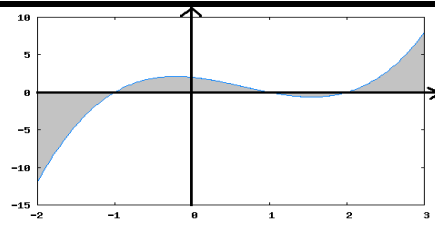


□

Pour se mettre en jambe : $\frac{\tan(a) + \tan(b)}{\tan(a) - \tan(b)} = \frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$.

Résoudre $3^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 3^{n-2} + \dots + 2^{n-2} \cdot 9 + 2^{n-1} \cdot 3 + 2^n$ est multiple de 5 d'inconnue n dans $\mathbb{N}$.

Vrai ou faux : le graphe d'un polynôme de degré 3 nul en -1 , 1 et 2 admet un centre de symétrie dont l'abscisse vaut $2/3$?



o1o

Et pour rester dans le mauvais esprit de cette année, si vous avez de bons yeux :

John, Anne, montrez nous votre pie. Cette cabane vous fait elle tricher ? Ah, quel chat qui mate !

Série géométrique et Fermat.

$P(a-x) + P(a+x)$ doit être constant.

o2o

♥ Montrez qu'une application vérifiant $\exists A \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq A|x^3 - y^3|$ est continue. *Indication : Lipschitz.*

L'identité vérifie-t-elle cette propriété ?

Montrez par l'absurde que le sinus ne vérifie pas cette propriété.

Qu'en est il de celles vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists A \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq A|x^3 - y^3|$?

Se placer sur un intervalle du type $[-a, a]$.

Simplifier $\frac{x^3 - y^3}{x - y}$ et prendre x et y "grands".

Prendre $x = 0$ et faire tendre y vers 0.

Ordre des quantificateurs.

o3o

‡ Que fait ce script ?

```
def otedefrapp(L):
....C = L[:] #cree une copie de la liste L
....D = []
....while len(C)>0:
.....a = C.pop()
.....if not(a in C):
.....D.append(a)
....return(D)
```

Du classique.

o4o

Il y a N poissons dans un grand aquarium. J'en pêche 20 "au hasard". Je les marque d'un signe distinctif (*qu'ils seront les seuls à porter*). Je les remets ensuite dans l'aquarium.

Le lendemain, alors qu'ils se sont mélangés, j'en pêche à nouveau 20, au hasard.

Indiquez la probabilité p_k qu'il y en ait k qui soient marqués (*évidemment, p_k est nulle pour k plus grand que 20*).

Je constate que trois sont marqués.

Quelle est la valeur de N qui rend p_3 maximale ?

Quotient de la forme $\frac{\text{binomial} \times \text{binomial}}{\text{binomial}}$.

Étudier quand le rapport $\frac{p_3(N)}{p_3(N-1)}$ passe de "plus grand que 1" à "plus petit que 1".

Vérifier la cohérence avec "calculer de deux façons la proportion de poissons marqués".

○5○ ♡ Calculez la limite quand x tend vers l'infini de $\left((3, 1)^{1/x} - (1, 3)^{1/x}\right)^x$.

Même question avec $\left((3, 1)^{1/x} - (1, 3)^{2/x}\right)^x$.

Non, pas de développement limité, juste $e^{b \cdot \ln(a)}$.

○6○ ♡ On note H la série harmonique. Montrez pour tout n :

$\sum_{k=1}^n H_k = (n+1) \cdot H_n - n$ (essayez une manipulation sur les sommes, et sinon tant pis, faites une récurrence).

La récurrence se fait bien, sinon, c'est une permutation de *sigmas*.

○7○ ♣ Soit A une matrice donnée dans $M_2(\mathbb{R})$. On pose $N(A) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A+B) = \det(A) + \det(B)\}$.

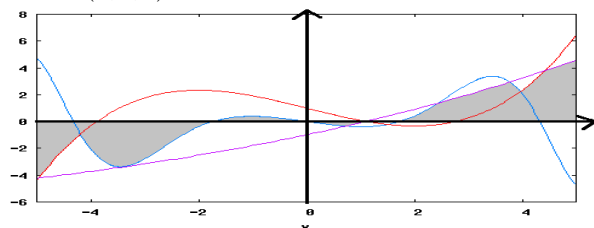
Déterminez $N(I_2)$. Déterminez $N(D)$ si D est une matrice diagonale (*a-t-on un espace vectoriel, si oui, de quelle dimension ?*)

Même question avec diagonalisable. Que pouvez vous dire si A est dans $N(A)$.

Pouvez vous choisir A pour que $N(A)$ soit un groupe additif ?

En fait, montrez que $M \mapsto \det(M+A) - \det(M) - \det(A)$ est une forme linéaire (en dimension 2).

○8○ Montrez que si f, g et h sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $Med(f, g, h)$ est continue. $Med(a, b, c)$ désigne le médian de a, b et c , c'est à dire celui des trois qui reste quand on a éliminé $Min(a, b, c)$ et $Max(a, b, c)$.



Rappel : la formule $Min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$ permet d'établir sans recours aux ε la continuité de $x \mapsto Min(f(x), g(x))$.

Inventer une formule avec $Min(Max, Max, Max)$.

○9○ ♡ La suite u vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot u_{n+1} - u_n$. Montrez qu'elle est périodique.

Le célèbre $X^2 - 2X \cdot \cos(\theta) + 1$ est encore dans le coup.

○10○ On définit la matrice suivante en taille $2.n$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donnez une formule pour son terme général.

Inversez la.

Calculez son déterminant (déjà pour n "petit").

Élevez la au carré. Calculez le déterminant de son carré.

Est elle diagonalisable (*question pour étoiles*).

