Cahier de vacances

Ce document rassemble différents éléments pour réviser et « digérer » des points importants du cours de première année pour des étudiants à destination de PSI*. Il peut être utilisé régulièrement afin de ne pas perdre la main ou de manière plus intensive pour se rassurer avant la rentrée.

Le travail proposé est de difficulté raisonnable mais requiert de réfléchir à partir d'un cours de première année maîtrisé. Les questionnaires Vrai/Faux et à choix multiples (attention, il n'y a pas forcément unicité de la réponse) sont construits à partir d'erreurs d'anciens étudiants. Quelques exercices un tantinet plus ambitieux sont signalés avec le pictogramme .

Roger Mansuy
@roger_mansuy
roger.mansuy@gmail.com

Tenter, braver, persister, persévérer, être fidèle à soi-même, prendre corps à corps le destin, étonner la catastrophe par le peu de peur qu'elle nous fait, tantôt affronter la puissance injuste, tantôt insulter la victoire ivre, tenir bon, tenir tête.

Victor Hugo

1 – Préliminaires

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit dessiner les opérations ensemblistes, énoncer les définitions d'applications injectives, surjectives, bijectives.

Vrai/Faux

	V	F
Soit A, B, C trois parties. Alors, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.	☐	☐
Soit A, B, C trois parties. Alors, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.	☐	☐
L'intersection $4\mathbb{Z}\cap 6\mathbb{Z}$ est égale à $12\mathbb{Z}$.	☐	☐
La réunion $4\mathbb{Z}\cup 6\mathbb{Z}$ est égale à $2\mathbb{Z}$.	☐	☐
Soit A, B des parties finies. Alors, $\lvert A\cap B\rvert+\lvert A\cup B\rvert=\lvert A\rvert+\lvert B\rvert$.	☐	☐
Soit $n\in\mathbb{Z}$. Le cardinal de $[\![n-1,2n]\!]$ est $n+1$.	☐	☐
Soit $n\in\mathbb{Z}$. Le cardinal de $[\![-n-1,n]\!]$ est $2n$.	☐	☐
Il y a 10^k entiers naturels s'écrivant avec exactement k chiffres en base 10.	☐	☐
Il y a 50 entiers pairs dans l'intervalle $[0,100]$.	☐	☐
Soit $f:E\to F$ et $B\subset F$. Alors, $f(f^{-1}(B))=B$.	☐	☐
Soit $f:E\to F$ et B, $C\subset F$. Alors, $f^{-1}(B\cup C)=f^{-1}(B)\cup f^{-1}(C)$.	☐	☐
Soit $f:E\to F$ et B, $C\subset F$. Alors, $f^{-1}(B\cap C)=f^{-1}(B)\cap f^{-1}(C)$.	☐	☐
Soit $f:E\to F$ injective et $A\subset E$. Alors, la restriction de f à A est injective.	☐	☐

Exercices de révision

Exercice

Remplir les boites ☐ *avec l'un des symboles suivants $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$.*

1. *Soit $x\in\mathbb{N}$. Alors,*
$$x\geq 1 \quad \boxed{} \quad x>0$$
2. *Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors,*
$$x\geq 1 \quad \boxed{} \quad x>0$$
3. *Soit x, $y\in\mathbb{R}$. Alors,*
$$x=y \quad \boxed{} \quad x^2=y^2$$
4. *Soit x, $y\in\mathbb{R}_+$. Alors,*
$$x=y \quad \boxed{} \quad x^2=y^2$$
5. *Soit x, $y\in\mathbb{R}$. Alors,*
$$x^2+y^2=0 \quad \boxed{} \quad x=y$$
6. *Soit x, y, $z\in\mathbb{R}$. Alors,*
$$x=y \quad \boxed{} \quad xz=yz$$
7. *Soit x, $y\in\mathbb{R}$. Alors,*
$$\lvert x\rvert+\lvert y\rvert=0 \quad \boxed{} \quad \lvert x+y\rvert=0$$
8. *Soit x, $y\in\mathbb{R}$. Alors,*
$$x>0,\ y>0 \quad \boxed{} \quad xy>0$$
9. *Soit x, y, $z\in\mathbb{R}$. Alors,*
$$x>y>0,\ z>0 \quad \boxed{} \quad xz>yz$$
10. *Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors,*
$$x^2<x \quad \boxed{} \quad x<1$$

Exercice

Remplir les boites $\boxed{\quad}$ *avec l'un des symboles suivants* $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ *ou* $\Leftrightarrow$.

1. Soit $f, g : E \to F$. Alors,
$$f = g \; \boxed{\quad} \; f(E) = g(E)$$
2. Soit $f : E \to F$, $g : G \to F$, $h : E \to G$. Alors,
$$f = g \circ h \; \boxed{\quad} \; f(E) \subset g(G)$$
3. Soit $f : E \to F$. Alors,
$$x = y \; \boxed{\quad} \; f(x) = f(y)$$
4. Soit $f : E \to F$ surjective. Alors,
$$x = y \; \boxed{\quad} \; f(x) = f(y)$$
5. Soit $f : E \to F$ injective. Alors,
$$x = y \; \boxed{\quad} \; f(x) = f(y)$$
6. Soit $f : E \to F$ bijective. Alors,
$$x = y \; \boxed{\quad} \; f(x) = f(y)$$
7. Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$. Alors,
$$g \circ f \text{ est injective } \boxed{\quad} \; f \text{ est injective}$$
8. Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$. Alors,
$$g \circ f \text{ est injective } \boxed{\quad} \; f, g \text{ sont injectives}$$

Exercice

Considérons l'application f définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = \left\lfloor \frac{5n}{2} \right\rfloor$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{N}$ dans $f(\mathbb{N})$ puis déterminer sa réciproque.

Exercice

Considérons l'application
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n^2 + n + 1 \end{array} \right.$$

1. Montrer que f n'est pas injective.
2. Étudier l'injectivité de la restriction de f à $\mathbb{N}$.

Exercice ( )

Soit $f : E \to F$. Montrer que f est injective si, et seulement si,
$$\forall A \subset E, \qquad A = f^{-1}(f(A)).$$

2 – Complexes

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit rappeler les règles de manipulations de la conjugaison, des parties réelles et imaginaires, du module, se souvenir de la méthode de résolution des équations de degré 2 et énoncer la forme des racines n-ièmes de l'unité.

Vrai/Faux

	V	F
Soit $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\mathfrak{Re}(\lambda z) = \lambda \mathfrak{Re}(z)$.	☐	☐
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors, $\mathfrak{Re}(\frac{1}{z}) = -\mathfrak{Re}(z)$.	☐	☐
Soit $z \in \mathbb{C}$. La partie réelle de iz est la partie imaginaire de z.	☐	☐
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $z \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $\mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Im}(\bar{z})$.	☐	☐
Soit $x \in \mathbb{R}$. L'inverse de $\exp(ix)$ est $\exp(-ix)$.	☐	☐
Soit $x \in \mathbb{R}$. Le conjugué de $\exp(ix)$ est $\exp(-ix)$.	☐	☐
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Le module de $\exp(z)$ est $\exp(\lvert z\rvert)$.	☐	☐
Soit $z \in \mathbb{C}$. Le conjugué de l'exponentielle de z est l'exponentielle de $\overline{z}$.	☐	☐
Soit z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$. Alors, $\lvert z_1 - z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert - \lvert z_2\rvert$.	☐	☐
Soit z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$. Alors, $\lvert z_1 - z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$.	☐	☐
Le complexe $-j$ est racine de $X^2 - X + 1$.	☐	☐
Si m ne divise pas n, $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \{1\}$.	☐	☐

QCM

1. Le complexe $\frac{i-1}{i+1}$ vaut

   a. $(i-1)^2$
   b. $1^2 - i^2$
   c. i
   d. $2i$

2. L'ensemble des complexes z tels que $\mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Im}(z)$ est décrit par l'équation

   a. $\lvert z+1\rvert = \lvert z-i\rvert$
   b. $\lvert z-1\rvert = \lvert z-i\rvert$
   c. $\lvert z+1\rvert = \lvert z+i\rvert$
   d. $\lvert z-1\rvert = \lvert z+i\rvert$

   La quantité $\lvert z - z'\rvert$ s'interprète comme la distance entre les points d'affixes z et z'.

3. Les racines de $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ sont

   a. imaginaires pures
   b. $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$
   c. $e^{i\theta}$ et $\frac{1}{e^{i\theta}}$
   d. $\cos\theta$ et $\sin\theta$

4. Si $\omega \in \mathbb{U}_n$, alors

   a. $\omega^3 \in \mathbb{U}_{3n}$
   b. $\omega^3 \in \mathbb{U}_n$
   c. $\omega^3 \in \mathbb{U}_{\frac{n}{3}}$ si $n = 0[3]$
   d. $\omega^3 = 1$

Exercices de révision

Exercice

Dessiner les ensembles de points dont les affixes vérifient

- $|z+1| \leq 1$ *et* $|z| \leq 1$,
- $|z-1| = |\overline{z}+i|$.

