

D.S.1

Charlemagne

Vendredi 16 septembre

2011/2012

D.S.1

2011/12

EXERCICES/COURS**D.S.1** $\overline{<\diamond(1)>}$ Quel est le coefficient de $a^2.b^3$ dans le développement de $(a+b+c+d)^5$? 2 pt. $\overline{<\diamond(2)>}$ Quel est le coefficient de $a^2.b^4.c$ dans le développement de $(a+b+c-d)^6$? 1 pt. $\overline{<\diamond(3)>}$ Développez $(a+b+c)^3 + (a+b-c)^3 + (a-b+c)^3 + (-a+b+c)^3$. 3 pt. $\overline{<\spadesuit(1)>}$ Pour quelle(s) valeur(s) du complexe α les deux racines complexes du polynôme $X^2 - (4 + 2.i).X + \alpha$ sont à distance 2 l'une de l'autre (les nombres complexes sont assimilés à des points du plan complexe). 3 pt.*(conseil : ayez un point de vue géométrique...)* $\overline{<\spadesuit(2)>}$ Pour quelle(s) valeur(s) du réel α les deux racines complexes du polynôme $X^2 - (4 + 2.i).X + \alpha$ sont elles à distance 2 l'une de l'autre? 2 pt. $\overline{<\clubsuit(1)>}$ On note φ l'hexacycle $\overrightarrow{(a, b, c, d, e, f)}$ sur une liste de six éléments (il envoie a sur b , b sur c et ainsi de suite, jusqu'à f sur a). On note τ la permutation qui échange a et b . Déterminez $\tau \circ \varphi \circ \tau$. 2 pt.13 points13 points

2011/12

RATIONNALITÉ**D.S.1**

On se propose de rechercher les **angles pi-rationnels dont le cosinus est rationnel**. Une mesure angulaire α est dite **pi-rationnelle** si le quotient α/π est rationnel (exemple : $2\pi/5$ est pi-rationnel, mais un radian ne l'est pas).

On pose donc : $C = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid (\alpha/\pi, \cos(\alpha)) \in \mathbb{Q}^2\}$.

I- 1) $\pi/3$ est-il dans C ? $\pi/4$ est-il dans C ? $\pi/6$ est-il dans C ? 2 pt.I- 2) On note β l'angle de $]0, \pi/2[$ dont la tangente vaut $\frac{7}{24}$. Calculez son cosinus et son sinus à 10^{-5} près. 2 pt.I- 3) Donnez une infinité d'éléments de C . 1 pt.II- 1) Soit α dans C . On pose alors $c = \cos(\alpha)$. Calculez alors $\cos(2.\alpha)$ et $\cos(3.\alpha)$ à l'aide de c . Qui est alors $8.c^4 - 8.c^2 + 1$ (justifiez, évidemment)? 2 pt.II- 2) Montrez que $2.\alpha$, $3.\alpha$ et $4.\alpha$ sont aussi dans C . 2 pt.II- 3) Montrez pour tout n dans $\mathbb{N}$: $\cos((n+1).\alpha) + \cos((n-1).\alpha) = 2.\cos(n.\alpha).c$. 1 pt. Déduez l'existence d'une suite (T_n) de polynômes à coefficients entiers vérifiant $T_n(c) = \cos(n.\alpha)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (vous raisonnerez par récurrence "à double hérédité" et vous donnerez la relation de récurrence qui calcule T_{n+1} à l'aide de T_n et T_{n-1}). 2 pt.II- 4) Montrez que le terme dominant de T_n est $2^{n-1}.X^n$. 2 pt.II- 5) Montrez que le coefficient constant de T_n est 0, 1 ou -1 suivant la valeur de n modulo 4. 2 pt.II- 6) Vérifiez que T_5 est bien égal à $16.X^5 - 20.X^3 + 5.X$. Calculez T_6 . 2 pt.II- 7) Montrez que tous les $n.\alpha$ avec n dans $\mathbb{Z}$ sont aussi dans C . 2 pt.20 points20 pointsIII- 1) On suppose qu'il y a dans C un élément γ de la forme $\frac{p.\pi}{q}$ avec p et q premiers entre eux, et q multiple de 4. Montrez que $\frac{p.\pi}{4}$ est dans C et calculez son cosinus. 2 pt. Concluez. 2 pt.

IV- 1) On suppose toujours α dans C , montrez qu'alors son cosinus c vérifie $|T_n(c)| = 1$ pour un n non nul bien choisi. (2 pt.)

IV- 2) *Un exemple pour comprendre.* On suppose qu'un rationnel de $[-1, 1]$, s'écrivant p/q avec p et q entiers premiers entre eux, est solution de l'équation $|T_5(x)| = 1$ d'inconnue x . Montrez qu'alors p divise $16.p^5 - 20.p^3.q^2 + 5.p.q^4$ et q^5 . (2 pt.) Déduisez que p vaut 1 ou -1 . (2 pt.)

IV- 3) Montrez qu'alors q divise 16. (2 pt.)

IV- 4) Montrez aussi que $2.\frac{p^2}{q^2} - 1$ est aussi solution de $|T_5(x)| = 1$. (2 pt.) Déduisez que $|\frac{2.p^2 - q^2}{q^2}|$

vaut 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{16}$. (1 pt.) Trouvez les solutions rationnelles de $|T_5(x)| = 1$ d'inconnue x . (2 pt.)

IV- 5) Pour quelles valeurs de k entier le nombre $k.\pi/5$ est il dans C ? (1 pt.)

V- 1) Montrez, en vous inspirant de ce qui a été fait ci-dessus, que les seules racines d'une équation $|T_n(x)| = 1$ d'inconnue rationnelle x dans $[-1, 1]$ avec n impair sont dans l'ensemble à quatre éléments $\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$. (5 pt.)

VI- 1) Soit α un élément de C qu'on suppose de la forme $p.\pi/q$ avec p et q premiers entre eux et q pair, non multiple de 4. Montrez que $|\cos(2.\alpha)|$ vaut $1/2$ ou 1. (2 pt.) Quelles sont alors les valeurs possibles de $\cos(\alpha)$. (2 pt.)

VII- 1) Déduisez qu'il n'y a que huit éléments de C dans $]-\pi, \pi]$ dont vous donnerez la liste. (3 pt.)

30 points 30 points

VIII- 1) Déduisez de ce qui précède l'ensemble S des mesures angulaires π -rationnelles dont le sinus est rationnel. (2 pt.)

IX- 1) On veut enfin déterminer l'ensemble T des mesures angulaires π -rationnelles dont la tangente est rationnelle. Montrez pour tout θ de $]-\pi/2, \pi/2[$: $\cos(2.\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. (2 pt.) Montrez que si α est dans T alors $2.\alpha$ est dans C . (2 pt.) Explicitez T . (2 pt.)

8 points 8 points

D.S.1 MPSI2 71 points Année 2011/12 **D.S.1**

On nous demande déjà de développer $(a+b+c+d)^5$ et d'y chercher un terme en $a^2.b^3$. On le fait par étapes. On regroupe en $((a+b)+(c+d))^5$ et on a donc six termes déjà : $(a+b)^5$, $5.(a+b)^4.(c+d)$, $10.(a+b)^3.(c+d)^2$, $10.(a+b)^2.(c+d)^3$, $5.(a+b).(c+d)^4$ et $(c+d)^5$. Et seul le premier terme sera exempt de toute trace de c et d . On ne développe donc que $(a+b)^5$. Et là on utilise à nouveau la formule du binôme à l'ordre 5, et on trouve un unique terme en $a^3.b^2$ et c'est $10.a^3.b^2$

On développe ensuite $(a+b+c+d)^6$. Tous les termes sont alors homogènes à des "puissances six". Et on vous demande le coefficient de $a^2.b^4.c$! C'est un terme de degré 7. Il n'y en a pas dans la formule. Que répond on alors ? On répond "coefficient égal à 0".

Il s'agit ensuite de développer $(a+b+c)^3$ et des variantes avec un signe moins. On commence par celui avec des signes "plus". On le fait par étapes : $(a+b)^3 + 3.(a+b)^2.c + 3.(a+b).c^2 + c^3$ et on développe et regroupe.

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3.(a^2.b + a.b^2 + a^2.c + a.c^2 + b^2.c + b.c^2) + 6.a.b.c$$

On remplace ensuite c par $-c$:

$$(a+b-c)^3 = a^3 + b^3 - c^3 + 3.(a^2.b + a.b^2 - a^2.c + a.c^2 - b^2.c + b.c^2) - 6.a.b.c$$

et b par $-b$ puis a par $-a$:

$$(a-b+c)^3 = a^3 - b^3 + c^3 + 3.(-a^2.b + a.b^2 + a^2.c + a.c^2 + b^2.c - b.c^2) - 6.a.b.c$$

$$(-a+b+c)^3 = -a^3 + b^3 + c^3 + 3.(a^2.b - a.b^2 + a^2.c - a.c^2 + b^2.c + b.c^2) - 6.a.b.c$$

Il ne reste plus qu'à sommer. Les termes se regroupent et dans certains cas se simplifient. La grande somme vaut :

$$2.(a^3 + b^3 + c^3) + 6.(a^2.b + a.b^2 + a^2.c + a.c^2 + b^2.c + b.c^2) - 12.a.b.c$$

Un tableau peut être utile pour une question de ce type.

Raisonnons déjà par conditions nécessaires avec un point de vue géométrique.

On suppose que ce polynôme admet deux racines complexes z_1 et z_2 . On note M_1 et M_2 les deux points d'affixes z_1 et z_2 . On sait déjà : $z_1 + z_2 = 4 + 2i$ et $z_1.z_2 = \alpha$. Le milieu du segment M_1M_2 est le point C d'affixe $2 + i$. Et la longueur de ce segment est de 2. On en déduit que M_1 et M_2 sont **diamétralement opposés sur le cercle de centre C et de rayon 1**. Leurs affixes sont donc de la forme $(2+i) + e^{i.\theta}$ et $(2+i) - e^{i.\theta}$.

On calcule alors : $\alpha = (2+i + e^{i.\theta}).(2+i - e^{i.\theta})$. On trouve : $\alpha = 3 + 4i - e^{2.i.\theta}$. Et θ bouge comme il veut.

Le point d'affixe α décrit un cercle de centre $3 + 4i$ et de rayon 1.

Réciproquement. Supposons que α soit de la forme $3 + 4i - e^{2.i.\theta}$. On cherche les deux racines du polynôme $X^2 - (4+2i).X + 3 + 4i - e^{2.i.\theta}$ en passant par le calcul du discriminant :

$$\Delta = (4+2i)^2 - 4.(3+4i - e^{2.i.\theta}) = 4.e^{2.i.\theta} \text{ est le carré de } 2.e^{i.\theta}.$$

Les deux racines sont $2+i + e^{i.\theta}$ et $2+i - e^{i.\theta}$. Et la distance qui les sépare vaut bien 2 (vision géométrique de la chose, s'il vous plaît).

Je n'ai pas essayé la démarche consistant à poser $\alpha = a + i.b$ et à calculer les racines puis la distance qui les sépare.

On veut à présent que α soit réel. Or, α peut juste bouger sur un cercle de centre $3 + 4i$ et de rayon 1 (en tournant "à l'envers", et "deux fois trop vite" certes, mais ça ne change rien...). Or, ce cercle ne

coupe pas l'axe des réels. **Il n'y a donc pas de solution réelle α .**

2011/12

La composée de trois permutations.

D.S.1

On compose une transposition, un cycle de taille 6 et une transposition. Le plus simple est de suivre

	a	b	c	d	e	f	liste
les six éléments à la trace :	b	a	c	d	e	f	τ
	c	b	d	e	f	a	φ
	c	a	d	e	f	b	τ

On décompose en suivant un élément, tel que a , et **on retrouve un hexacycle** : (a, c, d, e, f, b) .
Finalement, a et b ont échangé leurs rôles.

2011/12

Les angles π -rationnels à cosinus rationnel. Des exemples.

D.S.1

Les trois angles $\pi/3$, $\pi/4$ et $\pi/6$ sont π -rationnels. Mais leurs cosinus valent respectivement $1/2$, $\sqrt{2}/2$ et $\sqrt{3}/2$. **On ne garde donc que $\pi/3$.**

On pose donc $\beta = \text{Arctan}(7/24)$ avec des notations propres. On cherche le cosinus par la formule célèbre $1 + \tan^2(\beta) = \frac{1}{\cos^2(\beta)}$. On trouve vite $\cos^2(\beta) = \frac{1}{1 + 49/576} = \frac{576}{625}$ et en passant à la racine : $\cos(\beta) = \frac{24}{25}$ (le cosinus est positif, car on est entre 0 et $\pi/2$).

Pour ce qui est du sinus, on effectue $\tan \cdot \cos$ et on trouve $\frac{7}{25}$ (vérifiez la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$ si vous voulez).

On veut des valeurs approchées à 10^{-5} près ? On pose la division ? Mais non !

Facile. On écrit $\cos(\beta) = \frac{4.24}{4.25} = \frac{96}{100} = 0,96$ et “**la division tombe juste**”.

De même $\sin(\beta) = 0,28$. Et si on y tient : $\sin(\beta) = 0,28000$ à 10^{-5} près.

Le cosinus et le sinus sont décimaux. C'est mieux que “rationnels”.

