Lycée Charlemagne

.2018.– *MPSI2* –.2019.

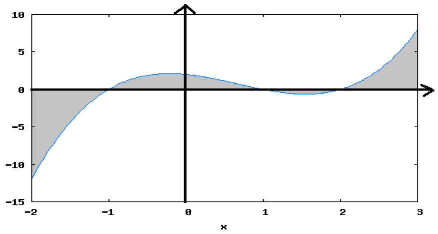
Cahier de vacances

CDV1

Pour se mettre en jambe : $\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{\tan(a)-\tan(b)}=\dfrac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$.

Résoudre $3^n+2.3^{n-1}+4.3^{n-2}+\ldots+2^{n-2}.9+2^{n-1}.3+2^n$ est multiple de 5 d'inconnue n dans $\mathbb{N}$.

Vrai ou faux : le graphe d'un polynôme de degré 3 nul en -1, 1 et 2 admet un centre de symétrie dont l'abscisse vaut 2/3 ?



⋄0⋄

⋄1⋄ ♡ Montrez qu'une application vérifiant $\exists A\in\mathbb{R},\ \forall(x,\ y)\in\mathbb{R}^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant A.|x^3-y^3|$ est continue. *Indication : Lipschitz.*
L'identité vérifie-t-elle cette propriété ?
Montrez par l'absurde que le sinus ne vérifie pas cette propriété.
Qu'en est il de celles vérifiant $\forall(x,\ y)\in\mathbb{R}^2,\ \exists A\in\mathbb{R},\ |f(x)-f(y)|\leqslant A.|x^3-y^3|$?

⋄2⋄ ♯ Que fait ce script ?

```
def otedefrapp(L) :
....C = L[ : ] #crée une copie de la liste L
....D = []
....while len(C)>0 :
........a = C.pop()
........if not(a in C) :
............D.append(a)
....return(D)
```

⋄3⋄ Il y a N poissons dans un grand aquarium. J'en pèche 20 "au hasard". Je les marque d'un signe distinctif *(qu'ils seront les seuls à porter)*. Je les remets ensuite dans l'aquarium.
Le lendemain, alors qu'ils se sont mélangés, j'en pèche à nouveau 20, au hasard.
Indiquez la probabilité p_k qu'il y en ait k qui soient marqués *(évidemment, p_k est nulle pour k plus grand que 20)*.
Je constate que trois sont marqués.
Quelle est la valeur de N qui rend p_3 maximale ?

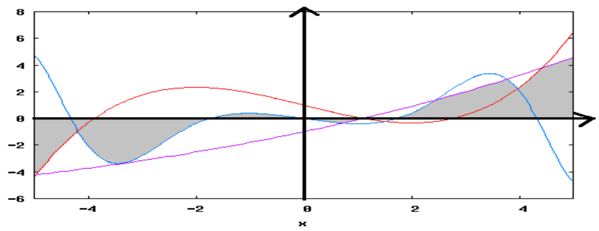
⋄4⋄ ♡ Calculez la limite quand x tend vers l'infini de $\left((3,1)^{1/x}-(1,3)^{1/x}\right)^x$.
Même question avec $\left((3,1)^{1/x}-(1,3)^{2/x}\right)^x$.

⋄5⋄ ♡ On note H la série harmonique. Montrez pour tout n :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}H_k=(n+1).H_n-n$ *(essayez une manipulation sur les sommes, et sinon tant pis, faites une récurrence)*.

⋄6⋄ ♣ Soit A une matrice donnée dans $M_2(\mathbb{R})$. On pose $N(A)=\{B\in M_2(\mathbb{R})\mid\det(A+B)=\det(A)+\det(B)\}$.
Déterminez $N(I_2)$. Déterminez $N(D)$ si D est une matrice diagonale *(a-t-on un espace vectoriel, si*

oui, de quelle dimension ?)
Même question avec diagonalisable. Que pouvez vous dire si A est dans $N(A)$.
Pouvez vous choisir A pour que $N(A)$ soit un groupe additif ?

$\boxed{\diamond 7 \diamond}$ Montrez que si f, g et h sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $Med(f,\ g,\ h)$ est continue. $Med(a, b, c)$ désigne le médian de a, b et c, c'est à dire celui des trois qui reste quand on a éliminé $Min(a, b, c)$ et $Max(a, b, c)$.



Rappel : la formule $Min(a, b) = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$ *permet d'établir sans recours aux ε la continuité de* $x \longmapsto Min(f(x),\ g(x))$.

$\boxed{\diamond 8 \diamond}$ ♡ La suite u vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.u_{n+1} - u_n$. Montrez qu'elle est périodique.

$\boxed{\diamond 9 \diamond}$ On définit la matrice suivante en taille $2.n$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

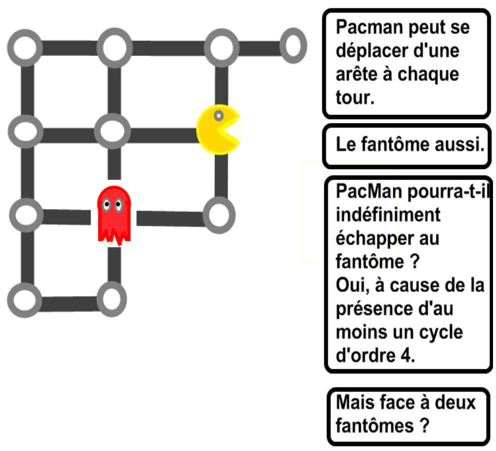
Donnez une formule pour son terme général.
Inversez la.
Calculez son déterminant (déjà pour n "petit").
Élevez la au carré. Calculez le déterminant de son carré.
Est elle diagonalisable *(question pour étoiles)*.