Pour l'inverse, c'est un résultat du cours d'algèbre bilinéaire. Ou de l'intuition. Pour le déterminant, c'est une histoire de signature.

○11○ ♡ Soit f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit $M(f) = x \mapsto Sup(f(t), t \in [0, x])$. Déterminez

$M(f)$ dans les cas $f = \sin$ $f = \cos$ $f = x \mapsto x^2 - x/2$ $f = x \mapsto |2 - 3 \cdot |3x - 1||$
 Que signifie $M(f) = f$? Que signifie $M(f) = 2 \cdot f$?

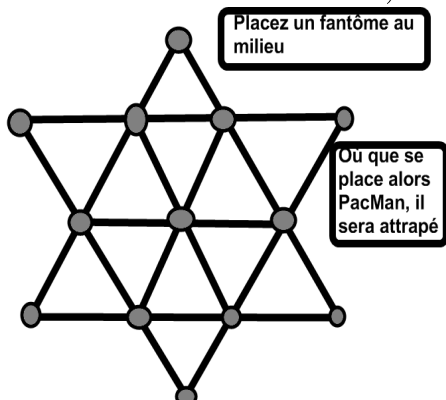
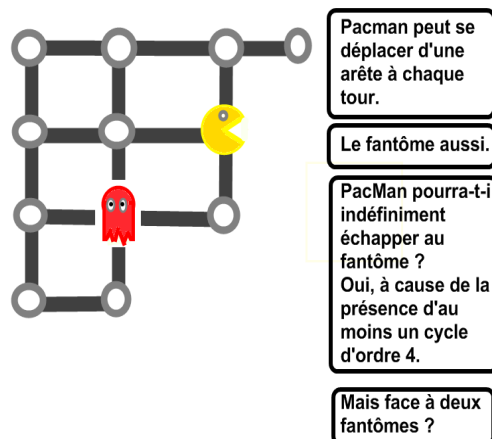
Travailler par intervalle.

Noter que $M(f)$ est automatiquement croissante.

○12○ On va jouer à PacMan. Sur un réseau (fait de sommets et d'arêtes), PacMan se déplace. A chaque tour, il peut passer d'un sommet à un de ses sommets voisins (ou rester sur place). Il est poursuivi par des fantômes qui, de la même façon passent d'un sommet à un sommet voisin (et peuvent aussi rester sur place).

- Si un des fantômes arrive sur la même case que PacMan, ce dernier a perdu.
- Si il parvient à se déplacer sans jamais se faire attraper, il a gagné.

Pour tout graphe, on détermine le nombre minimum de fantômes à utiliser pour être sûr d'attraper PacMan. Avec 0 fantômes, on ne l'attrape pas, avec un seul, ça dépend du graphe, avec $N - 1$ fantômes pour un graphe à N sommets, on l'attrapera (sauf si ce graphe est non connexe, c'est à dire "pas d'un seul tenant" et que vous placez $N - 1$ fantômes en métropole et que PacMan fait son Napoléon sur une île isolée du continent...).



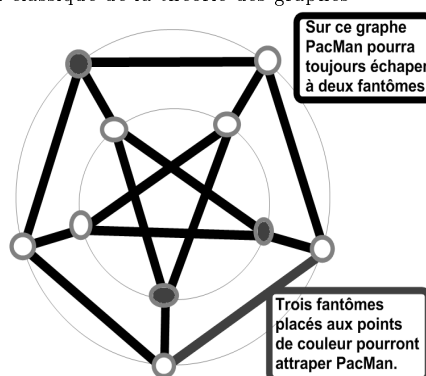
Montrez que sur le graphe "en étoile de David" représenté ci contre, un fantôme placé au milieu finira toujours par attraper PacMan, où que se place ce dernier.

Montrez que sur le graphe "de Petersen $n=5$ "^a représenté ci-dessous un ou deux fantômes ne pourront jamais attraper PacMan (sauf si on a affaire à un PacMan suicidaire ou bête comme un MPSI1).

a. il n'y a pas de jeu de mots ou quoi que ce soit, c'est un classique de la théorie des graphes

Montrez qu'en revanche trois fantômes peuvent toujours attraper PacMan.

Pour faire un peu de maths dans l'esprit des concours : numérotez les sommets du 5-graphe de Petersen, écrivez la matrice d'incidence (en position (i, k) : 1 si i et k sont reliés, 0 sinon). Calculez son déterminant (pourquoi ne dépend-il pas de l'ordre dans lequel vous avez indexé les sommets). Montrez que 3 est valeur propre de cette matrice. Montrez que 1 est valeur propre de cette matrice. Si vous avez le courage : $(x-3) \cdot (x-1) \cdot (x^2-x-1)^2 \cdot (x^2+3x+1)^2$.



Lire le numéro d'été de "La Recherche" de 2016, il y a un article de deux pages signé Roger Mansuy (encore lui !) ; je peux peut être le retrouver et vous en faire un scan.

M.P.S.I.2 2015	24891 points	2016 CHARLEMAGNE	N	CDV1	N
----------------	--------------	------------------	---	------	---

Allez chercher sur internet le MOOC de l'école des Mines d'Alès coordonné par Gilbert Monna ; ça devrait vous rassurer sur votre niveau en algèbre.

Lé député aime flatter l'élu et les lo**c**aux (l'élu, c'est pas l'écolo ?). Ce jeune **gars** fait beaucoup de **sauteries**. Il s'occupera des **roches** après l'élection. Le sénateur romain prépare son **plan** pour la **glèbe**. Elle se diroge vers le **Gard** sans **doûter**. **Départ** pour bien **dîner**. Il bouge beaucoup, mais il galère, ce fada ! J'ai encore **rêvé** l'**Asie**, mais j'ai raté (circulaire).