Exercice

Parmi les triangles ABC *suivants, lesquels sont rectangles ? isocèles ? équilatéraux ?*

Affixes	*rectangle*	*isocèle*	*équilatéral*
$A(0),\ B(4i),\ C(-19)$			
$A(0),\ B(4i),\ C(2+2i)$			
$A(j),\ B(1),\ C(\overline{j})$			

Trouver les $z \in \mathbb{C}$ *tels que*

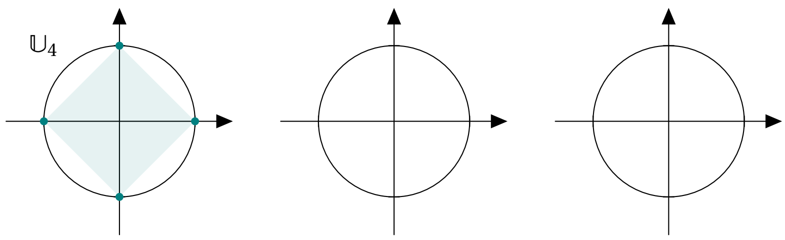
Affixes	*rectangle*	*isocèle*	*équilatéral*
$A(0),\ B(4i),\ C(z)$	✓	✓	$\varnothing$

Il y a six solutions à cette question et l'on peut le comprendre par un dessin judicieux.

Le module au carré est plus commode à manipuler que le module. En particulier, pour se débarrasser d'un complexe au dénominateur, on multiplie par le conjugué.

Exercice

Dessiner les points dont les affixes sont les racines 4*-ièmes de* -1 *puis de* i.



Exercice

Soit $a,\ b \in \mathbb{C}$. *Montrer que l'équation* $z^2 + a\overline{z} + b = 0$ *admet au plus quatre solutions.*

Exercice ( )

Résoudre l'équation $z^n = \overline{z}$.

Pour gérer une expression de la forme $e^{ia} \pm e^{ib}$, on factorise par $e^{i\frac{a+b}{2}}$.

Exercice

Déterminer un argument de $e^{i\frac{\pi}{5}} - i$.

Exercice

Déterminer la réciproque de l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \rightarrow & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z & \mapsto & \frac{z+i}{z-1} \end{array} \right.$$

3 – Fonctions usuelles

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit se souvenir des domaines de définition des fonctions trigonométriques réciproques.

Vrai/Faux

	V	F
La fonction $x \mapsto \lvert\cos(3\pi x)\rvert$ est $\frac{1}{3}$-périodique.	☐	☐
La composée de deux fonctions impaires est paire.	☐	☐
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n \in]x-1, x+1[$. Alors, $n = \lfloor x \rfloor$.	☐	☐
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lvert\ln(x)\rvert \leq \lvert x-1\rvert$.	☐	☐
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tous m, $n \in \mathbb{N}$, $x^m + x^n \leq x^{m+n}$.	☐	☐
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tous m, $n \in \mathbb{N}$, $1 + x^n \leq x^{m+n}$.	☐	☐
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2}$.	☐	☐
$\arccos(0) = 1$.	☐	☐
Pour tout $x \in [0, \pi]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.	☐	☐
Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$.	☐	☐

QCM

1. Si f est paire et g est impaire, alors $f \circ g$ est

   a. paire **b.** impaire **c.** on ne sait pas **d.** paire et impaire

2. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\sin x)^2 \end{array} \right.$ est

   a. injective et non surjective
   c. non injective et surjective
   b. non injective et non surjective
   d. injective et surjective

3. $\arccos(\cos \frac{17}{3}\pi)$ est égal à

   a. $\frac{17}{3}\pi$ **b.** $\frac{2}{3}\pi$ **c.** $\frac{1}{3}\pi$ **d.** $-\frac{1}{3}\pi$

4. La fonction arccos est dérivable sur

   a. $]0, \pi[$ **b.** $[0, \pi]$ **c.** $]-1, 1[$ **d.** $[-1, 1]$

5. L'ensemble des solutions de $\mathrm{ch}(x) = \mathrm{sh}(x)$ est

   a. $\{0\}$ **b.** $\{\pm 1\}$ **c.** $\{0, \pm 1\}$ **d.** $\varnothing$

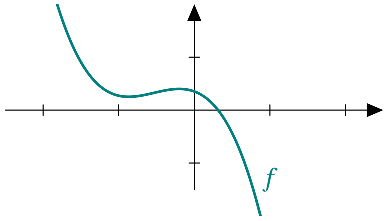
6. L'ensemble des solutions de $\tan x = \sqrt{3}$ est

   a. $\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
   c. $\{\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
   b. $\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
   d. $\{\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Exercices de révision

Exercice

Tracer les courbes représentatives de $g : x \mapsto f(x+1)$ *et* $h : x \mapsto f(2-x)$ *à partir de la courbe de* f *suivante*



Exercice

Étudier le signe sur $[0, 2\pi]$ *de la fonction* $x \mapsto \cos(2x) - \cos(3x)$.

Exercice

Déterminer les extremums de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ *sur un segment* $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Exercice

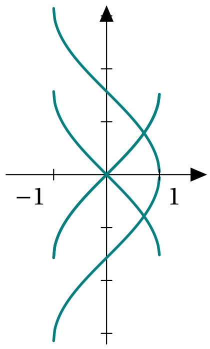
Déterminer l'abscisse du premier maximum local sur $\mathbb{R}_+^*$ *de* $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$.

Exercice

Déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ *tels que la fonction* $x \mapsto x^\alpha \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *admette une limite finie en* $+\infty$ *et en* 0.

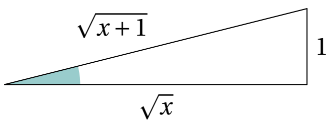
Exercice

Reconnaître sur la figure suivante les courbes représentatives de $x \mapsto \arccos(x)$, $x \mapsto -\arccos(x)$, $x \mapsto \arcsin(x)$, $x \mapsto \arcsin(-x)$ *et* $x \mapsto \frac{\pi}{2} - \arccos(x)$.



Exercice

Montrer que, pour tout $x > 0$, $\arctan \frac{1}{\sqrt{x}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.



4 – Suites

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit rappeler la définition quantifiée de convergence d'une suite réelle ou complexe et énoncer le théorème d'encadrement et le théorème de limite monotone.

Vrai/Faux

	V	F
Si la suite $(u_n)_n$ converge, alors elle est bornée.	☐	☐
Si la suite strictement positive $(u_n)_n$ converge, alors la suite $(\ln u_n)_n$ converge.	☐	☐
Si la suite $(\cos u_n)_n$ converge, alors la suite $(\sin u_n)_n$ converge.	☐	☐
Si la suite réelle $(u_n^3)_n$ converge, alors la suite $(u_n^2)_n$ converge.	☐	☐
Si la suite complexe $(u_n^3)_n$ converge, alors la suite $(u_n^2)_n$ converge.	☐	☐
Si la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_n$ converge, alors la suite $(u_n)_n$ converge.	☐	☐
Une suite positive de limite nulle est décroissante à partir d'un certain rang.	☐	☐
Une suite monotone converge.	☐	☐
Deux suites bornées $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $u_n - v_n \to 0$ convergent vers la même limite.	☐	☐
Le maximum de deux suites réelles convergentes définit une suite convergente.	☐	☐
Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite alors $(u_n)_n$ converge.	☐	☐

Calculs

Associer à chaque terme général de la suite de gauche, la limite correspondante à droite

$\frac{n+1}{n}$ •	
$n^2 e^{-n^3}$ •	• 0
$\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$ •	• e^{-2}
$\arctan(n)$ •	• $\ln 2$
$\frac{e^n+1}{e^{2n}+1}$ •	• $\frac{\pi}{4}$
$\frac{n+n^2}{\sqrt{n+n^2}}$ •	• 1
$n^3 e^{-n^2}$ •	• $\frac{\pi}{2}$
$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2}$ •	
$\arccos(\frac{1}{n})$ •	

Exercices de révision

Exercice

Étudier (par encadrement) la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie, pour tout $n \geq 1$,

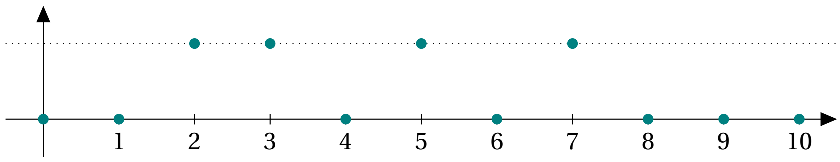
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^{\frac{3}{2}}}}.$$

Exercice

Établir la convergence de la suite $(u_n)_n$ vérifiant, pour tous n et $p > 0$, $0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}$.

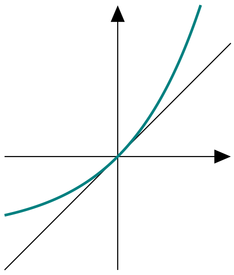
Exercice

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = 1$ si n est premier, 0 sinon.



Exercice

Étudier la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout n, $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$.



Exercice

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n, $u_{n+1} = (n+1)u_n + a^{n+1}$. Montrer que, pour tout n,

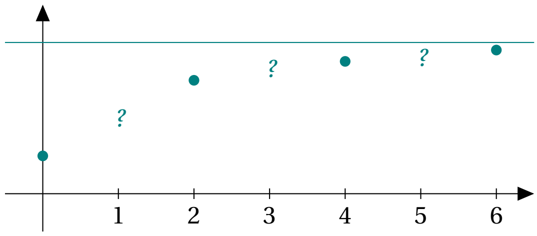
$$u_n = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k!}.$$

Exercice ( )

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a > 1 > b > 0$. Déterminer les valeurs de u_0 telles que la suite $(u_n)_n$ vérifiant, pour tout n, $u_{n+1} = au_n + b^{n+1}$ soit convergente.