A ce stade, on ne sait pas encore si cet angle β est π -rationnel. On verra qu'il ne l'est pas.

2011/12

Les polynômes de Tchebitchev (puisque c'est eux...).

D.S.1

On connait son cours : $\cos(2.\alpha) = 2.c^2 - 1$ et $\cos(3.\alpha) = 4.c^3 - 3.c$.

On continue : $\cos(4.\alpha) = 2.\cos^2(2.\alpha) - 1 = 2.(2.c^2 - 1)^2 - 1 = 8.c^4 - 8.c^2 + 1$.

Comment continuer pour valider $\cos(5.\alpha) = 16.c^5 - 20.c^3 + 5.c$?

On développe $\cos(5.\alpha) = \cos(4.\alpha + \alpha) = \cos(4.\alpha).c - \sin(4.\alpha).s$.

Il nous manque $\sin(4.\alpha)$? C'est $2.\sin(2.\alpha).\cos(2.\alpha)$ puis $4.\sin(\alpha).c.(2.c^2 - 1)$.

On a donc : $\cos(5.\alpha) = (8.c^4 - 8.c^2 + 1).c - 4.\sin^2(\alpha).(2.c^2 - 1).c$.

On y remplace $\sin^2(\alpha)$ par $1 - c^2$. On développe, et on a bien $16.c^5 - 20.c^3 + 5.c$.

Ah tiens, ce n'était pas demandé...

On suppose donc que α est un multiple rationnel de π et que son cosinus c est rationnel. Tous les nombres de la forme $n.\alpha$ avec n entier sont encore des multiples rationnels de π ($n.\alpha/\pi$ est le produit d'un entier par un rationnel, c'est un rationnel).

Ensuite, si c est rationnel, toutes les quantités comme $2.c^2 - 1$, $4.c^3 - 3.c$, $8.c^4 - 8.c^2 + 1$ sont rationnelles, comme sommes et produits de rationnels.

Le plus simple est de dire que l'ensemble des rationnels est stable par addition et multiplication (on appelle ça un anneau), sans même effectuer de lourds calculs.

On sent venir la généralisation. Par récurrence sans doute...

Par la formule $\cos(a + b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$ et sa variante $\cos(a - b) = \cos(a).\cos(b) + \sin(a).\sin(b)$, on développe $\cos(n.\alpha + \alpha)$ et $\cos(n.\alpha - \alpha)$ et on somme. Les termes en sinus s'en vont.

Et il reste bien $\cos((n+1).\alpha) + \cos((n-1).\alpha) = 2.\cos(\alpha).\cos(n.\alpha)$.

On déséquilibre : $c_{n+1} = 2.c.c_n - c_{n-1}$ en allégeant la notation de manière compréhensible, du moins j'espère.

Je noterai souvent cette année c et s à la place de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$, et il m'arrivera de noter c_n et s_n pour $\cos(n.\theta)$ et $\sin(n.\theta)$.

$\cos(1.\alpha)$ et $\cos(2.\alpha)$ sont des polynômes en c (respectivement : c et $2.c^2 - 1$). Si on suppose, pour un n donné, que $\cos((n-1).\alpha)$ et $\cos(n.\alpha)$ sont des polynômes en c (notés $T_{n-1}(c)$ et $T_n(c)$), alors $2.c.T_n(c) - T_{n-1}(c)$ est à son tour un polynôme en c , que l'on peut noter $T_{n+1}(c)$. Il reste, par somme et produit, un polynôme en c (que l'on n'explicitera pas plus que $T_{n+1}(X) = 2.X.T_n(X) - T_{n-1}$).

C'est le caractère héréditaire pour une récurrence du type " $(P_n \sim \text{et} \sim P_{n-1})$ impliquent P_{n+1} ". Celle ci est initialisée à deux rangs, c'est bon (si elle ne l'avait été qu'à un rang, on n'aurait pas pu propager le propriété). La propriété est valable à tout rang.

Attention, il y a ici deux difficultés.

- La récurrence n'est pas du type simple " P_0 vraie et $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ " mais " $(P_0 \sim \text{et} \sim P_1)$ vraies et $(P_{n-1} \sim \text{et} \sim P_n) \Rightarrow P_{n+1}$ ", appelée à juste titre de "à double hérédité".
- On propage une propriété d'existence (de polynômes) et non pas une formule, contrairement à ce qu'il se passait souvent en Terminale. C'est un peu aussi la différence entre un cours de maths (des théorèmes et propriétés) et un cours de physique mal assimilé (des formules).
- La formule $T_{n+1} = 2.X.T_n - T_{n-1}$ est un résultat en annexe mais n'est pas du tout du tout ce qu'on propage par récurrence. C'est l'existence...

On calcule donc de proche en proche :

T_0	$\dots$	T_{n-1}	T_n	T_{n+1}
1	$\dots$	—	$\times 2.X$	$\nearrow$

T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
1	X	$2.X^2 - 1$	$4.X^3 - 3.X$	$8.X^4 - 8.X^2 + 1$	$16.X^5 - 20.X^3 + 5.X$	$32.X^6 - 48.X^4 + 18.X^2 - 1$

Il est possible de retrouver T_6 avec des approches plus "terminale" (au sens noble du terme), comme $\cos(6.\alpha) = 4.\cos^3(2.\alpha) - 3.\cos(2.\alpha)$ dans la quelle on remplace $\cos(2.\alpha)$ par $2.c^2 - 1$.

Il y a aussi $2.\cos(6.\alpha) = e^{6.i.\alpha} + e^{-6.i.\alpha} = (e^{i.\alpha})^6 + (e^{-i.\alpha})^6 = (c + i.s)^6 + (c - i.s)^6$. On développe par formule du binôme avec des c^6 , des $4.c^5.i.s$, des $-6.s^2.c^4$ et autres. On regarde ceux qui se simplifient deux à deux par conjugaison. Il reste $2.(c^6 - 15.s^2.c^4 + 15.s^4.c^2 - c^6)$. On remplace s^2 par $1 - c^2$ et s^4 par $(1 - c^2)^2$ et ainsi de suite. On trouve un polynôme en c .

On note vite que T_n va commencer par $2^{n-1}.X^n$ (degré n , une puissance de 2, mais un retard à l'allumage dans la puissance qui fait qu'on n'a pas 2^n). Sauf pour n égal à 0.

On le démontre par récurrence, encore à double hérédité. L'initialisation est dans la lecture du tableau.

Supposons ensuite que T_n commence par $2^{n-1}.X^n$ et T_{n-1} par $2^{n-2}.X^{n-1}$ pour un certain entier n (objectif : T_{n+1} commence par $2^n.X^{n+1}$). Dans $2.X.T_n$, on a justement un terme en $2.X.2^{n-1}.X^n$ c'est à dire $2^n.X^{n+1}$ comme attendu, et aucun terme de $-T_{n-1}$ ne pourra venir le compenser. On a donc le bon terme, et c'est bien celui de plus haut degré.

On note là encore un raisonnement avec des explications plus que des formules qui ne pourraient que contenir des points de suspension et/ou des indices multiples pour désigner des coefficients qu'on ne connaît pas (ceux des autres termes du polynôme).

On note qu'une fois sur deux, le coefficient constant de T_n est nul, et qu'une fois sur deux, il vaut 1 ou -1 avec alternance de signes. Comment formaliser ça ? En jouant sur la parité et en parlant des $T_{2.p}$ et $T_{2.p+1}$ et non pas juste des T_n .

On propose donc : $T_{2.p}(0) = (-1)^p$ et $T_{2.p+1}(0) = 0$ (oui, car le coefficient constant, c'est la valeur en 0).

Cette formule est correcte en petites valeurs de p .

Supposons ensuite la formule correcte au rang p pour un certain entier p (objectif : les deux formules au rang $p + 1$). On calcule alors : $T_{2.(p+1)} = 2.X.T_{2.p+1} - T_{2.p}$ qu'on applique en 0 : $T_{2.p+2}(0) = 0 - T_{2.p}(0) = -(-1)^p = (-1)^{p+1}$ déjà une des deux formules est validée. On continue en utilisant $T_{2.(p+1)+1} = 2.X.T_{2.p+2} - T_{2.p+1}$. On calcule en 0 : $T_{2.p+1}(0) = 0 - 0 = 0$.

La propriété $\begin{cases} T_{2.p}(0) &= (-1)^p \\ T_{2.p+1}(0) &= 0 \end{cases}$ est héréditaire et bien initialisée, elle est donc établie par récurrence pour tout p .

Encore une fois, ce qu'il faut faire avant tout, c'est bien se demander quelle est la bonne propriété à propager par récurrence...

Et puis tout à coup, un élève plus intelligent que les autres trouve une méthode directe, sans récurrence ! Si si !

Il dit juste : je vais prendre le cas particulier où c est nul (il a choisi $\alpha = \pi/2$). On a alors $T_n(0) = \cos(n.\alpha) = \cos(n.\pi/2)$. Pour n impair, on tombe sur l'intersection du cercle trigonométrique avec l'axe imaginaire : ce cosinus est nul. Pour n pair, l'angle est un multiple de π et son cosinus vaut 1 ou -1 suivant parité...

Comme quoi les réflexes de Terminable comme "entier n donc récurrence sur n " sont de mauvais réflexes.

2011/12

Les $n.\alpha$ sont dans C .

D.S.1

On a supposé α dans C . α/π est donc rationnel. Tous les $n.\alpha/\pi$ le sont aussi. Et les $\cos(n.\alpha)$ sont de la forme $T_n(c)$ avec T_n polynôme à coefficients entiers. On a donc une quantité de la forme $\sum_{k=0}^n a_k.c^k$ avec c rationnel et des a_k entiers. On trouve un rationnel à chaque fois. On identifie la propriété " $n.\alpha$ est dans C ".

Et n est positif ou négatif, puisque $\cos(n.\alpha)$ est égal $\cos(|n|.\alpha)$ si n est négatif.

2011/12

Angles de C de la forme $\pi.p/q$ avec q multiple de 4.

D.S.1

On s'interroge sur la présence dans C d'un élément de la forme $\gamma = \pi.\frac{p}{4.k}$ avec p impair pour que la fraction soit irréductible). Si un tel élément est dans C tous ses multiples y sont aussi comme on vient de le voir. Mais alors en particulier $k.\gamma$ est aussi dans C . C'est bien un angle π -rationnel, pas de problème. Mais son cosinus vaut $\cos(\pi.p/4)$ avec p impair. Il suffit de regarder sur un cercle trigonométrique pour voir que ce cosinus vaut alors $\sqrt{2}/2$ ou $-\sqrt{2}/2$. Et un tel réel n'est pas rationnel. On a donc une contradiction.

On vient donc de faire un **raisonnement par l'absurde** :

il n'y a pas dans C d'élément de la forme $p.\pi/q$ avec q multiple de 4.

On va voir bientôt s'il y a des éléments avec q impair. On verra enfin s'il y a des éléments avec q pair mais pas multiple de 4. Et on aura fait le tour de tous les angles π -rationnels.

2011/12

Existence de n vérifiant $T_n(c) = 1$ ou $T_n(c) = -1$.

D.S.1

Tout ce qu'on suppose, c'est que α est de la forme $\frac{u}{v}.\pi$ et que $\cos(n.\alpha)$ est de la forme $\frac{p}{q}$ avec p, q, u et v entiers.

Que veut on calculer ? $T_n(c)$ c'est à dire $\cos(n.\alpha)$ par définition des T_n . Mais il s'agit donc de $\cos(u.n.\pi/v)$. Et si on choisit n égal à v , que trouve-t-on ? Justement $\cos(u.\pi)$ qui vaut justement 1 ou -1 (cosinus d'un angle plat ou nul).

On nous demande de prouver l'existence d'un n au moins. Justement, le dénominateur de α/π convient.

Pour α égal à $\pi/3$ qui est bien dans C , on a bien $\cos(3.\alpha) = -1$ et on a bien $T_3(\cos(\pi/3)) = -1$.

2011/12

L'exemple avec le degré 5.

D.S.1

On prend donc un rationnel de $[-1, 1]$ qu'on écrit p/q et qu'on suppose solution de $|T_5(x)| = 1$.

On traduit : $16.\left(\frac{p}{q}\right)^5 - 20.\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 5.\frac{p}{q} \in \{-1, 1\}$.

On réduit au dénominateur commun et on effectue un produit en croix : $16.p^5 - 20.p^3.q^2 + 5.p.q^4$ est égal à q^5 ou $-q^5$. On commence à comprendre le rapport avec la suite.

Que p divise $16.p^5 - 20.p^3.q^2 + 5.p.q^4$, c'est cadeau ! On écrit $p.(16.p^4 - 20.p^2.q^2 + 5.q^4)$.

Mais comme cet entier est égal à q^5 ou $-q^5$, on déduit que p divise q^5 .

C'est là qu'il faut raisonner un peu. Comment l'entier p peut-il diviser q^5 alors qu'on a supposé que p et q n'avaient aucun facteur commun à part 1 (la fraction est irréductible, numérateur et dénominateur sont premiers entre eux !). Ce n'est pas cohérent ! Mais si ! Mais il n'y a qu'une solution : p est égal à 1, seul entier capable d'être premier avec des entiers qu'il divise.

On sait donc maintenant que c est de la forme $1/q$ avec q entier.

