Dernier chapitre de maths, après, on fait des probabilités...
Non, je plaisante. Avant dernier chapitre de maths. Les probas de Sup ne sont plus des dénombrements stériles d'urnes dans des boules (il y en a), mais l'approche mathématique des probas, avec des outils d'analyse (polynômes, séries [1]), d'algèbre (matrices, produits scalaires, Cauchy-Schwarz, orthogonalité...). Bon j'avoue, il y aura encore des urnes, mais cette fois, je remplacerai les boules blanches, noires et rouges par des oursins blancs, noirs et rouges, histoire de rendre les tirages plus piquants [2].

On attaque donc l'algèbre bilinéaire.

Il y a quatre formes d'algèbre en Sup, cachées sous des noms tordus

Algèbre générale	Groupes, anneaux, corps... Polynômes, fractions rationnelles, éléments simples.
Algèbre linéaire	Familles libres, liées, bases, dimension, sous-espaces vectoriels, sommes directes, supplémentaires. Applications linéaires, endomorphismes, projecteurs, symétries. Changements de bases, matrices équivalentes, matrices semblables, diagonalisation.
Algèbre multilinéaire	Formes multilinéaires antisymétriques, déterminants. Polynôme caractéristique.
Algèbre bilinéaire	Produits scalaires, normes, bases orthonormées. Isométries, géométrie dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ et dans les espaces de fonctions.

L'adjectif « bilinéaire » vient de « forme bilinéaire symétrique positive défini positive » pour qualifier un produit scalaire sur un espace vectoriel.
C'est à dire qu'en linéaire, on prenait un vecteur, on avait son image
en multilinéaire, on prenait n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ et on avait le déterminant (un « volume »)
en bilinéaire, on prend deux vecteurs, et on mesure un produit de longueur, un angle, l'orthogonalité éventuelle.

On va donc parler de produits scalaires [3]dans un espace vectoriel.
L'espace pourra être $(\mathbb{R}^2, +, .)$ ou $(\mathbb{R}^3, +, .)$ pour se donner une vision géométrique.
Ce pourra être $(\mathbb{R}^n, +, .)$ pour mesurer des distances dans des nuages de points et projeter un nouveau point le plus près possible du nuage.
Ce pourra être des matrices, pour mesurer l'angle entre deux matrices (plus il sera petit, plus les matrices seront « presque proportionnelles ».
ce pourra être des fonctions, pour projeter une fonction continue sur un espace de polynômes, pour en avoir une bonne approximation qu'on n'a besoin de décrire que par une liste finie de coefficients.

Comme indique, sur un espace vectoriel $(E, +, .)$, un produit scalaire est

1. là ce sera plutôt en Spé)
2. plus des histoires de bonbons, de râteaux pris deux fois sur deux avec les filles, des couples dont on ignore le genre du second membre, des ivrognes qui cherchent leur chemin
3. c'est drôle, j'apprends que c'est à cette même époque que mes collègues du secondaire abordent le produit scalaire dans le plan et l'espace ; mais la différence est dans le singulier pour eux : il n'y aurait dans le plan qu'un seul produit scalaire possible...

une forme	le produit scalaire de deux vecteurs est un réel (pour pouvoir étudier le signe, et dire si l'angle est aigu, obtus)
bi-	on prend deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ et on calcule donc $\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c})$ *ou quand il n'y a qu'un produit scalaire donné sur l'espace $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$.*
bi-linéaire	la forme est linéaire par rapport à chaque vecteur : $\phi(\alpha.\overrightarrow{a}+\beta.\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}) = \alpha.\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c})+\beta.\phi(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$ $\phi(\overrightarrow{a},\ \beta.\overrightarrow{b}+\gamma.\overrightarrow{c}) = \beta.\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})+\gamma.\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c})$ *Vous avez envie d'appeler ça distributivité... bon faites le...*
symétrique	on prend deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$, on a $\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c}) = \phi(\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{a})$ *Vous avez envie d'appeler ça commutativité... bon faites le...*
positive	le produit scalaire d'un vecteur contre lui même est toujours positif (ou nul) : $\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}) \geqslant 0$ *En revanche, deux vecteurs peuvent vérifier $\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c}) < 0$ quand même.* *Cette propriété est là pour définir ensuite $\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a})}$ ou en version simpliste $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} = \|\overrightarrow{a}\|^2$.*
défini-positive	mais le seul vecteur de norme nulle est le vecteur nul. *Et il est le seul vecteur orthogonal à tous les autres en même temps.*

Une fois ces définitions posées, on vérifiera que les exemples que vous connaissez par les cours de maths du lycée, les cours de physique sont bien des produits scalaires :

$(\mathbb{R}^2,+,.)$	$(\mathbb{R}^3,+,.)$	$(\mathbb{R}^n,+,.)$
$(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix})\longmapsto x.x'+y.y'$	$(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix})\longmapsto x.x'+y.y'+z.z'$	$(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix})\longmapsto \sum_{k=1}^{n} a_k.c_k$

Mais aussi

$(\mathbb{R}^2,+,.)$	$(\mathbb{R}^3,+,.)$	$(C_0([-\pi,\pi],\mathbb{R}),+,.)$
$2.x.x'+5.y.y'+3.(x'.y+x.y')$	$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$	$(f,g)\longmapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(t).g(t).dt$

Ces applications sont bien des formes bilinéaires symétriques positives, définie-positives. Mais elles vont engendrer des géométries différentes.

On verra d'ailleurs si tous les produits-scalaires ne sont pas finalement de cette forme..

A partie d'un produit scalaire ϕ sur un espace vectoriel $(E,+,.)$, on définira la norme associée $\overrightarrow{a}\longmapsto \|\overrightarrow{a}\|_\phi = \sqrt{\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{a})}$ et on vérifiera que c'est bien une « norme », au sens « positivité, séparation, inégalité triangulaire ». On verra aussi comment passer du produit scalaire à la norme mais aussi de la norme au produit scalaire.
On appellera cela identités de polarisation et formule du parallélogramme.
Saurez vous me dire sous quel nom vous connaissez $\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c}) = \dfrac{\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}\|^2-\|\overrightarrow{a}\|^2-\|\overrightarrow{c}\|^2}{2}$

$$\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c}) = \frac{\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}\|^2-\|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}\|^2}{4}$$

$$\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}\|^2+\|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}\|^2 = 2.\|\overrightarrow{a}\|^2+2.\|\overrightarrow{c}\|^2$$

Question collège : *vous savez mesurer la « longueur » de n'importe quel vecteur, pouvez vous retrouver les angles aussi (avec les trois longueurs des côtés d'un triangle, vous connaissez les angles ?).*
Question lycée : *la variance d'une variable aléatoire, n'est ce pas sa norme ? et la covariance de deux variables aléatoires ne serait elle pas leur produit scalaire ? et une variable aléatoire constante*[4] *ne serait elle pas orthogonale à toutes les autres ?*

On traitera d'orthogonalité des vecteurs. Deux vecteurs seront orthogonaux entre eux si leur produit scalaire est nul. mais cette définition dépendra du produit scalaire choisi...

Ce qui nous intéressera ensuite, ce sont les bases orthonormées. Pourquoi ? parce qu'il est alors facile de retrouver les composantes d'un vecteur juste en calculant des produits scalaires avec les vecteurs de base. On

4. *déjà qu'une variable aléatoire n'est ni variable, ni aléatoire, ça donne quoi quand elle est « constante » ?*

retrouve la composante de $\overrightarrow{a}$ sur $\overrightarrow{i}$ en calculant $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{i}$, et plus généralement $\overrightarrow{a} = \sum_{k=1}^{n} \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e_k}) \times \overrightarrow{e_k}$.

On parlera de formules de Parseval pour désigner ce type de formules. Mais on pourra dire « décomposition directe d'un vecteur sur une base orthonormée ».

Si ça vous semble classique, c'est parfait. Mais ensuite, si vous travaillez avec des fonctions périodiques et que je vous dis qu'une base pourraît être faite des fonctions $c_p = \theta \longmapsto \cos(p.\theta)$ et $s_q = \theta \longmapsto \sin(q.\theta)$, ne serait il pas pratique de récupérer les coefficients en effectuant juste des produits scalaires, c'est à dire des calculs d'intégrales... La théorie du signal, les séries de Fourier... Ce qu'on ne vous enseigne plus en mathématiques, mais que les profs de physique disent « ça vous l'avez fait en cours de maths ».

L'autre grosse question sera « est-ce que dans un espace euclidien [5] il y a toujours des bases orthonormées ».
Et la méthode de Gram-Schmidt nous dira comment les construire.
Et on fera des changements de base. D'une base mal fichue vers une base orthonormée et vice versa, ou même d'une base orthonormée à une autre (on aura des matrices non seulement semblables, mais aussi « orthogonalement semblables ».

Ceci permettra aussi de construire des projecteurs orthogonaux : noyau et image sont orthogonaux entre eux, on projette perpendiculairement à l'image, il est midi au soleil. L'image est alors forcément plus courte que le vecteur dont on est parti.
Et ces projecteurs correspondent à ce que vous faites en physique quand ayant un nuage de points, vous essayez de tracer une droite qui passe « presque » par tous ces points, c'est à dire qui minimise une distance à un sous-espace engendré... Disons que pour l'instant c'est un peu vague.

La dernière partie consistera à étudier les isométries », c'est à dire les applications qui transforment les bases orthonormées en bases orthonormées [6]. En dimension 2 ce seront des rotations et symétries.
Le programme nous dit de ne pas trop aborder les isométries en dimension 3 (mais les isométries directes [7] seront encore des rotations, mais cette fois autour d'un axe).

1°) Définitions, exemples.

On se place sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel $(E, +, .)$. Le corps de base est $\mathbb{R}$, afin de pouvoir écrie des inégalités.

Remarque : L'an prochain, vous serez amenés à travailler sur des $\mathbb{C}-$espaces vectoriels, et vous parlerez de formes sesquilinéaires, avec de la conjugaison. Habituez vous bien déjà au bilinéaire.
De même, cette année, on travaillera plutôt en dimension finie (espaces euclidiens) parce qu'il est pratique d'avoir des bases.
L'an prochain, vous aurez des espaces pré-hilbertiens [a], et ce sera plus difficile de parler de « bases ».

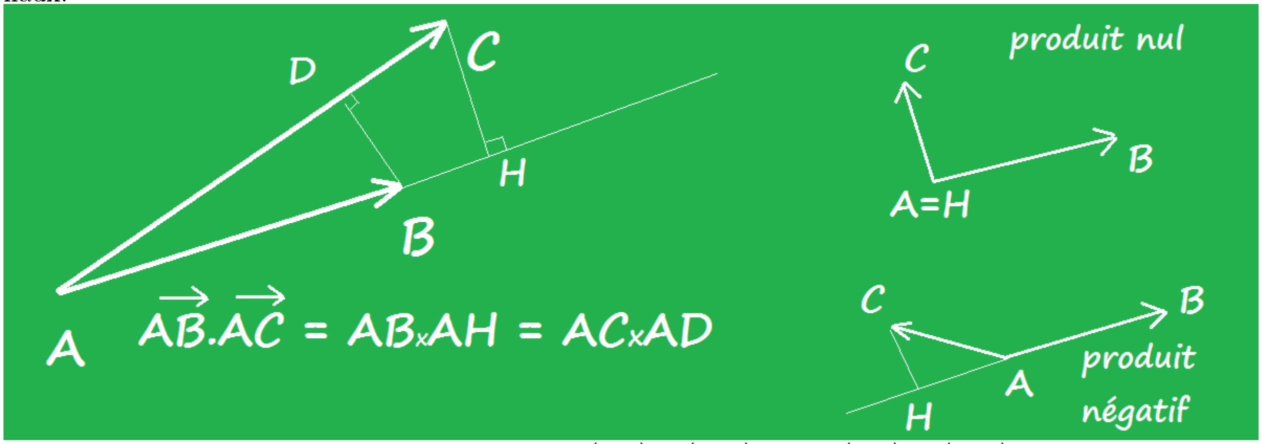
a. « hilbertien » vient de David Hilbert, un des deniers grands génies des mathématiques ; depuis il y a des génies de la branche qu'ils étudient, mais peu (à part peut être Terence Tao) réussissent encore à avoir une vision de beaucoup de secteurs des mathématiques à la fois

Un produit scalaire est une application qui prend deux vecteurs et calcule un produit de longueurs (pas forcément vu comme une aire).
Attention, pas tout à fait le produit de leurs longueurs : à l'ancienne il traine un cosinus entre les deux, qui permet de voir si nos vecteurs sont plutôt colinéaires de même sens
plutôt « orthogonaux »
plutôt colinéaires mais de sens opposés.

Quand j'étais petit [8], et tant que l'on ne nous avait pas parlé de vecteurs avec des composantes, la définition était
produit de la longueur du premier par la longueur de la projection du second sur le premier [9]
Il fallait alors prouver visuellement qu'on obtenait la même valeur en intervertissant les deux vecteurs

5. un espace euclidien est un espace vectoriel muni d'une base et d'un produit scalaire
6. les isomorphismes transforment les bases en bases, les isométries transforment les bases orthonormées e bases orthonormées, logique...
7. déterminant positif, et même déterminant égal à1, puisque les volumes sont conservés
8. « quand j'étais déjà jeune »
9. et comme souvent, c'était le prof de physique qui la donnait dans son cours (pour la notion de travail d'une force), parce qu'il en avait besoin avant que le prof de maths ne l'aborde dans le sien

mais ça permettait de bien comprendre que le produit pouvait être nul justement pour des vecteurs orthogonaux.



Après, on me l'a présenté avec des composantes $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x.x' + y.y'$.
Il a fallu me convaincre que c'était bien un calcul de projection, en sachant que l'on pouvait mesurer $\cos(angle) = \dfrac{x.x' + y.y'}{\sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2}}$.
Et il fallait généraliser en dimension plus grande.
Et peut être généraliser à des espaces de fonctions, de matrices...

D'où l'intérêt à notre niveau de voir ce qui était vraiment capital dans ces « définitions » d'un produit scalaire.
Et justement, on a dégagé [10] les idées suivantes :

un produit scalaire est une forme bi-linéaire symétrique, positive, défini-positive.

Tous ceux dont on avait l'habitude vérifiaient cela, et en plus, cette notion correspondait bien à une intuition géométrique.

J'ai tendance à découper en forme bi
linéaire
symétrique
positive
défini-positive
....et pas forcément dans l'ordre indiqué ci dessus
pour y aller étape par étape.

Suivant l'espace et le produit scalaire proposé, ce n'est pas toujours la même question qui nécessitera le plus de travail.
Il y a des produits scalaires pour lesquels c'est **forme** qui est le plus long.
Pourtant allez vous me dire : prendre deux vecteurs et dire qu'on associe un réel, ça n'a rien de compliqué.
Mais qui vous assure que l'objet « calculé » existe.

Dans $(\mathbb{R}^n, +, .)$ effectivement $\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\right) \longmapsto \sum_{k=1}^{n} a_k.c_k$ ne pose aucun problème d'existence.

Mais quand on généralise à l'espace des suites réelles ? $\big((a_n), (c_n)\big) \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.c_k$ n'a aucune raison d'exister.

On a quand même la somme d'une série...

10. fin du XIX° siècle

Exercice : On note $(E, +, .)$ l'espace des suites réelles (a_n) telles que la série de terme général $\big((a_n)^2\big)_{n\geqslant 0}$ converge (espace appelé L_2).

Pour a et c dans E, on veut définir $a\cdot c = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.c_k$.

Montrez que cette série de terme général $(a_k.c_k)_{k\geqslant 0}$ converge, sous la seule hypothèse que les séries de termes généraux $\big((a_n)^2\big)_{n\geqslant 0}$ et $\big((c_n)^2\big)_{n\geqslant 0}$ convergent.

Exercice : $(E, +, .)$ est l'espace des polynômes. On définit $A\cdot C = \int_0^1 A(t).C(t).dt$. Justifiez l'existence.

Facile.

(et pouvez vous vous convaincre que c'est une généralisation des $\sum_{k=0}^{n-1} a_k.c_k$ *quand on dit que l'intégrale est la limite des sommes de Riemann ».*

Mais si je dis « non, on va prendre $A\cdot C = \int_{-1}^{1} \frac{A(t).C(t)}{\sqrt{1-t^2}}.dt$ », voyez vous le problème d'existence pour une telle intégrale quand t atteint 1 ou -1, ce qui finit bien par lui arriver quand il parcourt $[-1,\ 1]$.

Pour les plus rusés : changez de variable en $t = \cos(\theta)$ et dites moi si il y a vraiment un problème.

Remarque : Et même plus simplement, pour des matrices à n lignes et k colonnes, pouvez vous me justifier que je ne commets pas une boulette en voulant poser $A\cdot B = Tr({}^tA.B)$?

Vérifiez que • les colonnes de B peuvent tomber sur les lignes de ${}^tA$

• la matrice obtenue est carrée et a bien une trace

Le propriété « symétrique » reposera souvent sur la commutativité d'une quelconque multiplication.

Il est facile de voir que $(A,\ B) \longmapsto \int_0^1 A(t).C(t).dt$

$(a,\ b) \longmapsto \sum_{k=1}^{n} a_k.b_k$

$(U,\ V) \longmapsto {}^tU.V$ sur $(\mathbb{R}^n, +, .)$ [a]

[a]. le t de transposition fait que U se couche et peut réceptionner V qui tombe

sont des forme symétriques.

Mais que pensez vous de $(A,\ C) \longmapsto Tr({}^tA.C)$? A-t-on $Tr({}^tA.C) = Tr({}^tC.A)$?

Et que pensez vous de $\left(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y & z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3\\ -1 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 7\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$?

$\left(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y & z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ -1 & 4 & 2\\ 1 & -2 & 7\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y & z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 7\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$

Selon vous, laquelle des trois sera une forme symétrique ?

Pourquoi montre-ton le caractère **symétrique** dès que possible ?

Pour ne pas avoir deux linéarités à prouver.

avec	$\forall(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}),\ \phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c}) = \phi(\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{a})$
et	$\phi(\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}) = \alpha.\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c}) + \beta.\phi(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$
montrez	$\phi(\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}) = \alpha.\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c}) + \beta.\phi(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$
	$\phi(\overrightarrow{a},\ \beta.\overrightarrow{b} + \gamma.\overrightarrow{c}) = \beta.\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) + \gamma.\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c})$

Avec des mots : si on prouve la linéarité par rapport au premier vecteur et la symétrie, on a automatiquement la linéarité par rapport au second vecteur *(on le fait passer en premier, on utilise la linéarité et on le fait repasser en second).*

Mais de toutes façons, souvent la bilinéarité reposera sur de la distributivité d'une multiplication sur une addition.

Remarque : $Tr({}^tA.(\beta.B+\gamma.C)=\beta.Tr({}^tA.B)+\gamma.Tr({}^tA.C)$ est facile à avoir

Conseil : Si vous devez prouver $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}a_k.(\beta.b_k+\gamma.c_k)=\alpha.\sum_{k=0}^{+\infty}a_k.b_k+\gamma.\sum_{k=0}^{+\infty}a_k.c_k$, partez des deux séries de droite dont l'existence est acquise, et fusionnez pour arriver à la série de gauche.
C'est mieux que de séparer...
Dois-je vous rappeler que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ existe, mais pas $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k+1}$.

Parfois, c'est la **positivité** qui est la plus difficile à obtenir.

Attention : Pour la positivité, on doit tester un vecteur contre lui même.
On rappelle que $\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c})$ peut être négatif ; Ou nul.
C'est chaque $\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a})$ qui doit être positif.

Pour le produit scalaire usuel, il est évident que $x^2+y^2+z^2$ est positif.

Pour le produit scalaire $(A,\ C)\longmapsto\displaystyle\int_0^1 A(t).C(t).dt$, la positivité de $\displaystyle\int_0^1(A(t))^2.dt$ ne pose aucun problème.

Mais pourquoi $Tr({}^tA.A)$ serait elle positive ?

Calcul : Le produit $\begin{pmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a" & b" & c" \end{pmatrix}$ a pour trace... je vous laisse voir.

Le produit $\begin{pmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \\ d & d' & d" \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a" & b" & c" & d" \end{pmatrix}$ a pour trace... mais c'est trop fort ça !

Mais pourquoi $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ serait il positif pour tout triplet (x,y,z) ?

Après tout, $x^2+4.y^2+7.z^2+2.x.y+2.x.z-4.y.z$ n'est pas une somme de carrés... Il y a des signes moins.
Et d'ailleurs, un produit comme $2.x.y$ peut être négatif...

Calcul : $x^2+4.y^2+7.z^2+2.x.y+2.x.z-4.y.z$ ne semble pas avoir un signe évident
$(x+y+z)^2+3.(y-z)^2+3.z^2$ est visiblement positif comme somme de carrés de réels.
Développez le pour voir... et dites moi merci.

Parfois enfin, c'est le caractère **défini-positif**[11] qui pose problème.
Certes, il est évident que si $x^2+y^2+z^2$ est nul, forcément x y et z sont nuls.

- Pouvez vous prouver que si la trace de $\begin{pmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \\ d & d' & d" \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a" & b" & c" & d" \end{pmatrix}$ est nulle, alors la matrice est nulle ?

- Pouvez vous prouver que si $x^2+4.y^2+7.z^2+2.x.y+2.x.z-4.y.z$ est nul, alors x, y et z sont nuls.

- Pouvez vous prouver que si $\displaystyle\int_0^1(P(t))^2.dt$ est nul, alors P est nul.

11. l'implication $\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{a})=0\Rightarrow\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$

Éléments : Éléments de réponse :
$x^2+y^2+z^2=0 \Rightarrow x=y=z=0$ se prouve en écrivant $0 \leqslant x^2 \leqslant x^2+y^2+z^2=0$.

La trace en question est une somme de carrés.

Si $\displaystyle\int_a^b \varphi(t).dt$ est nulle avec φcontinue et positive, alors φest nulle sur tout $]a,\ b[$.
On définit $x \longmapsto \int_a^x \varphi(t).dt$, croissante ($\varphi$ positive), nulle en a ($\displaystyle\int_a^a \ldots$) et en b(hypothèse).
Par croissance et nullité aux bornes, elle est constante.
Sa dérivée est nulle. Et c'est fini.

Si le polynôme P est nul sur tout $]0,\ 1[$ alors il a une infinité de racines, et il est donc forcément nul.

Quelques exemples de produits scalaires qu'il est bon d'avoir croisés.

Notations : On va voir qu'on peut construire plusieurs produits scalaires sur $(\mathbb{R}^2,+,.)$, dont le produit scalaire usuel.
Comme il y en a plusieurs, il faut pouvoir varier les notations :
$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$ pour le produit scalaire usuel
$\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c})$, $(\overrightarrow{a}|\overrightarrow{c})$, $<\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c}>$, $<\overrightarrow{a}|\overrightarrow{c}>$ sont les notations les plus utilisées dans les livres.

Pour $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) \longmapsto x.x'+y.y'+z.z'$ je vous laisse tout prouver. Ou prétendre que vous l'avez prouvé au moins une fois.

Montrez que $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \longmapsto 4.x.x'+5.y.y'+3.x.y'+3.x'.y$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^2,+,.)$.

Forme : évident.

Symétrique : $4.x.x'+5.y.y'+3.x.y'+3.x'.y = 4.x'.x+5.y'.y+3.x'.y+3.x.y'$ pour tout quadruplet.

Bilinéaire : facile, mais avec plein de lettres.

Facile : $4.x.x'+5.y.y'+3.x.y'+3.x'.y = 4.x'.x+5.y'.y+3.x'.y+3.x.y'$ s'écrit aussi
$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
Cette écriture ${}^tU.S.V$ nous simplifie la vie par exemple pour la linéarité par rapport au second vecteur :
${}^tU.S.(\alpha.V+\beta.W) = \alpha.({}^tU.S.V)+\beta.({}^tU.S.W)$
pareil pour le premier.