Exercice

Soit $(u_n)_n$ croissante telle que $(u_{2n})_n$ converge. Montrer que $(u_n)_n$ converge.



5 – Continuité

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit énoncer la définition de la continuité en un point, le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème des « bornes atteintes » (avec leurs hypothèses).

Vrai/Faux

	V	F
La composée de deux fonctions continues est continue.	☐	☐
Une fonction strictement monotone réalise une bijection entre un intervalle I et $f(I)$.	☐	☐
Pour toute fonction continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ et tout $c\in]a,b[$, il existe y entre $f(a)$ et $f(b)$ tel que $y=f(c)$.	☐	☐
Une fonction continue est bornée.	☐	☐
Une fonction périodique est bornée.	☐	☐
Si une fonction f est bornée, strictement positive, alors $\frac{1}{f}$ est bornée.	☐	☐
Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ni minorée, ni majorée est surjective.	☐	☐
Si $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ bornée sur tous les segments inclus dans $]a,b[$, f est bornée.	☐	☐
L'image réciproque d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.	☐	☐
La fonction $x\mapsto\frac{\cos x-1}{\lvert x\rvert}$ est prolongeable par continuité en 0.	☐	☐

Exercices de révision

Exercice

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bornée. Montrer que $f\circ g$ et $g\circ f$ sont bornées.

Exercice

Montrer que la fonction $f:x\mapsto\frac{\sin x}{x}$ est bornée sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice

Déterminer les A, $B\in\mathbb{R}$ tels que $A\cos x+B\sin x\to 0$ quand $x\to+\infty$.

Exercice

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. À quelle condition la fonction $x\mapsto f(x-\lfloor x\rfloor)$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice (🔥)

Étudier la continuité sur $\mathbb{R}_+$ de $f:x\mapsto\sup\left\{\frac{x^n}{n!},\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

Exercice

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $x_1,\dots,x_n\in]0,1[$. Montrer qu'il existe $c\in]0,1[$ tel que

$$f(c)=\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}.$$

Exercice (*théorème des cordes universelles*)

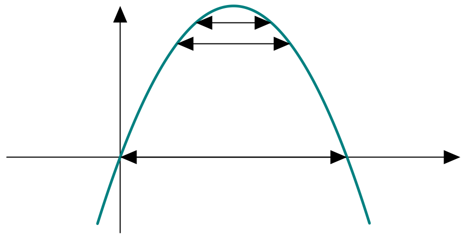
Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0)=f(1)$ et $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

1. *Posons*

$$g:\left\{\begin{array}{ccc}[0,1-\frac{1}{n}] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\end{array}\right.$$

Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.

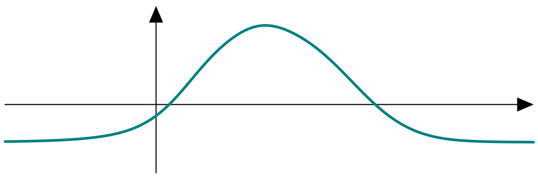
2. En déduire qu'il existe $\alpha_n \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$ tel que $f\left(\alpha_n + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha_n)$.



Exercice

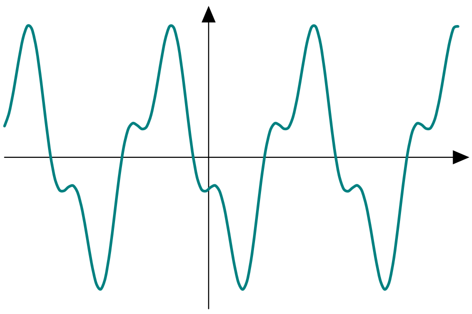
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et admettant des limites finies ℓ et ℓ' en $+\infty$ et $-\infty$.

1. *Montrer que f est bornée.*
2. *Montrer que si $\ell = \ell'$, alors f atteint au moins l'une de ses bornes.*



Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique.
Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(\mathbb{R}) = f\left(\left[a, a+\frac{T}{2}\right]\right)$.



Exercice ( )

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Établir la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \max\left\{f\left(\frac{k}{n}\right),\ k \in [\![0, n]\!]\right\}.$$

6 – Dérivabilité

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit énoncer les théorèmes de Rolle et des accroissements finis, rappeler le lien entre signe de la dérivée et monotonie (avec les hypothèses).

Vrai/Faux

	V	F
La dérivée de $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ est $x \mapsto \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.	☐	☐
La fonction $x \mapsto \lvert x\rvert$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.	☐	☐
La fonction $x \mapsto x\lvert x\rvert$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.	☐	☐
Si f admet un maximum en a et est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.	☐	☐
La dérivée d'un polynôme réel scindé à racines simples est scindée à racines simples.	☐	☐
Si une fonction réelle est de classe $\mathscr{C}^n$ et admet $n+1$ zéros distincts sur un intervalle, alors sa dérivée n-ième s'annule au moins une fois.	☐	☐
Si f est à dérivée positive sur un intervalle, alors f est croissante.	☐	☐
Une fonction dérivable à dérivée nulle sur son domaine de définition est constante.	☐	☐
Si f est dérivable et strictement croissante, alors f' est strictement positive.	☐	☐
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable et vérifie $f'(0) > 0$, alors il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) \geq f(0)$ pour tout $x \in [0, \eta[$.	☐	☐
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable et vérifie $f'(0) > 0$, alors f est strictement croissante sur un voisinage de a.	☐	☐
Si f admet un minimum en a, alors il existe $\eta > 0$ tel que f soit croissante sur $[a, a+\eta[$.	☐	☐

QCM

1. La dérivée de $x \mapsto \frac{2x^2-1}{1-x^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ est

   a. $x \mapsto \frac{-6x}{(x^2-1)^2}$

   b. $x \mapsto \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$

   c. $x \mapsto \frac{6x}{(x^2-1)^2}$

   d. $x \mapsto \frac{2x}{(x^2-1)^2}$

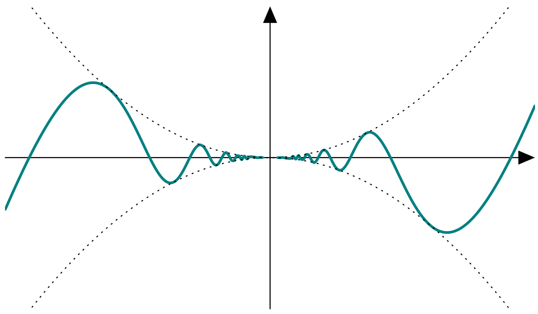
2. La fonction $x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ prolongée par continuité en 0

   a. n'est pas dérivable 0

   b. est seulement dérivable en 0

   c. est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de 0

   d. est de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0



Calculs

Exercice

Calculer la dérivée des fonctions composées suivantes

- $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}(1-x)^2}$,
- $x \mapsto \ln(1+\cos^2(x))$,
- $x \mapsto \arctan \frac{1}{x^2}$,
- $x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$.

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée n-ième des fonctions $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \mapsto \ln x$.

Exercice

Déterminer à quelles conditions la fonction suivante se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{Ae^x + Be^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{Ce^x + De^{-x}}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice

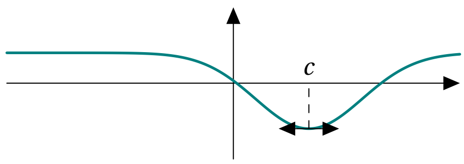
Montrer que la fonction suivante est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0, \\ \exp \frac{1}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercices de révision

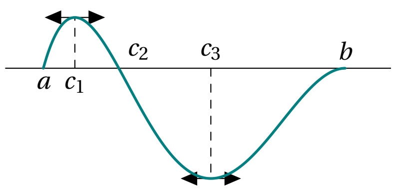
Exercice

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ admettant la même limite finie en $+\infty$ et $-\infty$.
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.



Exercice

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$ et $f'(a)f'(b) > 0$.
Montrer qu'il existe $a < c_1 < c_2 < c_3 < b$ tels que $f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0$.



Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et dérivable telle que f' tend vers ℓ en $+\infty$. Montrer que $\ell = 0$.

7 – Études locales

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit reprendre la liste des développements limités usuels en 0, énoncer la formule de Taylor-Young.