On reprend notre équation : $\frac{16}{q^5} - \frac{20}{q^3} + \frac{5}{q}$ vaut 1 ou -1 . On retourne vite dans l'ensemble des entiers plutôt que celui des rationnels : $16 - 20.q^2 + 5.q^4 = q^5$ ou $16 - 20.q^2 + 5.q^4 = -q^5$. On arrange encore un peu : $16 = 20.q^2 - 5.q^4 - q^5$ ou $16 = 20.q^2 - 5.q^4 + q^5$.

L'entier q divise toujours le membre de droite. Il divise donc le membre de gauche.

q divise 16. Il vaut donc 1, 2, 4, 8 ou 16.

Quand on lit tout ça sur le papier, c'est évident. Quand on doit le trouver soi-même un vendredi après midi, ça l'est moins... Pourquoi ?

Les seules racines rationnelles autorisées sont donc de la forme $1/2, 1/4, 1/8, 1/16$ ou leur opposés.

On pourrait alors les tester une à une, mais ce n'est pas ce que l'on va faire. C'est étrange ça. Mais c'est juste parce que l'on regarde un exemple et qu'on veut s'attaquer ensuite au cas général. Rien ne vous interdisait néanmoins d'avoir recours à des méthodes plus "terre à terre", par de simples calculs algébriques. Elles vous rapporteront des points si elles ne sont pas entachées d'erreurs.

On veut prouver que $2.(p/q)^2 - 1$ est encore solution de l'équation $T_n(x) \in \{-1, 1\}$. On fait un gros calcul ?

C'est trompeur. Le gros calcul est faisable. Et il aboutit finalement après quelques simplifications. Mais j'ai quand même du mal à passer de $16.(p/q)^5 - 20.(p/q)^3 + 5.(p/q) = 1$ (ou -1) à $16.\left(\frac{2.p^2 - q^2}{q^2}\right)^5 - 20.\left(\frac{2.p^2 - q^2}{q^2}\right)^3 + 5.\left(\frac{2.p^2 - q^2}{q^2}\right) = 1$. Et on comprend mal ce qu'il y a de caché derrière.

Pourtant, c'est si simple.

Ce rationnel de $[-1, 1]$, si on l'écrivait $\cos(\alpha)$ avec α bien choisi dans $\mathbb{R}$ (un arc cosinus pour être franc) ?

Il nous faudrait alors considérer $T_n(2.c^2 - 1)$ c'est à dire $T_n(\cos(2.\alpha))$. Par définition, il s'agit de $\cos(n.2.\alpha)$. Et déjà, $\cos(n.\alpha)$ est supposé être égal à -1 ou 1 (c'est l'hypothèse $|T_n(\alpha)| = 1$). $n.\alpha$ est un angle nul ou plat. $2.n.\alpha$ est un angle plat, et son cosinus vaut 1.

On est donc passé sans heurt de $T_n(c) \in \{-1, 1\}$ à $T_{2n}(c) = T_n(2.c^2 - 1) = 1$.

Comme $2.(p/q)^2 - 1$ est racine de T_5 et qu'il est rationnel, on lui applique le raisonnement déjà appliqué à p/q . Son numérateur après simplification vaut 1 et son dénominateur divise 16. On retombe sur la liste de 1 à $1/16$ au signe près.

Au fait, j'ai oublié d'exploiter une des informations : p vaut 1. On résume : q vaut 1, 2, 4, 8 ou 16 et $|2/q^2 - 1|$ vaut 1, 1/2, 1/4, 1/8 ou 1/16.

q a le droit de valoir 1. Il semble pouvoir valoir 2. Mais au delà, ça ne passe plus.

Les seules valeurs possibles de p/q sont donc 1 et 1/2 au signe près.

1 est d'ailleurs bien solution de $|T_5(x)| = 1$. Mais 1/2 ne l'est pas.

Bilan : les seules racines rationnelles de $T_5(x) = 1$ et de $T_5(x) = -1$ sont 1 et -1 .

Les seuls cosinus qui soient racines rationnelles de $T_5(x) = 1$ au signe près sont 1 et -1 . Or, si un angle α est de la forme $k.\pi/5$ son cosinus c vérifie $T_5(c) = \cos(k.\pi) \in \{-1, 1\}$. Pour que cet angle soit dans C , il faut donc que son cosinus soit rationnel et racine de $|T_5(x)| = 1$. Il vaut donc 1 ou -1 .

Bref, les seuls angles de la forme $k.\pi/5$ qui sont dans C sont les multiples de π .

On va généraliser cette idée au cas des angles de C de la forme $k.\pi/n$ avec n impair.

2011/12

Angles de C de la forme $k.\pi/n$ avec n impair.

D.S.1

On prend un angle α dans C de la forme $k.\pi/n$ (le rapport α/π est le rationnel k/n). Il vérifie $T_n(\cos(\alpha)) = \cos(n.\alpha) = \cos(k.\pi) \in \{-1, 1\}$. Son cosinus est donc une solution rationnelle de l'équation $|T_n(x)| = 1$ d'inconnue x .

Or, on a quelques informations sur le polynôme T_n avec n impair. Il est à coefficients entiers, son terme constant est nul et son terme dominant est $2^{n-1}.X^n$.

L'équation s'écrit sous la forme $2^{n-1}.x^n + \dots + a_1.x = 1$ ou $2^{n-1}.x^n + \dots + a_1.x = -1$.

On prend x de la forme p/q puisqu'il est rationnel. On reporte et on multiplie tout par q^n : $2^{n-1}.p^n + \dots + a_1.p.q^{n-1} = q^n$ au signe près.

Comme p divise le premier membre de manière évidente, il divise le second.

Mais p et q sont premiers entre eux. La seule solution est que p soit égal à 1 (ou -1).

On reprend : $2^{n-1} + \dots + a_1.q^{n-1} = q^n$ au signe près. On déduit : $2^{n-1} = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k.q^{n-k} \pm q^n$. Comme

q divise le membre de droite, il divise le membre de gauche.

Les seules valeurs de q possibles sont 1, 2, 4, 8 jusqu'à 2^{n-1} .

On sait déjà que 1 est une valeur possible d'ailleurs.

On refait alors le coup de $2.(p/q)^2 - 1$. C'est $\cos(2.\alpha)$. Et il vérifie $T_n(2.c^2 - 1) = \cos(2.n.\alpha) = \cos(2.k.\pi) = 1$.

Le rationnel $2.c^2 - 1$ est racine de l'équation $|T_n(x)| = 1$. Il est donc égal à un des nombres 1, 1/2, 1/4 jusqu'à $1/2^{n-1}$.

On a donc c et $2.c^2 - 1$ qui sont à prendre dans la liste ci dessus, au signe près.

On peut prendre $c = 1$, $c = 1/2$.

Si on prend c plus petit que 1/2 en valeur absolue, alors $2.c^2 - 1$ est entre $-1/2$ et -1 . Et il ne peut pas être dans la liste des 1, 1/2, 1/4 et autres.

On arrive donc dans la liste indiquée $\{-1, -1/2, 1/2, 1\}$.

2011/12

Angles de C de la forme $\pi.p/q$ avec q multiple de 2 mais pas de 4.

D.S.1

On prend un tel angle α . Son double $2.\alpha$ est de la forme $\pi/p/q'$ avec q' impair (sinon on a un multiple de 4).

On est donc ramené à la question précédente. Son cosinus vaut donc 1/2 ou 1 au signe près. Or, ce cosinus de l'angle double est $2.c^2 - 1$. On a donc quatre cas à traiter :

- $2.\cos^2(\alpha) - 1 = -1$ conduit à $\cos(\alpha) = 0$. C'est cohérent, et on retrouve $\pi/2$ et ses variantes.
- $2.\cos^2(\alpha) - 1 = -1/2$ conduit à $|\cos(\alpha)| = 1/2$. On connaît déjà ces solutions, et elles ne correspondent d'ailleurs pas à une forme $\pi.p/q$ avec q pair non multiple de 4.
- $2.\cos^2(\alpha) - 1 = 1/2$ conduit à $\cos(\alpha) = \sqrt{3}/2$. C'est incohérent, et on refuse donc.

- $2 \cdot \cos^2(\alpha) - 1 = 1$ conduit à $|\cos(\alpha)| = 1$. C'est incohérent avec la forme $\pi.p/q$ avec q pair.
- Bilan : pas d'angles de la forme demandée.

Connaît on tous les angles de C ? On a cherché des angles π -rationnels, de la forme $\pi.p/q$ par définition même. On a regardé les différents cas :

- q impair : le cosinus vaut $-1, -1/2, 1/2$ ou 1 ,
- q pair mais pas multiple de 4 : le cosinus vaut 0 ,
- q multiple de 4 : pas de solution.

On a bien tout essayé sur les congruences possibles pour q modulo 4 .

Bilan : il n'y a pas tant d'angles que ça dans C . Leurs cosinus ne peuvent prendre que les valeurs suivantes : $-1, -1/2, 0, 1/2$ et 1 .

Au signe près et modulo 2π : $0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$ et π .

On a huit solutions entre $-\pi$ et π .

2011/12

Angles π -rationnels dont le sinus est rationnel.

D.S.1

Comme on passe du sinus au cosinus par la transformation $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta$, on comprend qu'il suffit de reprendre la liste de C et de lui appliquer la transformation citée.

Les sinus possibles sont $-1, -1/2, 0, 1/2$ et 1 .

Entre 0 et $\pi/2$: $0, \pi/6$ et $\pi/2$.

On complète par parité et périodicité.

2011/12

Angles π -rationnels dont la tangente est rationnelle.

D.S.1

La formule $\cos(2\alpha) = \frac{1 - \tan^2(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)}$ est dans le cours.

Si $\tan(\alpha)$ est rationnel, alors $1 - \tan^2(\alpha)$ et $1 + \tan^2(\alpha)$ sont rationnels (produit et somme) et leur quotient l'est aussi. $\cos(2\alpha)$ est donc rationnel. Et 2α est donc dans C .

Mais alors $(1 - t^2)/(1 + t^2)$ ne peut prendre que quelques valeurs : $-1, -1/2, 0, 1/2$ et 1 . On cherche alors les valeurs possibles pour $\tan(\alpha)$ et on élimine même celles qui ne sont au final pas rationnelles.

Et au final, il ne reste presque rien : $\tan(\alpha)$ ne peut prendre que les valeurs $0, 1$ et -1 .

On notera que l'angle β qui avait un sinus, un cosinus et une tangente rationnels tous en même temps n'est pas π -rationnel.

D.S.1

MPSI2

71 points

Année 2011/12

D.S.1

On veut, pour x donné, réel positif, donner un sens au réel $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}}$ et voir s'il a des propriétés particulières. Mais comme il y a des points de suspension, il faut l'attraper comme limite de suite. Cette suite, on la définit comme suit : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{x + u_n}$ (calculez alors u_1, u_2, u_3). Vérifiez l'existence de tous les termes de cette suite. (1 pt.) Montrez par récurrence que cette suite est croissante, majorée par $x + 1$. Déduisez qu'elle converge. (3 pt.) Exprimez sa limite "plus simplement" comme fonction de x (normalement, un trait de fraction et une seule racine). (1 pt.) Calculez $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}}$ et sa partie entière. (2 pt.) Montrez que $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}}$ est un entier naturel si et seulement si x est le double d'un nombre triangulaire (les nombres triangulaires sont les nombres de la forme $\sum_{k=0}^n k$). (2 pt.)

0 points

0 points

2011/12

SOMMES DE NEWTON

D.S.2

Pour tout entier naturel p et tout entier naturel n , on pose : $S_p(n) = \sum_{k=0}^n k^p = 0^p + 1^p + 2^p + \dots + n^p$. Calculez $S_0(n)$ pour tout n (si vous avez un doute sur un des termes, j'en profite pour vous rappeler que pour a et b entiers, il y a b^a applications d'un ensemble à a éléments vers un ensemble à b éléments). (1 pt.) On va calculer $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$, $S_4(n)$ par des méthodes intelligentes et généralisables (c'est à dire en évitant à tout prix la récurrence sur n ...), Pour alléger, on posera $A(n) = \sum_{k=0}^n k$, $B(n) = \sum_{k=0}^n k^2$, $C(n) = \sum_{k=0}^n k^3$, $E(n) = \sum_{k=0}^n k^4$, $F(n) = \sum_{k=0}^n k^5$.

Rappel sur les sommes : si σ désigne une somme $\sum_{k=0}^n a_k$, qui est $\sum_{k=0}^n a_{n-k}$? (opération de renversement) (1 pt.)

X- 1) Montrez alors : $2.A_n = \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n (n-k)$. Déduisez la valeur de A_n . (2 pt.)

X- 2) Montrez : $C_{n+1} = C_n + (n+1)^3 = \sum_{k=0}^n (k+1)^3$. (2 pt.) Déduisez la valeur de B_n . (2 pt.)

X- 3) Montrez aussi : $2.C_n = \sum_{k=0}^n k^3 + \sum_{k=0}^n (n-k)^3$. (1 pt.) Déduisez la valeur de C_n à l'aide de A_n et B_n . (2 pt.)

XI- 1) Variante : pour tout couple d'entiers (i, j) , on pose $a_{i,j} = i \times j$. Calculez pour tout i donné $\sum_{j=1}^n a_{i,j}$.

Calculez $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}$. (2 pt.)