Positive :
On prend deux fois le même vecteur. On trouve $4.x^2+5.y^2+6.x.y$. Il faut prouver que ceci est positif.
Plusieurs preuves possibles.

On le regarde comme un trinôme en x :	$4.x^2+6.y.x+5.y^2$ de discriminant $(6.y)^2-4.4.(5.y^2)$ le discriminant est négatif, le terme dominant est positif, le trinôme est de signe constant.
On le regarde comme un trinôme en y :	$5.y^2+6.x.y+4.x^2$ de discriminant $(6.x)^2-4.5.(4.x^2)$ le discriminant est négatif, le terme dominant est positif, le trinôme est de signe constant positif.
On le regarde comme un trinôme en y/x :	$x^2.\left(5.\left(\frac{y}{x}\right)^2+6.\frac{y}{x}+4\right)$ même histoire
On passe en polaires :	$\rho^2.(5.\cos^2(\theta)+4.\sin^2(\theta)+6.\cos(\theta).\sin(\theta))$ $\frac{\rho^2}{2}.(9+\cos(2.\theta)+6.\sin(2.\theta))$ $\frac{\rho^2}{2}.(9+\sqrt{37}.\cos(2.\theta+\varphi))$ et $9>\sqrt{37}$.
On diagonalise	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ se diagonalise en $\begin{pmatrix} \frac{9+\sqrt{37}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{9-\sqrt{37}}{2} \end{pmatrix}$ via $\begin{pmatrix} \sqrt{37}-1 & 6 \\ \sqrt{37}+1 & -6 \end{pmatrix}$ et il reste du travail, à voir peut être en exercice...
On suit la méthode dite de Gauss (la meilleure)	$4.x^2+6.x.y+5.y^2=\left(2.x+\frac{3}{2}.y\right)^2-\frac{9.y^2}{4}+5.y^2$ on a cherché un terme en $(\alpha.x+\beta.y)^2$ pour avoir $4.x^2$ et $6.x.y$ et ensuite, on a compensé les y^2 $4.x^2+6.x.y+5.y^2=\left(2.x+\frac{3}{2}.y\right)^2+\frac{11.y^2}{4}$ Cette somme de carrés de réels est positive.

Bref, quelle que soit la méthode choisie, la quantité $4.x^2+6.x.y+5.y^2$ reste positive. Ou nulle.

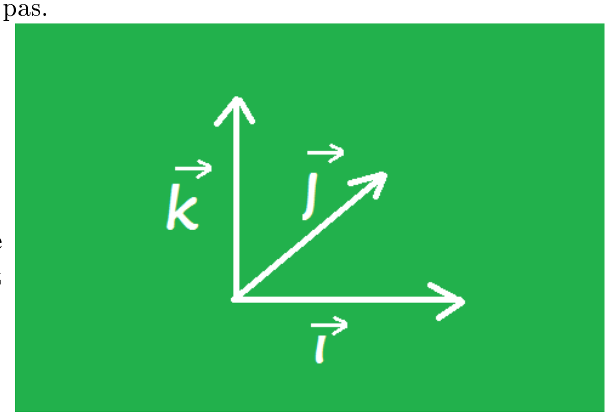
Définie positive.

On doit montrer que la seule façon d'obtenir $4.x^2+6.x.y+5.y^2=0$ est de prendre $x=y=0$.

Et c'est facile : si cette somme est nulle, alors $\left(2.x+\frac{3}{2}.y\right)^2+\frac{11.y^2}{4}$ est nulle, et la seule façon de s'en sortir est d'avoir $\frac{11.y^2}{4}=0$ puis $2.x+\frac{3}{2}.y=0$.

On a bien un nouveau produit scalaire sur $(\mathbb{R}^2,+,.)$.
Ce n'est pas le produit scalaire usuel. La preuve, les vecteurs n'ont plus les mêmes normes.
$\overrightarrow{i}$ a pour norme $\sqrt{4.1^2+6.1.0+5.0^2}$ ce qui fait 2.
$\overrightarrow{j}$ a pour norme $\sqrt{4.1^2+6.1.0+5.1^2}$ ce qui fait $\sqrt{5}$.
Et ils ne sont plus orthogonaux entre eux... Pourquoi pas.

Dois je vous rappeler que face à un dessin tel que celui ci, vous me dites que les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux entre eux...



.
.
.

Pour aller plus loin.

On peut facilement montrer que toutes les formes bilinéaires sur $(\mathbb{R}^2,+,.)$ sont de la forme $(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Remarque : En effet, si ϕ est une forme bilinéaire, on a
$\phi(x.\overrightarrow{i}+y.\overrightarrow{j},\ x'.\overrightarrow{i}+y'.\overrightarrow{j}) = x.\phi(\overrightarrow{i},\ x'.\overrightarrow{i}+y'.\overrightarrow{j}) + y.\phi(\overrightarrow{j},\ x'.\overrightarrow{i}+y'.\overrightarrow{j})$
par linéarité par rapport au premier vecteur puis
$\phi(x.\overrightarrow{i}+y.\overrightarrow{j},\ x'.\overrightarrow{i}+y'.\overrightarrow{j}) = x.x'.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i}) + x.y'.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}) + y.x'.\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i}) + y.y'\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j})$
Il me reste à vous convaincre que $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ de par son format donne $a.x.x'+b.x.y'+c.x'.y+d.y.y'$ qui est la forme attendue.

Mieux encore $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i}) & \phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}) \\ \phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i}) & \phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j}) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Indiquez alors quelles propriétés sont acquises suivant le choix de la matrice

	symétrique	positive	défini-positive
$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$			

Autre classique.

Montrez que $(A,C) \longmapsto Tr({}^tA.C)$ est un produit scalaire sur $(M_{n,k}(\mathbb{R}),+,.)$. [a]

a. appelé « produit scalaire de Schur » dans certains ouvrages

Pour « **forme** », on fait un schéma avec les formats des matrices : ${}^tA$ a n colonnes et k lignes
C a n lignes et k colonnes
${}^tA.C$ a k colonnes et k lignes
sa trace existe

Précis : On écrit même des formules pour les termes généraux :
${}^tA$ a pour terme général $\alpha_i^j = a_j^i$
C a pour terme général c_j^k.
Le produit ${}^tA.C$ a pour terme général $\sum_j \alpha_i^j.c_j^k$.
La produit ${}^tA.C$ a pour termes diagonaux $\sum_j \alpha_i^j.c_j^i$
Le produit ${}^tA.C$ a pour trace $\sum_i \sum_j \alpha_i^j.c_j^i$.
On trouve finalement $\sum_i \sum_j a_j^i.c_j^i$.

La **symétrie** repose sur $Tr({}^tM) = Tr(M)$ appliqué à $M = {}^t A.C$.
La **bilinéarité** est acquise par simple calcul sous la forme $Tr({}^tA.(\beta.B+\gamma.C))$ sans redescendre jusqu'aux coefficients.

La **positivité** se contente de dire »si on prend $A = C$, on a la somme $\sum_i \sum_j (a_j^i)^2$.

Et si cette somme est nulle, c'est que tous ses termes sont nuls. Et ce sont tous les coefficients de la matrice.

On a donc un produit scalaire sur $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ qui va nous permettre de mesurer la « norme » d'une matrice, et de tester la colinéarité ou au contraire l'orthogonalité de matrices... Dans un premier temps, ça semble étrange.
Mais j'ai quand même un truc simple à vous dire :

Pour ce produit scalaire sur $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$, les matrices symétriques sont orthogonales aux matrices antisymétriques.

Preuve : Calculez le produit scalaire de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$ en calculant la trace de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}.V$ et généralisez.
Non ! Ne généralisez pas. Soyez plus simples.
Si S est symétrique et A antisymétrique, alors on a $\phi(S,\ A) = Tr({}^tS.A) = Tr(S.A)$ car S est symétrique.
Mais on a aussi $\phi(A,\ S) = Tr({}^tA.S) = Tr(-A.S) = -Tr(A.S) = Tr(S.A)$.
Or, $\phi(A,\ S) = \phi(S,\ A)$.
En mettant bout à bout : $\phi(A, S) = -\phi(A, S)$ puis $\phi(A, S) = 0$.

Et quelle est la norme des matrices de la base canonique.
Montrez que toute matrice de trace nulle est orthogonale à la matrice I_n.

Remarque : Un collègue de Spé se plaignait parfois auprès de moi « tes élèves, quand dans un devoir ils croisent le produit scalaire $(A, C) \longmapsto Tr({}^tA.C)$, ils perdent du temps ».
J'étais quand même heureux de voir que je ne leur avais pas menti : on croise ce produit scalaire dans plusieurs sujets de concours
J'étais quand même heureux de voir qu'ils se débrouillaient quand même bien sur ces questions et avaient les points.

Mais ensuite, pour un concours comme Mines Ponts ou centrale (et plus si affinités), le correcteur attend la rédaction suivante :
« après calcul sur les coefficients, on trouve , c'est donc le produit scalaire canonique sur $(\mathbb{R}^{n.k}, +, .)$ ».

Je m'explique en taille 3 sur 3.
Vous partez de $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}$ et la même avec des c_i^k.

Vous créez deux vecteurs de taille 9 : $\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_3^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_3^3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 \\ c_1^2 \\ \vdots \\ c_3^3 \end{pmatrix}$

Vous calculez leur produit scalaire usuel $a_1^1.c_1^1 + a_1^2.c_1^2 + \ldots + a_3^3.c_3^3$.

Troisième exemple.

$(E, +, .)$ est l'espace des application continues $2.\pi.-$périodiques. Montrez que $(f,\ g) \longmapsto \frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} f(t).g(t).dt$ est un produit scalaire.

L'existence fait appel au seul mot clef « continuité ».
La symétrie utilise la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$.
La bilinéarité utilise la linéarité de l'intégrale et la distributivité de la multiplication sur l'addition.
La positivité a juste besoin de dire « fonction carré positive, et bornes dans le bon sens ».
Et si maintenant on prend f et suppose $\int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2.dt = 0$?
Avec le mot clef « continuité », on obtient que f est nulle en tout point de $[-\pi,\ \pi]$ (par l'absurde ou preuve

déjà rédigée plus haut, à maitriser pour les concours) ; mais alors par périodicité, f est nulle partout.[12]

Maintenant, il y a des choses à observer :
•Toute application paire est orthogonale à toute application impaire.
Oui, par orthogonale à, j'entends $\phi(f,\ g) = 0$.
Après, je ne dis pas que ça se voit sur le graphe des fonctions, ça devient une propriété non visuelle pour laquelle on ale support visuel de $(\mathbb{R}^3, = +, .)$ mais dans lequel on bascule l'exposant 3 en ∞...

• Chaque $\theta \longmapsto \cos(p.\theta)$ est orthogonale à chaque $\theta \longmapsto \cos(q.\theta)$ (p et q entiers distincts)

• Chaque $\theta \longmapsto \sin(p.\theta)$ est orthogonale à chaque $\theta \longmapsto \sin(q.\theta)$ (p et q entiers distincts).

Il suffit de savoir calculer des $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(p.\theta).\cos(q.\theta).d\theta$ en linéarisant.[13]

Après, on peut se poser des questions « quelle est la fonction du type $a.\cos(t) + b.\sin(t)$ qui fait l'angle le plus petit avec une fonction donnée à l'avance »...
La formule vous semble flou, et étranges... c'est normal.

Une remarque en passant, mais on est déjà passé dessus depuis longtemps.
Quand on exploite la bilinéarité, c'est comme si on utilisait de la distributivité :

$$\boxed{\phi(\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b},\ \gamma.\overrightarrow{c} + \delta.\overrightarrow{d}) = \ldots = \alpha.\gamma.\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) + \alpha.\delta.\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}) + \beta.\gamma.\phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + \beta.\delta.\phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{d})}$$

Et plus généralement :

$$\boxed{\phi\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\overrightarrow{e_i},\ \sum_{i=1}^{n} \gamma_i.\overrightarrow{e_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_i.\gamma_k.\phi(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_k})}$$

en sachant que l'écriture $\phi\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\overrightarrow{e_i},\ \sum_{i=1}^{n} \gamma_i.\overrightarrow{e_i}\Big)$ est la porte ouverte aux pires bêtises...

Bientôt : Que va donner cette formule pour des vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ tous de norme 1 et tous deux à deux orthogonaux ?

Et aussi pour un vecteur face à lui même

$$\boxed{\phi(\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b},\ \alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b}) = \alpha^2.\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) + 2.\alpha.\beta.\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + \beta^2.\phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b})}$$

en profitant aussi de la symétrie.

Remarque : Et $\phi\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\overrightarrow{e_i},\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\overrightarrow{e_i}\Big)$, ça donne quoi ?

2°) Inégalités, égalités, norme.

L'inégalité fondamentale à démontrer est ici celle de Cauchy-Schwarz.

$$\boxed{\text{Pour tout produit scalaire } \phi \text{ sur } (E, +, .), \text{ on a } \Big(\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})\Big)^2 \leqslant \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) \times \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}) \text{ pour tout couple } (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}$$

Remarque : *J'aurais pu m'épargner cette année quatre ou cinq démonstrations, faire celle ci une fois pour toutes, et vous dire ensuite « on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour tel produit scalaire sur tel espace ».*
On la reformule $\Big(\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})\Big)^2 \leqslant ||\overrightarrow{a}||^2 \times ||\overrightarrow{b}||^2$ *en commençant à parler de la norme associée.*
Et aussi $|\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})| \leqslant ||\overrightarrow{a}||^2 \times ||\overrightarrow{b}||^2$.
Le produit scalaire des deux vecteurs est plus petit que le produit de leurs normes.

La preuve est toujours la même, et toujours aussi belle.
On se donne $\overrightarrow{a}$et $\overrightarrow{b}$.
Par positivité du produit scalaire, chaque $\phi(\lambda.\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b},\ \lambda.\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$ est positif.

12. gagnez des points aux concours sur les élèves qui n'ont pas assez de recul et se satisfont de « f est nulle en tout point de $[-\pi,\ \pi]$ », il faut quand même cet argument de périodicité pour dire « donc nulle partout » ; et c'est le grand défaut des élèves trop « gentillets » de ne pas se rendre compte qu'ils s'arrêtent au tiers du chemin juste parce qu'ils ont prouvé un truc... on n'est plus au collège, vous devez bâtir des raisonnements et pas juste résoudre des exercices
13. linéariser, c'est transformer un produit de lignes trigonométriques en somme

Par bilinéarité, chaque $\lambda^2.\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) + \lambda.\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + \lambda.\phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}) + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b})$ est positif.
Par symétrie, chaque $\lambda^2.\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) + 2.\lambda.\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b})$.
Ce trinôme du second degré reste donc de signe constant positif.
Son discriminant est donc négatif ou nul. Et c'est ça : $(2.\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}))^2 - 4.\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}).\phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}) \leqslant 0$.

Remarque : On note qu'on a presque tout utilisé du produit scalaire :
positivité, bilinéarité, symétrie.
Il manque défini-positive ? C'est la suite.

Il y a égalité de $(\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}))^2$ et $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}).\phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b})$ si et seulement si le trinôme a un discriminant nul.
ceci revient à dire que le trinôme admet une racine.
Il existe λ_0 vérifiant $\phi(\lambda_0.\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b},\ \lambda_0.\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$.
ceci force $\lambda_0.\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ à être nul.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz devient une égalité si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires..

A quoi va-t-elle servir,
à part à montrer des $(Tr({}^tA.B))^2 \leqslant Tr({}^tA.A).Tr({}^tB.B)$ qui donnent par exemple $Tr(A))^2 \leqslant n.Tr({}^tA.A)$.
$\Big(\int_a^b f(t).g(t).dt\Big)^2 \leqslant \int_a^b (f(t))^2.dt.\int_a^b (g(t))^2.dt$ qui donnent le principe d'incertitude d'Heisenberg
Elle sert à une chose géniale : mesurer des $\phi-$angles.

Je m'explique. Si on donne ϕ, forme bilinéaire symétrique défini positive, on peut mesurer
- des produits scalaires $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$
- des $\phi-$normes : $||\overrightarrow{a}||_\phi = \sqrt{\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})}$
- des $\phi-$angles : $\theta = Arccos\Big(\dfrac{\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{||\overrightarrow{a}||_\phi.||\overrightarrow{b}||_\phi}\Big)$

Qu'est ce qui nous aurait empêché de le faire ?
- Que $\dfrac{\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{||\overrightarrow{a}||_\phi.||\overrightarrow{b}||_\phi}$ ne soit pas entre -1 et 1 [14], et justement, Cauchy et Schwarz nous disent qu'il y est.
- Que cela manque de cohérence ?

Pour que $Arccos(quotient)$ vaille 0, il faut et il suffit que $\dfrac{\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{||\overrightarrow{a}||_\phi.||\overrightarrow{b}||_\phi}$ soit égal à 1. Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz : vecteurs colinéaires de même sens ! Super !
Pour que $Arccos(quotient)$ vaille π, il faut et il suffit que $\dfrac{\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{||\overrightarrow{a}||_\phi.||\overrightarrow{b}||_\phi}$ soit égal à -1. Autre cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz : vecteurs colinéaires de sens opposés ! Génial !

Maintenant, définir l'angle entre $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, et le trouver égal à $Arccos\Big(\dfrac{4}{6}\Big)$, ça peut vous laisser un peu dubitatif.
Mais si je vous dis que la matrice symétrique qui fait le plus petit angle avec $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, moi je commence à trouver ça joli *(quoique pas évident)*.

Mais dans la formule de Cauchy-Schwarz, je commence à parler de norme d'un vecteur.
On se dit qu'il est naturel de poser $\boxed{||\overrightarrow{a}||_\phi = \sqrt{\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})}}$
Mais ceci a-t-il bien un sens ? ceci définit il bien une norme ? Au sens SPHIE ?

14. impossible de définir $Arccos(-2)$, sauf pour Xcas qui ma répond fort justement $i.\ln(2)$

Existence de la norme	caractère positif du produit scalaire : $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) \geqslant 0$
Positivité de la norme	
Homogénéité	bilinéarité : $\phi(\alpha.\overrightarrow{a}, \alpha.\overrightarrow{a}) = \alpha^2.\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})$ puis on passe à la racine, avec une belle valeur absolue à ne pas oublier
Séparation	caractère défini-positif du produit scalaire : $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$
Inégalité triangulaire	On se donne $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$, et pour comparer $\|\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}\|\|$ et $\|\|\overrightarrow{a}\|\|+\|\|\overrightarrow{c}\|\|$, comparons leurs carrés : $\|\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}\|\|^2 = \phi(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}) = \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})+\phi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c})+2.\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$ $(\|\|\overrightarrow{a}\|\|+\|\|\overrightarrow{c}\|\|)^2 = \|\|\overrightarrow{a}\|\|^2+\|\|\overrightarrow{c}\|\|^2+2.\|\|\overrightarrow{a}\|\|.\|\|\overrightarrow{c}\|\|$ On retrouve les mêmes termes $\|\|\overrightarrow{a}\|\|^2$ et $\|\|\overrightarrow{c}\|\|^2$. Et sinon $2.\|\|\overrightarrow{a}\|\|.\|\|\overrightarrow{c}\|\|$ l'emporte sur $2.\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$

On a donc établi :

Quand on a un produit scalaire ϕ sur $(E, +, .)$, alors on a une norme sur $(E, +, .)$.

Pour divers exercices, on vous demande de montrer que $\overrightarrow{a} \longmapsto$ *un truc* est une norme sur un espace vectoriel.
Il vous suffit en général de prouver qu'elle est issue d'un produit scalaire à trouver par vous même.

espace	norme	produit scalaire
$C^0([0,\ 1], \mathbb{R})$	$f \longmapsto \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2.dt}$	$(f,\ g) \longmapsto \int_0^1 f(t).g(t).dt$
$M_n(\mathbb{R})$	$M \longmapsto \sqrt{Tr({}^tM.M)}$	$(A,\ C)Tr({}^tA.C)$
$(\mathbb{R}^2, +, .)$	$(x,\ y) \longmapsto \sqrt{2.x^2+6.x.y+7.y^2}$	$\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$
$(\mathbb{R}^3, +, .)$	$(x,\ y) \longmapsto \sqrt{x^2+4.x.y+6.x.z+13.y^2+10.z^2+12.y.z}$	$\begin{pmatrix} a \\ a' \\ a" \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ c' \\ c" \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & a' & a" \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 13 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} .$

Dans la colonne norme, on a deux normes classiques, puis des normes un peu étranges.
Pour chacune, vous sentez peut être que l'inégalité triangulaire risque d'être longue à établir, avec des racines, des carrés...
C'est pourquoi je vous recommande plutôt de les attaquer par la colonne de gauche, de montrer que vous avez bien des formes bilinéaires symétriques positives, défini positives. Et Cauchy et Schwarz feront le reste...

Remarque : Enfin, il faudra quand même que vous prouviez que $\sqrt{\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 13 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$ donne bien $\sqrt{x^2+4.x.y+6.x.z+13.y^2+10.z^2+12.y.z}$.

Mais arrêtons nous sur $\begin{pmatrix} a \\ a' \\ a" \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ c' \\ c" \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & a' & a" \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 13 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c \\ c' \\ c" \end{pmatrix}$ justement. Pour nous entrainer.
Forme : formats compatibles.
Bilinéaire : ${}^tU.S.(a.V+b.W) = a.{}^tU.S.V + b.{}^tU.S.W$ par distributivité du produit matriciel.
Symétrique : ${}^tU.S.V$ et ${}^tV.S.Y$sont égaux car on passe de l'un à l'autre en transposant le réel[15]
Positive : $x^2+4.x.y+6.x.z+13.y^2+10.z^2+12.y.z = (x+2.y+3.z)^2-4.y^2-9.z^2-12.y.z+13.y^2+10.z^2+12.y.z$
$x^2+4.x.y+6.x.z+13.y^2+10.z^2+12.y.z = (x+2.y+3.z)^2+9.y^2+z^2$
c'est une somme de carrés de réels
Défini positive : si la somme de carrés est nulle, c'est que....

Après, avec ce produit scalaire, on a des déceptions...
Il ne mesure rien comme on a l'habitude : $\overrightarrow{i}$ a pour norme 1
$\overrightarrow{j}$ a pour norme $\sqrt{13}$
$\overrightarrow{k}$ a pour norme $\sqrt{10}$
l'angle entre $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ est $Arcsin\Big(\dfrac{2}{1.\sqrt{13}}\Big)$
$\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ a pour norme $\sqrt{18}$ (faites le calcul)

15. ${}^tU.S.V$ est un réel, matrice 1 sur & ; il est donc égal à sa transposée ; sa transposée est ${}^tV.{}^tS.U$; comme S est symétrique, c'est fini

mais il reste cohérent : $||\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}||^2=||\overrightarrow{i}||^2+||\overrightarrow{i}||^2+2.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$
S'ils avaient été orthogonaux, ça se serait appelé théorème de Pythagore. Comme ils ne le sont pas, ça s'appelle Al Kashi.
On est dans une géométrie différente... Les angles ne sont plus les mêmes, la règle se déforme quand vous l'inclinez...

Cthulhu : Pour rendre angoissant son univers, Lovecrft n'hésitait pas à qualifier les géométries des pièces où se trouvaisnet ses personnages de non euclidiennes ».
Je n'ai pa srrtrouvé le passage où il parle d'angles dont la somme dépasser 180 degrés.

"Ignorant tout du futurisme, Johansen atteint quelque chose qui y ressemble fort lorsqu'il parle de la cité. [....] Il avait précisé que la géométrie du lieu de rêve qu'il avait aperçu était anormale, non euclidienne, et qu'elle évoquait de façon abominable des sphères et des dimensions distinctes des nôtres. [...] Le soleil même paraissait déformé dans le ciel lorsqu'on l'apercevait à travers les miasmes polarisants qui sourdait de cette perversion trempée de mer, et la menace dénaturée, l'attente angoissante se tapissait en ricanant dans ces angles follement insaisissables de roches taillées."
Howard Phillip Lovecraft « La Folie venue de la mer, chapitre 3 de la nouvelle L'Appel de Cthulhu »
Ne me dites pas qu'à votre âge vous n'avez pas lu des livres ou nouvelles fantastiques et/ou flippantes de H-P.Lovecraft !

