre*).

fils	A	B	C	D
chien				A
chat	C		A	

fils	A	B	C	D
chien				A
chat	C	D	A	B

Il reste une information : The name of Barbara's cat (David) is the owner of the cat (Barbara) whose namesake (Barbara) owns the dog called Albert. C'est contradictoire. On élimine donc x=Albert.

fils	A	B	C	D
chien				B
chat			C	B

On passe au cas où x est Barbara : On complète la ligne des chats avec A et D.

fils	A	B	C	D
chien				B
chat	D	C	B	A

Comme D n'est pas en quatrième colonne, on a

cat (Charles) is the owner of the cat (Barbara) whose namesake (Barbara) owns the dog called Albert

fils	A	B	C	D
chien		A		B
chat	D	C	B	A

On termine la ligne des chiens

fils	A	B	C	D
chien	C	A	D	B
chat	D	C	B	A

Le chien David appartient à

Charles.

◊7◊

Mon fils a eu 6 sur 20 (*en gym, pas en maths*). La moyenne de classe est à 11. Il me dit : "*j'aurais eu cinq points de plus, j'aurais eu comme la moyenne*". Je lui dis "*non, car la moyenne de la classe aurait alors augmenté*". "*Ah oui, j'aurais du avoir 11,2 alors*". Combien y a-t-il d'élèves dans la classe de mon fils ?

On connaît des choses, mais on ignore le nombre d'élèves, qu'on va noter n .

Les notes des élèves vont être notées de a_1 à a_n . Celle de mon fils est a_1 .

On a donc déjà : $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n a_k = 11$ et même $6 + \sum_{k=2}^n a_k = 11n$.

Si il a aussi 11, la nouvelle moyenne est effectivement calculable :

$$\frac{1}{n} \cdot \left(11 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) = \frac{1}{n} \cdot \left(5 + 6 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) = \frac{5}{n} + 11.$$

Elle a monté ! (*c'est normal, si une note monte, la moyenne monte*)

Mais mon fils a fait le bon calcul. Si il a 11,2, la nouvelle moyenne se recalcule aussi :

$$\frac{1}{n} \cdot \left(11,2 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) = \frac{1}{n} \cdot \left(5,2 + 6 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) = \frac{5,2}{n} + 11$$

Et maintenant, mon fils a la moyenne de la classe $\frac{5,2}{n} + 11 = 11,2$.

$$\text{On résout : } n = \frac{5,2}{0,2} = 26$$

On est soulagé, le nombre d'élèves est entier.

Oui, il était plus facile de regarder par la fenêtre pour voir combien il y avait d'élèves en salle 205 du collège.

◊8◊

Un triangle est dit grectangle si la racine carrée de l'hypoténuse est la somme des racines carrées des deux autres côtés. Existe-t-il des triangles à la fois grectangles et rectangles ? Est il vrai que tout triangle grectangle est aussi rectangle ?

On étudie donc des triangles vérifiant $\sqrt{a} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$ (au lieu de $a^2 = b^2 + c^2$).

Ça existe ça ? Hélas, non.

En effet, si on a $\sqrt{a} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$ alors on a aussi $a = (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = b + c + 2\sqrt{b \cdot c} > b + c$.

Or, pour un triangle, l'inégalité triangulaire sur les longueurs dit $BC \leq BA + AC$ c'est à dire $a \leq b + c$.

Dit plus simplement : un côté est plus petit que la somme des deux autres.

Il n'y a pas de triangles grectangles.

Il n'y a donc pas de triangles à la fois grectangles et rectangles.

Mais ensuite, c'est pure logique :

$\forall \text{triangle}, (\text{triangle est grectangle}) \Rightarrow (\text{triangle est rectangle})$

sur le modèle "Faux implique ce qu'on veut". Et toc !

◊9◊

σ est une permutation de la liste $[1, 2, 3, 4, 5]$. Quelles sont les limites possibles de la suite $\frac{\sigma(1) + \sigma^2(1) + \dots + \sigma^n(1)}{n}$ quand n tend vers l'infini ?

On se donne une permutation σ et on calcule $\frac{\sigma(1) + \sigma^2(1) + \dots + \sigma^n(1)}{n}$. C'est la moyenne des images itérées de 1. Il va de soi qu'il faut entendre $\sigma^2(1) = \sigma(\sigma(1))$ et non $\sigma^2(1) = (\sigma(1))^2$ qui conduirait à une simple série géométrique.