XI- 2) Pour k plus petit que n , montrez $\sum_{\max(i,j)=k} a_{i,j} = 2.k.A_k - k^2$ (où $\max(u, v)$ est le maximum de u et v). (2 pt.)

XI- 3) Calculez $\sum_{k=1}^n \left(\sum_{\max(i,j)=k} a_{i,j} \right)$. Retrouvez la relation qui relie A_n et C_n . 3 pt.

XII- 1) Soient d un entier naturel et f une application de classe C_{d+1} (ce qui signifie $d+1$ fois dérivable à dérivées successives continues), montrez pour tout réel x $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + \frac{x^{d+1}}{d!} \cdot \int_{t=0}^1 (1-t)^d \cdot f^{(d+1)}(t \cdot x) \cdot dt$ (par récurrence sur d , en intégrant par parties). 3 pt.

XII- 2) Déduisez (pour d au moins égal à 4 et $|f^{(5)}|$ bornée par un certain M) l'existence d'une application φ vérifiant $f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6} \cdot x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24} \cdot x^4 + x^4 \cdot \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$. 2 pt.

XII- 3) Montrez pour tout x réel et tout k entier : $2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(k \cdot x) = \sin\left(\frac{2 \cdot k + 1}{2} \cdot x\right) - \sin\left(\frac{2 \cdot k - 1}{2} \cdot x\right)$ puis $2 \cdot \sin(x/2) \cdot \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k \cdot x)\right) = \sin\left(\frac{2 \cdot n + 1}{2} \cdot x\right)$. 3 pt.

XII- 4) Déduisez l'existence de trois applications α , β et γ vérifiant $\left(x - \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{1920} + x^5 \cdot \alpha(x)\right) \times \left(\frac{2 \cdot n + 1}{2} - \frac{B_n \cdot x^2}{2} + \frac{D_n \cdot x^4}{24} + x^4 \cdot \beta(x)\right) = \frac{2 \cdot n + 1}{2} \cdot x - \frac{(2 \cdot n + 1)^3 \cdot x^3}{48} + \frac{(2 \cdot n + 1)^5 \cdot x^5}{3840} + x^5 \cdot \gamma(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \beta(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \gamma(x) = 0$. 3 pt. Retrouvez alors la valeur de B_n et trouvez la valeur de D_n . 3 pt.

XII- 5) Montrez l'existence de trois applications

XIII- 1) On rappelle la définition des coefficients binomiaux : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ pour $0 \leq k \leq n$ avec n et k entiers. Vérifiez $\binom{p}{k} = \binom{p+1}{k+1} - \binom{p}{k+1}$ (formule de Pascal). 2 pt. Déduisez $\sum_{p=5}^n \binom{p}{5} = \binom{n+1}{6}$ (formule de Zhu-Shizi en colonne 5). 2 pt. Déduisez la relation qui calcule E_n à l'aide de n , A_n , B_n , C_n et D_n . 3 pt.

XIV- 1) En reprenant la méthode que vous voulez ci dessus, trouvez une relation qui exprime $S_{k+1}(n)$ à l'aide des $S_i(n)$ pour i de 0 à k . 4 pt.

XIV- 2) Déduisez que $S_k(n)$ est un polynôme en n dont vous préciserez le degré et le coefficient dominant (si vous avez conjecturé ce degré et ce coefficient, sans avoir de preuve, donnez les, c'est déjà ça...). 3 pt.

- 1) On a trouvé une belle relation entre A_n et C_n (pour tout n), c'est à dire entre S_3 et S_1 . On va montrer que c'est le seul cas où un tel type de formule apparaît. On suppose donc qu'on a $(S_p)^d = S_q$ pour un triplet d'entiers (p, d, q) . Montrez alors : $d \cdot (p+1) = q+1$ et $(p+1)^d = q+1$. 3 pt.

- 2) Dressez le tableau de variations de $x \rightarrow \frac{\ln(x)}{x-1}$ sur $[2, +\infty[$ (vous devrez peut être étudier déjà les variations du numérateur de la dérivée). 3 pt.

- 3) Montrez pour tout d supérieur ou égal à 3 et tout p entier : $\frac{\ln(d)}{d-1} < \ln(p)$. 2 pt.

- 4) Déduisez que les seules solutions à $(S_p)^d = S_q$ d'inconnues (p, d, q) sont $(1, 2, 3)$ et les solutions évidentes de la forme $(p, 1, p)$. 3 pt.

D.S.2	MPSI2	102 points	Année 2011/12	D.S.2
--------------	-------	------------	---------------	--------------

2011/12

Etude de $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{\dots}}}$

D.S.2

Avec les données d'initialisation, avec x fixé, on a $u_0 = 0$, $u_1 = \sqrt{x}$, $u_2 = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, $u_3 = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$. On semble bien parti.

Déjà, une chose est sûre, on a $u_1 \geq u_0$.

On va prouver par récurrence sur n la croissance de (u_n) . On doit donc prouver $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n . C'est donc vrai pour n égal à 0. On passe à l'hérédité.

On suppose donc pour un n donné : $u_{n+1} \geq u_n$. On ajoute x de chaque côté : $x + u_{n+1} \geq x + u_n$. On passe à la racine sur ces réels positifs : $\sqrt{x + u_{n+1}} \geq \sqrt{x + u_n}$. On reconnaît alors : $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. Et tel était bien notre objectif.

Le plus difficile était de savoir ce qu'on voulait obtenir au rang $n + 1$.

Il faut à présent prouver la majoration par $x + 1$. On fait encore une récurrence, cette fois sur la propriété $u_n \leq x + 1$. Elle est vraie pour n égal à 0 (on a bien $0 \leq x + 1$).

On suppose à un certain rang : $u_n \leq x + 1$. On ajoute x de chaque côté puis on passe à la racine (*opérations qui respectent le sens des inégalités*). On obtient $u_{n+1} \leq \sqrt{2x + 1}$. Mais ce n'était pas ça l'objectif ! On voulait $u_{n+1} \leq x + 1$! Prétendre avoir conclu serait juste prouver qu'on n'a rien compris... Seulement voilà, on a $\sqrt{2x + 1} \leq x + 1$ pour tout x (ça se prouve en écrivant $2x + 1 \leq x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ et en passant à la racine). On écrit donc simplement :

$$(u_n \leq x + 1) \Rightarrow (u_{n+1} = \sqrt{x + u_n} \leq \sqrt{2x + 1} \leq x + 1)$$

et c'est bon.

La suite réelle (u_n) est croissante, majorée (le majorant dépend de x , mais x est fixé). Elle converge donc. Mais qui est sa limite ?

C'est un réel λ_x (il dépend de x) vérifiant $\lambda = \sqrt{x + \lambda}$.

On se retrouve à résoudre une équation du second degré dont les deux racines sont $\frac{1 + \sqrt{4x + 1}}{2}$ et $\frac{1 - \sqrt{4x + 1}}{2}$. Mais comme la suite croît et démarre avec la valeur 0, sa limite est positive et ne peut

être que $\frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$ (raisonnement par élimination).

Ah, j'ai oublié un détail : l'existence de la suite ! Ce serait idiot de raisonner sur une suite... qui n'existe même pas !

On fait encore une récurrence sur n (mais il fallait la faire plus tôt). Le premier terme u_0 existe. Si u_n existe et est positif, alors $\sqrt{u_n + x}$ existe et est positif. C'est bien l'hérédité de cette récurrence.

2011/12

 $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}$ et autres.

D.S.2

On traite quelques cas particuliers donc.

Pour x égal à 6, la suite $(0, \sqrt{6}, \sqrt{6 + \sqrt{6}}, \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}, \dots)$ converge vers le point fixe positif, solution de $\lambda = \sqrt{6 + \lambda}$, qui n'est autre que 3. De manière "amusante", on a donc :

$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}} = 3$ (à condition bien sûr de mettre une infinité de termes). Sa partie entière vaut 3. Mais si on ne met qu'un nombre fini de racines et qu'on passe à la partie entière, on retombe à 2 puisque la convergence se fait en croissant strictement.

Notre racine itérée est un entier naturel si et seulement si $\frac{1 + \sqrt{4x+1}}{2}$ est un entier naturel, que l'on va noter n . Comme tout est positif, on peut élever au carré et résoudre, avec inconnue x . On trouve $4x + 1 = (2n - 1)^2$, puis $x = n^2 - n$.

Quel rapport avec les nombres triangulaires ? On sait bien qu'on a $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ (et si on ne le sait pas, il faut vite apprendre son cours). Le double d'un nombre triangulaire, c'est un nombre de la forme $n(n+1)$, c'est à dire $n^2 + n$. Alors, signe plus ou signe moins ? Il y a une erreur ? Non. Il n'y en a pas. Juste un indice à décaler :

$$\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = n \right) \Leftrightarrow \left(x = n^2 - n = 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k \right)$$

2011/12

Premières sommes de Newton, $\sum_{k=0}^n k^0$ et $\sum_{k=0}^n k^1$.

D.S.2

Dans la somme $\sum_{k=0}^n k^0$ il y a $n+1$ termes, tous égaux à 1. Oui, k^0 vaut 1 on le sait... mais pour k non nul. Mais 0^0 , ça fait quoi ?

Les élèves n'ayant pas compris le cours de Terminale disent que ça n'existe pas, que c'est une forme indéterminée.

Que nenni ! Ce qui est indéterminé, c'est la limite de $(f(x))^{g(x)}$ quand x tend vers a sachant que f et g tendent vers 0 en a . Là, en effet, c'est indéterminé. Mais on est dans le monde des limites, et la vraie forme, c'est " $(\text{limite} \sim \text{nulle})^{\text{limite} \sim \text{nulle}}$ est indéterminé".

En revanche, ici, c'est $(\text{entier} \sim \text{nul})^{\text{entier} \sim \text{nul}}$. Et ça, ça vaut 1. C'est en effet le nombre d'applications d'un ensemble à zéro élément vers un ensemble à zéro élément. Il y en a une : l'application vide, qui ne fait rien.

On retient donc : $0^0 = 1$ quand on parle d'entiers.

Et on aura bien $(\text{limite} \sim \text{nulle})^{\text{limite} \sim \text{nulle}}$ indéterminé.

On peut conclure : $\sum_{k=0}^n k^0 = n+1$ pour tout n .

On écrit la somme σ sous forme développée : $\sigma = a_0 + a_1 + \dots + a_n$. Et on regarde l'autre (?) somme. C'est $a_n + a_{n-1} + \dots + a_0$. On y retrouve les mêmes termes, mais de a_n à a_0 . Si l'addition n'était pas commutative et associative, on pourrait tenter de distinguer cette somme de σ . Mais il n'en sera rien

dans nos ensembles d'entiers et autres. On a donc $\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{q=0}^n a_{n-q}$.

Dans le cas particulier de la somme A_n , on a à la fois $A_n = \sum_{k=0}^n k$ et $A_n = \sum_{q=0}^n (n-q)$ par renversement de somme. On peut donc sommer en nommant k dans les deux cas la variable de sommation. On a donc $2A_n = \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n (n-k)$.

On fusionne en une seule somme : $2A_n = \sum_{k=0}^n (k + n - k) = \sum_{k=0}^n n$. On trouve $n+1$ termes tous égaux à n . La somme vaut $n(n+1)$.

On divise par 2 : $A_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (résultat connu).

C'est la même démonstration que celle qui se présente ainsi :

$A_n =$	0	+1	+2	+3	+...	+n
$A_n =$	n	+(n-1)	+(n-2)	+(n-3)	+...	+0
$2.A_n =$	n	+n	+n	+n	+n	+n

n . On divise par 2 la relation $2.A_n = n.(n+1)$.

2011/12

Somme suivante $\sum_{k=0}^n k^2$.

D.S.2

On va calculer B_n en tentant de calculer C_n .

On calcule C_{n+1} qui est fait de C_n et d'un terme en plus, par définition même d'une somme de 0 à $n+1$. Et ce terme vaut $(n+1)^3$. On a donc $C_{n+1} = C_n + (n+1)^3$. On peut dire "par définition même des sommes..."

On a aussi : $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k^3$. On reconnaît $n+2$ termes, de 0^3 à $(n+1)^3$. Le terme 0^3 est nul. Il ne nous reste que $n+1$ termes non nuls, comme dans C_n . Simplement, il y a un décalage d'indice. On a donc $C_{n+1} = \sum_{q=0}^{n+1} q^3 = \sum_{q=1}^{n+1} q^3$. Et ensuite, on pose $q = k+1$ avec k qui va aller de 0 à n . On change partout dans la somme (bornes, formule, nom). On a bien $C_{n+1} = (0+) \sim 1^3 + 2^3 + \dots + (n+1)^3 = \sum_{k=0}^n (k+1)^3$.

On garde la formule précédente, et on développe par la formule du binôme : $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n (k^3 + 3.k^2 + 3.k + 1)$. On sépare en quatre sommes : $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n k^3 + 3.n. \sum_{k=0}^n k^2 + 3.n^2. \sum_{k=0}^n k + (n+1)$ (le dernier terme correspond au cas des $n+1$ termes égaux à 1).

On retrouve C_n , $3.n.B_n$ et $3.n.A_n$. On a donc $C_n + (n+1)^3 = C_n + 3.B_n + 3.A_n + (n+1)$ (et le $n+1$, c'est bien $S_0(n)$).

On simplifie, et on isole B_n . On trouve $B_n = \frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$ en factorisant.