Pourtant, si, la géométrie ainsi définie est quand même qualifiée d'euclidienne. Car les longueurs et angles se mesurent par un produit scalaire.
Quand on travaille avec un produit scalaire, la somme des angles d'un triangle vaut π.

Il y a effectivement des normes qui ne sont pas issues d'un produit scalaire. On les qualifie de normes non euclidiennes.
retrouvez dans les normes ci dessous celles qui sont issues d'un produit scalaire de manière visible (trouvez le produit scalaire), et celles qui ne le sont pas (sans preuve à ce stade du cours).

sur $\mathbb{R}^2$			
$\sqrt{x^2+y^2}$	$Max(\|x\|,\|y\|)$	$\sqrt{4.x^2+6.x.y+7.y^2}$	$\|x\|+\|2.y\|$
sur $C^0([0,\ 1],\mathbb{R})$			
$\sqrt{\int_0^1 (f(t))^2.dt}$	$Sup(\|f(t)\|\ \|\ t\in[0,\ 1])$	$\sqrt{\int_0^1 t.(f(t))^2.dt}$	$\int_0^1 \|f(t)\|.dt$
sur $M_n(\mathbb{R})$			
$\sqrt{Tr({}^tM.M)}$	$Sup(\sum_{j=1}^n \|a_i^j\|\ \|\ j\leq n)$	$\sqrt{Tr({}^tM.{}^tP.P.M)}$	$\sum_{i,j}\|a_i^j\|$

Les normes issues d'un produit scalaire sont quand même plus riches, elles permettent de faire plus de choses.

Du produit scalaire à la norme et vice versa.
Il faut savoir définir la norme à partir du produit scalaire, et vice versa.
Un sens est évident et c'est la définition :
si vous connaissez ϕ pour tous les couples de vecteurs, vous connaissez la norme de chaque vecteur : $||\overrightarrow{a}||=\sqrt{\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{a})}$.

Mais réciproquement, si vous connaissez la norme de tous les vecteurs, pouvez vous retrouver les produits scalaires des couples de vecteurs ?

Remarque : Si vous avez juste une règle, mais que vous pouvez mesurer toutes les longueurs, pouvez vous reconstruire les projections, les angles...
Avec un double décimètre, pouvez vous mesurer les angles d'un triangle ?

On part des formules dé développement et symétrie du produit scalaire :
$\phi(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{a}+\overrightarrow{c})=\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{a})+\phi(\overrightarrow{c},\overrightarrow{c})+2.\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})$
$\phi(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{a}-\overrightarrow{c})=\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{a})+\phi(\overrightarrow{c},\overrightarrow{c})-2.\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})$

Je le redis : $\boxed{\begin{array}{l}||\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}||^2=||\overrightarrow{a}||^2+||\overrightarrow{c}||^2+2.\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})\\ ||\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}||^2=||\overrightarrow{a}||^2+||\overrightarrow{c}||^2-2.\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})\end{array}}$

Et je les exploite : $\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c}) = \dfrac{||\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}||^2 - ||\overrightarrow{a}||^2 - ||\overrightarrow{c}||^2}{2}$

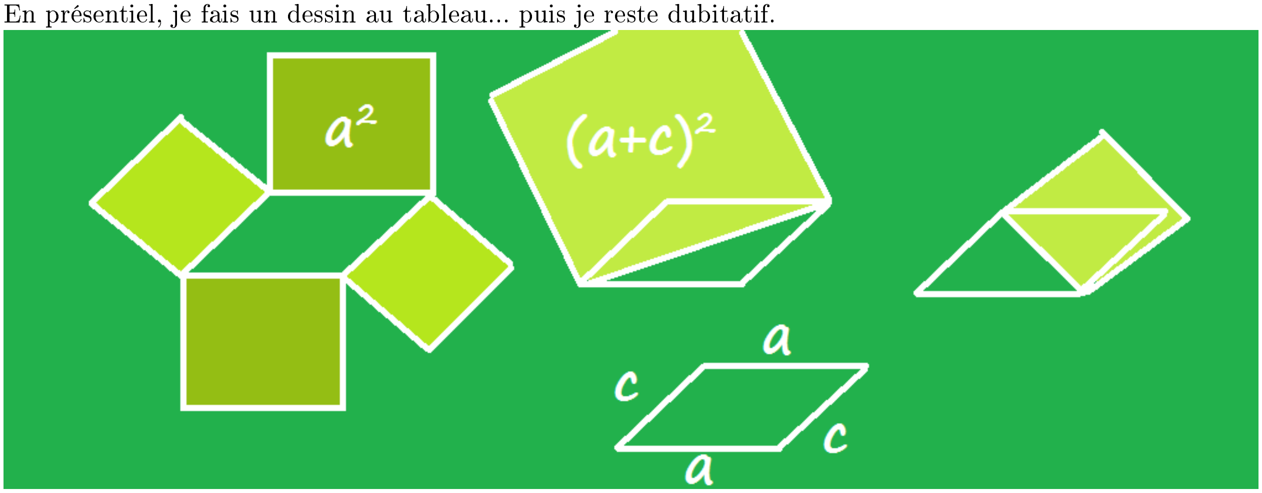
$$\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c}) = \frac{||\overrightarrow{a}||^2 + ||\overrightarrow{c}||^2 - ||\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}||^2}{2}$$

$$\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c}) = \frac{||\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}||^2 - ||\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}||^2}{4}$$

On les appelle formules de polarisation.

Remarque : On pourrait aussi bien les appeler formules d'Ale Kashi. Si $\overrightarrow{a}$et $\overrightarrow{c}$ sont les deux côtés d'un triangle, $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}$est le troisième côté, et on n'est pas loin de $\dfrac{BC^2 - AB^2 - AC^2}{2} = AB.AC.\cos(angle)$...
Sinon, ces formules ont une cohérence, le produit scalaire est comme un produit de longueurs. dans le membre de droite, on a des carrés de normes...

Je vous en offre une de plus, qui fait disparaitre les produits scalaires : $||\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}||^2 + ||\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}||^2 = 2.||\overrightarrow{a}||^2 + 2.||\overrightarrow{c}||^2$
Il suffit de développer le premier membre et de voir partir les $\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})$ tantôt avec signe plus tantôt avec signe moins...
Celle ci porte le nom d'identité du parallélogramme.
On peut se dire que $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ sont les côtés, tandis que $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}$et $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}$sont les diagonales...
Ensuite, ce qui me turlupine est le fait que le programme officiel demande de vous présenter l'interprétation géométrique...
En présentiel, je fais un dessin au tableau... puis je reste dubitatif.



Disons que si. Il y a un exercice un peu long mais joli.
Si la norme est issue d'un produit scalaire, alors elle vérifie l'identité du parallélogramme.
Mais on a la réciproque. Si la norme vérifie l'identité du parallélogramme, alors elle est issue d'un produit scalaire qu'on reconstruit par les identités de polarisation.
On suppose que l'identité du parallélogramme est vraie pour tout couple $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})$.
On définit $\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{c}) = \dfrac{||\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}||^2 - ||\overrightarrow{a}||^2 - ||\overrightarrow{a}||^2}{2}$. Il reste juste à vérifier que cette chose est bien alors une forme bilinéaire, symétrique, positive, défini positive. Juste en utilisant les propriétés de la norme, et l'identité du parallélogramme.

A première lecture, vous pouvez sauter ce qui est ici donc un exercice :

Remarque : Soit N une norme sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel $(E,+,.)$ *(application positive, séparante, homogène, triangulairement inégalitaire)*. On suppose de plus qu'elle vérifie l'identité du parallélogramme : $N(u+v)^2+N(u-v)^2=2.(N(u)^2+N(v)^2)$ pour tout couple de vecteurs $(u,\ v)$.

a- Montrez que c'est le cas dans les cas suivants :

$(M_n(\mathbb{R}),+,.)$	$(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,.)$	$(\mathbb{R}^2,+,.)$
$\sqrt{\sum_{i,k}(a_i^k)^2}$	$\sqrt{\int_0^1 f(t)^2.t.dt}$	$\sqrt{x^2+4.x.y+5.y^2}$
$(\mathbb{R}^3,+,.)$	$(\mathbb{R}_3[X],+,.)$	
$\sqrt{x^2+4.x.y+5.y^2+z^2}$	$\sqrt{P(0)^2+P(1)^2+P(2)^2+P(3)^2+P(4)^2}$	

b- Montrez que ce n'est pas le cas pour

$(M_n(\mathbb{R}),+,.)$	$(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,.)$	$(\mathbb{R}^2,+,.)$
$Max\Big(\sum_{k=1}^n \lvert a_i^k\ \rvert \mid 1\leqslant i\leqslant n\Big)$	$Max(\lvert f(t)\rvert \mid t\in[-1,\ 1])$	$Max(\lvert x+y\rvert,\ \lvert x-y\rvert)$
$(\mathbb{R}^3,+,.)$	$(\mathbb{R}_2[X],+,.)$	
$\lvert y+z\rvert+\lvert x+z\rvert+\lvert x+y\rvert$	$Max(\lvert P(0)\rvert,\ \lvert P'(0)\rvert,\ \lvert P"(0)\rvert)$	

même si ce sont des normes *(si ça vous gave, passez à la suite)*

On veut montrer que sous l'hypothèse "IDENTITÉ DU PARALLÉLOGRAMME", N est une norme euclidienne, issue d'un produit scalaire.

c- On pose donc "tout naturellement" : $\phi(u,\ v)=\dfrac{N(u+v)^2-N(u-v)^2}{4}$ pour tout couple de vecteurs. Vérifiez alors $\phi(u,\ v)=\dfrac{N(u+v)^2-N(u)^2-N(v)^2}{2}$.

d- Montrez que ϕ est une forme symétrique, positive, défini positive.

e- Montrez pour tout triplet $(u,\ v,\ w)$: $\phi(u+w,\ v)+\phi(u-w,\ v)=2.\phi(u,\ v)$ *(indication : dans l'hypothèse de l'identité du parallélogramme, remplacez u par $u+w$ et $u-w$)*.

f- Déduisez $\phi(2.u,\ v)=2.\phi(u,\ v)$.

g- Déduisez aussi : $\phi(u+w,\ v)=\phi(u,\ v)+\phi(w,\ v)$.

h- Montrez pour tout n de $\mathbb{N}$: $\phi(n.u,\ v)=n.\phi(u,\ v)$.

i- Montrez pour tout n de $\mathbb{Z}$: $\phi(n.u,\ v)=n.\phi(u,\ v)$.

j- Montrez pour tout r de $\mathbb{Q}$: $\phi(r.u,\ v)=r.\phi(u,\ v)$.

k- Montrez pour tout t de $\mathbb{R}$: $\phi(t.u,\ v)=t.\phi(u,\ v)$.

l- Déduisez que ϕ est un produit scalaire, puis que N est bien la norme qui en est issue.

Bref, une norme est issue d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme. C'est ce qui va nous permettre de rejeter des normes comme $Sup(|f(t)|\ |\ t\in[0,\ 1])$, $|x|+|y|$ ou $Sup(\sum_{i=1}^n |a_i^j|\ |\ j\leq n\}$.

Remarque : Essayez les formules de polarisation avec une norme telle que $(x,y)\longmapsto Sup(|x|,|y|)$, vous obtenez un truc atroce.

Essayez les formules de polarisation avec une norme telle que $(x,y)\longmapsto 7.x^2+8.x.y+9.y^2$, vous obtenez un truc très cohérent.

Les x^2 donnent des $x.x'$. Essayez : $\dfrac{(x+x')^2-x^{\cdot 2}-x^2}{2}$.

Les y^2 donnent des $y.y'$.

Les $x.y$ donnent $\dfrac{x.y'+x'.y}{2}$. Essayez : $\dfrac{(x+x').(y+y')-x.y-x'.y'}{2}$.

Après, je reconnais que l'identité du parallélogramme intervient peu aux concours.

Dernier truc idiot sur le norme, mais il aut quand même que je le dise :

Si $\overrightarrow{a}$ est un vecteur non nul, alors $\dfrac{\overrightarrow{a}}{||\overrightarrow{a}||_\phi}$ est un vecteur normé.

Je sais, quatre cingt quinze pour cent de vous disent »beh oui, c'est évident ». Qui est le cinq pour cent de quarante huit qui écrit « je dois apprendre ça par coeur ».

Je me permettrai ensuite de vous demander de comprendre quelle propriété de la norme et du produit scalaire vous sert pour calà.

3°) Orthogonalité, bases orthonormées.

Une fois que l'espace vectoriel $(E,+,.)$ est doté d'un produit scalaire, on peut mesurer les angles entre les vecteurs : $Arccos\Big(\dfrac{\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})}{||\overrightarrow{a}||.||\overrightarrow{c}||}\Big)$.

Et sans aller jusque là, on peut se contenter de regarder si deux vecteurs sont orthogonaux.
$\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ sont orthogonaux pour φ si et seulement si $\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})=0$ (pas de flèche, c'est un réel).

Élémentaire : Le vecteur nul est orthogonal à tous les autres.
C'est le seul vecteur orthogonal à tous les autres (testez le contre lui même, utilisez le caractère défini positif).
C'est le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs d'une base (passer de « à tous les vecteurs d'une base à « à tous les vecteurs » par linéarité et appliquer le résultat précédent).
La relation « être orthogonal à » est symétrique
n'est pas vraiment réflexive
n'est pas transitive (déjà dans le plan...)
Est il possible que $\overrightarrow{a}$et $\overrightarrow{c}$ soient colonéaires et orthogonaux entre eux ?

Tout aussi élémentaire, mais important mine de rien.
On se donne un vecteur $\overrightarrow{a}$ non nul, alors $\{\overrightarrow{u}\mid\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{u})=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$ (l'orthogonal de $\overrightarrow{a}$à voir dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$ comme un plan orthogonal à $\overrightarrow{a}$).
Vous vous apprêtez à le faire par « stable par combinaisons... ».
Non. On le fait par « noyau de $\overrightarrow{u}\longmapsto\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{u})$ ». Cette application est une forme linéaire (et non plus bilinéaire car on a figé un vecteur). Son noyau est l'ensemble cherché. Et comme c'est le noyau d'une application dont l'ensemble image est $\mathbb{R}$, on déduit que ce noyau est de dimension $\dim(E)-1$.

Réciproque : Tout sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$ de dimension $\dim(E)-1$ peut il se mettre sous la forme « les vecteurs orthogonaux à un vecteur non nul » ?
Pare exemple, dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$ le plan d'équation $2.x+y-z=0$ est le plan orthogonal à $2.\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$ pour le produit scalaire usuel.
Mais quel est son vecteur normal pour le produit scalaire $\Big(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\Big)\longmapsto$ $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&4\\3&4&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$.

Attention, l'orthogonalité dépend du produit scalaire choisi...

Notation : En présentiel, j'utilise la notation « orthϕgonal » pour faire marquer que c'est pour ϕ.
Mais je doute que mon correcteur orthographique accepte...

Les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux pour le produit scalaire usuel, celui en $x.x'+y.y'$ (oui : $1.0+0.1=0$).
Mais ils ne le sont plus pour le produit scalaire en $41.x.x'-12.x'.y-12.x.y'+34.y.y'$.
La preuve : $41.1.0-12.0.0-12.1.1+34.0.1=-12$. Ils forment entre eux un angle obtus pour ce produit scalaire.

Autre exemple : $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ sont orthogonaux pour le produit scalaire usuel (calcul : $4.(-3)+3.4=0$).
Mais ils ne le sont pas pour le produit scalaire $41.x.x'-12.x'.y-12.x.y'+34.y.y'$.
la preuve : $\begin{pmatrix}-4 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}41&-12\\-12&34\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}75\\100\end{pmatrix}=0$.
Ah tiens, si ! Cous de chance ?

Exercice : Pouvez vous trouver un couple de vecteurs (non nuls) qui soient orthogonaux à la fois pour le produit scalaire usuel et pour le produit scalaire en $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2&1\\1&5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$?

Digression en passant.
On prend un espace de probabilités (Ω,P), et des variables aléatoires.
On définit alors $\phi(A,B)=E(A.B)-E(A).E(B)$ (espérance du produit moins produit des espérances).
Pouvez vous prouver que c'est une forme bilinéaire symétrique, positive ?
Pour positive, vous devrez montrer $E(A^2)-(E(A))^2\geqslant 0$. C'est la positivité de la variance. Elle vient de $E((A-\mu)^2)$ avec $\mu=E(A)$.

Ça ne fait pas un produit scalaire. mais on n'en est pas loin (il manque défini positif)..
Le problème est que les variables aléatoires constantes sont orthogonales à toutes les autres. Et ont une « presque norme » nulle.
Mais ensuite, des variables aléatoires indépendantes l'une de l'autre sont orthogonales pour ce « presque produit scalaire ».
Il y a des idées là derrière.

Mais revenons plus terre à terre.

Montrez que les matrices de la base canonique de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ (des 0 partout et un 1 qu'on promène) sont orthogonales entre elles pour le produit scalaire usuel en $Tr({}^tA.C)$.
Montrez que c_p est orthogonal à c_q $(p \neq q)$ pour le produit scalaire $(f, g) \longmapsto \frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} f(t).g(t).dt$.

Je vous fais le second : $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(p.t).\cos(q.t).dt = \frac{1}{2.\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} \cos((p+q).t) + \cos((p-q).t)).dt$.
On intègre avec des $\left[\frac{\sin((p+q).t)}{p+q} + \frac{\sin((p-q).t)}{p-q}\right]_{t=-\pi}^{\pi}$. Comme $p+q$ et $p-q$ sont entiers, les sinus donnent 0.

Question : Que se passe-t-il pour p égal à q ? Qu'est ce qui vous empêche d'intégrer avec des sinus ? Que trouvez vous quand même ?

Quel est l'avantage de cette orthogonalité quand on l'a.
J'en vois trois :
• montrer qu'une famille est libre (et si elle a le bon cardinal, que c'est une base)
• pouvoir décomposer aisément un vecteur sur une base orthonormée
• récupérer la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace juste avec des produits scalaires.

Toute famille de vecteurs deux à deux orthogonaux et non nuls est libre.

Application sans tarder : la famille $(c_0, c_1, \dots c_p, \dots s_1, s_2, \dots s_q, \dots)$ avec mes notations habituelles ($c_n = \theta \longmapsto \cos(n.\theta)$ et $s_n = \theta \longmapsto \cos(n.\theta)$) est libre.
On suppose les $\overrightarrow{u_i}$ deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire φ et non nuls.
On prend des réels α_i et on suppose $\sum_i \alpha_i.\overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{0}$. L'objectif est la nullité des α_i .

Méthode 1 : $0 = \phi(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{0}) = \phi(\overrightarrow{e_1}, \sum_i \alpha_i.\overrightarrow{u_i}) = \sum_i \alpha_i.\phi(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_i}) = \alpha_1.\phi(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1})$ et comme $||\overrightarrow{e_1}||$ est non nulle, α_1 est nul.
On fait de même avec les autres.

Méthode 2 : $0 = \phi(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{0}) = \phi(\sum_i \alpha_i.\overrightarrow{u_i}, \sum_j \alpha_j.\overrightarrow{u_j}) = \sum_{i,j} \alpha_i.\alpha_j \phi(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_j}) = \sum_i (\alpha_1)^2.||\overrightarrow{e_i}||$
Pour que cette somme de réels positifs soit nulle, il faut que chaque réel le soit. Et comme aucun $||\overrightarrow{e}||$ n'est nul, c'est la faute aux α_i.

Avantage de ce théorème :
• on peut prouver que des fonctions forment une famille libre
• si la famille orthogonale (voire orthonormée) a le bon cardinal, elle forme une base de l'espace vectoriel en question.
• sur une base orthonormée, il devient facile de décomposer un vecteur.

Remarque : Pardon ? On est passé d'orthogonale à orthonormée ? Oui, il suffit de renormer les vecteurs de la famille en $\frac{\overrightarrow{u_i}}{||\overrightarrow{u_i}||_\phi}$.

Exemple :

On se donne quatre réels distincts a, b, c et d.
On montre que $(P,Q)\longmapsto P(a).Q(a)+P(b).Q(b)+P(c).Q(c)+P(d).Q(d)$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$.
Ici, le seul point à éclaircir est « défini-positive ».
On prend P, on calcule $(P(a))^2+(P(b))^2+(P(c))^2+(P(d))^2$. C'est un réel positif.
Il est nul si et seulement si P est nul en a, b, c et d, ce qui lui fait trop de racines : il est nul.

On considère alors les trois polynômes
- $Athos(X)=(X-b).(X-c).(X-d)$
- $Porthos(X)=(X-a).(X-c).(X-d)$
- $Aramis(X)=(X-a).(X-b).(X-d)$
- $Dartagnan(X)=(X-a).(X-b).(X-c)$

Ils sont tous dans $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$.
Et ils forment une famille orthogonale pour ce produit scalaire (simple calcul, on somme quatre termes mais à chaque fois un des facteurs est nul).
Ils forment donc une famille libre, et même une base...
Et attendez, ce n'est pas fini.

Pour décomposer un vecteur sur une base orthonormée, il suffit d'effectuer des produits scalaires.
Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs sur une base orthonormée, on effectue des produits.

Soit en effet $(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ une base orthonormée [16] de $(E,+,.,\phi)$ [17] et $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux vecteurs.

On les écrit a priori sur la base $\overrightarrow{a}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k.\overrightarrow{e_k}$ et $\overrightarrow{b}=\sum_{j=1}^{n}\beta_j.\overrightarrow{e_j}$.

On calcule $\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_i})$ en développant par bilinéarité :

$\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_i})=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k.\phi(\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{e_i})$ mais tous les $\phi(\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{e_i})$ sont nuls, sauf un qui vaut 1.

$\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_i})=\alpha_i$

C'est une formule à lire maintenant de droite à gauche [18], elle nous donne les composantes du vecteur sur la base orthonormée.

Sans norme :

Si la famille est juste orthogonale et pas forcément orthonormée, on a $\overrightarrow{a}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_i})}{\phi(\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{e_i})}.\overrightarrow{e_i}$.

Ou même $\overrightarrow{a}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_i})}{||\overrightarrow{e_i}||^2}.\overrightarrow{e_i}$ et $\overrightarrow{a}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_i})}{||\overrightarrow{e_i}||}.\frac{\overrightarrow{e_i}}{||\overrightarrow{e_i}||}$.

C'est dans la dernière que l'on voit le plus de cohérence.

On calcule ensuite $\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})=\sum_{k,j}\alpha_k.\beta_j.\phi(\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{e_j})$.

On a certes n^2 termes, mais il n'en restera que n puisque seuls les cas $k=j$ donnent un terme non nul.

$\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k.\beta_k$

Je vous laisse écrire la formule dans le cas « orthogonale ».
Et dans le cas $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$.
Et je vous laisse remplacer α_k et β_k par leurs valeurs. C'est votre boulot. le mien est de vous donner le nom de cette formule : Parseval.

Parseval		
$\overrightarrow{a}=\sum_{k=1}^{n}\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_k}).\overrightarrow{e_k}$	$\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})=\sum_{k=1}^{n}\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_k}).\phi(\overrightarrow{b},\overrightarrow{e_k})$	$\lVert\overrightarrow{a}\rVert=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_k})\right)^2}$

Elle sera surtout pratique en dimension infinie pour les séries de Fourier, pour connaître les coefficients d'une fonction C^1 $2\pi-$périodique sur la base des c_p et des s_q...