En fait, ces images vont se répéter, puisque 1 est dans un cycle. Si par exemple 1 est dans le cycle $\overrightarrow{(1\ 3\ 2\ 5)}$, alors on calcule $\frac{3 + 2 + 5 + 1 + 3 + 2 + 5 + \dots + ?}{n}$ (le dernier terme dépend de n modulo 4).

Mais de toutes façons, si vos notes passent leur temps à valoir 1, 3, 2 et 5, alors votre moyenne vaut souvent $\frac{1 + 3 + 2 + 5}{4}$, et globalement, elle tend vers cette valeur moyenne.

Proprement, on a

n	moyenne au rang n
$4.p$	$\frac{p.(1 + 3 + 2 + 5)}{4.p} = \frac{(1 + 3 + 2 + 5)}{4}$
$4.p + 1$	$\frac{p.(1 + 3 + 2 + 5) + 3}{4.p + 1} = \frac{p}{4.p + 1} \cdot \frac{(1 + 3 + 2 + 5)}{4} + \frac{3}{4.p + 1}$
$4.p + 2$	$\frac{p.(1 + 3 + 2 + 5) + 3 + 2}{4.p + 2} = \frac{p}{4.p + 2} \cdot \frac{(1 + 3 + 2 + 5)}{4} + \frac{3 + 2}{4.p + 2}$
$4.p + 3$	$\frac{p.(1 + 3 + 2 + 5) + 3 + 2 + 5}{4.p + 3} = \frac{p}{4.p + 3} \cdot \frac{(1 + 3 + 2 + 5)}{4} + \frac{3 + 2 + 5}{4.p + 3}$

Dans tous les cas, la suite des moyennes tend vers la moyenne sur une période.

On doit donc regarder les cycles dans lesquels peut se trouver 1, et calculer la moyenne sur un tel cycle.

On notera que les cycles ne contenant pas 1 ne nous intéressent pas.

type de cycle	mono	bicycles	tricycles
cycle	$\overrightarrow{(1)}$	$\overrightarrow{(1\ 2)}, \overrightarrow{(1\ 3)}, \overrightarrow{(1\ 4)}, \overrightarrow{(1\ 5)}$	$\overrightarrow{(1\ 2\ 3)}, \overrightarrow{(1\ 2\ 4)}, \overrightarrow{(1\ 2\ 5)}, \overrightarrow{(1\ 3\ 4)}, \overrightarrow{(1\ 3\ 5)}, \overrightarrow{(1\ 4\ 5)}$
limite	1	$\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{9}{3}, \frac{10}{3}$

On notera que tout ce qui compte est "qui sont les éléments du cycle contenant 1". L'ordre importe peu.

En effet, $\sigma = \overrightarrow{(1\ 2\ 3)}$ et $\sigma = \overrightarrow{(1\ 3\ 2)}$ ne donnent pas exactement les mêmes sommes, mais la même valeur moyenne à la limite.

type de cycle	quadracycles	pentacycles
cycle	$\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4)}, \overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 5)}, \overrightarrow{(1\ 2\ 4\ 5)}, \overrightarrow{(1\ 3\ 4\ 5)}$	$\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)}$ et ses variantes comme $\overrightarrow{(1\ 2\ 4\ 3\ 5)}$
limite	$\frac{10}{4}, \frac{11}{4}, \frac{12}{4}, \frac{13}{4}$	$\frac{15}{5}$

Il n'y a plus qu'à prendre la liste des valeurs obtenues.

◊10◊

Soit f de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puis a, b et c trois réels distincts. On définit $\varphi = x \mapsto (x-b).f(a) + (a-x).f(b) + (b-a).f(x) + (b-x).(x-a).A$. Ajustez A pour avoir $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c)$.

Déduisez : $\exists d \in \mathbb{R}, \frac{f(a)}{(a-b).(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a).(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a).(c-b)} = \frac{f''(d)}{2}$.

Question subsidiaire : calculez la probabilité qu'un élève qui doit montrer la formule $\exists d \in \mathbb{R}, \dots$ à l'oral des Mines pense à introduire la fonction φ .

On définit donc $\varphi = x \mapsto (x-b).f(a) + (a-x).f(b) + (b-a).f(x) + (b-x).(x-a).A$.