C'est un résultat à connaître à partir de maintenant. Et on pouvait le prouver géométriquement. Ou par récurrence sur n si on veut vraiment être ridicule...

Cadeau en bonus. Et si on faisait le même raisonnement pour la somme des k^p , notée $S_p(n)$? On prétend vouloir calculer $S_{p+1}(n)$. On écrit deux formules : $S_{p+1}(n+1) = S_{p+1}(n) + (n+1)^{p+1} = \sum_{k=0}^n (k+1)^{p+1}$ en ayant juste décalé les indices dans la seconde.

On développe par la formule du binôme : $S_{p+1}(n+1) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} . k^i \right)$.

On permute les sommes : $S_{p+1}(n+1) = \sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} . \sum_{k=0}^n k^i$.

On isole le terme extrême $\binom{p+1}{p+1} . \sum_{k=0}^n k^{p+1}$ qui n'est autre que $S_{p+1}(n)$.

On le simplifie et il reste $(n+1)^{p+1} = \sum_{i=0}^p \binom{p+1}{i} . S_i(n)$.

On isole $\binom{p+1}{p} . S_p(n)$. Puis on divise : $S_p(n) = \frac{(n+1)^{p+1} - \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p+1}{i} . S_i(n)}{p+1}$.

C'est la formule qui va servir à calculer $S_p(n)$ à l'aide de $S_0(n)$, $S_1(n)$ jusqu'à $S_{p-1}(n)$.

Ce qu'on retient : c'est en cherchant à calculer avec un exposant en trop et un terme en trop qu'on l'attrape.

2011/12

Somme des cubes.

D.S.2

On reprend une idée déjà utilisée. On calcule la somme des cubes une fois dans le sens normal $0^3 + 1^3 + \dots + n^3$ et une fois dans le sens rétrograde : $n^3 + (n-1)^3 + \dots + 1^3$. On somme :

$$2.C_n = \sum_{k=0}^n k^3 + \sum_{k=0}^n (n-k)^3 = \sum_{k=0}^n (k^3 + (n-k)^3).$$

La bonne nouvelle : quand on développe le cube, les k^3 s'en vont : $2.C_n = \sum_{k=0}^n (n^3 - 3.n^2.k + 3.n.k^2)$.

On sépare en trois sommes connues : $2.C_n = (n+1).n^3 - 3.n^2.A_n + 3.n.B_n$.

On remplace par ce qu'on sait : C_n vaut $\frac{n^2.(n+1)^2}{4}$ après factorisation.

On attaque la démonstration par un tableau de taille n sur n de terme général $i.j$, noté $a_{i,j}$ par usage d'un double indice (c'est à lui qu'on comprend qu'on va utiliser un tableau).

On fixe tant i que n et on regarde $\sum_{j=1}^n i.j$. Dans cette somme, on factorise i et on trouve $i. \sum_{j=1}^n j$. On reconnaît $i.A_n$ qu'on écrit donc $i. \frac{n.(n+1)}{2}$.

On somme ensuite sur i : $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n i.j \right) = \sum_{i=1}^n i.A_n$. Comme la variable de sommation est i , le terme

A_n peut sortir de la somme : $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n i.j \right) = A_n. \sum_{i=1}^n i$.

Mais alors, on retrouve A_n . On a donc $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n i.j \right) = (A_n)^2$.

La somme de tous les éléments du tableau vaut $(A_n)^2$.

On l'a eue en sommant en lignes, puis en sommant les cumuls en lignes.

Sommer en colonnes n'aurait rien changé.

On calcule cette fois $\sum_{\max(i,j)=k} a_{i,j}$. Pour que le maximum vaille k , il y a deux possibilités : i vaut k

et j va de 1 à k , ou alors j vaut k et i va de 1 à k . On a donc $(a_{k,1} + a_{k,2} + \dots + a_{k,k}) + (a_{1,k} + a_{2,k} + \dots + a_{k,k}) - a_{k,k}$ (oui, il ne faut pas que $a_{k,k}$ soit compté deux fois. C'est comme si on sommait selon un motif en forme d'équerre.

De par la symétrie des rôles de i et j dans $a_{i,j}$, on a donc $2. \left(\sum_{j=1}^k k.j \right) - a_{k,k}$.

On sort ce qui ne dépend pas de la variable de sommation $2.k. \sum_{j=1}^k j - k^2$.

On remplace par ce qu'on sait, et la somme en équerre vaut $2.k. \frac{k.(k+1)}{2} - k^2$ ce qui donne k^3 .

On peut vérifier pour les premières valeurs sur des tableaux :

	2
2	4

		3
		6
3	6	9

			4
			8
			12
4	8	12	16

Les

sommes valent 8, 27, 64 et ainsi de suite.

Que fait on ensuite ? On somme pour k de 1 à n . On a pris toutes les cases du tableau. On a donc sommé tous les éléments du tableau, mais par des découpages un peu plus étranges que les sommes en lignes...

Mais la somme de tous les éléments, c'est déjà $(A_n)^2$.

On a donc bien $\sum_{k=1}^n k^3 = (A_n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

On a même accès à une démonstration purement géométrique si on veut.

2011/12

Formule de Taylor avec reste intégrale.

D.S.2

On prend f de classe suffisante pour que les dérivées en 0 déjà existent, et pour que $f^{(n+1)}$, présente dans l'intégrale, existe et soit intégrable. On a une grosse formule avec tout un terme somme et un terme intégrale.

On doit initialiser la formule pour d égal à 0. Dans le premier membre : $f(x)$. Dans le second : $f(0) + \int_0^1 (1-t)^0 \cdot f'(x.t).dt$, c'est à dire $f(0) + \int_0^1 x \cdot f'(x.t).dt$ (quitte à faire entrer le x dans l'intégrale puisque la variable d'intégration est t). On calcule cette intégrale. La fonction $t \rightarrow x \cdot f'(t.x)$ est la dérivée de $t \rightarrow f(x.t)$. L'intégrale se calcule donc :

$x \cdot \int_0^1 f'(x.t).dt = \left[f(x.t) \right]_{t=0}^{t=1} = f(x) - f(0)$ les $f(0)$ se simplifient, et il reste $f(x)$ comme dans le premier membre.

On a donc initialisé la formule. On va passer à l'hérédité.

On suppose la formule vraie à l'ordre d :

$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + \frac{x^{d+1}}{d!} \cdot \int_0^1 (1-t)^d \cdot f^{(d+1)}(t.x).dt$ et on veut la formule au rang $d+1$, avec un terme de plus dans la somme et des dérivées et puissances d'ordre plus élevés dans l'intégrale.

On regarde l'intégrale et on intègre par parties : $\begin{cases} f^{(d+1)}(t.x) & \leftrightarrow & x \cdot f^{(d+2)}(t.x) \\ (1-t)^d & \leftarrow & -(1-t)^{d+1}/(d+1) \end{cases}$

L'intégrale devient $\left[-f^{(d)}(t.x) \cdot \frac{(1-t)^{d+1}}{(d+1)} \right]_{t=0}^{t=1} + \frac{x}{d+1} \cdot \int_0^1 (1-t)^{d+1} \cdot f^{(d+2)}(t.x).dt$

Le terme rectangle donne exactement $\frac{f^{(d+1)}(0)}{(d+1)!} \cdot x^{d+1}$ une fois multiplié par $x^{d+1}/d!$, et on y reconnaît

le terme d'indice $d+1$ à ajouter à $\sum_{k=0}^d \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$ pour passer à $\sum_{k=0}^{d+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$.

Et l'intégrale, après multiplication devient $\frac{x^{d+2}}{(d+1)!} \int_0^1 (1-t)^{d+1} \cdot f^{(d+2)}(t.x).dt$. La formule dite "de **Taylor avec reste intégrale**" est donc ici établie...

Regardons ce qu'elle donne avec d égal à 4 :

$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6} \cdot x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24} \cdot x^4 + \frac{x^5}{4!} \cdot \int_{t=1}^1 (1-t)^4 \cdot f^{(5)}(t.x).dt$. On a les termes de la formule attendue.

On voit qu'il nous reste à poser : $\varphi(x) = \frac{x}{24} \cdot \int_0^1 (1-t)^4 \cdot f^{(5)}(t.x).dt$. On vérifie déjà que cette intégrale ne dépend bien que de x (t est juste une variable d'intégration). On veut savoir si elle tend vers 0 quand x tend vers 0. La présence du x en facteur nous donne envie de répondre "oui". Mais si on écrit par exemple $1 = x \cdot \frac{1}{x}$, on n'ira pas prétendre que 1 tend vers 0 quand x tend vers 0. Il faut faire mieux.

On va majorer ce qu'il reste une fois qu'on a factorisé le x . On majore $f^{(5)}(t.x)$ par M , on majore

$(1-t)$ par 1 et on finit donc par majorer l'intégrale par M (aire du rectangle de longueur 1 et de hauteur M , puisque l'intégrale est une aire). De même, on minore par M . L'intégrale est entre $-M$ et M . La quantité $\varphi(x)$ est comprise entre $M.x$ et $-M.x$. Par encadrement (ou "gendarmes" ou "sandwich" suivant le dialecte choisi en Terminale) elle tend aussi vers 0 quand x tend vers 0.

On a donc converti notre formule de Taylor avec reste intégrale en formule de "Taylor-Young" ou "développement limité". Elle y a perdu beaucoup, mais on s'en contentera ici. De même qu'en physique, faute d'avoir bien compris pour l'instant la différence fondamentale qu'il y a entre une limite et des encadrements.

2011/12

De la formule de Taylor à une relation entre B_n et D_n , en utilisant des cosinus.

D.S.2

La première question est une simple question de trigonométrie. On part du membre de droite : $\sin\left(\frac{2.k+1}{2}.x\right) = \cos(k.x). \sin(x/2) + \sin(k.x). \cos(x/2)$ et $\sin\left(\frac{2.k-1}{2}.x\right) = \cos(k.x). \sin(x/2) - \sin(k.x). \cos(x/2)$. On somme et il reste un terme en double. C'est justement celui de l'énoncé.

Ceux et celles qui connaissent leur cours (quitte à apprendre des formules par coeur, ce qui est souvent intelligent) retrouvent simplement les formules de transformation des produits en sommes et sommes en produits.

On développe ensuite un produit : $2. \sin(x/2). \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k.x)\right)$. On fait entrer le sinus dans la somme.

On remplace ensuite les "2. sin . cos en différences de sinus. Il nous reste un premier terme "hors somme" : $\sin(x/2)$ et une "somme télescopique" $\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{2.k+1}{2}.x\right) - \sin\left(\frac{2.k-1}{2}.x\right)$. Si on l'écrit sous forme

développée, que reste-t-il ? Tout ou presque se simplifie, comme par exemple $\sin(3.x/2)$, $\sin(5.x/2)$ présents une fois avec signe plus et une fois avec signe moins. Il ne reste que le terme $\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.x\right)$ et le terme $-\sin(x/2)$. Et encore, ce dernier se simplifie aussi, avec le terme "hors somme".

Bref, la formule est établie, avec comme clef le télescopage. Et pas de récurrence, car on commence à être quand même plus des futurs ingénieurs que des limaces chargées de décrocher le bac.

Il existe une autre preuve rapide de cette formule que nous appellerons entre nous "de Poisson". On part de $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k.x)$ qu'on écrit $\frac{1}{2}. \left(1 + \sum_{k=1}^n (e^{-i.k.x} + e^{i.k.x})\right)$. On l'écrit même $\sum_{k=-n}^{k=n} e^{i.k.x}$ en notant que le terme "hors somme" vient remplir la case du milieu : $1/2$. On identifie une somme géométrique, qui vaut donc $\frac{e^{-i.n.x} - e^{i.(n+1).x}}{1 - e^{i.x}}$. On multiplie haut et bas par $e^{-i.x/2}$ et on retrouve $\frac{-2.i. \sin\left(\frac{2.n+1}{2}.x\right)}{-2.i. \sin(x/2)}$. On détricote par produit en croix. C'est joli, non ? On l'utilisera et le redémontrera de multiples fois cette année.

On prend la formule ci dessus obtenue (dite de Poisson) et on y fait intervenir la formule de Taylor.

Par exemple : $\sin(x)$ devient $\sin(0) + \cos(0).x - \sin(0).\frac{x^2}{2} - \cos(0).\frac{x^3}{6} + \sin(0).\frac{x^4}{24} + \cos(0).\frac{x^5}{5!} + x^5.\varphi(x)$, avec $\varphi(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0. On annule les $\sin(0)$, on remplace les $\cos(0)$ par 1 : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5.\varphi(x)$ avec $\varphi(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0.

De même pour le cosinus : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4.\phi(x)$ avec $\phi(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0.

On remplace, dans le développement de Taylor Young du sinus, x par $x/2$ une fois, et par $(2.n+1).x/2$ suivant le membre. On appelle $\alpha(x)$ la quantité $\varphi(x/2)$, et on introduit aussi une notation pour γ .

On remplace aussi chaque $\cos(k.x)$ par son développement de Taylor-Young : $\cos(k.x) = 1 - k^2.\frac{x^2}{2} +$

$k^4 \cdot \frac{x^4}{24} + x^4 \cdot k^4 \cdot \phi(k \cdot x)$ avec $\phi(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0. On somme ensuite. On a n termes en 1 d'où un n . On a $x^2/2$ en facteur de la somme des carrés, et $x^4/24$ devant la somme des k^4 . Il reste à définir proprement $\gamma(x)$.