Vrai/Faux

	V	F
$x\cos\frac{1}{x} \longrightarrow 0$ quand $x \to 0$.	☐	☐
$\frac{1}{x}\cos x \longrightarrow 0$ quand $x \to 0$.	☐	☐
$\frac{1}{\sqrt{x}}\sin x \longrightarrow 1$ quand $x \to 0$.	☐	☐
Si la fonction $\exp\circ f$ admet une limite finie en $+\infty$, alors la fonction f admet une limite finie en $+\infty$.	☐	☐
Si la fonction $\ln\circ f$ admet une limite finie en $+\infty$, alors la fonction f admet une limite finie en $+\infty$.	☐	☐
Si $f(x) \underset{a}{\sim} 0$, alors f est nulle sur un voisinage de a.	☐	☐
Si $f(x) \underset{0}{=} o(x)$, alors $f(x)^2 \underset{0}{=} o(x^2)$.	☐	☐
Si $f(x) \underset{0}{\sim} h(x)$, alors $xf(x) \underset{0}{\sim} (x+1)h(x)$.	☐	☐
La partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0)$ d'une fonction paire est paire.	☐	☐
La partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0)$ d'une fonction périodique est périodique.	☐	☐
Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors $x \mapsto f(x+a)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.	☐	☐
Si f est deux fois dérivable en 0 et $f(x) \underset{0}{=} 1+ax+bx^2+o(x^2)$, alors $f''(0)=b$.	☐	☐

QCM

1. $\sin(\frac{1}{n+2}) \sim$

   a. $\frac{1}{n+2}$ **b.** $\frac{1}{n}$ **c.** 0 **d.** $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}$

2. $\sqrt{n^2+n}-n \sim$

   a. $\frac{1}{n}$ **b.** $\frac{1}{2}$ **c.** $\sqrt{n}$ **d.** n

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} =$

   a. e^6 **b.** $e^{\frac{3}{2}}$ **c.** $e^{\frac{2}{3}}$ **d.** $+\infty$

4. $\frac{x+2}{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim}$

   a. $\frac{1}{x}$ **b.** $\frac{1}{x}+1$ **c.** $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ **d.** $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$

5. Le terme d'ordre n dans le développement limité en 0 de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est

   a. $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{1}$ **b.** $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}$ **c.** $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1}$ **d.** $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$

6. Le terme d'ordre $2n$ dans le développement limité en 0 de $x \longmapsto \ln(1+x^2)$ est

a. $\frac{(-1)^n}{2n}$ **b.** $-\frac{(-1)^n}{2n}$ **c.** $\frac{(-1)^n}{n}$ **d.** $-\frac{(-1)^n}{n}$

Exercices de révision

Exercice

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites équivalentes de limite $+\infty$.

1. *Montrer que* $\ln u_n \sim \ln v_n$.
2. *Montrer que l'affirmation* $\exp u_n \sim \exp v_n$ *peut être fausse.*

Exercice

Déterminer un développement asymptotique à l'ordre $\frac{1}{n^2}$ *de* $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

Exercice

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$.
Déterminer parmi les affirmations suivantes celles qui sont correctes

1. $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
2. $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
3. $u_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
4. $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice

Déterminer le DL en 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué

1. $x \longmapsto \arctan x$ *à l'ordre* 5.
2. $x \longmapsto \frac{\operatorname{ch}(x)}{\cos(x)}$ *à l'ordre* 5.

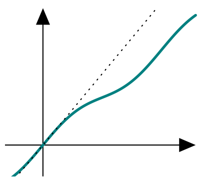
Exercice

Soit f et g des fonctions réelles telles que $f(x) \underset{0}{=} x^2 + x^3 - x^4 + o(x^4)$ *et* $g(x) \underset{0}{=} -x^3 + 2x^4 + o(x^6)$.
Déterminer l'ordre maximal auquel on peut développer en 0 les fonctions $f+g$, $f \times g$, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice

Soit $f : x \longmapsto 2x + \sin x$.

1. *Montrer que f est une bijection de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
2. *Calculer un DL à l'ordre 3 en 0 de f^{-1}.*



Exercice ( )

Déterminer deux fonctions f et g équivalentes en 0 telles que f est strictement croissante et g ne l'est sur aucun intervalle de la forme $[-a, a]$.

8 – Équations différentielles

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit se souvenir des solutions des équations linéaires à coefficients constants d'ordres 1 et 2.

Vrai/Faux

	V	F
Les solutions de $y' + ay = 0$ sont de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$.	☐	☐
Les solutions de $y' = a(x)y$ sont de la forme $x \mapsto Ce^{a(x)x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.	☐	☐
Les solutions de $y' = \frac{1}{1+x^2}y$ sont de la forme $x \mapsto Ce^{\arctan(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$.	☐	☐
Les solutions de $y' = iy$ sont de la forme $x \mapsto A\cos x + B\sin x$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.	☐	☐
Les solutions de $y' = ixy$ sont de la forme $x \mapsto Ae^{i\frac{x^2}{2}}$ avec $A \in \mathbb{R}$.	☐	☐
Les solutions de $y' + ay = 0$ sont deux à deux proportionnelles.	☐	☐
Les solutions de $y'' + ay' = 0$ sont deux à deux proportionnelles.	☐	☐
Les solutions de $y'' - y = 0$ sont de la forme $x \mapsto A\cos x + B\sin x$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.	☐	☐
Les solutions de $y'' - 3y' + 2y = 0$ sont de la forme $x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.	☐	☐
Les solutions de $y'' - 2y' + 2y = 0$ sont de la forme $x \mapsto e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.	☐	☐

QCM

1. La fonction $x \mapsto e^{2x}$ est solution de

   a. $y'' = 2y' + y$
   b. $y'' = y' + y$
   c. $y''' = 4y'$
   d. $y' + 2y = 0$

2. Les fonctions sin et cos sont solutions de

   a. $y'' = y$
   b. $y'' = -y$
   c. $y^{(4)} = y$
   d. $y^{(4)} = -y$

3. Si f est solution de $y' = ay + b(x)$, les autres solutions sont

   a. $x \mapsto Cf(x) + e^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$
   b. $x \mapsto f(x) + Ce^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$
   c. $x \mapsto f(x) + e^{ax} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$
   d. $x \mapsto f(x) \times e^{ax} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

Calcul

Exercice

Soit $\omega > 0$. Résoudre l'équation $y'' - \omega^2 y = e^{\omega x}$.

Exercice

Déterminer les solutions réelles de l'équation $y'' + (3+i)y' + (2+2i)y = 0$.

Exercices de révision

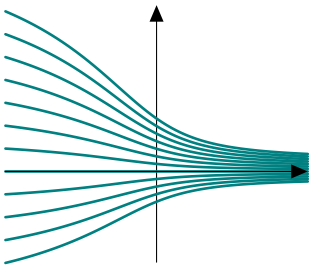
Exercice

Commenter l'affirmation (correcte mais peu pertinente) suivante :

> *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation $y' = 2y$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = Ae^{3x}$.*

Exercice

Justifier que les courbes représentatives des solutions distinctes d'une équation différentielle d'ordre 1 (sous forme résolue) forment une partition du plan.

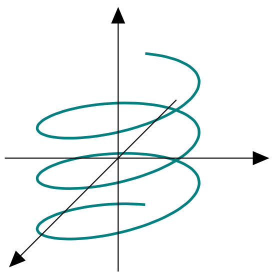


Exercice

Soit $\omega > 0$. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme dirigé selon l'axe Oz est régi par le système différentiel (en la variable t) suivant

$$\begin{cases} x'' &= \omega y' \\ y'' &= -\omega x' \\ z'' &= 0 \end{cases}$$

En considérant la fonction auxiliaire $u = x' + i y'$, résoudre ce système différentiel.



Exercice

Soit f et g deux solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \left(1 + \tfrac{2}{x}\right)y' + \left(1 + \tfrac{1}{x}\right)y = 0.$$

Montrer que la fonction $W : x \mapsto f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$ vérifie une équation différentielle ; en déduire l'expression de W.

9 – Intégration

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit réviser les primitives usuelles puis énoncer les formules d'intégration par parties et de changement de variables.

Vrai/Faux

	V	F
$\int_2^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}$.	☐	☐
Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul. Une primitive de $x \mapsto \exp(zx)$ est $x \mapsto \frac{1}{z}\exp(zx)$.	☐	☐
Une primitive de $x \mapsto \ln x$ est $x \mapsto x\ln x - x - 1$.	☐	☐
Une primitive de $x \mapsto \ln(1-x)$ est $x \mapsto (1-x)\ln(1-x) - (1-x)$.	☐	☐
Une primitive de $x \mapsto \sin^2(2x)$ est $x \mapsto \frac{1}{6}\sin^3(2x)$.	☐	☐
Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ est $x \mapsto \frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}$.	☐	☐
Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}$ est $x \mapsto \arctan\frac{x}{a}$.	☐	☐
Une primitive de $x \mapsto \cos(-x+1)$ est $x \mapsto \sin(x-1)$.	☐	☐
Une primitive de tan est $x \mapsto -\ln\lvert\cos x\rvert$.	☐	☐

QCM

1. Les primitives d'une fonction impaire non nulle sont

   a. toutes paires
   b. toutes impaires
   c. pour certaines ni paire, ni impaire
   d. périodiques

2. Une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ est

   a. $x \mapsto x\ln x - 1$
   b. $x \mapsto x\ln x + 1$
   c. $x \mapsto x\ln x - x$
   d. $x \mapsto x\ln x + x$

3. Une primitive de $x \mapsto -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ est

   a. $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$
   b. $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$
   c. $x \mapsto 2e^{-\frac{x^2}{2}}$
   d. $x \mapsto e^{-x^3}$

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. La dérivée de $x \mapsto \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est

   a. $x \mapsto 2f(x)$
   b. $x \mapsto f(x) - f(-x)$
   c. $x \mapsto f(x) + f(-x)$
   d. $x \mapsto 0$

Calculs

Exercice

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^1 t^2 e^t\,\mathrm{d}t$
2. $\int_0^{\pi/2} t^2 \cos t\,\mathrm{d}t$

Exercice

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^{\pi/2} \sin t \cos^2 t \,\mathrm{d}t$
2. $\int_0^{\pi/2} \sin t \cos^3 t \,\mathrm{d}t$
3. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 t \,\mathrm{d}t$
4. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cos^3 t \,\mathrm{d}t$

Exercice

Déterminer les primitives de $x \mapsto \frac{x+1}{x^2+x+1}$.