16. collage pour deux à deux orthogonaux et normés, version rapide : $\phi(\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{e_j})=\delta_i^j$ qui vaut 0 sauf pour $i=j$
17. la notation avec les deux lois, et ϕpermet de dire qui est le produit scalaire
18. politiquement, c'est rare les passages de droite à gauche, à part Jean-Luc Romero

Exemple :

Reprenons la base de $(\mathbb{R}_3[X], +, .\phi)$ notée $(Athos, Portos, Aramis, Dartagnan)$ [a]
Les vecteurs ne sont pas normés, normons en un :
$||Athos||^2 = (Athos(a))^2 + (Athos(b))^2 + (Athos(c))^2 + (Athos(d))^2 = \big((a-b).(a-c).(a-d)\big)^2$
Les quatre polynômes sont alors $\dfrac{(X-b).(X-c).(X-d)}{(a-b).(a-c).(a-d)}$ et trois autres du même modèle.
Les polynômes de Lagrange !

Et comment décomposer une fonction ? En effectuant des produits scalaires.
$\phi(P, Athos) = P(a).Athos(a) + P(b).Athos(b) + P(c).Athos(c) + P(d).Athos(d) = P(a)$
On décompose donc $P(X) = P(a).\dfrac{(X-b).(X-c).(X-d)}{(a-b).(a-c).(a-d)} + \ldots + P(d).\dfrac{(X-a).(X-b).(X-c)}{(d-a).(d-b).(d-c)}$.
Vous vous étiez douté que cette décomposition reposait sur une histoire de produit scalaire ?

a. juste parce que j'avais dit trois polynômes alors que j'en définissais quatre

Attention :

Si vous travaillez avec le produit scalaire usuel, la notion se fait avec un point.
Et vous allégez $\overrightarrow{a} = \sum_{k=1}^{n} \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e_i}).\overrightarrow{e_i}$ en $\overrightarrow{a} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_i}$.
Prenez une loupe pour ne pas vous planter : $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_i}$ et non pas $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_i}$.
Il y a un point du produit scalaire vecteur contre vecteur
et l'autre de la loi externe réel fois vecteur.
Je vous recommande de distinguer les statuts : $\overrightarrow{a} = \sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{e_i}) \times \overrightarrow{e_i}$, avec parenthèse et $\times$.
Combien des fois ai-je vu des $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_i}$ terminer en $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{a} \cdot .||\overrightarrow{e_i}||^2$.

Matrices :

La formule $\overrightarrow{a} = \sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{e_i}) \times .\overrightarrow{e_i}$ se lit aussi $\overrightarrow{a} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{e_i} \times (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{e_i})$ même si c'est étrange d'écrire $\overrightarrow{b} \times 4$ à la place de $4.\overrightarrow{b}$.
Mais si l'on est sur l'espace usuel $(\mathbb{R}^n, +, .)$, le produit scalaire se calculer par « colonne qui tombe sur ligne » comme $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
Notre somme prend la forme $\sum_{k=1}^{3} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
On factorise : $\Big(\sum_{k=1}^{3} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\Big) . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
Et $\sum_{k=1}^{3} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ doit bien être en effet la matrice unité si $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base orthonormée.
Testez avec $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ ou même $(\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix})$.

Gros avantage : sur une base orthonormée, on retrouve les formules dont on a l'habitude.
C'est comme si vous calculiez $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = x.x' + y.y' + z.z'$ et $||\overrightarrow{a}||^2 = x^2 + y^2 + z^2$ en écrivant $\overrightarrow{a} = x.\overrightarrow{e_1} + y.\overrightarrow{e_2} + z.\overrightarrow{e_3}$.
On va en reparler.

3^{bis}°) Gram.

Et si la base n'est pas orthonormée ?
Là, il faut faut utiliser la matrice de Gram [19].

19. mathématicien danois dont le nom me permet de faire des calembours

Reprenons là où nous en étions tout à l'heure :
$\overrightarrow{a} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.\overrightarrow{\varepsilon_k}$ et $\overrightarrow{b} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j.\overrightarrow{\varepsilon_j}$ où $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots \overrightarrow{\varepsilon_n})$ est une base quelconque de $(E, +, ., \phi)$ notée β.
On calcule $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \sum_{j,k} \alpha_k.\beta_j.\phi(\overrightarrow{\varepsilon_k}, \overrightarrow{\varepsilon_j})$.
Et là, il y a n^2 termes, dont plus aucun ne se targue de valoir 0 ou 1.
Au mieux, on peut isoler les $\alpha_i.\beta_i.||\overrightarrow{\varepsilon_i}||^2$ et regrouper les $\alpha_k.\beta_j$ avec $\alpha_j.\beta_k$. Mais à quoi bon.
Non, il y a mieux.
On regroupe les termes et on reconnait le développement du produit matriciel

$$\boxed{\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}) & \dots & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_n}) \\ \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_2}) & \dots & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(\overrightarrow{\varepsilon_n}, \overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_n}, \overrightarrow{\varepsilon_2}) & \dots & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_n}, \overrightarrow{\varepsilon_n}) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}}$$

Dois je vous demander de vérifier avec des sigma de sigma ? Dois je déjà vous dire de vérifier que le résultat est bien un réel ?
Dois je vous inviter à juste regarder et comparer $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}) \\ \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_2}) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ avec
$\phi\Big(\alpha_1.\overrightarrow{\varepsilon_1} + \alpha_é.\overrightarrow{\varepsilon_2},\ \beta_1.\overrightarrow{\varepsilon_1} + \beta_2.\overrightarrow{\varepsilon_2}\Big)$?
Sincèrement, c'est ce que je préfère vous inviter à faire.

La formule encadrée dit $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = {}^t A.S.B$ avec A et B les vecteurs des composantes de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sur la base β.

Remarque : C'est comme ces $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et autres que j'ai définis pour avoir des produits scalaires inhabituels sur $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
Mais finalement, ce que dit notre calcul, c'est que tous les produits scalaires sur $(\mathbb{R}^n, +, ..)$ sont de cette forme ${}^t A.S.B$.

D'ailleurs, si je prends par exemple la forme bilinéaire symétrique positive défini-positive $\phi = (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on constate $\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}) = 5$, $\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = 2$ et $\phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}) = 7$...

Que peut on dire de la matrice S ? Qu'elle contient toutes les information sur ϕ.

En effet : En effet, si vous connaissez ϕ pour tous les couples $(\overrightarrow{\varepsilon_k}, \overrightarrow{\varepsilon_j})$ de la base, alors on connaît ϕ partout.
C'est le b+a=ba et b+i=bi de la (bi)linéarité.

On l'appelle donc « matrice de Gram », et pour moi c'est l'objet le plus utile en algèbre bilinéaire.
Le programme officiel la glisse sous le tapis.
Mais des sujets de concours la font revenir, y compris en probas. Ou même de vieux sujets d'oral que certains examinateurs continuent à poser avec ce qu'on appelle S^+, ensemble des matrices symétriques à spectre positif.

Regardez bien $G = \begin{pmatrix} \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}) & \dots & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_n}) \\ \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_2}) & \dots & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(\overrightarrow{\varepsilon_n}, \overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_n}, \overrightarrow{\varepsilon_2}) & \dots & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_n}, \overrightarrow{\varepsilon_n}) \end{pmatrix}$ [20] ou $\begin{pmatrix} \phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}) & \phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) & \phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) \\ \phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}) & \phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}) & \phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}) \\ \phi(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}) & \phi(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}) & \phi(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}) \end{pmatrix}$ et dites moi tout ce qui vous passe par la tête.... Non, pas toi Marius, merci, j'ai trop peur☋... Ni Mathieu qui va nous montrer qu'on peut l'écrire ${}^t T.T$. Ni Julien, mon fils spirituel qui va essayer de voir si elle reste pareille si on mélange l'ordre des termes.

Cette matrice est **symétrique**. Car le produit scalaire est symétrique.

20. à partir de maintenant, je l'appelle G et pas S, en hommage à Gram, même si Gram est rien

Remarque : Les produits scalaires vivraient donc dans un espace de dimension $\dfrac{n.(n+1)}{2}$ (choisir la moitié supérieure de la matrice).
Mais profitions en pour dire que les produits scalaires ne forment pas un espace vectoriel.
La somme de deux formes bilinéaires symétriques positives défini positive l'est elle encore ?
Peut-être. Mais l'opposée...
Bon, l'an prochain, dans le cadre de certains sujets de concours, vous parlerez peut être juste de formes bilinéaires symétriques. sans positivité. Ou même en physique. Vous connaissez et vous avez aimé $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, vous connaitrez et apprendrez à aimer $\sqrt{x^2+y^2+z^2-C^2.t^2}$ [a] et la contrainte $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \leqslant C.t$ car on ne se déplace pas plus vite que la lumière...

[a]. avec c = vitesse de la lumière par homogénéité

Ses termes diagonaux sont positifs. Strictement, sinon il y a le vecteur nul dans la base, et ça, c'est très surprenant.

Sa trace est donc positive.

Ses **mineurs de taille** 2 sont positifs. Les petits déterminants de taille 2 centrés sur la diagonale.
Vous donnez un nom au résultat $\begin{vmatrix} \phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i}) & \phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}) \\ \phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i}) & \phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j}) \end{vmatrix} > 0$. Oui, strict car sinon... les vecteurs seraient colinéaires...

Pour information, il en sera de même des mineurs de taille supérieure, jusqu'au déterminant lui même.
Mais ça, on y viendra plus tard.

Quand même : Mais si on admet que G s'écrit ${}^tT.T$, ça devient facile, non ?

Ses valeurs propres sont positives.

Cadeau : Même si ce n'est pas au programme, je vous le fais.
Soit $\overrightarrow{b}$ un vecteur propre de G de valeur propre λ.
On a alors $G.B = \lambda.B$.
On calcule alors par hasard ${}^tB.G.B$. Ceci vaut donc ${}^tB.\lambda.B$ c'est à dire $\lambda.{}^tB.B$ et même $\lambda.\sum_{k=1}^{n}(\beta_k)^2$.
Mais comme c'est ${}^tB.G.B$, c'est à dire $\phi(B,B)$ (carré de la $n\phi rme$).
On regarde les signes, λ est positif.

Toi aussi, tu veux fabriquer des matrices de Gram.
En taille 1 car tu est un peu con : un réel strictement positif.

En taille 2 : prends une matrice symétrique de diagonale positive et de déterminant positif : $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ oui, $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ non (trouvez un vecteur dont la « norme » ne serait plus positive).

En taille 3 : prend une matrice inversible T et écris ${}^tT.T$. Tu auras une matrice de Gram. Si si !

Vérification : Pour tout couple (A,C), ${}^tA.{}^tT.T.C$ existe et c'est un réel.
La bilinéarité est acquise par simple calcul.
La symétrie passe par « ${}^tA.{}^tT.T.C$ est un réel, donc il est sa propre transposée : ${}^tA.{}^tT.T.C = {}^t({}^tA.{}^tT.T.C) = {}^tC{}^tT.T.A$.
La positivité vient de ${}^tA.{}^tT.T.A = {}^tB.B$ avec $B = T.A$. C'est donc la somme des carrés des composantes de $T.A$. Ça fait un réel positif.
Et il n'est nul que si $T.A$ est nul, donc $A = 0_n$ car T est inversible.

.

Et voilà : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 17 & 13 \\ 1 & 13 & 26 \end{pmatrix}$.
Et donc $2.x.x' + 5.(x'.y + x.y') + (x.z' + x'.z) + 17.y.y' + 13.(y'.z + y.z') + 26.z.z'$ définit une forme bilinéaire symétrique positive, défini positive.
Et $2.x^2 + 10.x.y + 2.x.z + 17.y^2 + 13.y.z + 26.z^2$ est positif....

Et si... : Et si je vous disais que le déterminant de la matrice ainsi construite est le carré d'un volume ?
Mais si. $\det(G) = \det({}^tT.T) = \det({}^tT).\det(T) = (\det(T))^2$.
Et $\det(T)$ est un volume, celui du parallélépipède fait avec les trois vecteurs colonne.

Et si vous avez pris pour T une matrice dont les trois vecteurs colonne formaient une base orthonormée ...
Pouvez vous justifier que $\begin{pmatrix} u & u' & u" \\ v & v' & v" \\ w & w' & w" \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u" & v" & w" \end{pmatrix}$ donne I_3 juste pas des considérations d'orthogonalité des trois vecteurs colonne ?

Un truc un peu délicat que je réserve aux MP : changement de base sur les matrices de Gram.
$(E, +, ., \phi)$ est un espace euclidien [21].
On le dote de deux bases $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots \overrightarrow{\varepsilon_n})$ et $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_n})$. On crée deux matrices de Gram

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}) & \dots & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_n}) \\ \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_2}) & \dots & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(\overrightarrow{\varepsilon_n}, \overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_n}, \overrightarrow{\varepsilon_2}) & \dots & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_n}, \overrightarrow{\varepsilon_n}) \end{pmatrix} \text{ et } G = \begin{pmatrix} \phi(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) & \phi(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) & \dots & \phi(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_n}) \\ \phi(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}) & \phi(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) & \dots & \phi(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(\overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_1}) & \phi(\overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_2}) & \dots & \phi(\overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_n}) \end{pmatrix}$$

et une matrice de passage P qui exprime les $\overrightarrow{e_k}$à l'aide des $\overrightarrow{e_j}$.
Et je vous demande une relation entre G, Γ et P .

Un truc en $G = P^{-1}.\Gamma.P$ vous tente ? Vous avez tort mais je ne vous en veux pas...
Sauf que la matrice obtenue n'est plus symétrique.
Non, la bonne formule est $\boxed{G =^t P.\Gamma.P}$

Preuve : On prend deux vecteurs $\overrightarrow{a}$et $\overrightarrow{c}$et on calcule leur produit scalaire $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$.
Il se calcule par ${}^tA.G.B$ où A et B sont les deux vecteurs colonne qui expriment $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sur la base B.
Mais c'est aussi ${}^t\mathbb{A}.\Gamma.\mathbb{B}$ où $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont les deux vecteurs colonne qui expriment $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sur la base β.
Or, $\mathbb{A} = P.A$ et $\mathbb{B} = P.B$.
On a donc ${}^tA.G.B = \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) =^t (P.A).\Gamma.(P.B) =^t A.({}^tP.\Gamma.P).B$.
On identifie en effaçant ${}^tA$ et b aux deux extrémités de la formule : $G =^t P.\Gamma.P$.

Et on peut vérifier que la matrice reste symétrique..

Remarque : Si la nouvelle base est orthonormée, on obtient $I_n =^t P.\Gamma.P$ et donc $\Gamma =^t T.T$ avec $T = P^{-1}$...

A partir de là, un exercice tel que « trouver un produit scalaire dans le plan tel que $(\overrightarrow{i} - 3.\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j})$ soit orthonormée » devient purement calculatoire.

Mais on perd toute compréhension.
On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, on calcule${}^tP.P = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.
On peut vérifier qu'avec $13.x.x' + 5.(x'.y + x.y') + 2.y.y'$, $\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{i} - 3.\overrightarrow{j}$ ont pour norme 1 et sont orthogonaux...

Pouvait on avoir ne autre idée ?
Non.

Deux autres.
On écrit a priori $a.x.x' + b.(x'.y + x.y') + c.y.y'$ et on impose $\begin{array}{llll} a.1^2 & +2.b.(-2) & +c.(-2)^2 & = 1 \\ a.1^2 & +2.b.(-3) & +c.(-3)^2 & = 1 \\ a.1.1 & +b.(1.(-3) + 1.(-2)) & +c.(-2).(-3) & = 0 \end{array}$
Ou alors on écrit $\overrightarrow{i} = 3.(\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j}) - 2.(\overrightarrow{i} - 3.\overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{j} = (\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j}) - (\overrightarrow{i} - 3.\overrightarrow{j})$ et on développe par exemple
$\phi(3.(\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j}) - 2.(\overrightarrow{i} - 3.\overrightarrow{j}),\ (\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j}) - (\overrightarrow{i} - 3.\overrightarrow{j}))$ par bilinéarité en sachant que les deux vecteurs de

21. oui, espace vectoriel normé de dimension finie, avec produit scalaire

la formule sont orthogonaux entre eux et normés.
Vous le voyez le 13.

Problème : Je suis quand même passé de ${}^tA.G.B={}^t A.({}^tP.\Gamma.P).B$ à $G={}^t P.\Gamma.P$.
Avec un argument fallacieux d'identification...
Le genre même de chose qui est idiot en maths.

Alors que faire ? Multiplier par B^{-1} à droite et ^t A^-1 à gauche ? Quelle horreur aussi ! Vous avez vu leurs formats ? Un vecteur colonne n'a pas d'inverse...

Non, on utilise un lemme d'identification :
$\boxed{\text{si pour tout couple de vecteurs } (A,B) \text{ on a } {}^tA.S.B={}^t A.M.B \text{ alors } S=M.}$
Et comment on le prouve ?

Prenez $A=B=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ et vous avez $s_1^1=m_1^1$.

Prenez $A=B=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ et vous avez $s_2^2=m_2^2$. Et ainsi de suite.

Prenez $A=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ et vous avez $s_2^1=m_2^1$.

Et ainsi de suite.
Mais il était capital que l'hypothèse dise bien « pour tout couple (A,B) ».

4°) Existence de bases orthonormées. Projecteurs orthogonaux.

Ca a l'air pratique les bases orthonormées. Mais est ce que ça existe toujours.
Pour le produit scalaire usuel de $(\mathbb{R}^3,+,.)$, la base canonique est orthonormée, et on utilise les formules de Parsevale sans même s'en rendre compte.
Mais par exemple, pour le plan d'équation $x+y-2.z=0$, peut on trouver deux vecteurs formant une base orthonormée pour le produit scalaire usuel.

Dans le plan $(\mathbb{R}^2,+,.)$ muni du produit scalaire $(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix})\longmapsto\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&3\\3&10\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, il est clair que la base canonique n'est pas orthonormée ($\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ ont pour normes 1 et $\sqrt{10}$ pour angle entre eux $Arccos\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$. Mais existe-t-il une base orthonormée de premier vecteur colinéaire à $\overrightarrow{i}$?

Dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$ muni du produit scalaire $(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix})\longmapsto\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&-1&-8\\-1&2&12\\-8&12&84\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, la base canonique n'est visiblement pas orthonormée ; mais peut on trouver une base orthonormée ?

Dans $(\mathbb{R}_n[X],+,.)$, muni du produit scalaire $(P,Q)\longmapsto\displaystyle\int_0^1 P(t).Q(t).dt$ la base canonique n'est pas orthonormée Mais existe-t-il une base orthonormée ?

Je traite laquelle de ces questions ? Choisissez ?

Dans le plan $(\mathbb{R}^2,+,.)$ muni du produit scalaire $(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix})\longmapsto\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&3\\3&10\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, il est clair que la base canonique n'est pas orthonormée ($\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ ont pour normes 1 et $\sqrt{10}$ pour angle entre eux $Arccos\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$. Mais existe-t-il une base orthonormée de premier vecteur colinéaire à $\overrightarrow{i}$?

C'est Céline qui a choisi. On va commncer par ça. Elle a raison, c'est le plus facile.
$\overrightarrow{i}$ est déjà normé. C'est un bon début.[22].
Et l'angle entre $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ est aigu.
Mais quand on va passer de angle entre $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{i}$: 0

angle entre $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$: $Arccos\Big(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\Big)$

angle entre $\overrightarrow{i}$ et $-\overrightarrow{i}$: π

il y a bien un moment où par continuité on va rencontre un angle *drφit*...

Et l'idée (tout bête ?) est de prendre le vecteur $\overrightarrow{j} - \phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}).\overrightarrow{i}$.

Pourquoi lui ? Logique. Deux justifications.

A posteriori : Calculons son produit scalaire avec $\overrightarrow{i}$:
$\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j} - \lambda.\overrightarrow{i}) = \phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) - \lambda.\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i})$
Et si justement, on a choisi $\lambda = \dfrac{\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}{\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i})}$, ça fait 0. Il est *orthφgonal* à $\overrightarrow{i}$.
On valide : $\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j} - \phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}).\overrightarrow{i}) = \phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) - \phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}).\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}) = 3 - 3.1 = 0$.

A priori : $\overrightarrow{j}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{i}$ puisqu'il contient du $\overrightarrow{i}$.
Combien de $\overrightarrow{i}$ dans $\overrightarrow{j}$?
C'est Parseval qui nous le dit. Si on se dit qu'il existe une base orthonormée de premier vecteur $\overrightarrow{i}$: $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{e_2})$, alors $\overrightarrow{j}$ se décompose
$\overrightarrow{j} = \phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}).\overrightarrow{i} + \phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1}$
et la composante de $\overrightarrow{j}$ suivant $\overrightarrow{i}$ est bien $\phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i})$ (et $\dfrac{\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}{\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i})}$ si $\overrightarrow{i}$ n'avait pas été normé).
Enlevez ce morceau, et le vecteur obtenu est orthogonal à $\overrightarrow{i}$.
On peut même faire un faux dessin.

Bref, $\overrightarrow{j} - \dfrac{\phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i})}{\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i})}.\overrightarrow{i}$ est *orthφgonal* à $\overrightarrow{i}$.
Et il est non nul. Sinon, $\overrightarrow{j}$ serait un multiple de $\overrightarrow{i}$ et même le plus bête d'entre vous refuse ça.[23]

Bref, la famille $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j} - 3.\overrightarrow{i})$ est orthogonale.
Il reste à normer ce second vecteur pour avoir une base orthonormée...
Et quelle chance : $\begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$. Il est normé !
La base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} - 3.\overrightarrow{i})$ est orthonormée pour ce produit scalaire.
Travaillez sur cette base pour tous vos calculs, et ce sera simple.

> Dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ muni du produit scalaire $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & -8 \\ -1 & 2 & 12 \\ -8 & 12 & 84 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, la base canonique n'est visiblement pas orthonormée ; mais peut on trouver une base orthonormée ?

Faites moi confiance, c'est bien un produit scalaire, et on va le noter ϕ.
Mon premier est $\overrightarrow{i}$ et il est déjà normé. Bon début. $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i}$.

Mon second est $\overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{j} - \phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1}$.

22. soit qu'on calcule $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit qu'on dit que c'est le terme en haut à gauche, comme le sentit Gram

23. qui est le plus bête d'entre vous ? Réponse : celui qui tente de répondre à la question. Puisque je vous ai bien expliqué en début d'année que la seul relation d'ordre possible sur les humains est « est égal à », et que c'est un ordre pas du tout total, il n'y a donc pas de plus petit ni de plus grand

Deux preuves : Calculez son produit scalaire avec $\overrightarrow{e_1}$, il vaudra 0 :
$\phi(\overrightarrow{E_2},\overrightarrow{e_1}) = \phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{e_1}) - \phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{e_1}).\phi(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1}) = -1-(-1).1 = 0$

Ou alors : si on a fini et qu'on a trouvé une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$, alors par^2seval, on aura
$\overrightarrow{j} = \phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1} + \phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{e_2}).\overrightarrow{e_2} + \phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{e_3}).\overrightarrow{e_3}$
et il suffira d'effacer $\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1}$ pour obtenir un vecteur $\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{e_2}).\overrightarrow{e_2} + \phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{e_3}).\overrightarrow{e_3}$ naturellement orthogonal à $\overrightarrow{e_1}$.

On pose donc $\overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{j} - (-1).\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{i}$.

Ce vecteur est non nul. Mais pas normé. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & -8 \\ -1 & 2 & 12 \\ -8 & 12 & 84 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$.

Ah si ! Il est normé : $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{i}$.
La famille $[\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$ est orthonormée. Mais ce n'est pas une base de $(\mathbb{R}^3,+,.)$. Juste une base orthonormée du plan d'équation $z = 0$.

Vous me voyez venir ? On sort du plan avec $\overrightarrow{k}$ mais on regarde ce que $\overrightarrow{k}$ avait dans ce plan. Et on l'efface.
$\overrightarrow{E_3} = \overrightarrow{k} - \phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1} - \phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{e_2}).\overrightarrow{e_2}$ est un vecteur orthogonal aux deux premiers.

PIAS : PIAS, c'est l'acronyme de « Play it again Sam », comme dans le film Casablanca.
Je vous le rejoue, et de deux façons.

