



Lycée Charlemagne

Probab

G + G	G + F	G + G	G + F	G + G	G + F
F + G	F + F	F + G		F + G	

Quatre familles équiprobables Univers où un garçon ouvre la porte Probabilité que l'autre enfant soit un garçon

Mai
Juin





Probabilités sur un univers fini

Probab

a- Expérience aléatoire et univers.

L'ensemble des issues (ou résultats possibles ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé **univers**.
Événements,

- événement élémentaires (singletons, "atomes"),
- événement contraire (complémentaire),
- événement "A et B" (intersection),
- événement "A ou B" (réunion),
- événement impossible (vide),
- événements incompatibles (intersection vide),
- système complet d'événements (partition de l'ensemble : $\forall a \in \Omega, \exists i \in I, a \in A_i$).

b- Espaces probabilisés finis.

1- Une probabilité sur un univers fini Ω est une application P de $P(\Omega)$ dans $[0, 1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour tout couple d'événements disjoints A et B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

2- Détermination d'une probabilité par les images des singletons.

3- Probabilité uniforme : $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

4- Propriétés des probabilités :

- probabilité de la réunions de deux événements : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- probabilité de l'événement contraire : $P(A^c) = 1 - P(A)$,
- croissance : $(A \subset B) \Rightarrow (P(A) \leq P(B))$,
- cas d'un système complet : $P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i)$.

c- Probabilités conditionnelles.

1- Si B est un événement de probabilité non nulle, la probabilité conditionnelle de A sachant B est

définie par $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

2- Formule des probabilités composées $P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(C | A \cap B) \cdot P(D | A \cap B \cap C)$.

3- Formule des probabilités totales $P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i)$

4- Formules de BAYES :

- si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, alors on a $P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)}$

- si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors on a

$$P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i) \cdot P(A_i)}$$

d- Événements indépendants.

1- Couple d'événements indépendants.

2- Lien avec les probabilités conditionnelles.

3- Famille finie d'événements mutuellement indépendants.

L'indépendance deux à deux ne suffit pas.

	Variables aléatoires	Probas
---	-----------------------------	---------------

a- Variables aléatoires.

1- Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E . Lorsque E est une partie de $\mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.

2- Loi P_X de la variable aléatoire X .

3- Image d'une variable aléatoire par une fonction, loi associée.

b- Lois usuelles.

Loi uniforme sur $\text{range}(1, n+1)$	$P(U_n = k) = \frac{1}{n}$
Loi de BERNOULLI de paramètre p (dans $[0, 1]$) :	$P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$
Loi binomiale de paramètres n (dans $\mathbb{N}^*$) et p (dans $[0, 1]$) :	$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

c- Couples de variables aléatoires.

1- Loi conjointe : liste des $P((X, Y) = (a, b))$ pour a et b décrivant A et B .

2- Lois marginales d'un couple de variables aléatoires $P(X = a) = \sum_{b \in B} P((X, Y) = (a, b))$.

Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.

3- Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.

4- Extension aux n -uplets de variables aléatoires.

d- Variables aléatoires indépendantes.

1- Si X et Y sont indépendantes : $P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$.

2- Variables aléatoires mutuellement indépendantes.

3- Modélisation de n expériences indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes.

4- Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi $B(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $B(n, p)$.

5- Si X et Y sont indépendantes, les variables $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

e- Espérance.

1- Espérance d'une variable aléatoire réelle.

Relation : $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X(\omega)$.

2- Une variable aléatoire centrée est une variable aléatoire d'espérance nulle ; $X - E(X)$ est centrée.

3- Propriétés de l'espérance :

- linéarité $E(a.X + b.Y) = a.E(X) + b.E(Y)$,
- positivité, croissance : $(X \leq Y) \Rightarrow (E(X) \leq E(Y))$.

	Espérance d'une variable aléatoire constante	$E(C) = c$
4-	Espérance d'une variable de BERNOULLI de paramètre p	$E(B_p) = p$
	Espérance d'une variable binomiale de paramètres n et p	$E(B_{n,p}) = n.p$

5- Formule de transfert : si X est une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) \cdot f(x)$.

6- Inégalité de MARKOV : $P(A \geq a) \leq \frac{E(A)}{a}$

7- Si X et Y sont indépendantes : $E(X.Y) = E(X).E(Y)$.

La réciproque est fausse en général.

f- Variance, écart-type et covariance.

1- Moments. Le moment d'ordre k de X est $E(X^k)$.

2- Variance, écart-type : $Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$

3- Une variable aléatoire réduite est une variable aléatoire de variance 1 ; $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

4- Relation $Var(a.X + b) = a^2.Var(X)$.

5-	Variance d'une variable aléatoire de BERNOULLI :	$p.(1 - p)$
	Variance d'une variable aléatoire binomiale : $n.p.(1 - p)$;	$n.p.(1 - p)$
	Varuance d'une variable uniforme sur range(1, n+1) :	$\frac{n^2 - 1}{12}$

6- Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV : $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

7- Covariance de deux variables aléatoires : $Cov(X, Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$

8- Cas de variables indépendantes : la covariance est nulle (*pas de réciproque*).

9- Variance d'une somme, cas de variables deux à deux indépendantes.

-	M.P.S.I.2 2017_____0 points_____2018 CHARLEMAGNE	№_____Probas_____№