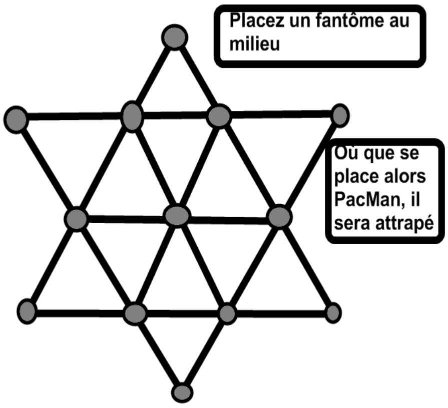
$\boxed{\diamond 10 \diamond}$ ♡ Soit f continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit $M(f) = x \longmapsto Sup(f(t),\ t \in [0,\ x])$. Déterminez $M(f)$ dans les cas

$f = \sin$	$f = \cos$	$f = x \longmapsto x^2 - x/2$	$f = x \longmapsto \|2 - 3.\|3.x - 1\|\|$	

Que signifie $M(f) = f$? Que signifie $M(f) = 2.f$?

$\boxed{\diamond 11 \diamond}$ On va jouer à PacMan. Sur un réseau *(fait de sommets et d'arêtes)*, PacMan se déplace. A chaque tour, il peut passer d'un sommet à un de ses sommets voisins *(ou rester sur place)*.
Il est poursuivi par des fantômes qui, de la même façon passent d'un sommet à un sommet voisin *(et peuvent aussi rester sur place)*.
• Si un des fantômes arrive sur la même case que PacMan, ce dernier a perdu.
• Si il parvient à se déplacer sans jamais se faire attraper, il a gagné.
Pour tout graphe, on détermine le nombre minimum de fantômes à utiliser pour être sûr d'attraper PacMan. Avec 0 fantômes, on ne l'attrape pas, avec un seul, ça dépend du graphe, avec $N - 1$ fantômes pour un graphe à N sommets, on l'attrapera *(sauf si ce graphe est non connexe, c'est à dire "pas d'un seul tenant" et que vous placez $N - 1$ fantômes en métropôle et que PacMan fait son Napoléon sur une île isolée du continent...)*.



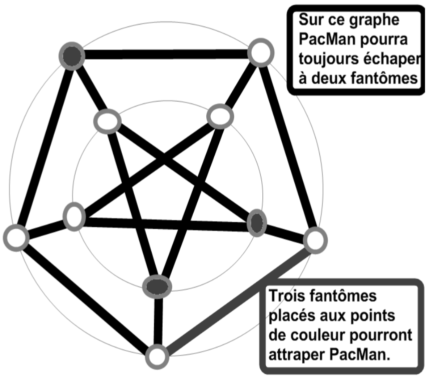


Montrez que sur le graphe "*en étoile de David*" représenté ci contre, un fantôme placé au milieu finira toujours par attraper PacMan, où que se place ce dernier.
Montrez que sur le graphe "*de Petersen n=5*"[a] représenté ci-dessous un ou deux fantômes ne pourront jamais attraper PacMan *(sauf si on a affaire à un PacMan suicidaire ou bête comme un MPSI1*[b]*).*

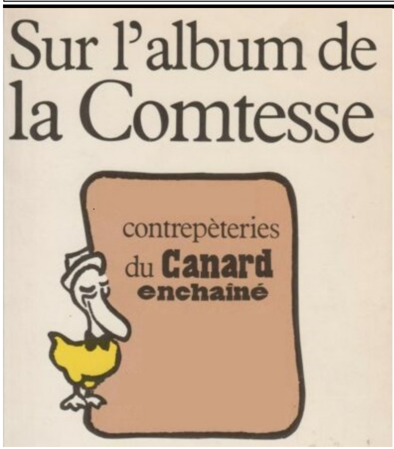
a. il n'y a pas de jeu de mots ou quoi que ce soit, c'est un classique de la théorie des graphes

b. en cas de diffusion du cahier en MPSI1, utiliser la formule MPSI(3-x)

Montrez qu'en revanche trois fantômes peuvent toujours attraper PacMan.
Pour faire un peu de maths dans l'esprit des concours : numérotez les sommets du 5-graphe de Petersen, écrivez la matrice d'incidence *(en position* $(i,\ k)$ *:* 1 *si* i *et* k *sont reliés,* 0 *sinon).*
Calculez son déterminant *(pourquoi ne dépend il pas de l'ordre dans lequel vous avez indexé les sommets).*
Montrez que 3 est valeur propre de cette matrice.
Montrez que 1 est valeur propre de cette matrice.
Si vous avez le courage : $(x-3).(x-1).(x^2-x-1)^2.(x^2+3.x+1)^2$.



M.P.S.I.2 2018	24891 points	2019 Charlemagne	Ξ CDV1 Ξ



Il y a beaucoup de porcs dans cette futaie. Cette bêcheuse dit qu'on l'a vraiment lésée. Ce mec vraiment nabot s'est fait piquer. Le dompteur se fâche quand on touche à son lion. Un errant dans l'élection. On a vu bien des chevelus rater de peu les Mines. Des disputes imposées ? Ils furent dans beaucoup trop de coups. Quand on est sensé, on ne sait plus communiquer. Le statisticien préfère les randomisations obsolètes. On a vu bien des chenus qui carquaient. Les soucis russes. L'écocide ravange les fèves. On cherche des pompes pour les vergers. Le climat chauffe trop les tôles. Vos pains suent. Sol si do mi. Une Turque lutte pour l'habitat marron. Du climat, qu'est ce qui étonne ?