On calcule

$\varphi(a) = 0$
$\varphi(b) = 0$
$\varphi(c) = (c-b).f(a) + (a-c).f(b) + (a-b).f(c) + A.(b-c).(c-a)$

On pose donc $A = \frac{(c-b).f(a) + (a-c).f(b) + (a-b).f(c)}{(c-b).(c-a)}$ "tout naturellement".

L'application φ est de classe D^2 sur $\mathbb{R}$ et prend la même valeur en trois points distincts.

En appliquant le théorème de Rolle sur $[a, b]$ puis sur $[b, c]$ si les trois points sont dans cet ordre (*continue, dérivable*), on déduit que φ' s'annule en deux points distincts (*distincts car intervalles ouverts, donc les deux nombres sont séparés par b*). On réapplique le théorème de Rolle à φ' (*dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle entre les deux racines*) : il existe au moins un point où φ'' s'annule.

On calcule : $\varphi'' = x \mapsto (b-a).f''(x) - 2.A$ (*les fonctions affines ont disparu*).

En notant d le point où φ'' s'annule, on a alors $A = \frac{f''(d).(b-a)}{2}$.

Classiquement, on reporte dans l'information $\varphi(c) = 0$:

$$(c-b).f(a) + (a-c).f(b) + (b-a).f(c) + (b-c).(c-a).\frac{f''(d).(b-a)}{2} = 0.$$

On fait passer d'un même côté : $(c-b).f(a) + (a-c).f(b) + (b-a).f(c) = (c-b).(c-a).\frac{f''(d).(b-a)}{2}$.

On divise par $(c-b).(c-a).(b-a)$ (non nul) : $\frac{1}{(c-a).(b-a)}.f(a) + \frac{-1}{(c-b).(b-a)}.f(b) + \frac{1}{(c-b).(c-a)}.f(c) = \frac{f''(d)}{2}$

C'est la formule attendue.

Et la probabilité qu'un élève pense à introduire φ est égale à la probabilité qu'il vienne d'un lycée où on distribue en Spé les listes d'exercices d'oraux du concours Commun Mines-Ponts. A une époque, les élèves de Ginette disposaient de cette banque d'exercices et avaient pour consigne de ne la céder à personne. Depuis, le Concours Commun a tourné l'injustice en forçant ses examinateurs d'oral à renouveler leurs exercices d'une année sur l'autre.

◊11◊

Auguste, Baptiste et Clara sortent de colle (d'anglais ou de physique) et indiquent leur note :

Auguste	j'ai 6	j'ai 2 de moins que Baptiste	j'ai 1 de plus que Clara
Baptiste	Clara a 9	je n'ai pas la plus mauvaise note	la différence entre Clara et moi est 3
Clara	Auguste a 7	j'ai moins qu'Auguste	Baptiste a 3 de plus qu'Auguste

Ce n'est pas cohérent tout ça. En effet, chacun a menti une fois et dit la vérité deux fois. Quelle est la note de chacun ?

On regarde les informations

	1	2	3
Auguste	A=6	A=B-2	A=C+1
Baptiste	C=9	non(Min(A,B,C)=B)	C-B =3
Clara	A=7	C<A	B=A+3

On marquera en tout petit sous une barre les assertions fausses. On marquera en grand les affirmations qui sont assurément vraies.

Comme A1 et C1 sont contradictoire, un des deux est faux (au moins). Ce qui signifie que les autres affirmations de la ligne sont vraies.

- Si Auguste ment en disant "A=6" et Clara sincère en disant "A=7" :

	1	2	3
Auguste	$\overline{A=6}$	$A=B-2$ donc $B=9$	$A=C+1$ donc $C=6$
Baptiste	$C=9$	$\text{non}(\text{Min}(A,B,C)=B)$	$ C-B =3$
Clara	$\overline{A=7}$	$C < A$	$\overline{B=A+3}$

On a trouvé $(A, B, C) = (7, 9, 6)$. Il faut alors que Baptiste mente une fois sur ses trois affirmations. Il ment en disant $C=9$ et dit la vérité des ses autres phrases. On peut accepter cette situation.