On a bien $\left(x - \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{1920} + x^5 \cdot \alpha(x)\right) \times \left(\frac{2 \cdot n + 1}{2} - \frac{B_n \cdot x^2}{2} + \frac{D_n \cdot x^4}{24} + x^4 \cdot \beta(x)\right) = \frac{2 \cdot n + 1}{2} \cdot x - \frac{(2 \cdot n + 1)^3 \cdot x^3}{48} + \frac{(2 \cdot n + 1)^5 \cdot x^5}{3840} + x^5 \cdot \gamma(x)$ avec des "petites" applications de correction α , β et γ de limite nulle en 0.

On a envie de développer et d'identifier. Mais qui autorise à identifier ? Personne !

Le physicien s'en moque et identifie afin de pouvoir vite conclure, laissant au matheux le soin de montrer qu'il a raison.

Et le matheux répond effectivement par un haussement des pôles. Oui, les pôles !

On divise de chaque côté par x et on fait tendre x vers 0. On trouve $(2 \cdot n + 1)/2 = (2 \cdot n + 1)/2$. C'est utile...

On simplifie ces termes là. Et maintenant, dans ce qu'il reste, on a x^2 qui se factorise. On divise de chaque côté par x^3 et on fait tendre x vers 0 : $-\frac{B_n}{2} - \frac{2 \cdot n + 1}{48} = -\frac{(2 \cdot n + 1)^3}{48}$ (comme si on identifiait le terme en x^3).

On isole, on calcule : B_n vaut bien $\frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{6}$.

On simplifie alors, on divise par x^2 et on fait tendre x vers 0. Comme si on identifiait le coefficient du terme en x^5 : $\frac{1}{2^4 \cdot 5!} + \frac{B_n}{48} + \frac{D_n}{24} = \frac{(2 \cdot n + 1)^5}{2^5 \cdot 5!}$. On isole, on trouve D_n à l'aide de n et B_n .

Comme on a déjà calculé B_n , on peut trouver D_n .

J'ai terminé le calcul : $D_n = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2 \cdot n + 1) \cdot (3 \cdot n^2 + 3 \cdot n - 1)}{30}$ en factorisant tout de suite ce qui veut bien se factoriser plutôt qu'en développant comme une brute.

C'est la somme des puissances quatrièmes. Il ne vous est pas demandé de la retenir. Oubliez la, même. Retenez juste qu'elle existe et qu'il suffit de demander `sum(k^4, k=0..n)` ; pour que Maple vous la donne...

On comprend qu'en écrivant plus de termes dans les formules de Taylor pour les sinus et cosinus, l'identification du terme en x^7 permet de relier B_n , D_n . Vous aurez ainsi la somme des puissances sixièmes.

Quand vous relirez ceci, étant en Spé, vous comprendrez comment calculer les sommes de Newton, en avançant de 2 en 2. Et vous comprendrez pourquoi il y a toujours le même $n \cdot (n + 1) \cdot (2 \cdot n + 1)$ dans les $S_{2 \cdot p}$ et pourquoi il y a toujours les même $n^2 \cdot (n + 1)^2$ dans les $S_{2 \cdot p + 1}$.

2011/12

Triangle de Pascal, formule de Zu-Shinsi, et somme des puissances cinquièmes.

D.S.2

On définit les coefficients binomiaux. On doit vérifier ensuite la formule d'addition qui permet d'avancer

*				
*	*			
*	*	*		
*	*	*	*	
*	*	*	*	*
*	*	a	b	*
*	*	*	c	*

vite et de remplir le triangle

: $a + b = c$. certains disent que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} =$

$\binom{n+1}{k+1}$ est une formule du cours. Ils l'écrivent alors pour les bonnes variables et concluent en basculant un terme de l'autre côté.

D'autres réfléchissent un peu et calculent ce qui est demandé, en partant du membre le plus compliqué, pour essayer d'arriver au membre le plus simple (*partir du compliqué pour aller au simple, c'est la voie naturelle pour votre esprit*) :

$$\binom{p+1}{k+1} - \binom{p}{k+1} = \frac{(p+1)!}{(k+1)!(p-k)!} - \frac{p!}{(k+1)!(p-k-1)!} = \frac{p!}{(k+1)!(p-k)!} \cdot ((p+1) - (p-k)) = \frac{p! \cdot (k+1)}{(k+1)!(p-k)!} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \binom{p}{k}$$

C'est cadeau... il suffit de calculer proprement. Et de savoir quoi factoriser dans une factorielle pour redescendre d'un cran.

On veut ensuite calculer une somme de coefficients binomiaux... en colonne. En effet, l'indice de colonne ne change pas (ici il reste égal à 5) tandis que l'indice de ligne varie de 5 à n . On n'étudie pas cette formule en Terminale. C'est un tort, et c'est ce qui fait que les élèves tiennent à tout prix à voir une erreur d'énoncé dans la formule de Zhu Shinzi, ne connaissant a priori que des sommes "en ligne".

Calculons néanmoins cette somme, avec l'aide de la formule de Pascal, présentée en différence :

$$\sum_{p=5}^n \binom{p}{5} = 1 + \sum_{p=6}^n \left(\binom{p+1}{6} - \binom{p}{6} \right) = 1 + \sum_{p=5}^n \left(\binom{p+1}{6} - \binom{p}{6} \right)$$

L'une des sommes va de $\binom{6}{6}$ à $\binom{n+1}{6}$ et l'autre va de $\binom{5}{6}$ à $\binom{n}{6}$. Il ne va rester que deux termes : l'un avec un signe "plus" (c'est $\binom{n+1}{6}$) et l'autre avec un signe "moins" (c'est $\binom{6}{6}$, c'est à dire 1). Les 1 se simplifient, et il reste juste le nouveau terme une case plus bas, une colonne plus à droite.

Schématiquement :

0	1	2	3	4	5	6
*	*	*	*			
*	*	*	*	*		
*	*	*	*	*	+	
*	*	*	*	*	+	*
*	*	*	*	*	+	*
*	*	*	*	*	+	*
*	*	*	*	*	*	=

C'est une jolie formule qu'on devrait vraiment montrer en Terminale, et surtout, sans récurrence. Oui, je hais le réflexe "y'a des entiers, donc récurrence".

On remplace les coefficients binomiaux par leur définition en quotient : $\sum_{p=5}^n \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) \cdot (p-4)}{5!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{6!}$.

On constate qu'on aurait pu commencer la somme à $p=0$ sans rien changer, puisque les cinq premiers termes auraient été nuls (coefficients binomiaux aberrants).

On développe le contenu de la somme, après simplification par $5!$: $\sum_{p=0}^n (p^5 - 10p^4 + 35p^3 - 50p^2 + 24p) = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{6}$ (rien n'interdit d'utiliser les relations coefficients/racines pour extraire ces coefficients).

On reconnaît finalement : $E_n - 10D_{n-1} + 35C_n - 50B_n + 24A_n = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{6}$.

On peut en profiter pour extraire E_n à l'aide des précédents.

La formule explicite $E_n = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n^2 + 2n - 1)}{12}$ n'est pas demandée.

Mais on peut au moins indiquer qu'on aura bien un polynôme en n . On pourra préciser son degré : 6, apporté uniquement par le membre de droite. Et le terme dominant : $n^6/6$, là encore, toujours apporté uniquement par le terme de droite.

On peut généraliser cette méthode. La formule de Zhu-Shinzi (je change l'orthographe à chaque fois si j'ai

envie, non mais) donne $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

On transforme en $\sum_{k=p}^n \frac{k.(k-1) \dots (k-p+1)}{p!} = \frac{(n+1).n.(n-1) \dots (n-p+1)}{(p+1)!}$.

On peut commencer la somme au rang $k=0$ puisque les p premiers termes sont nuls.

On développe ensuite : $\sum_{k=0}^n \left(k^p - * . k^{p-1} + \dots \right) = \frac{(n+1).n \dots (n-p+1)}{p+1}$, les coefficients du polynôme

dans la somme étant ceux du polynôme de racines 0 à $p-1$ (on y retrouve le produit des racines, la somme des racines, qui sont connues et des quantités plus fantaisistes).

On isole la somme $\sum_{k=0}^n k^p$ toute seule dans un membre, et elle est calculée à l'aide des sommes précédentes. C'est ce qu'on souhaitait.

On a encore un polynôme de degré n de terme dominant $n^{p+1}/(p+1)$, par récurrence forte sur n .

On tient donc un certain nombre de méthodes pour calculer ces sommes de Newton de proche en proche et pour se convaincre de : $\sum_{k=0}^n k^p$ est un polynôme en n qui commence par $n^{p+1}/(p+1)$.

On va utiliser ce résultat dès les questions suivantes.

2011/12

Le "miracle" $\sum_{k=0}^n k^3 = (\sum_{k=0}^n k)^2$ peut il avoir lieu pour d'autres sommes.

D.S.2

On conduit donc un raisonnement pour montrer que c'est le seul cas où une somme de Newton est la puissance d'une des sommes précédentes.

On part donc de " $\left(S_p(n) \right)^d = S_q(n)$ pour tout n ".

C'est une égalité entre polynômes.

On identifie les degrés : $d.(p+1) = q+1$ (quand on multiplie les polynômes, les degrés s'additionnent, et le premier membre est le produit de d polynômes tous de degré $p+1$).

On identifie les coefficients dominants : $\left(\frac{1}{p+1} \right)^d = \frac{1}{q+1}$. On passe à l'inverse dans celle ci.

On élimine q dans nos conditions. On a donc juste une implication : $d.(p+1) = (p+1)^d$, et comme $p+1$ est non nul, $d = (p+1)^{d-1}$.

On passe au logarithme, sans perdre d'information cette fois : $\ln(d) = (d-1). \ln(p+1)$.

On laisse de côté le cas où d vaut 1, estimant que $(S_p)^1 = S_p$ n'est pas une formule qui doit nous sembler "magique".

On a donc $\frac{\ln(d)}{d-1} = \ln(p+1)$. On va étudier les variations de la fonction du premier membre pour voir si elle peut égaler le logarithme d'un entier. par exemple, pour d égal à 2, on trouve $\frac{\ln(2)}{2-1}$ et on peut prendre p égal à 2. Dans ce cas, le simple report donne q égal à 3 et on retrouve note $S_3 = (S_1)^2$.

Pour étudier les variations de fonctions avec des fractions et des logarithmes, on est souvent amené à dériver plusieurs fois, et à isoler des termes. On définit donc $g = d \rightarrow \frac{\ln(d)}{d-1}$ qu'on dérive une première

fois sur $]2, +\infty[$. On trouve : $g'(d) = \frac{\frac{d-1}{d} - \ln(d)}{(d-1)^2}$. Le signe est celui de $\frac{d-1}{d} - \ln(d)$, qui ne saute

pas aux yeux. On note donc h cette application, de dérivée $d \rightarrow \frac{1}{d^2} - \frac{1}{d}$. Cette quantité est négative

sur $]2, +\infty[$. h décroît sur cet intervalle. Mais h est déjà négative en 2 (valeur $0,5 - 0,693$ à 10^{-3} près). h est donc négative sur $]2, +\infty[$.

Comme le signe de h dicte celui du numérateur de g' , g' est donc négative sur notre intervalle ouvert. Par théorème sur les variations sur un intervalle d'une application dérivable, g décroît.

On a donc $d \longrightarrow \frac{\ln(d)}{d-1}$ qui restera donc toujours strictement plus bas que sa valeur en 2. Or, celle-ci est égale à $\ln(2)$. On ne peut donc plus évaluer $\frac{\ln(d)}{d-1}$ à un certain $\ln(p)$ avec p entier (sauf pour p égal à 1 déjà envisagé).

On peut tirer le bilan : il n'y a que les solutions "triviales" $(S_p)^1 = S_p$ et la solution "surprise" $(S_1)^2 = S_3$.

D.S.2	MPSI2	102 points	Année 2011/12	D.S.2
--------------	-------	------------	---------------	--------------

Pour votre santé, mangez au moins cinq exercices de maths/physique ou S.I. chaque jour.

D.S.3

Charlemagne

vendredi 14 octobre

2011/2012

D.S.3

2011/12

EXERCICES**D.S.3**

$\langle \spadesuit(3) \rangle$ On suppose que les trois solutions de l'équation $x^3 + a.x^2 + b.x + c = 0$ d'inconnue x sont $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$ et $\cos(\gamma)$. Exprimez à l'aide de a , b et c les réels $\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma)$ et $\cos(2.\alpha) + \cos(2.\beta) + \cos(2.\gamma)$. 3 pt.

$\langle \clubsuit(2) \rangle$ Calculez $\int_0^1 \frac{2.x.dx}{1+x^4}$. 2 pt.

$\langle \heartsuit(1) \rangle$ Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G . Montrez que si $g \circ f$ est injective, alors f l'est aussi. 1 pt.

$\langle \diamondsuit(4) \rangle$ Résolvez $z^2 - 3.\sqrt{3}.z + 7 = i.\sqrt{3}$ d'inconnue complexe z . 3 pt.