Si on espère trouver une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_3})$, alors on a
$\overrightarrow{k} = \phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1} + \phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{e_2}).\overrightarrow{e_2} + \phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{e_3}).\overrightarrow{e_3}$
et donc $\overrightarrow{k} - \phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1} - \phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{e_2}).\overrightarrow{e_2}$ est colinéaire à $\overrightarrow{e_3}$.

Si on calcule $\phi(\overrightarrow{k} - \alpha_1.\overrightarrow{e_1} - \alpha_2.\overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_1})$ et $\phi(\overrightarrow{k} - \alpha_1.\overrightarrow{e_1} - \alpha_2.\overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_2})$, par orthonormalité on trouve
$\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{e_1}) - \alpha_1.1 + 0$ et $\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{e_2}) + 0 - \alpha_2.1$
C'était donc le choix qui s'imposait.

Calcul effectif : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & -8 \\ -1 & 2 & 12 \\ -8 & 12 & 84 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -8 \\ ? \\ ? \end{pmatrix} = -8$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & -8 \\ -1 & 2 & 12 \\ -8 & 12 & 84 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ ? \end{pmatrix} = 4$

Mon troisième est $\overrightarrow{E_3} = \overrightarrow{k} + 8.\overrightarrow{e_1} - 4.\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 8.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie quand même $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & -8 \\ -1 & 2 & 12 \\ -8 & 12 & 84 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ et pareil pour l'autre.

Et si le prof a bien fait les choses, ce vecteur est normé :
$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & -8 \\ -1 & 2 & 12 \\ -8 & 12 & 84 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4$.
Ah non tiens...

La nouvelle base, orthonormée, est $\boxed{\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\1/2\end{pmatrix}\right)}$

On vérifie que c'est une base : $P=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-2\\0&0&1/2\end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $T=\begin{pmatrix}1&-1&-8\\0&1&4\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Bonus : Et si on calculait ${}^tT.T=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-8&4&2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&-1&-8\\0&1&4\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&-8\\-1&&\\&12&\end{pmatrix}$ non !

C'est bien elle !

Pardon ? Un troisième avant que ça sonne et qu'Émile vienne me poser des questions ?

Dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$ muni de la base canonique dans le plan d'équation $x+y-2.z=0$, peut on trouver deux vecteurs formant une base orthonormée.

Une base de ce plan, c'est facile : $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ par exemple (notée $(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2})$).

Le premier n'est pas normé ? $\overrightarrow{e_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ l'est.

Le second n'est pas orthogonal au premier ?

$\overrightarrow{E_2}=\overrightarrow{\varepsilon_2}-(\overrightarrow{\varepsilon_2}\cdot\overrightarrow{e_1})\times\overrightarrow{e_1}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Il est toujours dans le plan.

Et il est orthogonal au premier.

On le norme : $\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{3}}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)}$ est une base orthonormée du plan.

Il est temps de présenter l'algorithme, que vous avez dû comprendre déjà par vous même. Il porte le nom de Gram-Schmidt.

On se place dans un espace vectoriel euclidien $(E,+,.,\phi)$ muni d'une base $(\overrightarrow{\varepsilon_1},\ \overrightarrow{\varepsilon_2},\dots\overrightarrow{\varepsilon_n})$, pas forcément adapté au produit scalaire (elle a une matrice de Gram G qui n'est pas la matrice unité, les produits scalaires sur la base β se calculent par ${}^tU.G.V$) .

Alors il existe une base orthonormée pour ϕ $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\dots\overrightarrow{e_n})$.

Et histoire d'en sous-entendre la construction et garantir l'unicité, on va imposer que la matrice de passage de β à $\mathbb{B}$ soit triangulaire à diagonale positive.

Contrainte : Que cache cette contrainte de « matrice de passage triangulaire à diagonale positive » ?
Que $\overrightarrow{e_k}$ est construit à l'aide de $(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots\overrightarrow{\varepsilon_k})$, et sa composante suivant $\overrightarrow{\varepsilon_k}$ est positive.

Algorithme proprement dit :

Étape 1 : On n'a même pas le choix : $\overrightarrow{e_1}=\frac{\overrightarrow{\varepsilon_1}}{||\overrightarrow{\varepsilon_1}||_\phi}$.
On aurait pu choisir son opposé, mais le terme diagonal doit être positif.

Étape 2 : On construit déjà $\overrightarrow{E_2}=\overrightarrow{\varepsilon_2}-\phi(\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1}$.
On confirme : il est non nul
il est dans $Vect(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2})$
il est orthogonal à $\overrightarrow{e_1}$
On le norme $\overrightarrow{e_2}=\frac{\overrightarrow{E_2}}{||\overrightarrow{E_2}||_\phi}$.

Étape k :

On construit $\overrightarrow{E_k} = \overrightarrow{\varepsilon_k} - \sum_{i=1}^{k-1} \phi(\overrightarrow{\varepsilon_k}, \overrightarrow{e_i}).\overrightarrow{e_i}$.

Ce vecteur est non nul (famille initiale libre et $\sum_{i=1}^{k-1} \phi(\overrightarrow{\varepsilon_k}, \overrightarrow{e_i}).\overrightarrow{e_i}$ dans $Vect(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_{k-1}})$

dans $Vect(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_{k-1}}, \overrightarrow{e_k})$
orthogonal à $Vect(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_{k-1}})$ car orthogonal à chaque vecteur de sa base orthonormée

Il reste à le renorme : $\overrightarrow{e_k} = \dfrac{\overrightarrow{E_k}}{||\overrightarrow{E_k}||_\phi}$.

Exercice : déterminez $||\overrightarrow{E_k}||^2$ à l'aide du déterminant de la matrice G rognée à ses k premières colonnes et k premières lignes.

Arrivé à la n^{ieme} étape, on a une famille orthonormée. Elle est donc libre, elle a le bon cardinal. C'est une base.
Et la matrice de passage est triangulaire supérieure, à diagonale positive.

Pour aller plus loin.
Ce théorème prouve que les bases orthonormées existent, même si le produit scalaire est « étrange ».

L'algorithme dépend de l'ordre dans lequel vous avez pris les vecteurs.

Si vous arrêtez l'algorithme en cours de route, vous avez quand même construit une famille orthonormée, base du sous-espace vectoriel $Vect(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots \overrightarrow{\varepsilon_k})$.

Si la famille dont vous partez est déjà orthonormée, l'algorithme ne la modifie pas.

Si les k premiers vecteurs de la famille sont déjà normés et orthogonaux entre eux, l'algorithme ne les modifie pas.

Même sur un espace « surprenant », dites vous que vous prenez une base orthonormée $\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots \overrightarrow{\varepsilon_k}$ et les calculs redeviennent ceux dont vous avez l'habitude dans $(\mathbb{R}^n, +, .)$ euclidien usuel.

Sur la nouvelle bas, le produit scalaire de deux vecteurs se calcule par produit simple $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) =^t \mathbb{U}.\mathbb{V}$.
Regardons alors en détail cette formule, comme déjà fait avant, en tenant compte du fait qu'un vecteur s'exprime de façons différentes suivant la base sur laquelle on travaille.

	base canonique	base orthonormalisée de Schmitt
$\phi(\overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{v}) =$	${}^tU.G.V =$	${}^t\mathbb{U}.\mathbb{V}$

Mais les formules de changement de base dit $U = T.\mathbb{U}$ puisque T est la matrice de passage (les vecteurs de la nouvelle exprimés sur l'ancienne).
On reporte : $\forall(\mathbb{U}, \mathbb{V}), \ {}^t(T.\mathbb{U}).G.(T.\mathbb{V}) =^t \mathbb{U}.\mathbb{V}$.
Le lemme d'identification déjà cité donne ${}^tT.G.T = I_n$.
On a donc, en multipliant : $G =^t (T^{-1}).T^{-1}$ ou pour se simplifier la vie : $G =^t P.P$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 26 \end{pmatrix}$ est la matrice de Gram de la base canonique pour le produit scalaire...

Oui, justement $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 26 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ est bien un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3, +, .)$ et le seul point sensible est d'écrire $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 26 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x + 2.y - 3.z)^2 + (y + 4.y)^2 + z^2$.

Ensuite, l'algorithme donne

Étape 1 : $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i}$ (déjà normé)

Étape 2 : $\overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{i}$

$\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{i}$ (déjà normé)

Étape 3 : $\overrightarrow{E_3} = \overrightarrow{k} + 3.\overrightarrow{i} - 4.\overrightarrow{e_2} = 11.\overrightarrow{i} - 4.\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

$\overrightarrow{e_3} = 11.\overrightarrow{i} - 4.\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ (déjà normé,merci moi !)

La matrice T est ici $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et elle obéit au critère de changement de base demandé.

Son inverse est $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Et on vérifie $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 26 \end{pmatrix}$.

Et si vous comprenez de plus en plus de choses, c'est normal...

Remarque : Avec la formule $G = {}^t P.P$, on retrouve un résultat pressenti par certains :
un déterminant de Gram est positif[a] et même strictement positif pour une famille libre.
Il est vrai que si la famille est liée, l'un des vecteurs est combinaison des autres, et le déterminant est nul.

C'est cohérent avec les opérations que vous avez pu tester sur les matrices de Gram : vous avez beau les bidouiller, le déterminant ne change pas de signe (échangez deux vecteurs vous devez échanger deux lignes ET deux colonnes), renversez un vecteur : une ligne change de signe, une colonne aussi...

Mais j'ai encore mieux. Un déterminant de Gram mesure le carré d'un « volume » (carré d'un déterminant usuel).

a. mais si : $\det(G) = \det({}^t P).\det(P) = \det(P)^2$

Je vous offre d'ailleurs ici un début de problème sur les déterminant de Gram, de Cayley et de Menger :
Un triangle du plan a pour sommets A, B et C de coordonnées $(a', a")$, $(b', b")$ et $(c', c")$. L'aire du triangle est notée S. Montrez $2.S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a' & b' & c' \\ a" & b" & c" \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a' & a" \\ 1 & b' & b" \\ 1 & c' & c" \end{vmatrix}$.

Déduisez : $4.S^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 + a'^2 + a"^2 & 1 + a'.b' + a".b" & 1 + a'.c' + a".c" \\ 0 & 1 + a'.b' + a".b" & 1 + b'^2 + b"^2 & 1 + b'.c' + b".c" \\ 0 & 1 + a'.c' + a".c" & 1 + b'.c' + b".c" & 1 + c'^2 + c"^2 \end{vmatrix}$

puis $-4.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2 + a"^2 & a'.b' + a".b" & a'.c' + a".c" \\ 1 & a'.b' + a".b" & b'^2 + b"^2 & b'.c' + b".c" \\ 1 & a'.c' + a".c" & b'.c' + b".c" & c'^2 + c"^2 \end{vmatrix}$

et $-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2.a'^2 - 2.a''^2 & -2.a'.b' - 2.a''.b'' & -2.a'.c' - 2.a''.c'' \\ 1 & -2.a'.b' - 2.a''.b'' & -2.b'^2 - 2.b''^2 & -2.b'.c' - 2.b''.c'' \\ 1 & -2.a'.c' - 2.a''.c'' & -2.b'.c' - 2.b''.c'' & -2.c'^2 - 2.c''^2 \end{vmatrix}$ et enfin $-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & AB^2 & AC^2 \\ 1 & AB^2 & 0 & BC^2 \\ 1 & AC^2 & BC^2 & 0 \end{vmatrix}$
(déterminant de Cayley-Menger[24]*).*

Retrouvez la formule dite de Heron[25] : $S = \sqrt{\dfrac{(a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)}{16}}$ où a, b et c désignent les longueurs des trois côtés du triangle.

Pour un tétraèdre de $\mathbb{R}^3$, la formule est $288.V^3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & AB^2 & AC^2 & AD^2 \\ 1 & AB^2 & 0 & BC^2 & BD^2 \\ 1 & AC^2 & BC^2 & 0 & CD^2 \\ 1 & AD^2 & BD^2 & CD^2 & 0 \end{vmatrix}$ *(dite formule de Piero della Francesca*[26]*).* Prouvez la.

Que disent ces formules ? Que pour calculer une aire, un volume, on n'a pas besoin de déterminer les coordonnées des points ou des angles. Les longueurs des côtés du triangle suffisent. Ou du tétraèdre.

Dans certains sujets de concours, portant sur ce qu'on appelle les polynômes orthogonaux, on ne construit pas la base orthonormée par la méthode de Gram-Schmidt, mais on demande de constater que c'est bien elle que l'on construit, par une autre méthode.

Orthogonaux ? : On parle de polynômes orthogonaux quand on a un produit scalaire sur $(\mathbb{R}[X], +, .)$ et que les polynômes construits sont deux à deux orthogonaux pour ce produit scalaire. Et chaque polynôme P_n est de degré n, ce qui confirme que la matrice de passage de la base canonique à cette base est triangulaire[a].
Vous en croiserez dans des sujets de concours, associés aux noms de Legendre, Laguerre, Gegenbauer, Tchebychev, Hermite, Hilbert...
Oui, ceux de Tchebychev correspondent au produit scalaire $(P, Q)) \longmapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t).Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}.dt$.
Devinez vous le rapport ?

a. peut être même ce bout de phrase vous permet de comprendre pourquoi l'inverse d'une matrice triangulaire est triangulaire

On va traiter à titre d'exemple une famille classique.
On prend le produit scalaire $(P, Q) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 P(t).Q(t).dt$.
Si on applique la méthode de Gram-Schmidt à la base canonique, on obtient dans l'ordre

	1
$X - \frac{1}{2}$	$\sqrt{3}.(2.X - 1)$
$X^2 - X + \frac{1}{6}$	$\sqrt{5}.(6.X^2 - 6.X + 1)$
$X^3 - \frac{3}{2}.X^2 + \frac{3}{5}.X - \frac{1}{20}$	$\sqrt{7}.(20.X^3 - 30.X^2 + 12.X - 1)$

Bon, les calculs comme $X^3 - \phi(X^3, 1).1 - \phi(X^3, \sqrt{3}.(2.X-1)).\sqrt{3}.(2.X-1) - \phi(X^3, \sqrt{5}.(6.X^2 - 6.X + 1)).\sqrt{5}.(6.X^2 - 6.X + 1)$ ont été faits à l'ordinateur (pour une fois, je gagne du temps par rapport au cours en présentiel[27]).
je vous demande quand même de constater que les $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ et autres se simplifient, les coefficients redeviennent rationnels, car chaque fois qu'il y a un $\sqrt{7}$ il y en a un autre.

Mais en fait, on peut deviner les polynômes en question[28].

24. *Karl Menger mathématicien du vingtième siècle né à Vienne mais devenu américain en* 1937*, connu pour son "éponge" fractale, de volume nul et d'aire infinie*
25. Heron d'Alexandrie, premier siècle, mathématicien grec, auteur de nombreux livres et d'astucieux systèmes mécaniques
26. XV^{eme} *siècle, mathématicien italien (oui, avec ce nom) qui formalisa la notion de perspective et volumes dans* $\mathbb{R}^3$ *et reste d'ailleurs connu comme peintre*
27. là où je gagne aussi du temps par rapport au présentiel, c'est que je ne m'arrête pas d'un seul coup pour dire que tel enchainement de mots me fait penser à une contrepéterie
28. le « on » qui devine ça, ce n'est pas vous, ni moi, il faut quand même y penser

On pose $P_n = X^n.(X-1)^n$ et $H_n = (P_n)^{(n)}$.
Chaque H_n est un polynôme de degré $(n+n)-n$.
Et ils sont deux à deux orthogonaux.

Prenons un exemple : $\phi(H_2, H_3) = \int_0^1 (P_2)"(t).(P_3)^{(3)}(t).dt$.

On intègre par parties [29] $\phi(H_2, H_3) = \int_0^1 (P_2)"(t).(P_3)^{(3)}(t).dt = \Big[(P_2)"(t).(P_3)"(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 (P_2)^{(3)}(t).(P_3)"(t).dt$.

Le polynôme P_3" admet 0 et 1 comme racines triples, donc (P_3)" est encore nul en 0 et 1. Le terme « crochet « est nul.

On recommence avec $\int_0^1 (P_2)^{(3)}(t).(P_3)"(t).dt$ qui donne encore un terme crochet nul, et une intégrale $\int_0^1 (P_2)^{(4)}(t).(P_3)'(t).dt$.

Encore une ? Même nullité du terme crochet grâce à $P_3(0)$ et $P_3(1)$. Et l'intégrale donne $\int_0^1 (P_2)^{(5)}(t).P_3(t).dt$.

Et qu'en est il de $(P_2)^{(5)}$? Elle est nulle. On l'a trop dérivée, cette pauvre fonction de degré 4.

A vous de vous convaincre que ce serait le cas pour $\int_0^1 (P_q)^{(q)}.(P_r)^{(r)}.dt$ et d'envisager une rédaction claire ; l'exercice est classique...

Bref, les P_n sont deux à deux orthogonaux. Et on peut calculer leur norme et les normer.

Pour ce cours, on se contentera des quatre polynômes écrits plus haut.
Et ils vont nous servir pour un problème des « moindres carrés ».

Mais avant d'attaquer celui ci, je me permets de vous présenter un autre classique (moins utile c'est vrai que l'orthogonalité) à lire sur les matrices de Gram : les familles à obtusangles et les familles équiangulaires (ou gerbes).
Une famille de vecteurs est dite à angle obtus ou obtusangles si les vecteurs font tous entre eux des angles plus grands que l'angle droit.
Quel rapport avec les matrices de Gram ? Qui dit angle obtus dit produit scalaire négatif.
Les termes hors de la diagonale de la matrice de Gram sont donc négatifs.

Et je vous pose la question pour le produit scalaire usuel dans $(\mathbb{R}^n, +, .)$ [a] combien de vecteurs contient au maximum une famille obtusangle a. de toutes façons, pour un autre produit scalaire en $(U, V) \longmapsto {}^t U.G.V$, on se place sur une base orthonormée offerte par Gram Schmitt et tout devient produit scalaire « usuel »

Dimension 0. Il n'y a qu'un vecteur. Seul un matheux peut dire « oui, il fait un angle obtus avec lui même ». Et il l'écrit même. Donc famille de un vecteur.

Dimension 1. les vecteurs sont colinéaires. Pour qu'ils fassent un angle obtus entre eux, il faut qu'ils soient de sens opposés, on n'en prend pas plus que deux.

1 : Les deux vecteurs opposés font entre eux un angle π c'est à dire $Arccos(-1)$.

Dimension 2. Dans le plan ? Moi j'ai une configuration à trois vecteurs. Si si ! Normalement, vous devez avoir la réponse, en un mot. De deux lettres...
Et je vous laisse prouver qu'il n'est pas possible d'avoir quatre vecteurs faisant deux à deux des angles plus grands que $\frac{\pi}{2}$ (oui, la requête est « strictement »).

2 : Les trois vecteurs opposés font entre eux un angle π c'est à dire $Arccos(-1/2)$.
Mais oui, la réponse en deux lettres c'est j et j^2 ! Avec dessin à l'appui si nécessaire.

Dimension 3. Dans l'espace ? Il existe une famille de quatre vecteurs faisant entre eux des angles obtus.
Et on peut même demander que ce soit le même angle entre ces quatre vecteurs $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{d}$ deux à deux.
Et là, on se met à parler de famille équiangulaire. Et à faire de la chimie...
Si si, de la chime.

29. by parts

On prend $\overrightarrow{a}$ à $\overrightarrow{d}$ de norme 1 et ils font entre eux le même angle α.

La matrice de Gram associée est alors $\begin{pmatrix} \overrightarrow{a}.\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}.\overrightarrow{c} & \overrightarrow{a}.\overrightarrow{d} \\ \overrightarrow{b}.\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}.\overrightarrow{b} & \overrightarrow{b}.\overrightarrow{c} & \overrightarrow{b}.\overrightarrow{d} \\ \overrightarrow{c}.\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}.\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}.\overrightarrow{c} & \overrightarrow{c}.\overrightarrow{d} \\ \overrightarrow{d}.\overrightarrow{a} & \overrightarrow{d}.\overrightarrow{b} & \overrightarrow{d}.\overrightarrow{c} & \overrightarrow{d}.\overrightarrow{d} \end{pmatrix}$ qui est donc ici simplement $\begin{pmatrix} 1 & c & c & c \\ c & 1 & c & c \\ c & c & 1 & c \\ c & c & c & 1 \end{pmatrix}$.

Et son déterminant est nul. Pourquoi ? Mais parce que la famille est liée dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$. $\overrightarrow{d}$ est combinaison des autres, la dernière colonne est combinaison des autres.

Et si vous le calculiez ce déterminant ? C'est un exercice classique, y compris en dimension n.

Déterminant : On doit calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & c & c & c \\ c & 1 & c & c \\ c & c & 1 & c \\ c & c & c & 1 \end{pmatrix}$ qu'on écrit $\begin{pmatrix} c & c & c & c \\ c & c & c & c \\ c & c & c & c \\ c & c & c & c \end{pmatrix} + (1-c).I_4$.

Et la matrice $\begin{pmatrix} c & c & c & c \\ c & c & c & c \\ c & c & c & c \\ c & c & c & c \end{pmatrix}$ se diagonalise en $D = \begin{pmatrix} 4.c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

il suffit de deviner les valeurs propres (0 avec grosse multiplicité car matrice de rang 1) et vecteurs propres.

On a alors $\begin{pmatrix} 1 & c & c & c \\ c & 1 & c & c \\ c & c & 1 & c \\ c & c & c & 1 \end{pmatrix} = P.D.P^{-1} + (1-c).I_3$

et même $\begin{pmatrix} 1 & c & c & c \\ c & 1 & c & c \\ c & c & 1 & c \\ c & c & c & 1 \end{pmatrix} = P.(D + (1-c).I_4).P^{-1}$.

Son déterminant est donc celui de $D + (1-c).I_4 = \begin{pmatrix} 4.c+1-c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-c \end{pmatrix}$. Joli ?

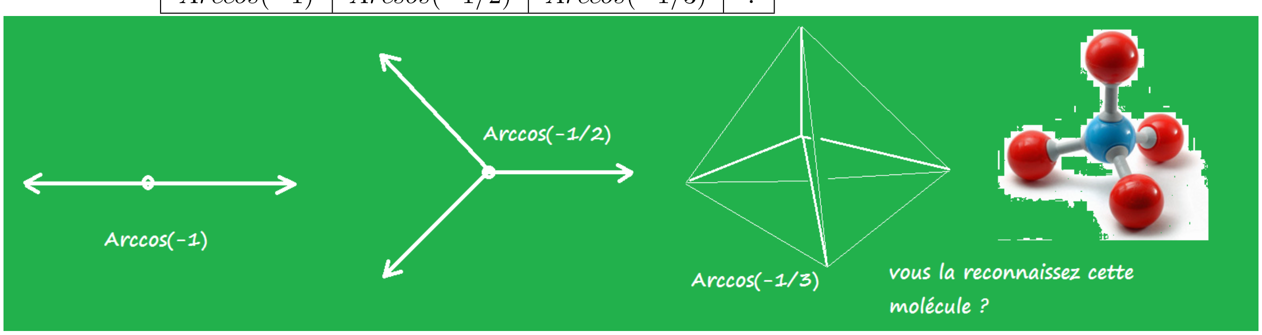
On a donc $(1-c)^3.(1+3.c)$.

c est le cosinus de l'angle entre les vecteurs. Il ne peut pas valoir 1.

On a donc $\cos(\alpha) = -\dfrac{1}{3}$.

On résume :

dimension 1	dimension 2	dimension 3	?
$Arccos(-1)$	$Arcsos(-1/2)$	$Arccos(-1/3)$	?



Et là, le prof de maths se lamente.

Pourquoi les professeurs de chimie demandent d'appendre par cœur un certain 109° 28′ (qui n'est même pas une valeur exacte) pour le tétraèdre (et le méthane) au lieu de dire aux élèves $Arccso(-1/3)$?

Surtout qu'après c'est pour en prendre le cosinus ou le sinus...