Exercices de révision

L'IPP sert alternativement à faire baisser le degré de polynômes, faire disparaître des fonctions à dérivées simples, obtenir des équivalents de primitives (en trouvant un crochet « dominant » la nouvelle intégrale), trouver des relations de récurrence...

Exercice (*Intégrales de Wallis*)

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \,\mathrm{d}x$ *et, pour tout* $n \geq 1$, $I_n = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} \,\mathrm{d}t$.

1. *Déterminer une relation de récurrence satisfaite par la suite* $(W_n)_n$.
2. *Déterminer une relation de récurrence satisfaite par la suite* $(I_n)_n$.
3. *En posant* $t = \tan\theta$, *relier* I_n *à des termes de la suite* $(W_n)_n$.

Exercice

À l'aide d'une intégration par parties, calculer un équivalent en $+\infty$ *de* $x \mapsto \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

Exercice

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* $f_n : x \mapsto \int_x^1 (\ln t)^n \,\mathrm{d}t$ *admet une limite finie en* 0.

Exercice (🔥)

La fonction $x \mapsto \int_x^{2x} \sin \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t$ *admet-elle une limite finie en* 0 *?*

Exercice

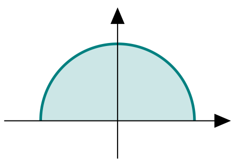
Posons

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+2\sin(x)\cos(x)}} \,\mathrm{d}x, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+2\sin(x)\cos(x)}} \,\mathrm{d}x.$$

1. *Calculer* $I + J$.
2. *Montrer que* $I = J$ *et en déduire la valeur de* I.

Exercice

Justifier sans calcul que $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.



10 – Séries numériques

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit rappeler la nuance entre convergence et convergence absolue, la règle de convergence pour les séries de Riemann, les règles de comparaison (inégalité, grand O).

Vrai/Faux

	V	F
Si la série de terme général $u_n \in \mathbb{R}$ converge, alors la suite u_n converge.	☐	☐
Si la suite u_n converge vers 0, alors la série de terme général u_n converge.	☐	☐
La série de terme général $n^{-\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.	☐	☐
La série de terme général ρ^n converge si, et seulement si, $\lvert\rho\rvert < 1$.	☐	☐
La série de terme général $n\rho^n$ converge si, et seulement si, $\lvert\rho\rvert < 1$.	☐	☐
Si la série de terme général u_n converge, alors la série de terme général $\lvert u_n\rvert$ converge.	☐	☐
La série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.	☐	☐
La série de terme général $\cos(n)$ converge.	☐	☐
Si la série de terme général $u_n \in \mathbb{R}$ converge, alors la série de terme général u_n^2 converge.	☐	☐
La somme de deux séries divergentes est divergente.	☐	☐

Calculs

Exercice

On admet que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ admet pour somme $\frac{\pi^2}{6}$. Déterminer les sommes des séries de terme général $\frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice

Déterminer les $r \geq 0$ tels que la série de terme général $(2+\frac{1}{n})^n r^n$ converge.

Exercice

Considérons la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n+1}} & \text{si } n = 0[3] \\ \frac{j}{\sqrt{n+1}} & \text{si } n = 1[3] \\ \frac{j^2}{\sqrt{n+1}} & \text{si } n = 2[3] \end{cases}$$

La série de terme général u_n est-elle convergente ? absolument convergente ?

Exercice

Soit $\alpha > 0$.

1. *Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.*
2. *En déduire la nature de la série de terme général $\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$*

Exercice

Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent du reste de la série de Riemann $\frac{1}{n^\alpha}$.
INDICATION : *on pourra utiliser la méthode des « rectangles », c'est-à-dire la comparaison à une intégrale.*

Exercice

Déterminer un équivalent de $\frac{1}{\sum\limits_{k=2}^{n} (\ln k)^2}$.

INDICATION : *on pourra utiliser la méthode des « rectangles », c'est-à-dire la comparaison à une intégrale.*

Exercices de révision

Exercice

Soit P, Q *deux polynômes tels que* Q *n'admet pas de racine dans* $\mathbb{N}$. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur* $\deg P$, $\deg Q$ *pour que la série de terme général* $\frac{P(n)}{Q(n)}$ *converge.*

Exercice

Déterminer les suites $(u_n)_n$ *périodiques telles que la série de terme général* u_n *converge.*

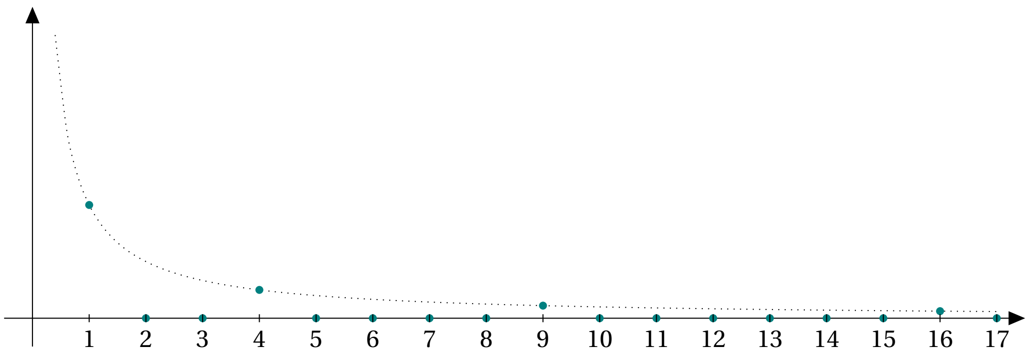
Exercice

Soit $(u_n)_n$ *une suite de réels positifs. Montrer que la série de terme général* u_n *converge si, et seulement si, la série de terme général* $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ *converge.*

INDICATION : *on pourra, pour le sens retour, exprimer* u_n *en fonction de* v_n.

Exercice

1. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite décroissante telle que la série de terme général* u_n *converge.*
   (a) *Justifier que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
   (b) *Montrer que* $u_n = o(\frac{1}{n})$.
   INDICATION : *on pourra considérer une quantité de la forme* $\sum_{k=n}^{2n} u_k$.
2. *Exhiber une suite positive* $(u_n)_n$ *telle que la série de terme général* u_n *converge et pourtant* $u_n \neq o(\frac{1}{n})$.



11 – Polynômes

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit rappeler les définitions et caractérisations de racines multiples, la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Vrai/Faux

	V	F
Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg P \neq \deg Q$, $\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.	☐	☐
Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(-P) = -\deg P$.	☐	☐
Un polynôme constant est de degré nul.	☐	☐
Le reste dans la division entre deux polynômes à coefficients entiers est à coefficients entiers.	☐	☐
Si $z \in \mathbb{C}$ est racine du polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, alors, $\overline{z}$ l'est aussi.	☐	☐
Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.	☐	☐
Soit $n > 2$. Le polynôme $X^n - nX + 1$ est à racines simples dans $\mathbb{C}$.	☐	☐
Un complexe z est une racine multiple du polynôme P si, et seulement si, $P'(z) = 0$.	☐	☐
Les racines du polynôme $X^{2n} - 1$ sont simples.	☐	☐
Le polynôme $X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.	☐	☐
Le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.	☐	☐

QCM

1. Soit P de degré $n \in \mathbb{N}$, alors le degré de $X^n P(\frac{1}{X})$ est

   a. n **c.** $n-1$

   b. non défini (ce n'est pas un polynôme) **d.** ça dépend

2. Les racines rationnelles du polynôme $6X^4 + 48X + 1$ sont

   a. $\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ **c.** inexistantes

   b. $\pm 3, \pm 2, \pm 1$ **d.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

3. Le complexe i est racine du polynôme $iX^2 - iX - 1 + i$; l'autre racine est

   a. $1+i$ **c.** $-1-i$

   b. $1-i$ **d.** $-1+i$

4. La somme des racines complexes du polynôme $X^{1515} + 18X^{1514} + 42X + 7$ est

   a. 18 **c.** 7

   b. -18 **d.** -7

Calculs

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. *Calculer a_n et $b_n \in \mathbb{C}$ tels que $X^n = (X^2+1)Q(X) + a_n X + b_n$ (sans calculer $Q \in \mathbb{C}[X]$).*
2. *Calculer a_n, b_n et $c_n \in \mathbb{C}$ tels que $X^n = (X-1)^3 Q(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$ (sans calculer $Q \in \mathbb{C}[X]$).*

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n+1}+1$.

Exercice

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ non nuls tels que $(P')^2 = P$.

Exercice

Soit $P = X^8 - 1$. Exprimer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_8} \frac{1}{2-\omega}$ en fonction de valeurs des polynômes P et P'.