40 points

40 points

2011/12

C'est un ordre ?**D.S.3**

On va définir sur $\mathbb{Z}$ une relation d'ordre étrange, très mélangée, pour laquelle, entre deux entiers, il y aura toujours une infinité d'entiers... Sa définition utilisera l'irrationnel $\sqrt{5}$ (mais tout autre irrationnel conviendrait) et les fonctions "partie entière" et son complément "partie fractionnaire" (ou décimale). On va donc devoir vérifier que $\sqrt{5}$ est bien irrationnel, et étudier quelques pièges de la partie entière.

- 1) On rappelle la définition de la partie entière d'un réel a : c'est l'unique entier relatif n vérifiant $n \leq a < n+1$, on le note $[a]$. C'est ainsi qu'on a $[2.e] = 5$ mais aussi $[-\pi] = -4$.

Montrez qu'on n'a pas forcément $[a+b] = [a] + [b]$ pour a et b réels. 1 pt.

- 2) Montrez qu'on a quand même $[a] + [b] \leq [a+b] \leq [a] + [b] + 1$ pour a et b réels. 2 pt.

- 3) Montrez : $\forall a \in \mathbb{R}, (a \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\forall b \in \mathbb{R}, [a+b] = [a] + [b])$. 3 pt.

- 4) Montrez que l'application "partie entière" n'est ni paire, ni impaire et exprimez $[-x]$ à l'aide de $[x]$ pour x non entier. 2 pt. Représentez graphiquement l'application $x \rightarrow [x] + [-x]$ sur $[-5, 5]$. 2 pt.

- 5) La partie fractionnaire (ou "partie décimale") d'un réel a est la quantité $a - [a]$, notée $\varphi(a)$. représentez φ sur $[-2, 2]$. 1 pt.

- 6) Représentez graphiquement $\theta \rightarrow \varphi(\cos(\theta))$ sur $[-\pi, 3.\pi]$. 2 pt.

- 1) On suppose que l'ensemble R des r de $\mathbb{N}^*$ vérifiant $\exists s \in \mathbb{N}, r^2 = 5.s^2$ est non vide. On note alors r_0 le plus petit élément de R . Montrez que r_0 ne peut pas être congru à 1, 2, 3 ou 4 modulo 5. 2 pt.

- 2) Montrez que $(r_0)^2/5$ est un entier, multiple de 5. 2 pt.

- 3) Déduisez que $r_0/5$ est dans R . 2 pt. Concluez : $\sqrt{5}$ est irrationnel. 2 pt.

- 4) Montrez que l'application $n \rightarrow \varphi(\sqrt{5}.n)$ est injective de $\mathbb{Z}$ dans $[0, 1[$. 2 pt.

23 points

23 points

- 1) On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation α par : $p\alpha q \Leftrightarrow \varphi(\sqrt{5}.p) \leq \varphi(\sqrt{5}.q)$. Montrez que c'est une relation d'ordre, et que cet ordre est total. 3 pt.

- 2) On rappelle $\sqrt{5} \simeq 2,236$ à 10^{-3} près. Triez les entiers de -3 à 8 pour la relation α . 2 pt.

- 3) Montrez que 0 est le plus petit élément de $\mathbb{Z}$ pour la relation α . 1 pt.

On va montrer que $\mathbb{Z}^*$ n'a pas de plus petit élément.

6 points		6 points	
- 1) On définit les suites (p_n) et (q_n) par $(p_0, q_0) = (2, 1)$ et $\forall n \in \mathbb{Z}, \begin{cases} p_{n+1} = 2.p_n + 5.q_n \\ q_{n+1} = p_n + 2.q_n \end{cases}$. Montrez que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites d'entiers naturels, strictement croissantes. (2 pt.) Calculez p_n et q_n pour n de -2 à 5. (2 pt.) - 2) Prouvez : $p_{n+1}.q_n - p_n.q_{n+1} = (-1)^{n+1}$ pour tout n. (2 pt.) Déduisez le seul diviseur commun de p_n et q_n est 1. (2 pt.) - 3) On définit $h = x \longrightarrow \frac{2.x + 5}{x + 2}$. Montrez que h est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et calculez $h(\sqrt{5}) - \sqrt{5}$. (2 pt.) - 4) Montrez que $h \circ h$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et calculez $h \circ h(\sqrt{5})$. (2 pt.) - 5) Montrez : $\frac{p_0}{q_0} < \sqrt{5} < \frac{p_1}{q_1}$. Montrez : $h(p_n/q_n) = p_{n+1}/q_{n+1}$ pour tout n. (2 pt.) Déduisez : $\frac{p_{2.n}}{q_{2.n}} < \sqrt{5} < \frac{p_{2.n+1}}{q_{2.n+1}}$ pour tout n. Déduisez : $0 < q_{2.n}.\sqrt{5} - p_{2.n} < \frac{1}{q_{2.n+1}}$ pour tout n. (3 pt.) - 6) Déduisez que $(p_{2.n}/q_{2.n})$ converge vers $\sqrt{5}$. (2 pt.) - 7) On suppose que $\sqrt{5}$ est un rationnel de la forme r/s avec r et s entiers naturels. Montrez alors $0 < q_{2.n}.r - p_{2.n}.s < s/q_{2.n+1}$ pour tout n. (1 pt.) Retrouvez : $\sqrt{5}$ est irrationnel. (3 pt.)			
23 points		23 points	
- 1) Montrez pour tout n : $\sqrt{5}.q_n - p_n = \frac{(-1)^n}{p_n + \sqrt{5}.q_n}$. (1 pt.) - 2) Déduisez : $\varphi(\sqrt{5}.q_{2.n}) = \frac{1}{p_{2.n} + \sqrt{5}.q_{2.n}}$. (1 pt.) Montrez que la suite $(q_{2.n})$ est strictement décroissante pour l'ordre α, minorée par 0. (2 pt.) - 3) Montrez qu'il y a une infinité d'entiers entre 0 et 1 pour l'ordre α. (1 pt.) - 4) Montrez que la suite $(q_{2.n+1})$ est strictement croissante pour l'ordre α. (2 pt.) - 1) On se donne deux entiers distincts K et N. Par symétrie des rôles et totalité de l'ordre α, on peut supposer $K\alpha N$. Montrez alors : $0 < \varphi(N.\sqrt{5}) - \varphi(K.\sqrt{5}) < 1$. (1 pt.) Montrez qu'il existe n vérifiant $0 < \frac{1}{p_{2.n} + \sqrt{5}.q_{2.n}} < \varphi(N.\sqrt{5}) - \varphi(K.\sqrt{5}) < 1$. (1 pt.) Montrez que $K + q_{2.n}$ est entre K et N pour l'ordre α. (3 pt.) - 2) Combien y a-t-il d'entiers entre deux entiers donnés, pour l'ordre α? (3 pt.)			
15 points		15 points	
D.S.3	MPSI2	178 points	Année 2011/12
		D.S.3	

2011/12

Les deux nombres $\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma)$ et $\cos(2.\alpha) + \cos(2.\beta) + \cos(2.\gamma)$.

D.S.3

Pour ce qui est de la somme, pas de problème, on la retrouve par les relations coefficients/racines :

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma) = -a \quad (\text{coefficient dominant égal à 1, il n'y a pas de piège}).$$

Ensuite, avec la relation $\cos(2.\theta) = 2.\cos^2(\theta) - 1$, on voit qu'il faut calculer la somme des carrés des racines. En écrivant juste $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2.(x.y + x.z + y.z)$ pour les trois cosinus et en utilisant la relation $\cos(\alpha).\cos(\beta) + \cos(\beta).\cos(\gamma) + \cos(\gamma).\cos(\alpha) = b$, on trouve finalement :

$$\cos(2.\alpha) + \cos(2.\beta) + \cos(2.\gamma) = 2.a^2 - 4.b - 3$$

2011/12

L'intégrale $\int_0^1 \frac{2.x.dx}{1+x^4}$.

D.S.3

Cette intégrale existe par continuité. Mais elle a l'air hors sujet, à cause du $1 + x^4$ a dénominateur. Et pourtant, si on regarde le $2.x$ au numérateur, on identifie une forme en $\frac{u'}{1+u^2}$ qui va s'intégrer en Arctangente.

$$\text{On calcule : } \int_0^1 \frac{2.x.dx}{1+x^4} = \left[\text{Arctan}(x^2) \right]_{t=0}^{t=1} = \text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4}.$$

2011/12

L'équation $z^2 - 3.\sqrt{3}.z + 7 = i.\sqrt{3}$

D.S.3

On la met sous forme $z^2 + b.z + c = 0$ et on calcule son discriminant : $27 - 4.(7 - i.\sqrt{3})$. On trouve $-1 + 4.i.\sqrt{3}$. On n'a pas *a priori* de racine carrée évidente. On passe donc par la méthode usuelle.

On pose $\delta = \alpha + i.\beta$ avec α et β réels et on impose $\delta^2 = \Delta = -1 + 4.i.\sqrt{3}$.

On développe et identifie : $\alpha^2 - \beta^2 = -1$ (β l'emporte en valeur absolue) et $2.\alpha.\beta = 4.\sqrt{3}$ (α et β sont de même signe).

On exploite l'autre relation : $|\delta|^2 = |\Delta|$. On trouve $\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{49}$. On soustrait : $\alpha^2 = 3$ et $\beta^2 = 4$.

On passe aux racines $\alpha = \sqrt{3}$ et $\beta = 2$.

On vérifie $(\sqrt{3} + 2.i)^2 = -1 + 4.i.\sqrt{3}$.

On trouve les deux racines dans $\mathbb{C}$: $\sqrt{3} - i$ et $2.\sqrt{3} + i$

2011/12

La formule fausse $[a + b] = [a] + [b]$.

D.S.3

Pour montrer que cette formule est fausse (c'est à dire qu'on n'a pas $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, [a + b] = [a] + [b]$), on donne un **contre-exemple** : $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, [a + b] \neq [a] + [b]$ (les variables !). On propose $a = 0,6$ et $b = 1,7$ par exemple (l'essentiel est que la somme des parties fractionnaires dépasse 1). On calcule : $[a + b] = [2,3] = 2$, et $[a] + [b] = 0 + 1 = 1$.

Ensuite, on se donne a et b et on écrit la définition : $[a] \leq a < [a] + 1$ et $[b] \leq b < [b] + 1$. On somme : $[a] + [b] \leq a + b < [a] + [b] + 2$. Il y a alors deux possibilités : $[a] + [b] \leq a + b < [a] + [b] + 1$ ou $[a] + [b] + 1 \leq a + b < [a] + [b] + 2$. Dans le premier cas, on reconnaît la définition de $[a + b] = [a] + [b]$ puisque $[a] + [b]$ est un entier. Dans le deuxième cas, on reconnaît $[a + b] = [a] + [b] + 1$ (encadrement par deux entiers consécutifs).

Ensuite, il y a une **équivalence** à établir.

- On suppose d'abord a entier. Il faut prouver : $\forall b \in \mathbb{R}, [a + b] = [a] + [b] = a + [b]$ puisque a est entier. On prend b . On écrit la définition : $[b] \leq b < [b] + 1$. On ajoute a de chaque côté : $a + [b] \leq a + b < a + [b] + 1$. Et voilà $a + b$ entre deux entiers consécutifs. On traduit : $[a + b] = a + [b]$.
- On doit ensuite montrer la **réciroque**. Si on a $\forall b \in \mathbb{R}, [a + b] = [a] + [b]$, alors a est entier.

On va plutôt montrer une **contraposée**. Si a n'est pas entier, alors il existe au moins un b vérifiant $[a+b] \neq [a] + [b]$. Il suffit de penser à la partie fractionnaire de a . On prend pour b le réel strictement positif $1 + [a] - a$ (distance de a à $[a] + 1$). On a alors $[a+b] = [[a] + 1] = [a] + 1$. On calcule aussi $[a] + [b] = [a] + 0$ car b est entre 0 et 1 (1 exclu).

Géométriquement, on comprend facilement...

2011/12

Non parité de l'application "partie entière".

D.S.3

On calcule donc : $[\pi] = 3$ et $[-\pi] = -4$. Pour ce x , on n'a pas $f(x) = f(-x)$, f n'est pas paire. Pour ce x on n'a pas non plus $f(-x) = -f(x)$, l'application n'est pas impaire.

L'essentiel est de quantifier la variable. Les phrases telles que $f(x) = f(-x)$ ou $f(-x) = -f(x)$ ne traduisent pas la parité ou l'imparité. Les vraies propositions sont $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ ou sa variante avec signe moins. Mais les mathématiques commencent au $\forall x$ (qui devient un $\exists x$ quand il s'agit de donner un contre-exemple).

On suppose x non entier. On encadre : $[x] < x < [x] + 1$ (même la première est stricte, puisque x n'est pas entier). On passe à l'opposé : $-[x] - 1 < -x < -[x]$. Le réel $-x$ est encadré par deux entiers consécutifs. On reconnaît la définition de $[-x] = -[x] - 1$ pour $x \notin \mathbb{Z}$.

Il faudra donc se méfier des réels négatifs. C'est ainsi qu'on aura par exemple $[3, 14] = 3$ mais $[-3, 14] = -4$. On aura donc, pour ce qui est des parties fractionnaires : $\varphi(3, 14) = 0, 14$ mais $[-3, 14] = 0, 86$. Cela permettra quand même à la fonction φ d'être périodique de période 1.