Et ensuite, le prof de maths se demande : que serait la chime en dimension 4, avec $Arccos(-1/4)$.
Et que devient cet angle quand le nombre de dimensions tend vers l'infini.

Cochonnet : Et tant qu'on joue à augmenter les dimensions :
comment se range le cochonnet dans un jeu de boule quand la dimension augmente :
https ://www.youtube.com/watch ?v=--tL1sH7MXw
6 minutes du centre Henri Lebesgue

5°) Projecteurs orthogonaux. Moindres carrés.

Une fois n'est pas coutume, je vais introduire la notion par un exemple, un exercice.
Pardon ? C'est au contraire mon habitude ? Oui, je l'avoue. Je préfère vous faire manipuler la notion sur des exemples pour vous convaincre de l'utilité de telle ou telle notion, de telle ou telle définition.

Question : quel est le polynôme qui approxime le mieux l'exponentielle sur $[0,\ 1]$.

Pourquoi s'y intéresser ? parce que on ne sait pas calculer facilement e^x pour x réel. Or, si on a une bonne approximation de e^x pour x entre 0 et &, on pourra étendre (en ayant juste connaissance d'une constante e) à la connaissance de tous les $e^n.e^x$ c'est à dire e^{n+x}avec n dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0,\ 1]$. Bref, on connait alors $x \longmapsto e^x$ sur tout $\mathbb{R}$, segment par segment.

Question : pourquoi « le polynôme qui approxime le mieux l'exponentielle sur $[0,\ 1]$ » et pas
« un polynôme qui approxime le mieux l'exponentielle sur $[0,\ 1]$ » ?
Pourquoi a-t-on unicité ?

Autre question : Quel degré ? On va commencer petit, mais on va voir que tout est possible.

Des réponses possibles :

• $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ avec n « assez grand »
il s'agit d'un développement de Taylor (idée que j'espère être naturelle).
Mais pourquoi prendre l'approximation en 0 plutôt qu'en 1.Ou en $\frac{1}{2}$?
C'est une très bonne approximation « au voisinage du point », mais elle devient moins pertinente quand on s'éloigne.

• on prend par exemple $\frac{(2.X-1).(X-1)}{(-1).(-1)}.1 + \frac{X.(X-1)}{\frac{1}{2}.\frac{-1}{2}}.e^{1/2} + \frac{X.(2.X-1)}{1.1}.e$ en ayant mis en mémoire e et $e^{1/2}$.
C'est un polynôme interpolateur de Lagrange. Il donne la vraie valeur en trois points. Mais ailleurs, il a tendance à se déformer.
Si on augmente le degré, le polynôme coïncide en de plus en plus de points, mais a envie de se tordre de plus en plus (car un polynôme de degré n change très souvent de signe).
Avec la fonction exponentielle, ça se passer plutôt bien... Il y a d'ailleurs quelques sujets de concours qui tournent autour de cela, avec des restes de Taylor Lagrange multiplicatif...

Mais déjà, la question est mal posée... Quels sens donner à « bonne approximation » ?
La différence $P(x) - e^x$ est petite « sur tout l'intervalle ».
Mais dans quel sens là aussi ? C'est normal de se poser la question. La question de la norme...

	« au pire »	minimiser $Sup(\|P(x) - e^x\| \mid x \in [0,1])$
S'agit il d'une contrainte	« en moyenne »	minimiser $\int_0^1 \|P(x) - e^x\|.dx$
	« au sens des moindres carrés »	minimiser $\int_0^1 (P(x) - e^x)^2.dx$

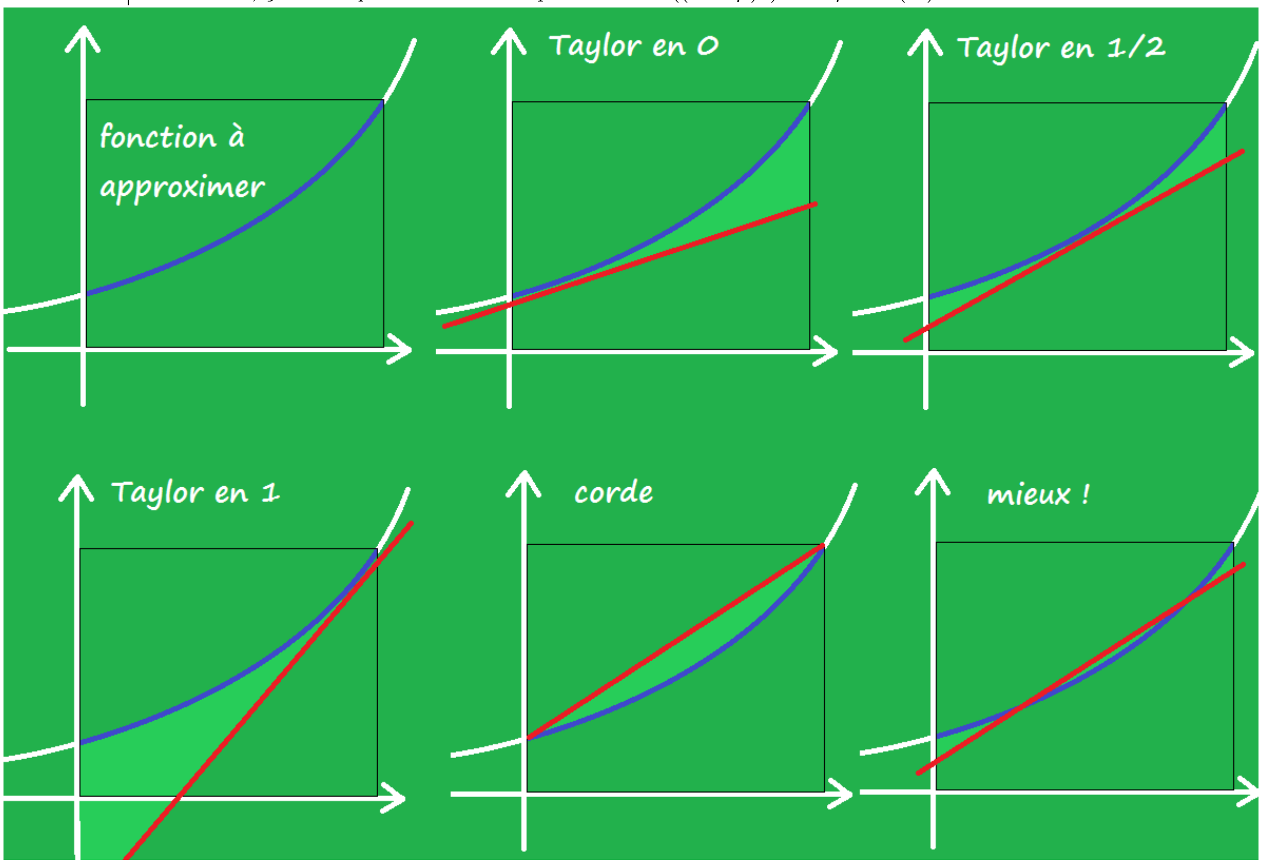
On va choisir la troisième.

Pourquoi :

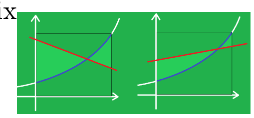
• Parce que c'est ce qu'on sait faire au mieux, avec le cours d'algèbre bilinéaire. [a]
• Parce que l'erreur élevée au carré est un truc judicieux. Quand l'erreur est petite, son carré l'est encore plus (erreur $0,01$: carré $0,0001$)
Quand l'erreur est grande, son carré l'est encore plus (erreur 2, carré 4). [b]
• On va donc chercher à ce que l'erreur soit uniformément petite sur l'intervalle.

---

a. là, ça fait justification de mes cours de physique de lycée
b. là, ça m'évoque la variance en probabilités$E((X-\mu)^2)$ avec $\mu = E(X)$

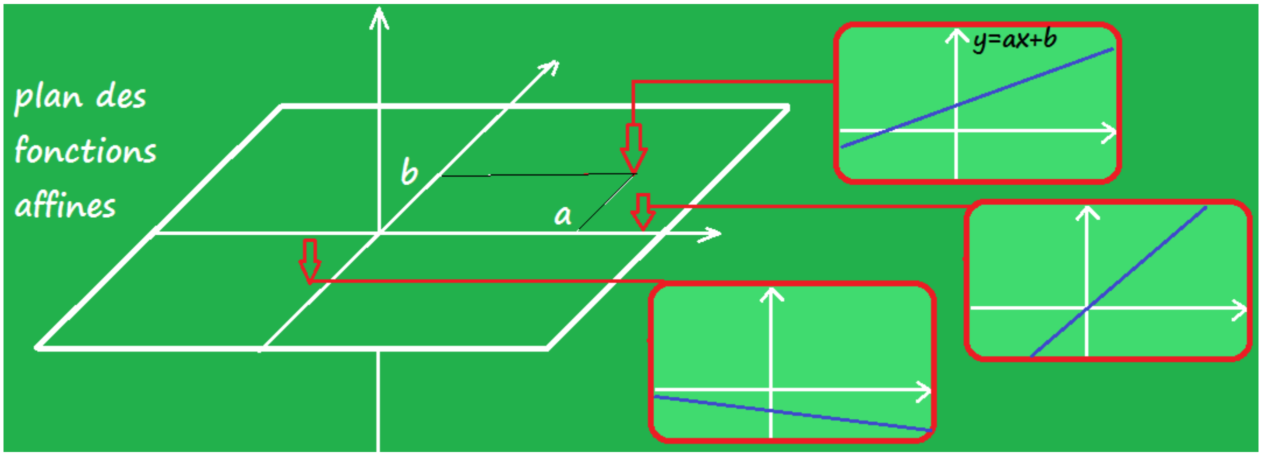


Ici, on tente des approximations affines (polynômes de degré 1) de l'exponentielle.
On voit qu'il y a des approximations plus ou moins bonnes... Et j'ai évité à tout prix les approximations ratées comme

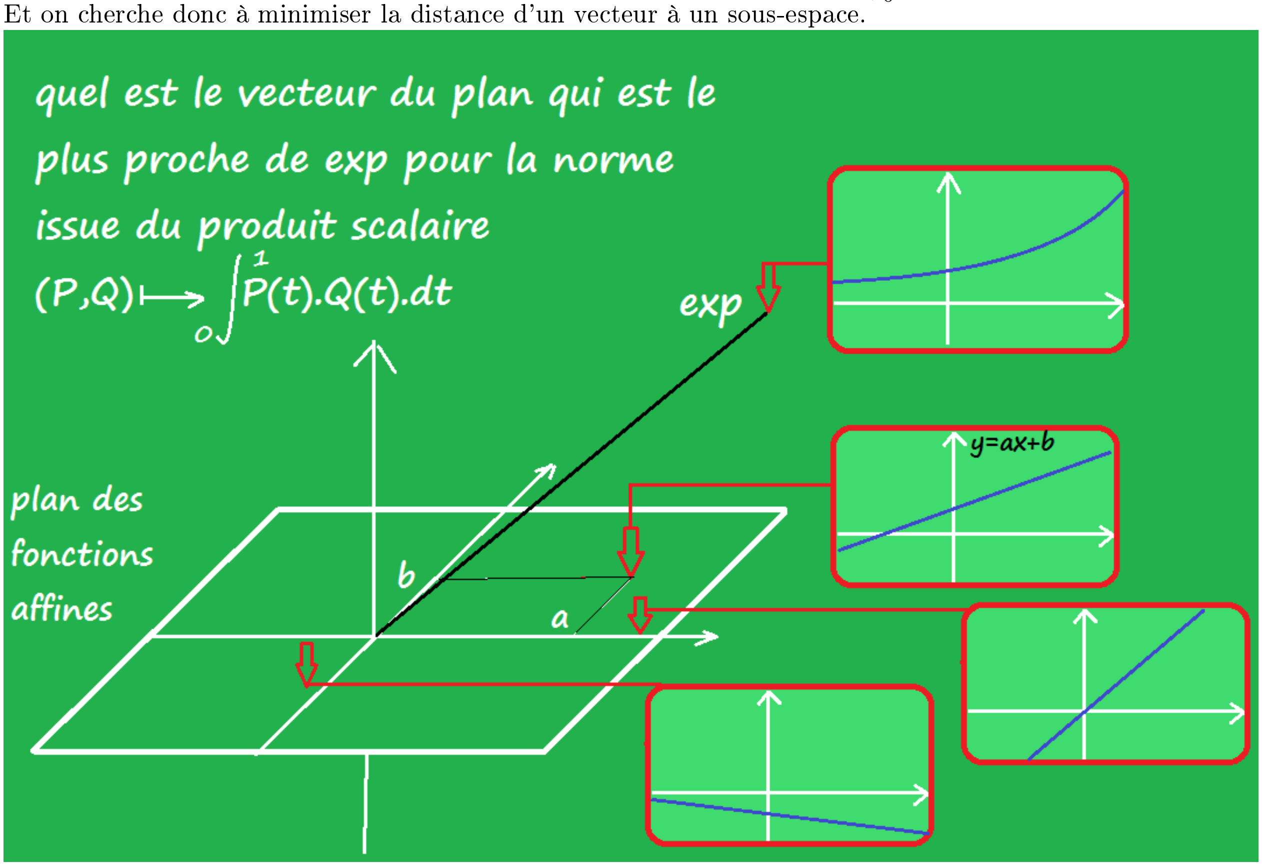


.
.

Et pour trouver notre solution, il faut totalement changer de point de vue, prendre tout ceci de haut.
Voir les fonctions comme des éléments d'un espace vectoriel
Une fonction affine c'est $x \longmapsto a.x + b$. C'est donc deux paramètres.
Les fonctions affines vivent dans un plan. Dans un espace de dimension 2.
Chaque élément de ce plan est une fonction affine.
Il faut imaginer que quand vous placez le pointeur de la souris sur un point $(a,\ b)$ de ce plan, une fenêtre dans le coin dessine le graphe $x \longmapsto a.x + b$.
L'origine donne la fonction nulle. Si vous promenez le pointeur sur Ox vous avez le fonctions constantes, et sur Oy vous avez les fonctions « affines passant par l'origine ».



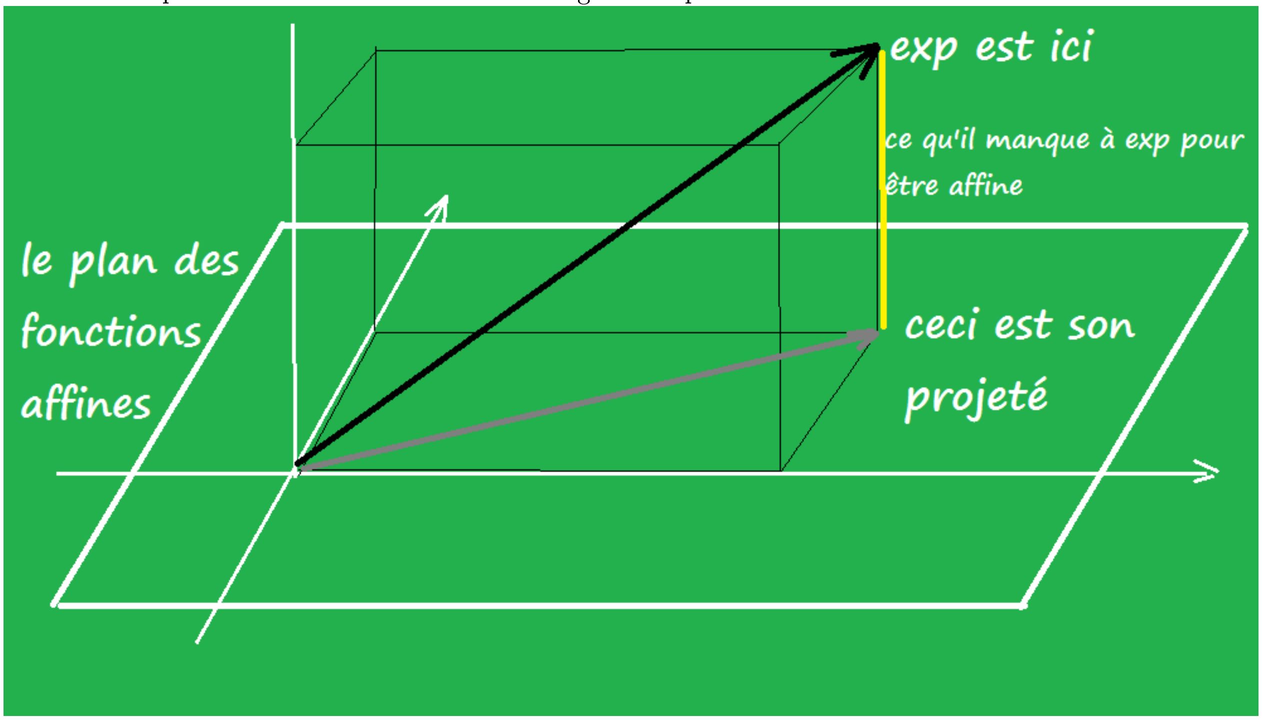
Comme les mathématiques sont un monde d'imagination, je vous laisse imaginer justement ce pointeur que vous déplacez pour visualiser des fonctions affines.
Et je vous laisse ensuite considérer que l'exponentielle n'est évidemment pas dans ce plan. Elle n'est pas affine.
Et on mesure sa distance à une fonction affine par $\displaystyle\int_0^1 (e^t - P(t))^2.dt$ (ici, c'est le carré de a distance pour des raisons d'homogénéité).
C'est le carré d'une norme. La norme issue du produit scalaire $(P, Q) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 P(t).Q(t).dt$.
Et on cherche donc à minimiser la distance d'un vecteur à un sous-espace.



Reprenons donc avec une vision « purement géométrique dans un espace de dimension 3 »[30] :
Quel est le vecteur du plan « en bas » le plus proche du vecteur appelé exp ?
On a une formule pour récupérer cette partie : $(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{i}).\overrightarrow{i} + (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{j}).\overrightarrow{j}$ si on est dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ usuel.
Et sinon, on trouve le projeté avec la formule $\phi(\exp, \overrightarrow{e_0}).\overrightarrow{e_0} + \phi(\exp, \overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1}$ où $(\overrightarrow{e_0},\ \overrightarrow{e_1})$ est une base orthonormée du plan sur lequel on projette (puisque les formules de Parseval donnent $\exp = \phi(\exp, \overrightarrow{e_0}).\overrightarrow{e_0} +$

30. c'est $Vect(x \longmapsto 1,\ x \longmapsto x,\ x \longmapsto e^x)$ pour ceux qui veulent le voir

$\phi(\exp, \overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1} + autres$.
Oui, ce sont des formules utilisées lors de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt, pour trouver « le morceau à effacer » et pas soustraction « le morceau orthogonal au plan ».



Mais il faut disposer d'une base orthonormée du plan des fonctions affines pour ce produit scalaire.
Facile : tout a été fait auparavant : $(1,\ \sqrt{3}.(2.X-1))$.

On a juste deux intégrales à calculer en tout ou parties : $\int e^t.1.dt$ et $\int_0^1 e^t.\sqrt{3}.(2.t-1).dt$.

Tous calculs faits [31], c'est $\boxed{t \longmapsto (18-6.e).t + (4.e-10)}$ Vous l'auriez deviné, vous ?

Remarque : L'application $t \longmapsto e^t - \big((18-6.e).t + (4.e-10)\big)$ qui mesure la différence (en jaune sur notre schéma) est orthogonale à toutes les fonctions affines. Et sa norme est l'erreur commise.

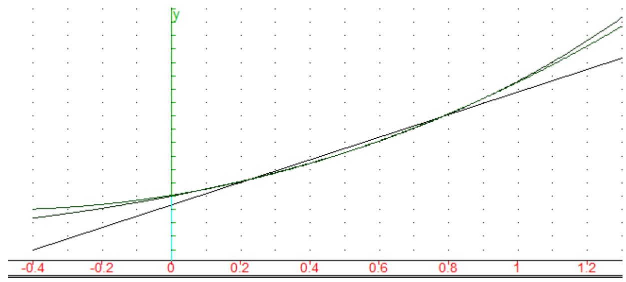
Et si on s'arrête en cours de route ? $1.\int e^t.1.dt$ (formule $\phi(\exp,\ \overrightarrow{e_0}).\overrightarrow{e_0}$) est l'application constante qui approxime le mieux expau sens des moindres carrés, c'est sa projection sur la droite des fonctions constantes.

Et si on veut aller plus loin ? On veut une approximation du second degré. Un arc de parabole et non plus une droite.
Cette fois, la visualisation de « projection sur un espace de dimension 3 au sein d'un espace de dimension un peu plus grande » n'est plus très pratique.
Mais le résultat est simple : on passe de $\phi(\exp, \overrightarrow{e_0}).\overrightarrow{e_0} + \phi(\exp, \overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1}$ avec $(\overrightarrow{e_0},\ \overrightarrow{e_1})$ orthonormée
à $\phi(\exp, \overrightarrow{e_0}).\overrightarrow{e_0} + \phi(\exp, \overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1} + \phi(\exp, \overrightarrow{e_2}).\overrightarrow{e_2}$ avec $(\overrightarrow{e_0},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$ orthonormée
Et comme l'algorithme de Gram-Schmitt est de type glouton [32] et construit un par un les vecteurs, on a juste à ajouter un terme :

31. aux concours, on vous arrêtera avant que vous ne poussiez trop loin de tels calculs, ou alors vous aurez un logiciel tout prêt
32. « En informatique, un algorithme glouton (greedy algorithm en anglais, parfois appelé aussi algorithme gourmand) est un algorithme qui suit le principe de faire, étape par étape, un choix optimum local. » C'est Wiki qui l'dit. Et il cite le « rendu de monnaie », mais vous vous en foutez avec le « sans contact ».

$\left(\int_0^1 e^t.\sqrt{5}.(6.t^2-6.t+1)).dt\right).\sqrt{5}.(6.X^2-6.X+1)$

Si vous y voyez quelquechose sur le dessin à côté...

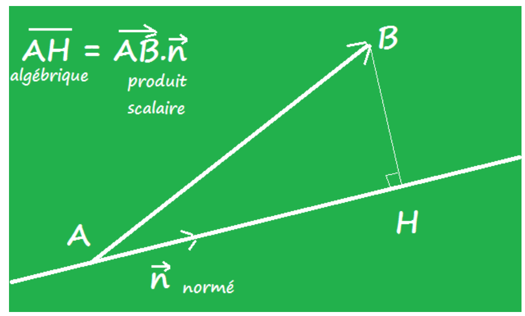


On pourra bien sûr appliquer à d'autres fonctions que l'exponentielle, et obtenir des approximations au sens des moindres carrés.
Si l'application est déjà affine, la formule de Parseval dit que c'est elle qu'on retrouve.

Point de vue géométrique : la formule $\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_0}).\overrightarrow{e_0}+\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1}$ pour projeter sur $Vect(\overrightarrow{e_0},\overrightarrow{e_1})$ est classique (si effectivement $(\overrightarrow{e_0},\overrightarrow{e_1})$ est orthonormée) est un classique. Vous la connaissez en dimension 1.

Droite :

Pour projeter le vecteur sur la droite de vecteur directeur normé vous utilisez $(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{n}).\overrightarrow{n}$. Et si le vecteur directeur n'est pas normé : $\frac{(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{d}).\overrightarrow{d}}{||\overrightarrow{d}||^2}$.



Et vous connaissez les $\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1}+\ldots+\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_n}).\overrightarrow{e_n}$ comme associés à trois noms : Gram, Parseval et Schmidt.