- Si Auguste est sincère en disant “ $A=6$ ” et Clara menteuse en disant “ $A=7$ ” :

	1	2	3
Auguste	$\overline{A=6}$	$A=B-2$	$A=C+1$
Baptiste	$C=9$	$\text{non}(\text{Min}(A,B,C)=B)$	$ C-B =3$
Clara	$\overline{A=7}$	$C < A$	$B=A+3$ donc $B=9$

Comme l’affirmation C2 dit que la plus sale note est C, on déduit que B ment avec B1. Il dit donc vrai avec “B n’est pas le minimum” et avec $|C-B|=3$ qui force $C=6$. On a alors $(A, B, C) = (6, 9, 6)$. Mais alors A ment deux fois dans ses deux dernière affirmations. On refuse.

- Si Auguste ment avec “ $A=6$ ” et Clara aussi avec “ $A=7$ ” ; leurs autres phrases sont sincères :

	1	2	3	et la contradiction $A+B-2$ et $B=A+3$ sont en contradiction.		
Auguste	$\overline{A=6}$	$A=B-2$	$A=C+1$	On ne peut donc garder que		
Baptiste	$C=9$	$\text{non}(\text{Min}(A,B,C)=B)$	$ C-B =3$	Auguste	Baptiste	Clara
Clara	$\overline{A=7}$	$C < A$	$B=A+3$	7	9	6

◊12◊

Montrez : $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ (indication : non, pas de quantité conjuguées mais $x \mapsto \sqrt[n]{x}$).

Définissons comme suggéré l’application $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Enfin, non, écrivons la proprement $x \mapsto x^{1/x}$ et même $x \mapsto e^{\ln(x)/x}$.

Elle est C^1 sur $]0, +\infty[$ (et se prolonge même en 0 par la valeur 0).

On la dérive, afin de prouver qu’on avait raison de la qualifier de C^1 : $x \mapsto \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \cdot e^{\ln(x)/x}$.

On applique le théorème des accroissements finis entre n et $n+1$ (tout est C^1) :

$$\exists c_n \in]n, n+1[, \quad \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = (n+1-n) \cdot \frac{1 - \ln(c_n)}{(c_n)^2} \cdot e^{\ln(c_n)/c_n}.$$

Ira-t-on jusqu’à dire qu’on a obtenu ce qu’on voulait ? Pas vraiment.

Mais comme n tend vers l’infini, c_n compris entre n et $n+1$ est équivalent à n .

On a donc par passage au logarithme (légitimé de multiples fois, même si ce n’est pas évident) :

$\ln(c_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n)$, et plus simplement $\frac{1}{(c_n)^2} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}$. Comme le logarithme tend vers l’infini,

$$\frac{\ln(c_n) - 1}{(c_n)^2} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(c_n)}{(c_n)^2} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}.$$

Il reste le problème de $e^{\ln(c_n)/c_n}$. Mais par croissances comparées $\frac{\ln(c_n)}{c_n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$. Par continuité de l’ex-

ponentielle en 0 : $e^{\ln(c_n)/c_n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1$ et même $e^{\ln(c_n)/c_n} \sim_{n \rightarrow +\infty} 1$.

Il n’y a plus qu’à multiplier les équivalents, et on a la formule attendue.

Un exercice sans grande difficulté, mais dans lequel sera notée la rigueur de rédaction (on ne passe pas à la limite avant d’avoir prouvé qu’il y en a une, on ne confond pas limites et équivalents, on justifie $\ln(n) \sim \ln(c_n)$...). J’irai jusqu’à dire que sur ces exercices, celles et ceux qui ont la fibre plus physicienne que mathématique rattrapent leur retard.

◊13◊

On définit $f = \theta \mapsto \tan(\theta) + \frac{2}{2\theta - \pi}$. Prolongez f par continuité en $\pi/2^a$ (on note $\bar{f}$ l'application prolongée, juste pour avoir la rigueur emmerdante des concours). Montrez que $\bar{f}$ est dérivable en $\pi/2$. Montrez que $\bar{f}$ est C^1 sur $[0, \pi/2]$. Calculez $\int_0^{\pi/2} \bar{f}(\theta).d\theta$.

On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \bar{f}(\theta). \sin(n.\theta).d\theta$, Montrez que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini (by parts).

a. pensez à écrire $x = \frac{\pi}{2} + h$ quand x doit tendre vers $\pi/2$, car c'est en 0 que vous maîtrisez vos développements limités

Ayant posé $f(\theta) = \tan(\theta) + \frac{2}{2\theta - \pi}$, on a l'existence en tout point de $[0, \pi/2[$ et de $] \pi/2, \pi]$ par exemple. Pour montrer que f se prolonge par continuité en $\pi/2$, on va regarder la limite de $f(x)$ quand x tend vers $\pi/2$.