Exercices de révision

Exercice

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k.$$

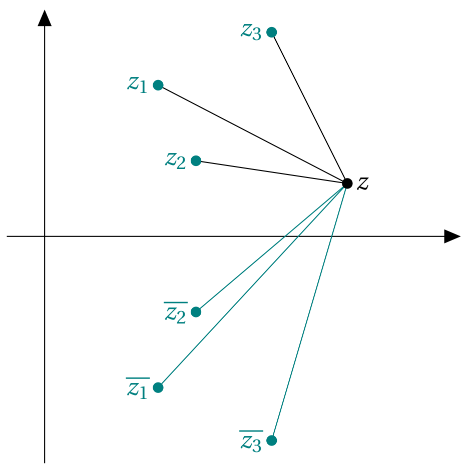
Montrer que les racines de P_n sont simples.

Exercice

Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant unitaire est scindé sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq \left|\mathfrak{Im}(z)\right|^{\deg P}$.

Exercice ( )

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant dont toutes les racines appartiennent au demi-plan complexe d'équation $\mathfrak{Im}(z) > 0$.
Soit A (respectivement B) le polynôme obtenu à partir de P en remplaçant les coefficients par leurs parties réelles (respectivement imaginaires).
Montrer que les racines de A sont réelles.

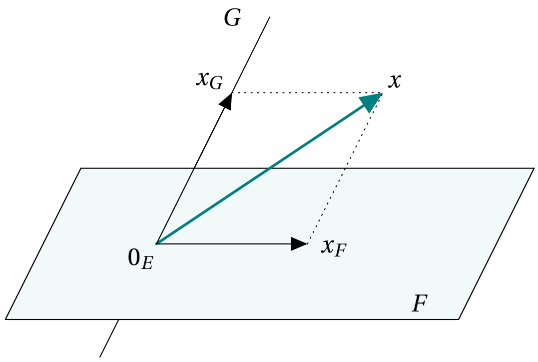


12 – Espaces vectoriels

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit rappeler les caractérisations de sous-espace, d'application linéaire et les définitions de somme directe et de supplémentaires.

Vrai/Faux

	V	F
Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F+G=F\cap G$. Alors, $F=G$.	☐	☐
$\mathrm{Vect}(\varnothing)=\varnothing$.	☐	☐
Soit A, B deux parties de E. Alors, $\mathrm{Vect}(A\cup B)=\mathrm{Vect}A+\mathrm{Vect}B$.	☐	☐
Une famille de vecteurs deux à deux non colinéaires est libre.	☐	☐
Tout élément du sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs $x_1,\ldots,x_n$ est une combinaison linéaire de ces vecteurs.	☐	☐
Tout élément du sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs $x_1,\ldots,x_n$ est une combinaison linéaire de deux de ces vecteurs.	☐	☐
Si G et H sont supplémentaires dans E et F est un sous-espace de E, alors $G\cap F$ et $H\cap F$ sont des supplémentaires dans F.	☐	☐



QCM

1. Parmi les sous-espaces suivants, lesquels sont des supplémentaires de l'espace des polynômes pairs dans $\mathbb{R}[X]$?

   a. l'espace $\mathscr{I}$ des polynômes impairs

   b. $\{P(X)+X^2,\ P\in\mathscr{I}\}$

   c. $\{P\in\mathbb{R}[X],\ P(1)=0\}$

   d. $\mathrm{Vect}(X^{3n})_{n\in\mathbb{N}}$

2. Les sous-espaces $\{f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(1)=0\}$ et $\{f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ y'=y\}$ sont

   a. complémentaires dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

   b. supplémentaires dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

   c. en somme directe

   d. de somme égale à $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Exercices de révision

Exercice

Déterminer parmi les ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

1. *l'ensemble des suites positives à partir d'un certain rang*
2. *l'ensemble des suites bornées*
3. *l'ensemble des suites monotones*
4. *l'ensemble des suites somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante*
5. *l'ensemble des suites convergentes*
6. *l'ensemble des suites périodiques*

Pour montrer que F est un espace-vectoriel, on montre souvent qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E ; il faut pour cela les trois points suivants :
- $F \subset E$ (souvent élémentaire)
- $F \neq \emptyset$ (souvent on indique que $0_E \in F$)
- $\forall x, y \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x + \lambda y \in F$.

Exercice

Remplir les boites $\boxed{}$ *avec l'un des symboles suivants $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$.*

1. *Soit x, y et z éléments d'un espace vectoriel E. Alors,*
$$(x, y, z) \text{ est liée } \boxed{}\ x \in \mathrm{Vect}(y, z)$$
2. *Soit A, B des parties d'un espace vectoriel E. Alors,*
$$A \subset B\ \boxed{}\ \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$$
3. *Soit F, G des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Alors,*
$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel } \boxed{}\ F \subset G$$
4. *Soit F, G des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Alors,*
$$F + G = G\ \boxed{}\ F \subset G$$

Exercice

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $F + G = E$. Notons F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrer que $E = F' \oplus G$.

Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $x, y \in E$.
Montrer que $F + \mathrm{Vect}(x) = F + \mathrm{Vect}(y)$ si, et seulement si, il existe $z \in F$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tels que $\alpha\beta \neq 0$ et $z + \alpha x + \beta y = 0_E$.

13 – Applications linéaires

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit écrire la définition de noyau et d'image d'une application linéaire.

Vrai/Faux

	V	F
Soit $A \subset E$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors, $u(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(u(A))$.	☐	☐
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et G, H deux sous-espaces de E. Alors, $u(G+H) = u(G) + u(H)$.	☐	☐
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors, $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$ sont supplémentaires.	☐	☐
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors, u est injectif si, et seulement si, $\mathrm{Ker}\, u = \{0_E\}$.	☐	☐
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors, $\mathrm{Im}\, u$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$.	☐	☐
Soit u, $v \in \mathscr{L}(E)$. Alors, $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$.	☐	☐
Soit u, $v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Alors, $u = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ou $v = 0_{\mathscr{L}(E)}$.	☐	☐
Un endomorphisme p est un projecteur si, et seulement si, $\mathrm{Id} - p$ est un projecteur.	☐	☐
Un endomorphisme p est un projecteur si, et seulement si, $-p$ est un projecteur.	☐	☐
Si p est un projecteur, alors $p - 2\mathrm{Id}$ est une symétrie.	☐	☐
Si p est un projecteur, alors $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id})$.	☐	☐

QCM

1. L'application $u : (x, y, z) \mapsto (2z, -y, \frac{1}{2}x)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$

   a. n'est pas linéaire ;
   b. est une homothétie ;
   c. est un projecteur ;
   d. est une symétrie.

2. L'application identité d'un espace vectoriel E est

   a. inversible ;
   b. une homothétie ;
   c. un projecteur ;
   d. une symétrie.

3. L'application nulle d'un espace vectoriel E est

   a. inversible ;
   b. une homothétie ;
   c. un projecteur ;
   d. une symétrie.

Exercices de révision

Exercice

Soit u, $v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = u$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k \circ v - v \circ u^k$.

Exercice

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \rightarrow & \mathscr{L}(E) \\ v & \mapsto & u \circ v - v \circ u \end{array} \right.$$

Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la composée φ^k.

Exercice

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *distincts. Montrer que les sous-espaces* $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$ *et* $\operatorname{Ker}(u - \mu \mathrm{Id})$ *sont en somme directe.*

Pour un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, le sous-espace, appelé sous-espace propre, de u défini par $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$ est l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $u(x) = \lambda x$.
En particulier, pour $\lambda = 0$, on retrouve le noyau de u et, pour $\lambda = 1$, l'ensemble des vecteurs « invariants » par u.

Exercice

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. *Montrer que* $u \circ v$ *est l'endomorphisme nul si, et seulement si,* $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$.

Exercice

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ *tels que* $u \circ v = v \circ u$.

1. *Montrer que* $u(\operatorname{Ker} v) \subset \operatorname{Ker} v$
2. *Montrer que* $u(\operatorname{Im} v) \subset \operatorname{Im} v$.

Exercice

Soit E *un espace vectoriel et* $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. *Établir l'équivalence entre* $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ *et* $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.
2. *Établir l'équivalence entre* $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$ *et* $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u$.

On se rappelle qu'une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base de l'espace de départ.

Exercice ( )

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* n *et un endomorphisme* u *de* E *tel qu'il existe* $x_0 \in E$ *vérifiant que* $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ *soit une base de* E.
Montrer qu'il existe des réels $(a_k)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ *tels que*

$$u^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k.$$

Exercice

Soit E *un espace vectoriel et* p *un projecteur de* E. *Définissons les sous-espaces*

$$F_1 = \{v \in \mathcal{L}(E),\ \exists u \in \mathcal{L}(E),\ v = u \circ p\},$$
$$F_2 = \{v \in \mathcal{L}(E),\ \exists u \in \mathcal{L}(E),\ v = u \circ (\mathrm{Id} - p)\}.$$

Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$.

14 – Dimension

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit citer la formule du rang pour une application linéaire, la formule pour la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels.