Et sans algèbre bilinéaire ? Juste avec de l'analyse ?
L'élève qui n'a pas ce point de vue « projeter le vecteur exp sur l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 peut quand même se lancer dans des calculs.
Il note $a+b.X+c.X^2$ un polynôme générique » de $(\mathbb{R}_2[X],+,.)$ et il se dit qu'il doit minimiser $\int_0^1(e^t-a-b.x-c.x^2)^2.dx$.
Il développe le carré et sépare en plein de termes par linéarité de l'intégrale.
Je vous offre le calcul :
$a^2+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{5}+a.b+\frac{2.a.c}{3}+\frac{b.c}{2}-2.a.e^1+2.a-2.b-2.c.e^1+4.c+\frac{e^2-1}{2}$
Et comment rendre ceci le plus petit possible ? C'est un trinôme du second degré en a, en b et en c.
On a annule la dérivée par rapport à chacun : $2.a^2+b+\frac{2.c}{3}+-2.e^1+2.a=0$

$$\frac{2.b}{3}+a+\frac{c}{2}-2=0$$

$$\frac{2.c}{5}+\frac{2.c}{3}+\frac{c}{2}-2.e^1+4=0$$

C'est un système maintenant linéaire (normal, on a dérivé du second degré en a, b et c).
Et si on l'écrit matriciellement, est ce que la matrice est inversible ?
Vu comme ça, vous ne savez pas ?

Attendez, je vous reprends les calculs, mais sans calculer les intégrales. C'est mieux. Si si, faites moi confiance.
l'intégrale $\int_0^1(e^t-a-b.x-c.x^2)^2.dx$ se développe en
$a^2.\phi(\overrightarrow{\varepsilon_0},\overrightarrow{\varepsilon_0})+b^2.\phi(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_1})+c^2.\phi(\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_2})+2.a.b.\phi(\overrightarrow{\varepsilon_0},\overrightarrow{\varepsilon_1})+2.a.c.\phi(\overrightarrow{\varepsilon_0},\overrightarrow{\varepsilon_2})+2.b.c.\phi(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2})$
$-2.a.\phi(\overrightarrow{\exp},\overrightarrow{\varepsilon_0})--2.b.\phi(\overrightarrow{\exp},\overrightarrow{\varepsilon_1})-2.c.\phi(\overrightarrow{\exp},\overrightarrow{\varepsilon_2})+\phi(\overrightarrow{\exp},\overrightarrow{exp})$
en notant ϕle produit scalaire dont on parle, et $\overrightarrow{\varepsilon_0}=t\longmapsto 1$, $\overrightarrow{\varepsilon_1}=t\longmapsto t$ et $\overrightarrow{\varepsilon_{02}}=t\longmapsto t^2$, la base canonique de $(\mathbb{R}_2(X],+,.)$.

Après dérivation[33], le système devient $\begin{pmatrix} \phi(\overrightarrow{\varepsilon_0},\overrightarrow{\varepsilon_0}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_0},\overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_0},\overrightarrow{\varepsilon_2}) \\ \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_0}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2}) \\ \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_0}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_2}) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(\overrightarrow{\exp},\overrightarrow{\varepsilon_0}) \\ \phi(\overrightarrow{\exp},\overrightarrow{\varepsilon_1}) \\ \phi(\overrightarrow{\exp},\overrightarrow{\varepsilon_2}) \end{pmatrix}$ et la matrice est bien inversible.
C'est la matrice de Gram.

Évaluation :

Vous avez suivi les étapes : c'est bien.

Vous avez envie de comprendre des choses, vous vous dites qu'il doit y avoir des choses à grattouiller là dessus : je vous ai donné le virus de l'algèbre linéaire.

Vous commencez déjà à faire des calculs : attendez, on vous fera ça l'an prochain.

Mais par exemple le quotient $\begin{vmatrix} \phi(\overrightarrow{\varepsilon_0},\overrightarrow{\varepsilon_0}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_0},\overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_0},\overrightarrow{\varepsilon_2}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_0},\overrightarrow{\exp}) \\ \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_0}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\exp}) \\ \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_0}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_2}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\exp}) \\ \phi(\overrightarrow{\varepsilon_0},\overrightarrow{\exp}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\exp}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\exp}) & \phi(\overrightarrow{\exp},\overrightarrow{\exp}) \end{vmatrix}$ par $\begin{vmatrix} \phi(\overrightarrow{\varepsilon_0},\overrightarrow{\varepsilon_0}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_0},\overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_0},\overrightarrow{\varepsilon_2}) \\ \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_0}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2}) \\ \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_0}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_1}) & \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_2}) \end{vmatrix}$ mesure le carré de la distance de exp au sous-espace $Vect(\overrightarrow{\varepsilon_0},\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2})$ (carré de la norme du vecteur jaune).

Dans tout ce qui précède, j'ai parlé de projection orthogonale sur une droite, un pan, un sous-espace de dimension 3 ou autre.
Si on causait de tout ça ?

Un projecteur projette sur son image, en effaçant son noyau.
Un projecteur orthogonal projette sur son image, en effaçant son noyau, mais en plus image et noyau sont orthogonaux : $Ker(p) \perp Im(p)$.

Avantage : pour un projecteur orthogonal, une fois que vous avez l'image, vous avez son noyau :

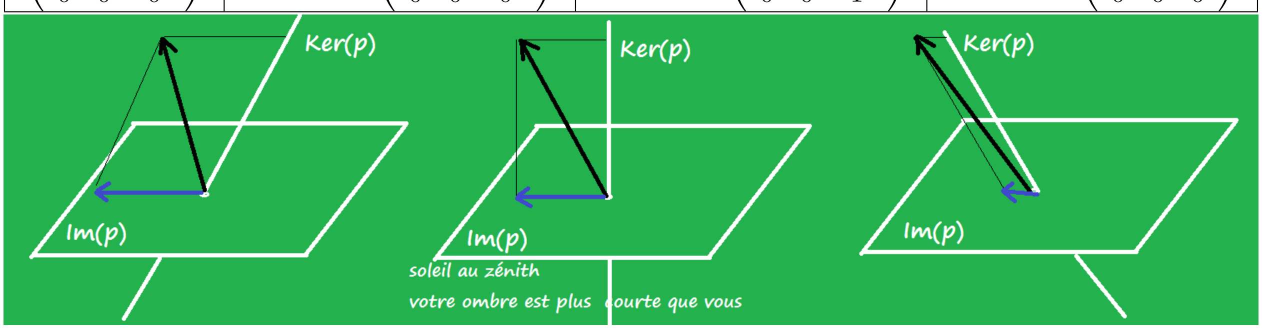
$$Ker(p) = Im(p)^\perp = \{\overrightarrow{k} \mid \forall \overrightarrow{i} \in Im(p),\ \phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) = 0\}$$

Et vice versa : une fois que vous avez son noyau, vous avez son image :

$$Im(p) = Ker(p)^\perp = \{\overrightarrow{i} \mid \forall \overrightarrow{k} \in Ker(p),\ \phi(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}) = 0\}$$

Le réflexe quand on fait un dessin pour un projecteur est bien trop souvent de projeter orthogonalement.
Mais dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ (avec le produit scalaire usuel) il y a plusieurs projecteurs sur $Vect(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, suivant la direction que vous effacez. Mais un seul projette orthogonalement.
Lesquelles de ces matrices sont des matrices de projecteurs, lesquelles (laquelle) sont des matrices de projecteurs orthogonaux ?

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



Propriétés plus ou moins élémentaires.

a	Id et $O_{3,3}$ sont des projecteurs orthogonaux.
b	Si p est un projecteur orthogonal, alors $Id - p$ est un projecteur orthogonal.
c	Le projecteur p est orthogonal si et seulement si $\forall(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}),\ \phi(p(\overrightarrow{a}),\ \overrightarrow{b} - p(\overrightarrow{b})) = 0$.
d	Le projecteur p est orthogonal si et seulement si $\forall(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}),\ \phi(p(\overrightarrow{a}),\ \overrightarrow{b}) = \phi(\overrightarrow{a},\ p(\overrightarrow{b}))$.
e	p est un projecteur orthogonal si et seulement si sa matrice vérifie $P^2 = P$ et ${}^tP.G = G.P$.
f	p est un projecteur orthogonal si et seulement si sa matrice sur une base orthonormée vérifie $P^2 = P$ et ${}^tP = P$.
g	Le projecteur p est orthogonal si et seulement si $\forall \overrightarrow{a},\ \|\|p(\overrightarrow{a})\|\| \leqslant \|\|\overrightarrow{a}\|\|$.

Faut il apprendre toutes ces propriétés ?

33. et simplification par 2

Il y en a qui sont évidentes.
Par exemple a : E est orthogonal à $\{\overrightarrow{0}\}$.

Pareil pour b puisque p et $Id-p$ échangent le noyau de l'un contre l'image de l'autre et vice versa.

Le c doit être évident. Il n'en a pas l'air ? Il l'est.
L'image est orthogonale au noyau.
Et qui sont les vecteurs de l'image : les $p(\overrightarrow{a})$.
du noyau : les $\overrightarrow{b}-p(\overrightarrow{b})$ (souvenez vous $Ker(p) = Im(Id-p)$)
La condition $\phi(p(\overrightarrow{a}),\ \overrightarrow{b}-p(\overrightarrow{b}))=0$ dit donc exactement « image orthogonale au noyau ».

La d est celle qu'on retient.
Elle n'a pas l'air évidente ? Il faut bien quand même qu'il y ait un peu de travail.

Pourtant, prenez le c :	pour $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$	$\phi(p(\overrightarrow{a}),\ \overrightarrow{b}-p(\overrightarrow{b}))=0$	$\phi(p(\overrightarrow{a}),\ \overrightarrow{b})=\phi(p(\overrightarrow{a}),\ (\overrightarrow{b}))$
	pour $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{a}$	$\phi(p(\overrightarrow{b}),\ \overrightarrow{a}-p(\overrightarrow{a}))=0$	$\phi(\overrightarrow{a},\ p(\overrightarrow{b}))=\phi(p(\overrightarrow{a}),\ (\overrightarrow{b}))$

Il n'y a plus qu'à conclure par transitivité.

Vous voulez remonter de $\forall(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}),\ \phi(p(\overrightarrow{a}),\ \overrightarrow{b})=\phi(\overrightarrow{a},\ p(\overrightarrow{b}))$ à « toues les vecteurs de $Im(p)$ sont orthogonaux à tous les vecteurs de $Ker(p)$.
Allez, prenez $\overrightarrow{a}$ dans $Im(p)$ et $\overrightarrow{b}$ dans $Ker(p)$. La formule $\phi(p(\overrightarrow{a}),\ \overrightarrow{b})=\phi(\overrightarrow{a},\ p(\overrightarrow{b}))$ donne alors $\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})=\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{0})=0$. Si si, reliez, tout est là.

Le e est la traduction matricielle de

p est un projecteur	$P^2=P$
$\forall(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}),\ \phi(p(\overrightarrow{a}),\ \overrightarrow{b})=\phi(\overrightarrow{a},\ p(\overrightarrow{b}))$	${}^t(P.A).G.B)={}^tA.G.(P.B)$

le lemme d'identification donne bien ${}^tP.G=G.P$.

Remarque : Cette relation ${}^tP.G=G.P$ sert très peu. Et peu d'élèves la connaissent.
En fait, on travaille toujours sur une base orthonormée, et $\phi(p(\overrightarrow{a}),\ \overrightarrow{b})=\phi(\overrightarrow{a},\ p(\overrightarrow{b}))$ donne ${}^t(A.P).B=A.(P.B)$ et donc on a le f : ${}^tP=P$.
celui là, tout le monde connaît.
Et j'ai encore le souvenir cuisant d'une année où le concours des ENSI (c'est devenu les CCP) en filière PC a fait travailler les élèves sur une base non orthonormée. Ils devaient écrire et utiliser ${}^tP.G=G.P$ et tous ou presque ont utilisé ${}^tP=P$ qui figurait dans leur cours...

Exercice : $\frac{1}{29}.\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & 16 & 12 \\ 6 & 12 & 9 \end{pmatrix}$ est un projecteur orthogonal.

Vérifiez : projecteur ($P^2=P$?)
Déterminez son rang (égal à sa trace puisque c'est un projecteur et que sur une autre base on aura $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Déterminez son image (les vecteurs colonne)
Déterminez son noyau (équation).
Vérifiez que l'image est orthogonale au noyau.

Exercice : Construis toi même ton projecteur orthogonal de rang 1 :
Prends un vecteur normé $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec $a^2+b^2+c^2=1$, et construis la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Vérifier que c'est une matrice carrée
qu'elle est symétrique
qu'elle est solution de $P^2=P$
Déterminer son noyau (vecteur directeur)
son image (équation)

Vérifier que tout vecteur du noyau est orthogonal à son image.

Exercice : Construis toi même ton projecteur orthogonal de rang 2 :
Prends deux vecteurs normés $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec $a^2+b^2+c^2=1$ et $(a')^2+(b')^2+(c')^2=1$, et construis la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$. Ah oui, il manque une hypothèse pour que cette somme soit une matrice de projecteur orthogonal...

Bon, tout est dans la question, il n'y a pas grand chose à faire.

Exercice : Construis toi même ton projecteur orthogonal de rang 2 dans $\mathbb{R}^3$:
Prends un vecteurs normé $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec $a^2+b^2+c^2=1$, et construis la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Mais il est de rang 1 lui ! Certes, mais que penser alors de $I_3-\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$?

Pardon ? J'ai oublié un des résultats élémentaires ? Oui. Je le donne en exercice. Mais il n'y a pas que lui.

Exercice : Soit p un projecteur orthogonal. Montrez : $\forall \overrightarrow{a},\ ||p(\overrightarrow{a})|| \leqslant ||\overrightarrow{a}||$.

Ici, je vous donne juste un conseil. On a un projecteur, quelle est la formule à écrire. Non, pas seulement $p \circ p = p$. Mais comment décompose-t-on tout vecteur ?
Ensuite, je vous donne un nom : Pythagore.

Exercice : Soit p un projecteur. On suppose : $\forall \overrightarrow{a},\ ||p(\overrightarrow{a})|| \leqslant ||\overrightarrow{a}||$. Montrez que p est un projecteur orthogonal.

Et là, la piste est dans les classiques de l'algèbre bilinéaire.
Écrivez $||p(\overrightarrow{a})|| \leqslant ||\overrightarrow{a}||$ non pas pour un $\overrightarrow{a}$ quelconque, mais pour $\lambda.\overrightarrow{k}+\overrightarrow{i}$ avec avec $\overrightarrow{k}$ dans le noyau et $\overrightarrow{i}$ dans l'image. Ensuite, c'est toujours une belle histoire de trinôme du second degré qui reste de signe constant...

Oui, j'ai dit qu'il n'y avait pas que cela que j'avais oublié ou laissé de côté.
J'ai utilisé une notation étrange : $Im(f)^\perp$. Avec le symbole $\perp$ en l'air.
Que ceux qui avaient vu qu'il fallait définir ça lèvent la main.

Vous savez que vous avez l'air cons si votre petit frère vous regarde, en train de lever la main devant votre ordinateur alors que vous n'êtes même pas en visio-conférence...
Bon, je vous explique.

6°) Orthogonal d'un sous-espace vectoriel.

Eh bien, c'est simple et logique. L'orthogonal d'un ensemble A est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A.

On pose donc $A^\perp = \{\overrightarrow{u} \in E \mid \forall \overrightarrow{a} \in A,\ \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}) = 0\}$.

La définition dépend évidemment du produit scalaire choisi.
Dans $\mathbb{R}^3$, l'orthogonal d'un plan doit bien être une droite, et vice versa.

Allez, on va tester votre sagacité :

a	$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$.
b	$E^\perp = \{\overrightarrow{0}\}$ et $\{\overrightarrow{0}\}^\perp = E$
c	$A \cap A^\perp = \{\overrightarrow{0}\}$.
d	$(A^\perp)^\perp = A$.
e	$(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$ et $(A\cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$
f	$A \oplus A^\perp = E$.
g	Si on met bout à bout une base orthonormée de A et une base orthonormée de $A^\perp$ on obtient une base orthonormée de $(E,+,.)$.

Je vous donne quelques unes des démonstrations. A vous de voir à quels points elles correspondant.

Si un vecteur est à la fois dans A et dans son orthogonal, il est orthogonal à lui même, et il est donc nul.
Réciproquement....

Un vecteur orthogonal à tous les vecteurs de $A+B$ est donc en particulier orthogonal à tous les vecteurs de A et à tous les vecteurs de B. Il est dans $A^\perp \cap B^\perp$.
Réciproquement, si on a $\phi(\overrightarrow{c},\overrightarrow{a}) = \phi(\overrightarrow{c},\overrightarrow{b}) = 0$ pour tout couple $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$ de $A\times B$, alors on a ...

Qui sont les vecteurs orthogonaux au vecteur nul ? Tous !

En appliquant le résultat précédent à $A^\perp$et $B^\perp$, on a $(A^\perp + B^\perp)^\perp = (A^\perp)^\perp \cap (B^\perp)^\perp$ et on passe à l'orthogonal...

Le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de $(E,+,.)$ doit au moins être orthogonal à lui-même.

Un vecteur de $\overrightarrow{a}$ est forcément orthogonal à tous les vecteurs qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A.
C'est un peu compliqué à lire, mais c'est parfaitement cohérent...
Mais ça ne prouve que $A \subset (A^\perp)^\perp$. Et l'autre sens... Cherchez encore...

Pour tout $\overrightarrow{a}$ de A , l'ensemble $\{\overrightarrow{u} \in E \mid \phi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{a}) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$, en tant que noyau d'une forme linéaire $\overrightarrow{u} \longmapsto \phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{u})$.
Ensuite, on intersecte des sous-espaces vectoriels, on a un espace vectoriel.

En utilisant $A\cap A^\perp = \{\overrightarrow{0}\}$ et la dimension de chacun, on arrive, avec la formule de Grassmann à $A\oplus A^\perp = E$.
Ou alors justement, on montre le g avant le f.

En fait, on pense avoir tout démontré. Mais en fait, on n'a pas forcément $(A^\perp)^\perp = A$. En tout cas, pas en dimension infinie..
Et donc plusieurs des autres résultats restent en suspens.

Je vous ai même offert en TD un exemple oùF est un sous-espace vectoriel strict de $(E,+,.,\phi)$ vérifiant $F \subset (F^\perp)^\perp = E$, avec inclusion stricte...
Mais il faut prendre un espace vectoriel de dimension infinie.

C'est pour cela que le programme officiel est gentil. En sup, on reste en dimension finie.
Et là, tout ce que vous avez écrit plus haut est vrai.

La clef :

Soit A un sous-espace vectorielle de $(E,+,.)$ (de dimension finie n) alors $\dim(A^\perp) = \dim(E) - \dim(A)$.

On part de rien. Même pas de $\overrightarrow{0}$, non de rien (et c'est libre).
On complète en base de A : $(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots\overrightarrow{\varepsilon_k})$.
On complète en base de $(E,+,.)$: $(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots\overrightarrow{\varepsilon_k},\overrightarrow{\varepsilon_{k+1}},\dots\overrightarrow{\varepsilon_n})$.

On sait que $(\overrightarrow{\varepsilon_{k+1}},\dots\overrightarrow{\varepsilon_n})$ est une base d'un supplémentaire de A. mais pas forcément de celui qui nous intéresse.

Mais on va faire appel à Gram-Schmidt pour redresser la base $(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots\overrightarrow{\varepsilon_k},\overrightarrow{\varepsilon_{k+1}},\dots\overrightarrow{\varepsilon_n})$ en base orthonormée de E : $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{e_{k+1}}, \dots \overrightarrow{e_n})$.

Déjà, par construction (matrice de passage triangulaire), $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k})$ est restée dans A et en forme une base (par orthonormalité elle est libre, et elle a le bon cardinal).

Mais qui est alors $Vect(\overrightarrow{e_{k+1}}, \dots \overrightarrow{e_n})$. Moi je dis que c'est un supplémentaire de A, mais que c'est même $A^\perp$.
Chacun des vecteurs $\overrightarrow{e_{k+p}}$ est orthogonal à $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k})$ donc à A.
Par combinaison, tous les éléments de $Vect(\overrightarrow{e_{k+1}}, \dots \overrightarrow{e_n})$ sont orthogonaux à tous les vecteurs de A.
On a donc $Vect(\overrightarrow{e_{k+1}}, \dots \overrightarrow{e_n}) \subset A^\perp$.

Mais la réciproque ? Prenons un vecteur $\overrightarrow{u}$ dans $A^\perp$.
On le décompose sur la base orthonormée : $\overrightarrow{u} = \alpha_1.\overrightarrow{e_1} + \dots + \alpha_k.\overrightarrow{e_k} + \alpha_{k+1}.\overrightarrow{e_{k+1}} + \dots \alpha_n.\overrightarrow{e_n}$.
Mais non, on ne fait pas de l'algèbre bilinéaire avec ça ! On a la formule de Parseval :
$\overrightarrow{u} = \phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1} + \dots + \phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_k}).\overrightarrow{e_k} + \phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_{k+1}}).\overrightarrow{e_{k+1}} + \dots + \phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_n}).\overrightarrow{e_n}$
Mais comme il est dans $A^\perp$, les coefficients $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_1})$ à $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_k})$ sont nuls.
Il ne reste que $\overrightarrow{u} = \phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_{k+1}}).\overrightarrow{e_{k+1}} + \dots + \phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_n}).\overrightarrow{e_n}$ et il est dans $Vect(\overrightarrow{e_{k+1}}, \dots \overrightarrow{e_n})$.

Ayant $Vect(\overrightarrow{\varepsilon_{k+1}}, \dots \overrightarrow{\varepsilon_n}) = A^\perp$, sa dimension est bien $n-k$.
Et les bases bout à bout donnent bien $A \oplus A^\perp = E$.

Remarque : Avec $\dim(A^\perp) = \dim(E) - \dim(A)$, on obtient aussi $\dim((A^\perp)^\perp) = \dim(E) - \dim(A^\perp) = \dim(A)$.
Avec l'inclusion $A \subset (A^\perp)^\perp$ et l'égalité des dimension, on a l'égalité des ensembles... tant qu'on peut effectivement parler de dimensions.

Exercice : Retrouvez sans effort que (dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ pour le produit scalaire usuel) l'orthogonal du plan d'équation $x + y - 3.z = 0$ est $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - .\overrightarrow{k})$.
Existe-t-il un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3, +, .)$ pour lequel l'orthogonal du plan d'équation $x + y - z = 0$ soit $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$?
Existe-t-il un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3, +, .)$ pour lequel l'orthogonal du plan d'équation $x + y - z = 0$ soit $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$?

7°) Isométries d'un espace vectoriel euclidien.

Une isométrie est une application qui conserve les normes.

Remarque : On en a vu des phrases comme
- l'image des la somme est la somme des images
- l'image du produit est le produit des images
- la norme de l'image est la norme de l'objet

La phrase est ici « la norme de l'image du vecteur est la norme du vecteur ».
Et on va ajouter « l'application est linéaire ». Même si il y a un exercice un peu classique qui montre la linéarité avec l'hypothèse de conservation des normes.

On quantifie ?
Non, on propose des définitions, on va voir si elles sont équivalentes

	f est linéaire de $(E, +, ., \phi)$ dans lui même
a	$\forall \overrightarrow{a},\ \|\|f(\overrightarrow{a})\|\| = \|\|\overrightarrow{a}\|\|$
b	$\forall (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}),\ \phi(f(\overrightarrow{a}), f(\overrightarrow{b})) = \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$
c	la matrice de Gram de $(\overrightarrow{a_1}, \dots \overrightarrow{a_n})$ est la même que la matrice de Gram de $(f(\overrightarrow{a_1}), \dots f(\overrightarrow{a_n}))$
d	f transforme les bases orthonormées en bases orthonormées
e	f transforme une base orthonormée en base orthonormée

Ah, on va montrer que ces définitions sont équivalentes.

Classique : Phrase classique pour dire
si une application f vérifie l'une de ces propriétés, alors elle vérifie les autres.
Et donc
- si on vous demande de montrer « f est une isométrie »,
  - ○ montrez l'une d'entre elles
- si on vous dit « f est une isométrie »
  - ○ vous pouvez utiliser tous ces résultats

On va passer d'une propriété à l'autre, et certains résultats sont inutiles dans ce qui suit.