Et surtout, on ne va pas séparer "à droite/à gauche". On n'est plus en Terminale avec des réflexes idiots. On ne sépare ainsi que quand la formule est différente à droite et à gauche...

On change de variable car c'est en 0 qu'on connaît tout : $x = \frac{\pi}{2} + h$ avec h qui va tendre vers 0 (par valeur supérieure ou inférieure) :

$$f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + h\right) + \frac{2}{\pi + 2.h - \pi} = \frac{\sin(h + \pi/2)}{\cos(h + \pi/2)} + \frac{1}{h} = \frac{-\cos(h)}{\sin(h)} + \frac{1}{h} = \frac{\sin(h) - h.\cos(h)}{h.\sin(h)}$$

On floute par développement limité connu : $f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \frac{\left(h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right) - h.\left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)}{h.\sin(h)} = \frac{h^3/3 + o(h^4)}{h.\sin(h)}$ (quand h tend vers 0).

On ne regarde que ce qui domine (équivalents) : $f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) \sim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3/3}{h.h} = \frac{h}{3}$.

L'équivalent tend vers 0, la quantité tend aussi vers 0 : on pose $f(\pi/2) = 0$

Maintenant, on regarde la dérivabilité par taux d'accroissement : $\tau = \frac{f(x) - \bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}$.

On change de variable : $\tau = \frac{f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - \bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} = \frac{f\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{h}$.

On profite de ce qui a été fait avant : $\tau \sim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{3}}{h} = \frac{1}{3}$.

Équivalent à un réel non nul, ce taux d'accroissement tend vers ce réel. Les taux d'accroissement ont une

limite, la fonction est dérivable : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$

Mais on peut aussi utiliser le théorème de la limite C^1 en dérivant d'abord :

$$f' = \theta \mapsto \frac{1}{\cos^2(\theta)} - \frac{4}{(2.x - \pi)^2}.$$

Il reste à voir si f' admet une limite en $\pi/2$ et si cette limite vaut $1/2$.

On notera que si on prouve que f' admet une limite, le théorème nous donne directement que $\bar{f}$ est dérivable en $\pi/2$ de dérivée égale à ce qu'on a trouvé.

On change de variable : $f'\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \frac{1}{\sin^2(h)} - \frac{4}{(2.h)^2} = \frac{h^2 - \sin^2(h)}{h^2.\sin^2(h)} = \frac{(h - \sin(h)).(h + \sin(h))}{h^2.\sin^2(h)}$.

On passe aux développements limités là où il faut :

$$h - \sin(h) = h - \left(h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)_{h \rightarrow 0}\right) = \frac{h^3}{6} + o(h^3)_{h \rightarrow 0}.$$

On passe aux équivalents $f'(\frac{\pi}{2} + h) \sim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{6} \cdot \frac{2.h}{h^2.h^2} = \frac{1}{3}$. L'équivalent devient une limite.
 $\bar{f}$ est dérivable, même en $\frac{\pi}{2}$ et $\bar{f}'$ est C^1 (tiens, c'est $\bar{f}'$ ou $\bar{f}'$?).

Pour l'intégration, on ne sépare pas. La linéarité c'est bien quand tout existe.

Mais ici, ni $\int_0^{\pi/2} \tan(\theta).d\theta$ ni $\int_0^{\pi/2} \frac{2}{2.\theta - \pi}.d\theta$. En revanche, on peut intégrer sur un segment $\int_0^a \left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} + \frac{2}{2.\theta - \pi} \right).d\theta = \left[\ln(2.\theta - \pi) - \ln(\cos(\theta)) \right]_{\theta=0}^{\theta=a}$.

Plus proprement, on a une primitive : $\theta \mapsto \ln\left(\frac{\pi - 2.\theta}{\cos(\theta)}\right)$. On prend sa valeur en 0 : $\ln(\pi)$.

On prend sa limite en $\pi/2$ en posant encore $\theta = \frac{\pi}{2} - h$ (on est à gauche de 0, on va prendre h positif) : $\ln\left(\frac{2.h}{\sin(h)}\right)$. Le quotient tend vers 2.1. Le logarithme tend vers 0 par continuité.