Vrai/Faux

	V	F
Soit $N > 0$. L'espace des suites réelles N-périodiques est de dimension finie.	☐	☐
L'espace des fonctions de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ périodiques et nulles en 0 est de dimension finie.	☐	☐
De toute famille génératrice d'un espace de dimension finie, on peut extraire une base.	☐	☐
Tout vecteur d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complété en une base.	☐	☐
Si $(f_1,\dots,f_n)$ est une base de F et $(g_1,\dots,g_p)$ est une base de G, alors $\{f_1,\dots,f_n\}\cap\{g_1,\dots,g_p\}$ est une base de $F\cap G$.	☐	☐
Soit F un sous-espace d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors, $E = F$ si, et seulement si, $\dim E = \dim F$.	☐	☐
Si E et F sont des espaces vectoriels de dimensions finies, alors $\dim \mathscr{L}(E,F) = (\dim F)^{\dim E}$.	☐	☐
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E, F de dimension finie et u injective, alors $\dim E \leq \dim F$.	☐	☐

QCM

1. Soit x un vecteur non nul de l'espace E de dimension n. La dimension de $\{u(x),\ u \in \mathscr{L}(E)\}$

   a. est n
   b. est n^2
   c. est 1
   d. dépend de x

2. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p de l'espace E de dimension n. La dimension de $\{u \in \mathscr{L}(E),\ u(F) \subset F\}$ est

   a. p^2
   b. $p^2 + n(n-p)$
   c. $p^2 + (n-p)^2$
   d. $p^2 + p(n-p)$

3. Soit E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. L'image d'une base de E par u est

   a. une base de F
   b. une base de $\operatorname{Im} u$
   c. génératrice de F
   d. génératrice de $\operatorname{Im} u$

4. Soit E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que l'image d'une base de E par u est libre. Alors,

   a. u est injective
   b. u est surjective
   c. $\operatorname{Ker} u \cap F = \{0_F\}$
   d. $\dim F \geq \dim E$

5. Soit E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies tels que $\dim E > \dim F$. Alors, les applications linéaires de E dans F sont

a. injectives

b. surjectives

c. non injectives

d. non surjectives

Exercices de révision

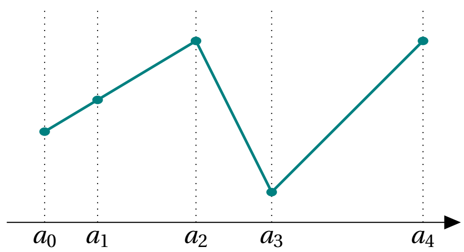
Exercice

Soit $n \geq 1$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul.

1. *Montrer que l'ensemble F_P des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.*
2. *En déduire la dimension de F_P en fonction du degré de P.*

Exercice

Soit une subdivision $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_N = 1$ de $[0,1]$. Montrer que l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, affines par morceaux pour cette subdivision est de dimension $N+1$.



Exercice

Soit E un espace vectoriel de dimension n, H un hyperplan de E (c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$).
Déterminer toutes les valeurs possibles de $\dim F \cap H$ pour F un sous-espace vectoriel de E de dimension p.

Une hypothèse de dimension permet souvent d'éliminer une moitié du raisonnement d'existence et unicité dans le tableau suivant

Résultat à établir	Existence	Unicité
E_1, E_2 supplémentaires dans E	$E = E_1 + E_2$	E_1, E_2 en somme directe
$(e_1, \ldots, e_n)$ base de E	$(e_1, \ldots, e_n)$ génératrice de E	$(e_1, \ldots, e_n)$ libre
$u \in \mathscr{L}(E,F)$ bijective	$u \in \mathscr{L}(E,F)$ surjective	$u \in \mathscr{L}(E,F)$ injective

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P - P' = X^n$.

Exercice

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $u(F) = G$.

Exercice

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $v \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(v)$.

15 – Matrices

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit revoir la formule du calcul du produit matriciel.

Vrai/Faux

	V	F
La dimension de l'espace des matrices triangulaires supérieures est $\frac{n(n+1)}{2}$.	☐	☐
La dimension de l'espace des matrices symétriques est $\frac{n(n+1)}{2}$.	☐	☐
Il existe une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ composée de matrices de rang 1.	☐	☐
Il existe une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ composée de matrices inversibles.	☐	☐
Si une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est non inversible et de dernière colonne non nulle, alors la dernière colonne de A est combinaison linéaire des autres colonnes.	☐	☐
Le produit de deux matrices triangulaires est une matrice triangulaire.	☐	☐
Les matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ commutent avec toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.	☐	☐
Pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.	☐	☐
Pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.	☐	☐
Pour toutes matrices $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.	☐	☐
Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si, et seulement si, il existe deux colonnes X, Y non nulles telles que $A = XY^{\mathrm{T}}$.	☐	☐
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors $A^{\mathrm{T}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.	☐	☐

QCM

1. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'ensemble des solutions du système $AX = B$ est

   a. réduit à un vecteur
   b. vide
   c. un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
   d. infini

2. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des solutions du système $AX = B$ est

   a. réduit à une matrice
   b. vide
   c. un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
   d. infini

3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si le système $AX = B$ admet des solutions, alors

   a. A est inversible
   b. $\operatorname{Ker} A = \{0_{n,1}\}$
   c. $B \in \operatorname{Im} A$
   d. A est surjective

Calculs

Exercice

Déterminer les puissances de la matrice $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Exercice

Calculer les puissances de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercice

Calculer la puissance $(n-1)$-ième de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors,

— la k-ième ligne du produit AB est $L_k(AB) = L_k(A)B$. En particulier, si la k-ième ligne de A est nulle, alors la k-ième ligne de AB est nulle ;

— la k-ième colonne du produit AB est $C_k(AB) = AC_k(B)$ et si la k-ième colonne de B est nulle alors la k-ième colonne de AB est nulle.

Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $E_{i,j}A$ et $AE_{i,j}$ (où $E_{i,j}$ est la matrice de la base canonique avec un seul coefficient égal à 1 en position (i,j)).

Exercices de révision

Exercice

Montrer que le sous-espace des matrices triangulaires supérieures est un supplémentaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'espace des matrices antisymétriques.

Exercice

Une matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est en damier si $m_{i,j} = 0$ pour tout (i,j) tel que $j = i + 1[2]$.

1. *Montrer que l'ensemble des matrices en damier est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
2. *Montrer que cet ensemble est stable par produit.*
3. *Préciser sa dimension dans le cas n pair.*

Exercice

Soit $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$.

1. *Déterminer les matrices qui commutent avec $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n)$.*
2. *Déterminer les matrices qui commutent avec $\operatorname{diag}(\lambda_2, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n)$.*

16 – Déterminants

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit énumérer les méthodes de calculs de déterminants.

Vrai/Faux

	V	F
Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des éléments diagonaux.	☐	☐
Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux.	☐	☐
Le déterminant d'une matrice nilpotente est nul.	☐	☐
Le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est un entier.	☐	☐
Le déterminant d'une matrice à coefficients entiers positifs est un entier positif.	☐	☐
Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, Alors, $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.	☐	☐
Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, Alors, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.	☐	☐
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, Alors, $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)$.	☐	☐
Une matrice est inversible si, et seulement si, son déterminant est 1 ou −1.	☐	☐
Le déterminant d'un endomorphisme est même dans toutes les bases.	☐	☐
Un endomorphisme est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul.	☐	☐

Calculs

Exercice

Notons, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $S_k = \sum_{i=1}^{k} i$. Calculer

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}.$$

Exercice

1. *Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice déduite de I_n en remplaçant la i-ième ligne par $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)$.*
2. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, i et $j \in [\![1, n]\!]$. Calculer $\det(\mathrm{I}_n + E_{i,j}A)$.*

Exercice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Calculer en fonction de $\det A$ le déterminant par blocs

$$\begin{vmatrix} 0_{p,n} & \mathrm{I}_p \\ A & 0_{n,p} \end{vmatrix}.$$

Exercice

Soit a, $b \in \mathbb{C}$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}.$$

Exercices de révision

Exercice

Soit a, b, $c \in \mathbb{R}$. Justifier que l'application

$$x \mapsto \begin{vmatrix} b+x & c+x & \cdots & c+x \\ a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ a+x & \cdots & a+x & b+x \end{vmatrix}$$

est affine.

Exercice

Considérons l'endomorphisme $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $u : M \mapsto M + \mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_n$.

1. *Déterminer la matrice de u dans les bases suivantes*
   (a) $(E_{1,1}, E_{1,2}, \ldots, E_{1,n}, E_{2,1}, \ldots, E_{n,n})$
   (b) $(E_{1,1}, E_{2,2}, \ldots, E_{n,n}, E_{1,2}, \ldots, E_{n-1,n})$
   (c) $(\mathrm{I}_n, E_{2,2}, \ldots, E_{n,n}, E_{1,2}, \ldots, E_{n-1,n})$
2. *En déduire $\det(u)$.*

Exercice

1. *Montrer qu'une matrice de $\mathcal{A}_{2n+1}(\mathbb{R})$ n'est pas inversible.*
2. *Exhiber une matrice inversible de $\mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$.*

Exercice

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall j \leq n, \qquad C_j(M') = \sum_{k \neq j} C_k(M).$$

Calculer $\det M'$ en fonction de $\det M$.

Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P : x \mapsto \det(x\mathrm{I}_n - A)$. Exprimer à l'aide de P les déterminants $\det(A)$ et $\det(A + x\mathrm{I}_n)$.

Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in [0, \varepsilon]$ tel que $A + \lambda\mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

17 – Probabilités

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit rappeler les manipulations des probabilités, d'espérances et la notion d'indépendance.

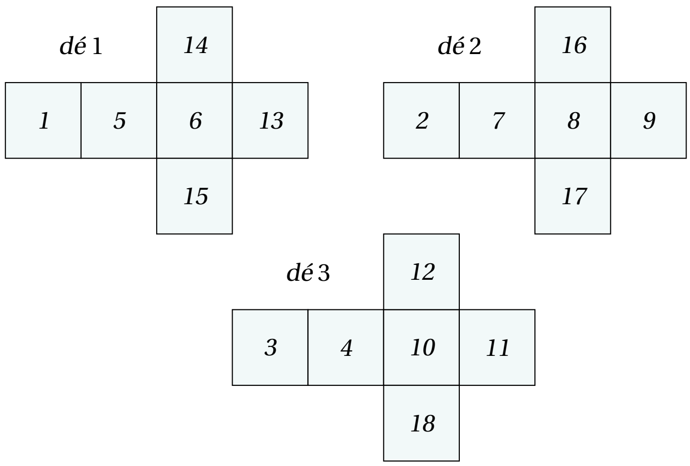
Vrai/Faux

	V	F
Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω et $A \subset \Omega$. Si $\mathbb{P}(A) = 0$, alors $A = \varnothing$.	☐	☐
Soit A, $B \subset \Omega$ de probabilités dans $]0,1[$. Alors, $\mathbb{P}(A\|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B\|A)\mathbb{P}(A)$.	☐	☐
Soit A de probabilité dans $]0,1[$. Alors, pour tout $B \subset \Omega$, $\mathbb{P}(B\|A) + \mathbb{P}(B\|\overline{A}) = 1$.	☐	☐
Deux événements disjoints sont indépendants.	☐	☐
Deux événements indépendants sont disjoints.	☐	☐
Soit A, B et $C \subset \Omega$ des événements tels que A et B sont indépendants et B et C sont indépendants. Alors, A et C sont indépendants.	☐	☐
La somme de variables indépendantes de loi uniforme suit une loi uniforme.	☐	☐
Pour toute variable réelle discrète X, $\mathbb{E}(\|X\|) \leq \|\mathbb{E}(X)\|$.	☐	☐
Pour toute variable réelle discrète X, $\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$.	☐	☐
La variance d'une somme de variables indépendantes est la somme des variances.	☐	☐

Calculs

Exercice

Considérons trois dés équilibrés à six faces étiquetés respectivement selon les « patrons » suivants :



Notons X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires correspondant au lancer de chacun de ces dés.

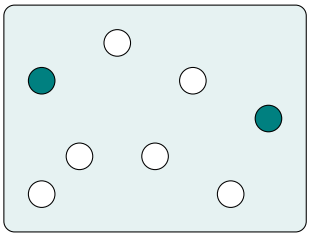
1. *Calculer $\mathbb{E}(X_i)$ pour $i \in \{1,2,3\}$.*
2. *Montrer que les trois probabilités $\mathbb{P}(X_2 > X_1)$, $\mathbb{P}(X_3 > X_2)$ et $\mathbb{P}(X_1 > X_3)$ sont strictement supérieures à $\frac{1}{2}$.*

Exercice

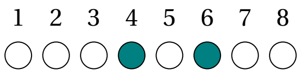
Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1,2,\dots,n\}$ et Y la variable telle que la loi de Y sachant $X = k$ est uniforme sur $\{1,2,\dots,k\}$ pour tout $k \in \{1,2,\dots,n\}$. Déterminer la loi de Y.

Exercice

Soit $n \geq 3$ un entier. Une urne contient 2 boules colorées et $n-2$ boules blanches. On tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne.
Par exemple, une réalisation du tirage de l'urne suivante avec $n=8$



est



1. *Déterminer la loi de la variable aléatoire T_1 égale au numéro du tirage de la première boule colorée.*
2. *Déterminer la loi de la variable aléatoire T_2 égale au numéro du tirage de la seconde boule colorée.*

Exercices de révision

Exercice

Compléter le tableau suivant :

loi	*espérance*	*variance*	*fonction génératrice*	*interprétation*
$\mathscr{B}(p)$				*loi d'une indicatrice d'un événement de probabilité p.*
$\mathscr{B}(n,p)$				*nombre de succès en n expériences indépendantes où la probabilité de succès est p* *somme de n variables de loi $\mathscr{B}(p)$ indépendantes.*

La fonction génératrice d'une variable X est la fonction $t \mapsto \mathbb{E}(t^X)$.

Exercice

Soit $a \leq m \leq b$. Déterminer le maximum de $\mathbb{E}(X^2)$ lorsque X parcourt l'ensemble des variables aléatoires discrètes à valeurs dans l'intervalle $[a,b]$ d'espérance m.

Exercice

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi et $a \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes

— $\mathbb{P}(X_1 > a) = 0$,
— $\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n > na) = 0$.

18 – Espaces euclidiens

Avant d'aborder ce chapitre, on pourra avec profit rappeler la définition de produit scalaire, développer $\|x+y\|^2$, puis donner l'expression de la projection orthogonale en base orthonormée (ou seulement orthogonale).

Vrai/Faux

	V	F
L'application $(A,B)\mapsto \mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}B)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.	☐	☐
L'application $(A,B)\mapsto \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{T}})$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.	☐	☐
Soit $S\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. L'application $(X,Y)\mapsto X^{\mathrm{T}}SY$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.	☐	☐
L'application $(f,g)\mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$.	☐	☐
L'application $(f,g)\mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.	☐	☐
Soit x et y deux vecteurs d'un espace euclidien de même norme. Alors, $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux.	☐	☐
Soit x et y deux vecteurs d'un espace euclidien. Alors, $\|x+y\|^2=\|x\|^2+2\langle x\|y\rangle+\|y\|^2$.	☐	☐
Soit x et y deux vecteurs d'un espace euclidien. Alors, x et y sont orthogonaux si, et seulement si, $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.	☐	☐
Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour x et y si, et seulement si, il existe $\lambda\in\mathbb{R}_+$ tel que $x=\lambda y$.	☐	☐
Toute famille orthogonale d'un espace euclidien est libre.	☐	☐
Tout espace euclidien admet une base orthonormée.	☐	☐
Pour tout produit scalaire, $\mathbb{R}_n[X]$ admet une base orthonormée échelonnée en degré.	☐	☐
Pour toute partie A d'un espace euclidien E, $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.	☐	☐
Soit F un sous-espace d'un espace euclidien E. Alors, $\dim F^{\perp}=\dim E-\dim F$.	☐	☐
Soit F, G des sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien. Alors, $F^{\perp}\cap G^{\perp}=(F+G)^{\perp}$.	☐	☐
Soit F, G des sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien. Alors, $(F\cup G)^{\perp}=(F+G)^{\perp}$.	☐	☐

Exercices de révision

L'inégalité de Cauchy-Schwarz apparaît dans des situations où le cadre « euclidien » n'est pas forcément apparent.

Exercice

Soit $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $x_1+\dots+x_n=1$. Montrer que $n^2\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$.

Exercice

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}_+$ continue. Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$I_n=\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que

$$\forall n,p\in\mathbb{N},\qquad I_{n+p}^2\leq I_{2n}I_{2p}.$$

Exercice

Montrer que deux vecteurs x, y d'un espace euclidien sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \|x+\lambda y\| \geq \|x\|.$$

Exercice

Soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique. Calculer la distance d'une matrice A au sous-espace $\operatorname{Ker} \operatorname{tr}$.

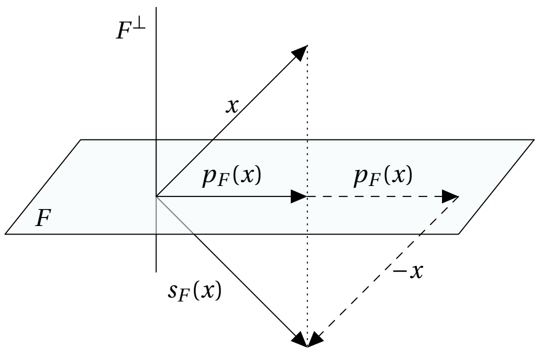
Exercice ( )

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ muni de $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ et P un polynôme non nul de $\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.

1. *Préciser le degré de P.*
2. *Montrer que la fonction $R : x \mapsto \int_0^1 P(t)t^x\,\mathrm{d}t$, définie sur $\mathbb{R}_+$, est quotient de deux fonctions polynomiales.*
3. *Trouver R à une constante multiplicative près.*
4. *En déduire les coefficients de P.*
5. *En déduire une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.*

Exercice

Rappeler la relation entre la projection orthogonale p_F sur F et la symétrie orthogonale s_F par rapport à F.



Exercice

Soit E un espace euclidien de base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$. Montrer que, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$,

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{k=1}^{n} \langle u(e_k) | e_k \rangle.$$

Exercice

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $\langle u(x)|x\rangle = 0$.

1. *Montrer que, pour tous x, $y \in E$, $\langle u(x)|y\rangle = -\langle x|u(y)\rangle$.*
2. *Montrer que* $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$.