Livres : Des livres de maths vont vous établir l'équivalence de propriétés a à f en montrant la chaine

$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow c$	$c \Rightarrow d$	$d \Rightarrow e$	$e \Rightarrow f$	$f \Rightarrow a$

$a \Rightarrow b$	On conserve les normes, pourquoi conserve-t-on les produits scalaires ? parce qu'ils s'expriment à l'aide de normes : $\phi(f(\overrightarrow{a}),\ f(\overrightarrow{b})) = \frac{1}{4}.\Big(\lvert\lvert f(\overrightarrow{a}) + f(\overrightarrow{b})\rvert\rvert^2 - \lvert\lvert f(\overrightarrow{a}) - f(\overrightarrow{b})\rvert\rvert^2\Big)$ $\phi(f(\overrightarrow{a}),\ f(\overrightarrow{b})) = \frac{1}{4}.\Big(\lvert\lvert f(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})\rvert\rvert^2 - \lvert\lvert f(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})\rvert\rvert^2\Big)$ $\phi(f(\overrightarrow{a}),\ f(\overrightarrow{b})) = \frac{1}{4}.\Big(\lvert\lvert\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\rvert\rvert^2 - \lvert\lvert\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\rvert\rvert^2\Big)$ par a $\phi(f(\overrightarrow{a}),\ f(\overrightarrow{b})) = \phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})$
$b \Rightarrow a$	Prendre le cas particulier $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$ et passer à la racine.
$b \Rightarrow c$	On remplit la matrice de Gram avec des produits scalaires, c'est tout.
$c \Rightarrow b$	Si ça marche pour toutes les familles de n vecteurs, écrivez le pour une famille de deux vecteurs, et vous avez la conservation du produit scalaire de deux vecteurs.
$c \Rightarrow d$	La famille est orthonormée, sa matrice de Gram est I_n. L'image de Gram de la famille image est I_n. C'est aussi une famille orthonormée. Et comme le cardinal est resté le même...
$d \Rightarrow e$	Si ça marche pour toutes les bases, alors ça marche pour une.
$e \Rightarrow a$	On prend une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_d})$, de base image $(f(\overrightarrow{e_1}), \dots f(\overrightarrow{e_d}))$ orthonormée aussi. On se donne une vecteur $\overrightarrow{a} = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k.\overrightarrow{e_k}$, d'image $f(\overrightarrow{a}) = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k.f(\overrightarrow{e_k})$ par linéarité. La formule de Parseval sur la base $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_d})$ donne $\lvert\lvert\overrightarrow{a}\rvert\rvert = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} (\alpha_k)^2}$. Bon, la fin, vous l'avez...

Ça n'a rien à voir, mais je viens d'entendre une citation de Sofia Kovalevskaya :
« Nul ne peut être mathématicien s'il n'a pas l'âme d'un poète ».

L'identité est évidemment une isométrie.
Son opposé aussi.
Ce sont les seules homothéties[34] qui soient des isométries.
En dimension 1, il n'y a que donc que deux isométries : Id et $-Id$.
En dimension 2, on aura les rotations. Et des « pliages ».

Une isométrie est forcément injective. Puisque si l'on part de $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$, on a $||f(\overrightarrow{a})||=0$ puis $||\overrightarrow{a}|| = 0$ et enfin $\overrightarrow{a} = 0$.

Une isométrie est forcément bijective. Sauf si on travaille en dimension infinie.[35]

Perfide : La dérivation est elle une isométrie ?
Vous avez envie de dire « Non », car la dérivation n'est pas injective. Elle a un noyau : les applications constantes.

Mais si je vous dis « attention, tout dépend de E ». Vous voyez la subtilité ?
Si on prend $E = Vect(\sin,\ \cos)$? Là, la dérivation est un endomorphisme bijectif (écrivez sa matrice sur la base « canonique » : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est pas mal, non ?

La réciproque d'une isométrie est une isométrie (maintenant qu'on sait qu'elle existe).

La composée de deux isométries est une isométrie, puisque chacune conserve les normes.
Tiens, on met tout ça bout à bout : les isométries de $(E, +, ., \phi)$ forment un groupe...
...pour la loi de composition. Ne mélangez pas. la somme de deux isométries a peu de chances d'être une isométrie...

34. homothétie c'est $\overrightarrow{a} \longmapsto \lambda.\overrightarrow{a}$, et comme matrice c'est $\lambda.I_d$
35. mais dans le titre j'ai écrit « euclidien », c'est donc que la dimension est finie

On introduit alors une notation : $O_\phi(E)$ est l'ensemble des isométries de E, pour le produit scalaire ϕ.
Et $(O_\phi(E),\ \circ)$ est un groupe. Pas très commutatif.

Mauvaise idée :

On a donné un nom à ce groupe des isométries de E.
On l'appelle le groupe « orthogonal ».
Et c'est une très mauvaise idée. Carrément foireuse.
Il faudrait l'appeler « orthonormal » ou « orthonormé » puisqu'il est fait des applications qui préservent l'orthonormalité des bases. D'accord, ça sonne moins bien, mais c'est précis.

Et surtout, là où le choix est très mauvais :
les projecteurs orthogonaux ne sont pas dans le groupe orthogonal.
En effet, eux, ils réduisent les normes.
Et ils ne sont pas injectifs [a].

a. sauf Id qui est le seul projecteur orthogonal qui soit « orthonormé » si je puis dire

Et quand on travaille sur $(\mathbb{R}^n, +, .)$ avec le produit scalaire usuel, on parle de $O_n(\mathbb{R})$.
Le programme nous demande de déterminer $O_2(\mathbb{R})$ et de le découper en $O_2^+(\mathbb{R})$ et $O_2^-(\mathbb{R})$ (isométries directes et indirectes).

L'ancien programme demandait aussi de déterminer $O_3^+(\mathbb{R})$.
Et en Spé, on découpait $O_n(\mathbb{R})$.

C'est quoi O^+ et O^- ? Pas des ions.
Une isométrie a un déterminant (le déterminant de sa matrice sur n'importe quelle base). Et ce déterminant est non nul (bijective). On découpe donc en fonction du signe de ce déterminant.
Je vous offre la taxonomie [36]

	isométries directes	isométries indirectes
$n=0$	( ) matrice vide (déterminant 1)	
$n=1$	Id de matrice (1)	$-Id$ de matrice (-1)
$n=2$	les rotations $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$	les symétries $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$
$n=3$	les rotations autour d'un axe	des trucs

Retour :

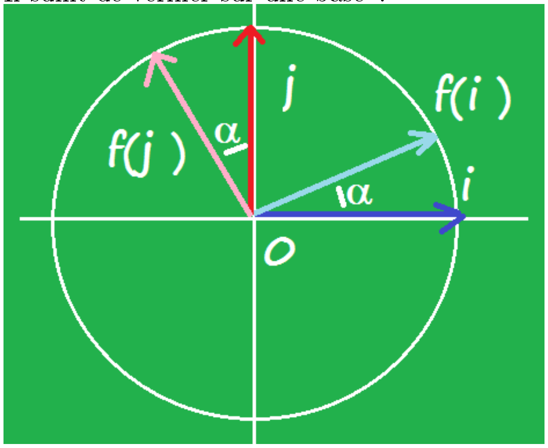
Plus haut, on a pris $E = Vect(\sin,\ \cos)$ et défini $f = la\ derivation$. Et j'ai dit « ce sera une isométrie ». Mais quand même, ça dépend du produit scalaire choisi.
Vérifiez que ces formes bilinéaires symétriques sont des produits scalaires
et dites moi si la dérivation est un produit scalaire pour elles :

$(a.\cos + b.\sin,\ \alpha.\cos + \beta.\sin)$	$a.\alpha + b.\beta$
$(a.\cos + b.\sin,\ \alpha.\cos + \beta.\sin)$	$a.\alpha + 2.b.\beta$
$(a.\cos + b.\sin,\ \alpha.\cos + \beta.\sin)$	$a.\alpha + +a.\beta + b.\alpha + 3.b.\beta$
$(f,\ g)$	$f(0).g(0) + f'(0).g'(0)$
$(f,\ g)$	$\int_0^{2.\pi} f(t).g(t).dt$

Bon allez, on regarde les isométries en dimension 2.
Pour moi il est évident que depuis le début de l'année vous avez compris que $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation d'angle α sur la base orthonormée de $(\mathbb{R}^2, +, .)$. Mais il faut que je vous le reprouve. Et que je vous convainque que c'est une isométrie.

36. La taxonomie est une branche des sciences naturelles, qui a pour objet de décrire les organismes vivants et de les regrouper en entités appelées taxons afin de les identifier, les nommer et les classer au moyen de clés de détermination. Bref, je me la pète pour ne pas dire « classification »

Il suffit de vérifier sur une base :



$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ il a tourné de α et est resté normé

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ il a tourné de α et est resté normé

$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ sont orthogonaux entre eux comme l'étaient $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a transformé une base orthonormée directe en base orthonormée directe, c'est une isométrie.
Et comme $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ ont tourné de α, c'est tous les vecteurs qui le font.

Complexe : On peut aussi le narrer sous forme complexe : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \rho.e^{i.\theta} \longmapsto \rho.e^{i.(\theta+\alpha)} \longmapsto \begin{pmatrix} \rho.\cos(\theta+\alpha) \\ \rho.\sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$.
Les formules de trigonométrie donnent

$$\begin{array}{ccccccc} \rho.\cos(\theta+\alpha) & = & \rho.\cos(\theta).\cos(\alpha) & -\rho.\sin(\theta).\sin(\alpha) & = & x.\cos(\alpha) & -y.\sin(\alpha) \\ \rho.\sin(\theta+\alpha) & = & \rho.\cos(\theta).\sin(\alpha) & +\rho.\sin(\theta).\cos(\alpha) & = & x.\sin(\alpha) & +y.\cos(\alpha) \end{array}$$

On a bien $\begin{pmatrix} x.\cos(\alpha) & -y.\sin(\alpha) \\ x.\sin(\alpha) & +y.\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Bon, les rotations sont des isométries directes du plan.
Pourquoi sont-ce les isométries directes du plan ?

Remplissons la matrice sur la base canonique, avec pour seule condition « isométrie directe ».
La première colonne doit être normée, puisque c'est l'image de $\overrightarrow{i}$.
Elle est donc de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & ? \\ \sin(\alpha) & ? \end{pmatrix}$.
La deuxième colonne doit être normée : $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) & \sin(\beta) \end{pmatrix}$ avec $\cos(\alpha).\cos(\beta) + \sin(\alpha).\sin(\beta) = 0$ (de la frigo, on doit être sur la bonne piste). $\alpha - \beta$ vaut donc $\dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{-\pi}{2}$. Et la contrainte « déterminant positif » donne finalement l'unique modèle $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\alpha+\pi/2) \\ \sin(\alpha) & \sin(\alpha+\pi/2) \end{pmatrix}$.

Bref, les isométries directes du plan sont les rotations. Et comme $R_\alpha.R_\gamma = R_\gamma.R_\alpha = R_{\alpha+\gamma}$, on en déduit que le groupe $(O_2^+(\mathbb{R}), \circ)$ est commutatif (isomorphe à $[-\pi,\ \pi[$ pour l'addition modulo $2.\pi$).

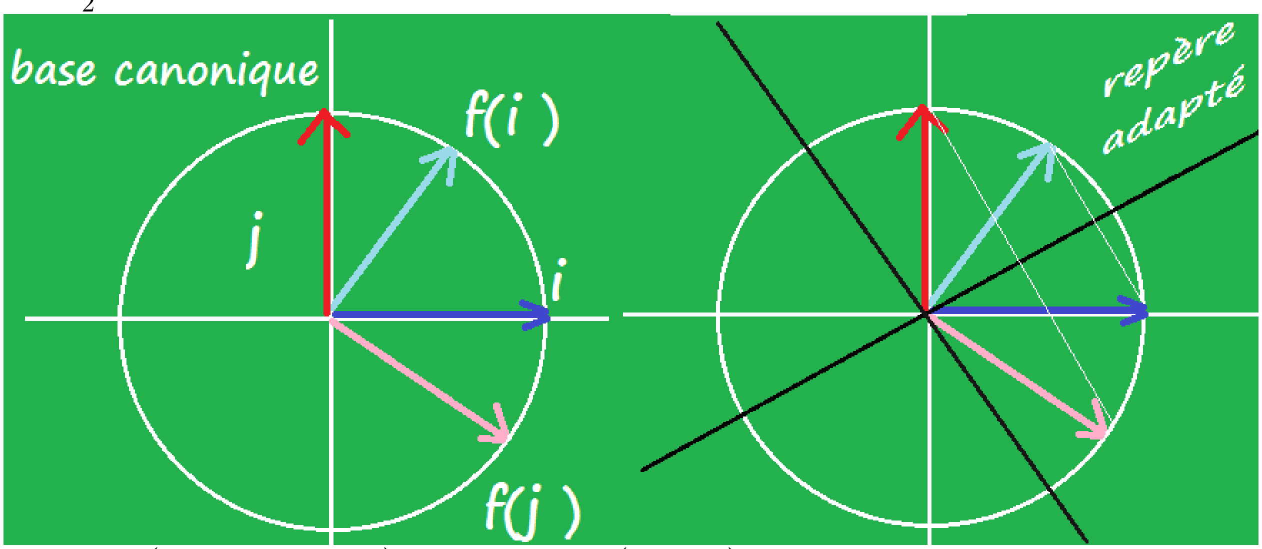
En passant, on a trouvé l'autre modèle d'isométrie en dimension 2 : $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\alpha-\pi/2) \\ \sin(\alpha) & \sin(\alpha-\pi/2) \end{pmatrix}$.
On trouve le second modèle $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$, de déterminant -1.
On peut interpréter géométriquement ces isométries indirectes.
On peut aussi profiter de notre cours sur la diagonalisation.

$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$			
Trace	Déterminant	Spectre	Diagonalisation
$2.\cos(\alpha)$	1	$\{e^{i.\alpha},\ e^{-i.\alpha}\}$	$D = \begin{pmatrix} e^{i.\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i.\alpha} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$			
Trace	Déterminant	Spectre	Diagonalisation
0	-1	$\{-1,\ 1\}$	$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) & -\sin(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) & \cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$

On constate que les isométries directes se diagonalisent toutes (sur $\mathbb{C}$) avec la même matrice de passage. C'est ce qui explique qu'elles commutent entre elles...

Les isométries indirectes se diagonalisent avec une matrice de passage qui est une matrice de rotation. Et à rotation près, on a donc le « pliage » de matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ que l'on peut appeler $z \longmapsto \overline{z}$.

On vérifie $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$
et $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -\sin(\alpha/2) \\ \cos(\alpha/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha/2) \\ -\cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$
Sur la droite faisant un angle $\alpha/2$ avec Ox, les vecteurs sont invariants.
Sur son orthogonal, les vecteurs sont transformés en leur opposé.
On a une symétrie orthogonale. Vérifiez $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Et $\dfrac{S_\alpha + I_2}{2}$ est un projecteur orthogonal.



La formule $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} = P.D.P^{-1} = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.P^{-1}$
et même $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) & -\sin(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) & \cos(\alpha/2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) & \sin(\alpha/2) \\ -\sin(\alpha/2) & \cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$

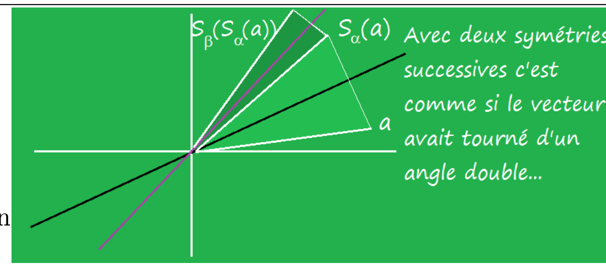
si lit

$\begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) & \sin(\alpha/2) \\ -\sin(\alpha/2) & \cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$	on fait tourner la page pour place l'axe noir « horizontal »
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	on symétrise par rapport à l'axe horizontal
$\begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) & -\sin(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) & \cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$	on remet la feuille dans le bon sens

On l'a constaté, les R_α(les rotations) commutent.
En revanche, les S_β (les symétries) ne commutent pas en général.

Regardons ce qui était avant du cours.

Et ça donne quoi le produit de deux symétries ?



Non. Ne calculez rien.
Réfléchissez.
Comme des miroirs. Deux miroirs faisant entre eux un angle...

Ou alors comme des algébristes.
C'est le produit de deux isométries. C'est une isométrie.
Chacune a pour déterminant -1. leur produit a pour déterminant 1.
C'est une rotation.

produit $A.B$	$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$	$S_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ \sin(\beta) & -\cos(\beta) \end{pmatrix}$	A
$R_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$	$R_\alpha.R_\beta = R_{\alpha+\beta}$	$S_\beta.R_\alpha = S_?$	
$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$	$R_\alpha.S_\beta = S_{\alpha+\beta}$	$S_\beta.S_\alpha = R_{\beta-\alpha}$	
B			

A une époque, on jouait comme des petits fous avec ces formules :
par exemple pour calculer $R_\alpha.S_\beta$, on remplaçait R_α par $S_\gamma.S_\beta$ avec $\gamma - \beta = \alpha$ puis on simplifiait les $S_\beta$ensemble.

Une remarque. Je passe mon temps à raisonner sur les matrices. Je devrais raisonner sur les applications.
Mais la matrice sur la base canonique dit tout.
Tiens, d'ailleurs, le programme demande de caractériser les matrices d'isométries.
On part de $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}),\ \phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \phi(f(\overrightarrow{u}),\ f(\overrightarrow{v}))$.
On traduit matriciellement : $\forall(U,\ V),\ {}^tU.V =^t (M.U).(M.V)$.
On développe : $\forall(U,\ V),\ {}^tU.V =^t U.{}^tM.M.V$ et même $\forall(U,\ V),\ {}^tU.I_n.V =^t U.{}^tM.M.V$.
Le lemme d'identification donne le critère $\boxed{{}^tM.M = I_n}$
Les matrices d'isométries sont inversibles, et leur propre inverse est leur transposée.
Ceci s retrouve facilement en découpant en colonnes.
Dans le calcul du produit ${}^tM.M$, les colonnes de M tombent sur les lignes de ${}^tM$.
Dans le calcul du produit ${}^tM.M$, les colonnes de M tombent sur les colonnes de M écrites en ligne.
Quand c'est la même, on doit trouver 1 : colonnes normées.
Quand ce n'est pas la même, on doit trouver 0 : colonnes orthogonales entre elles.
On est passé d'une base orthonormée à une autre.

Remarque :

Une matrice M vérifiant ${}^tM.M = I_n$ peut être vue comme
• matrice d'isométrie
• matrice d'une base orthonormée.

Ça fait une grande différence ?

.

Toute matrice de permutation, avec ses n 1 bien placés peut être vue comme
• matrice d'isométrie particulière
• matrice de changement de base orthonormée juste mélangée
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ tourne autour de $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ d'un angle $\dfrac{2.\pi}{3}$. Saurez vous le prouver ?

Piège : Tous ces calculs ont été faits sur une base orthonormée.
Sinon, on reprend $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}),\ \phi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\phi(f(\overrightarrow{u}),\ f(\overrightarrow{v}))$ et on obtient
${}^tM.G.M=G$ où G est la matrice de Métro-Gram-Meyer.

Mais là encore, ce serait vache qu'un sujet de concours vous fasse ce coup là.

Naïf : Partant de la condition nécessaire ${}^tM.M=I_n$, les élèves aboutissent (à juste titre) à $\det(M)^2=1$.
Ils en déduisent la condition nécessaire $\det(M)=1$ ou $\det(M)=-1$.
Mais elle n'est que nécessaire et nullement suffisante. Combien ai-je vu d'élèves aux oraux de concours s'arrêter tout fiers après avoir calclé : $\det(M)=1$, c'est une isométrie...

Reprenez nos $R_\beta=\begin{pmatrix}\cos(\beta) & -\sin(\beta)\\ \sin(\beta) & \cos(\beta)\end{pmatrix}$ et vérifiez ${}^tR.R=I_2$.

Reprenez nos $S_\beta=\begin{pmatrix}\cos(\beta) & \sin(\beta)\\ \sin(\beta) & -\cos(\beta)\end{pmatrix}$ et vérifiez ${}^tS.S=I_2$ et en plus ${}^tS=S$.

Exercice : Pour vérifier que $\frac{1}{3}.\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ est une matrice d'isométrie, que préférez vous faire ?
Calculer ${}^tM.M$?
Regarder si les trois colonnes sont normées $\frac{4+4+1}{9}$, et deux à deux orthogonales $2.(-2)+2.1+1.2=0$?
Pour moi, y'a pas photo.

Tant qu'on y est, vérifiez que le dernier vecteur est produit vectoriel des deux premiers.
Si je vous demande le déterminant vous vous lancez dans un calcul ou vous souriez ?
Si je vous dis que c'est une rotation, comment trouver vous son axe ?

Bonus en taille 3.
Je vous donne les questions pour montrer que toute isométrie directe de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ canonique est une rotation.[37]
On prend donc M vérifiant ${}^tM.M=I_3$ et $\det(M)=1$.

a - Montrez que M admet au moins une valeur propre réelle.
b - Montrez que cette valeur propre vaut 1 ou -1 .
c - Montrez que si M admet une valeur propre complexe, celle ci est de module 1.
d - Montrez que si M admet une valeur propre complexe non réelle, alors elle admet aussi $\overline{\lambda}$.
e - Montrez qu'au moins une des valeurs propres vaut 1 (on notera A un vecteur propre de valeur propre 1)
f - Montrez que $A^\perp$est stable par M
g - Montrez que M agit comme une rotation sur le plan $A^\perp$.
h - Montrez que M est semblable à $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$.
i - Reconnaissez dans cette matrice une matrice de rotation d'angle α autour de l'axe formé par le premier vecteur de base.

Quelques éléments de réponse, en vrac. Retrouvez la question.

α - Si les trois valeurs propres sont réelles, elles ne peuvent pas valoir toutes les trois -1 (déterminant égal à &), donc au moins une vaut 1.
Si il y a une valeur propre réelle et deux complexes non réelles, le déterminant vaut $\alpha.\lambda.\overline{\lambda}$, comme il est égal à 1, c'est que α est positif...

β - le polynôme caractéristique est de degré ", on applique le théorème des valeurs intermédiaires.

γ - Soit $\overrightarrow{b}$ dans $A^\perp$. On a alors $\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})=0$ et donc $\phi(f(\overrightarrow{a}),\ f(\overrightarrow{b}))=0$ (isométries) et on retrouve $\phi(\overrightarrow{a},\ f(\overrightarrow{b}))=0$.

37. pas à apprendre par cœur ; déjà réussir à suivre est bien

δ - Le polynôme caractéristique est à coefficients réels...

ε - Si l'on a $f(\overrightarrow{a}) = \alpha.\overrightarrow{a}$ en passant au module, on obtient $||\overrightarrow{a}|| = |\alpha|.||\overrightarrow{a}||$ et donc α vaut & ou -1 (un vecteur propre n'est pas nul).

φ - On se place sur une base formée de $\overrightarrow{a}$ et de deux vecteurs orthonormés dans $A^\perp$.

ψ - Si on a $M.Z = \alpha.Z$ alors $\overline{M.Z} = \overline{\alpha}.\overline{Z}$ et même $M.\overline{Z} = \overline{\alpha}.\overline{Z}$ car M est à coefficients réels.
Puis ${}^t\overline{Z}.{}^tM = \overline{\alpha}.{}^t\overline{Z}$.
On multiplie membre à membre : ${}^t\overline{Z}.{}^tM.M.Z = |\alpha|^2.{}^t\overline{Z}.Z$.
Je vous laisse deviner la fin en montrant que ${}^t\overline{Z}.Z$ est un réel strictement positif en $\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}.z_k$ qu'on pourra simplifier.

Allez, pour finir, je vous recommande l'exercice du T.D. avec la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ qui est matrice de rotation si et seulement si a, b et c sont les racines de $X^3 - X^2 + p$ avec p positif plus petit que $4/27$.
C'est un problème qui a tourné sur plusieurs concours (Mines de Sup, E3A,...) ou aux oraux (CCP,...).