Au final, il reste $\int_0^{\pi/2} \bar{f}(\theta).d\theta = \ln(2/\pi)$ (négatif, ce qui est normal).

$I_n = \int_0^{\pi/2} \bar{f}(\theta).\sin(n.\theta).d\theta$ existe pour tout n . On intègre par parties en sachant que $\bar{f}$ est dérivable

$\bar{f}$	$\hookrightarrow$	$\bar{f}'$
$\sin(n.\theta)$	$\hookleftarrow$	$-\frac{\cos(n.\theta)}{n}$

$$I_n = \left[\frac{\bar{f}(\theta).\cos(n.\theta)}{n} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \bar{f}'(\theta).\cos(n.\theta).d\theta$$

Le crochet est fait de termes comme $\frac{\bar{f}(0)}{n}$ ou $\pm \frac{\bar{f}(\pi/2)}{n}$. Ils tendent vers 0 quand n tend vers l'infini.

L'intégrale se majore $\left| \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \bar{f}'(\theta).\cos(n.\theta).d\theta \right| \leq \frac{1}{n} \cdot \text{Max}\{|f'(t)| \mid t \in [0, \pi/2]\}$: on majore le cosinus en valeur absolue par 1 et les $\bar{f}'(\theta)$ par $\|\bar{f}'\|_{\infty}$ ($\bar{f}'$ est continue sur un segment, donc majorés).

Par encadrement, l'intégrale tend vers 0. La somme I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

◊14◊

Un ADONIS DANOIS veut ACHETER un HECTARE pour la NICHE de son CHIEN. Un AMATEUR de MEETINGS (ou un MARTEAU dans un GISEMENT ?) Un ARBITRE va s'ABRITER pour échapper à l'AIGLE AGILE qui fait ALLIANCE avec une CANAILLE. Ah il y en a des couples de mots anagramme l'un de l'autre. Ouvrez le fichier FRENCH.TXT et cherchez les couples d'anagrammes. Vous avez le droit de convertir les chaînes en listes (`list(Mot)`), de trier les listes (`sorted(L)`).

Comment savoir rapidement si deux listes sont égales sans être forcément dans le même ordre ? On les trie toutes les deux, et on regarde si les listes triées sont égales. Il y a aussi des solutions avec les ensembles, en utilisant une différence symétrique.

On va ouvrir le fichier, le lire. Comme on va le lire deux fois, on le stocke dans une variable avec `readlines()`.

On transforme les mots en listes une bonne fois pour toutes avec `list(Mot)`.

On ne testera ensuite que les mots de même longueur.

Comme la fonction `sorted` est un peu lourde, on évitera de trop la solliciter.

Et si finalement on la sollicitait une seule fois pour chaque mot, en créant une liste des mots triés, en gardant une liste des mots véritables.

On évitera aussi de dire qu'un mot est un anagramme de lui même. Et on évitera de tester ASPIRANT avec PARTISAN puis PARTISAN avec ASPIRANT, on ne va donc parcourir qu'une moitié de produit cartésien : `for k in range(len(L))` suivi de `for i in range(k)` tout court.

```

from os import *
Dico = open('FRENCH.TXT', 'r')
DicoMots = [ ] #pour les mots proprement écrits
DicoSorted = [ ] #pour les mots triés
for mot in Dico : #on lit le dictionnaire
....DicoMots.append(mot) #on remplit le dictionnaire des mots lisibles
....MotListe = sorted(list(Mot)) #on crée l'anagramme trié
....DicoSorted.append(MotListe) #on le mémorise
Dico.close() #on est propre, on ferme
for k in range(len(DicoSorted)) : #on va lire le dictionnaire trié
....Mot1 = DicoSorted[k] #on prend le mot pour ne pas le lire et le relire
....for i in range(k) : #on ne regarde que les mots qui précèdent
.....Mot2 = DicoSorted[i] #on lit le mot
.....if len(Mot1) == len(Mot2) : #on ne regarde que si ils ont la même longueur
.....if Mot1 == Mot2 : #on compare les mots triés
.....print(DicoMots[i], DicoMots[k]) #on affiche les mots sous forme lisible
print('Et voila, fini !') #on prévient qu'on a fait le tour

```