L'application $x \rightarrow [x] + [-x]$ donne 0 si x est entier et $[x] + (-1 - [x]) = -1$ si x n'est pas entier. On a donc une droite horizontale de niveau -1 sauf pour les abscisses entières où on trouve 0.

Pour ce qui est de $x \rightarrow \varphi(\cos(x))$, on découpe par intervalles.

- Là où le cosinus est positif (par exemple strictement entre $-\pi/2$ et $\pi/2$), on trouve le cosinus lui-même. A un détail près. En 0, le cosinus est entier, et l'image est donc nulle tout à coup.
- Là où le cosinus est négatif, la partie entière vaut -1 et on trace $\cos(x) + 1$, qui varie entre 0 et 1.
- Et il y a un petit détail avec la valeur en π (mais aussi $-\pi, 3\pi$ et -3π), la partie fractionnaire vaut 0.

On synthétise en un tableau :

$-\pi$	$] -\pi, -\pi/2[$	$-\pi/2$	$] -\pi/2, 0[$	0	$] 0, \pi/2[$	$\pi/2$	$] \pi/2, \pi[$
0	$1 + \cos(x)$	0	$\cos(x)$	0	$\cos(x)$	0	$1 + \cos(x)$

Les valeurs doivent rester entre 0 et 1 (le 1 étant exclu).

2011/12

Irrationalité de $\sqrt{5}$.

D.S.3

On entame un **raisonnement par l'absurde**. On suppose que $\sqrt{5}$ est rationnel, de la forme r/s avec r et s entiers. On a alors $r^2/s^2 = 5$ d'où $r^2 = 5.s^2$ avec r et s non entiers, non nuls.

On prend donc les couples (r, s) vérifiant $r^2 = 5.s^2$. Plus précisément, on prend juste la première composante de chacun de ces couples. Si cet ensemble est non vide, il a un plus petit élément, qui se nomme r_0 .

Et pour ce r_0 il existe au moins un s_0 vérifiant $(r_0)^2 = 5.(s_0)^2$. On voit qu'un tel r_0 est multiple de 5. Enfin, son carré...

On va devoir **éliminer quatre possibilités**. En écrivant p_0 sous la forme $5.k + r$, on élève au carré : $(p_0)^2 = 25.k^2 + 10.r.k + r^2$ et on étudie chaque cas de congruence ; avec un tableau :

r	$5.k + 1$	$5.k + 2$	$5.k + 3$	$5.k + 4$
r^2	$25.k^2 + 10.k + 1$	$25.k^2 + 20.k + 4$	$25.k^2 + 30.k + 9$	$25.k^2 + 40.k + 16$
$r^2 \text{ mod } 5$	1	4	4	1

Aucune des congruences ne permettrait d'écrire $(r_0)^2$ sous la forme d'un multiple de 5 : $5.(s_0)^2$.

Par **élimination**, r_0 est de la forme $5.k$.

On écrit donc r_0 sous la forme $5.k$. On reporte : $(5.k)^2 = 5.(s_0)^2$. On développe, on simplifie par 5 : $5.k^2 = (s_0)^2$.

On regarde : $(r_0)^2/5$ est l'entier $(s_0)^2$ par définition même. Et cet entier est un multiple de 5.

Il faut aller jusqu'à $r_0/5$ c'est à dire celui qu'on a appelé k . C'est un entier. Mais de là à ce que k^2 puisse s'écrire $5.t^2$ pour au moins un t entier...

Seulement, s_0 ne peut qu'être multiple de 5. On refait le raisonnement par **contraposée ou élimination**, par congruences, déjà calculées :

$k \mod 5$	1	2	3	4	0
$k^2 \mod 5$	1	4	4	1	0

La seule valeur acceptable est 0.

s_0 est donc aussi un multiple de 5. On l'écrit $5.u_0$. On reporte dans la formule $5.k^2 = (s_0)^2$ et on obtient $5.k^2 = (5.u_0)^2$. On simplifie : $k^2 = 5.(u_0)^2$.

Pour notre k , il existe donc au moins un entier u vérifiant $k^2 = 5.u^2$. Ceci traduit que k est dans R .

Ceci contredit le fait que r_0 soit le plus petit élément de R puisque en voici un autre, strictement plus petit : $r_0/5$.

La seule partie de $\mathbb{N}$ qui ne puisse pas avoir de plus petit élément est la partie vide.

Il n'y a donc aucun couple (r, s) vérifiant $r^2 = 5.s^2$ avec r et s entiers non nuls.

On ne peut donc pas écrire $\sqrt{5} = r/s$ avec r et s entiers. Le réel $\sqrt{5}$ est irrationnel.

C'est le même raisonnement que pour " $\sqrt{2}$ est irrationnel", croisé parfois en Terminale, mais alors seulement avec des séparations pair/impair.

2011/12

Injectivité de $n \rightarrow \varphi(n.\sqrt{5})$

D.S.3

Déjà, chaque entier a une image. Et cette image, en tant que partie fractionnaire, est dans $[0, 1[$.

On prend deux entiers n et N et on suppose que leurs images sont égales. *Il faut arriver à $n = N$.*

On écrit donc $\varphi(\sqrt{5}.n) = \varphi(\sqrt{5}.N)$. On traduit $\sqrt{5}.n - [\sqrt{5}.n] = \sqrt{5}.N - [\sqrt{5}.N]$. On bascule : $\sqrt{5}.(N - n) = [\sqrt{5}.N] - [\sqrt{5}.n]$.

Si N est différent de n , on peut diviser : $\sqrt{5} = \frac{[\sqrt{5}.N] - [\sqrt{5}.n]}{N - n}$. On a alors un rationnel dans le membre de droite. Et un irrationnel dans le membre de gauche.

La seule possibilité est donc : $N = n$.

2011/12

La relation d'ordre α .

D.S.3

On prend trois entiers p, q et r histoire de tout quantifier dès maintenant. On va prouver les trois propriétés en $\forall(p, q)$ ou autres.

• **Réflexivité** : on doit prouver $\varphi(p.\sqrt{5}) \leq \varphi(p.\sqrt{5})$, c'est vrai.

Remarque : si vous écrivez $\forall p \in \mathbb{N}, (p\alpha p) \Leftrightarrow (\varphi(p.\sqrt{5}) \leq \varphi(p.\sqrt{5}))$ vous n'avez toujours rien compris. En écrivant ceci, vous n'affirmez pas que $p\alpha p$ soit vrai pour tout p . Vous écrivez juste que c'est vrai si et seulement si $\varphi(\sqrt{5}.p)$ est bien plus petit que $\varphi(p.\sqrt{5})$. Certes, ce dernier point est vrai, donc $p\alpha p$ est vrai aussi. Mais c'est au lecteur de compléter alors ce que vous avez écrit. Bref, vous écrivez des choses du niveau de " $A \Leftrightarrow B$ est vrai, or, tu sais que B est vrai, donc à toi ami lecteur de déduire que A est vrai"... Ecrivez juste " A est vrai car B l'est".

• **Transitivité** : On suppose que l'on a $p\alpha q$ et $q\alpha r$. On traduit : $\varphi(\sqrt{5}.p) \leq \varphi(\sqrt{5}.q)$ et $\varphi(\sqrt{5}.q) \leq \varphi(\sqrt{5}.r)$. Par transitivité de l'ordre usuel entre réels de $[0, 1[$, on alors $\varphi(\sqrt{5}.p) \leq \varphi(\sqrt{5}.r)$. On traduit $p\alpha r$. On sait passer de $(p\alpha q)$ et $(q\alpha r)$ à $(p\alpha r)$.

• **Antisymétrie** : On suppose à la fois $p\alpha q$ et $q\alpha p$. On traduit : $\varphi(\sqrt{5}.p) \leq \varphi(\sqrt{5}.q)$ et $\varphi(\sqrt{5}.q) \leq \varphi(\sqrt{5}.p)$. Par antisymétrie de l'ordre usuel, on trouve $\varphi(\sqrt{5}.p) = \varphi(\sqrt{5}.q)$. Par injectivité de $n \rightarrow \varphi(\sqrt{5}.n)$, on trouve $p = q$.

• **Ordre total** : On prend p et q quelconques. Les deux réels $\varphi(\sqrt{5}.p)$ et $\varphi(\sqrt{5}.q)$ existent, sont dans $[0, 1[$ et peuvent être comparés. On a donc soit $\varphi(\sqrt{5}.p) \leq \varphi(\sqrt{5}.q)$, soit $\varphi(\sqrt{5}.p) \geq \varphi(\sqrt{5}.q)$. On a donc soit $p \leq q$, soit $q \leq p$.

2011/12

Tri des premiers entiers.

D.S.3

Pour tout entier relatif p , on a $\varphi(0.\sqrt{5}) = 0 \leq \varphi(p.\sqrt{5})$ (une partie fractionnaire est dans $[0, 1[$). On a donc $0 \leq p$.

C'est la quantification de 0 est le plus petit élément de $\mathbb{Z}$.

On doit calculer les parties fractionnaires des $\sqrt{5}.p$ pour p de -3 à 8 . On n'effectue pas de multiplications, mais des additions successives : $\sqrt{5} + \sqrt{5}$, $\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5}$ et ainsi de suite. On arrondit à 10^{-2} près. On dresse un tableau car c'est ainsi que les choses sont le plus visibles :

p	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sqrt{5}.p$	-6,71	-4,47	-2,24	0	2,24	4,47	6,71	8,94	11,18	13,42	15,65	17,89
$\varphi(\sqrt{5}.p)$	0,29	0,53	0,76	0	0,24	0,47	0,71	0,94	0,18	0,42	0,65	0,89
rang	3	6	9	0	2	5	8	11	1	4	7	10

On termine le tri : $0 \alpha 5 \alpha 1 \alpha (-3) \alpha 6 \alpha 2 \alpha (-2) \alpha 7 \alpha 3 \alpha (-1) \alpha 8 \alpha 4$

Que peut on retenir de cette question ?

- l'ordre est assez étonnant au final,
- peut être que je vous ai donné ici le prochain quarté à jouer à l'hippodrome de Vincennes,
- avec un tableau, les choses sont bien lisibles (c'est ce que vous devrez retenir en tant que futur ingénieur, si si !),
- pour retenir la date de la révolution française, pensez à $8.\sqrt{5}$ (bof...)

2011/12

Les deux suites (p_n) et (q_n) .

D.S.3

On calcule les premiers termes pour pouvoir initialiser ensuite des **réurrences**.

n	0	1	2	3	4	5
p_n	2	9	38	161	682	2889
q_n	1	4	17	72	305	1292

L'existence des suites ne pose pas de problème.

Par **réurrence**, on prouve "ce sont des entiers naturels". C'est vrai pour les premières valeurs. Ensuite, pour un n donné, si p_n et q_n sont des entiers naturels, alors $2.p_n + 5.q_n$ et $p_n + 2.q_n$ sont des entiers naturels par stabilité de $\mathbb{N}$ par addition et multiplication. (qui a oublié cette partie de la question, focalisé sur la croissance ?)

Pour n donné, on calcule : $p_{n+1} - p_n = p_n + 5.q_n$. C'est positif. On a donc $p_{n+1} \geq p_n$. De même : $q_{n+1} - q_n = p_n + q_n > 0$ (par la question précédente). La suite (q_n) est aussi croissante. C'est une **preuve directe**, pas une récurrence.

Il faut remonter aussi dans le passé ? On sait : $\begin{cases} 2 = p_0 = 2.p_{-1} + 5.q_{-1} \\ 1 = q_0 = p_{-1} + 2.q_{-1} \end{cases}$. C'est un petit système qu'il n'est pas si difficile de résoudre : $(p_{-1}, q_{-1}) = (1, 0)$ et de la même façon $(p_{-2}, q_{-2}) = (-2, 1)$. On peut remonter ainsi peu à peu dans le passé et déduire des choses. Je ne sais pas si c'est si utile. C'est juste pour garder l'habitude de vous dérouter.

On calcule $p_{n+1}.q_n - p_n.q_{n+1}$ à l'aide des formules. On trouve $p_n.(p_n + 2.q_n) - q_n.(2.p_n + 5.q_n) = (p_n)^2 - 5.(q_n)^2$. On ne peut pas vraiment prétendre que ceci vaille $(-1)^n$. Ou alors c'est qu'on sera plus tard agent immobilier et pas ingénieur.

Il faut donc conduire une vraie **réurrence**. On initialise : $(p_0)^2 - 5.(q_0)^2 = -1$.

On suppose pour un n donné : $(p_n)^2 - 5.(q_n)^2 = (-1)^{n+1}$.

On calcule alors au rang $n + 1$: $(2.p_n + 5.q_n)^2 - 5.(p_n + 2.q_n)^2 = 4.(p_n)^2 + 20.p_n.q_n + 25.(q_n)^2 - 5.((p_n)^2 + 4.p_n.q_n + (q_n)^2)$
 On trouve $(p_{n+1})^2 - 5.(q_{n+1})^2 = -(p_n)^2 + 5.(q_n)^2 = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}$. Ceci achève l'hérédité de notre récurrence et la récurrence elle-même.

On ne conduit pas de récurrence pour l'histoire de "**diviseur commun**". On suit une **preuve directe**. On suppose qu'un entier d divise à la fois p_n et q_n pour un entier n donné. d divise alors $p_n \times p_n$ et $(5.q_n) \times q_n$ (multiple d'un multiple de d). Puis d divise leur différence, laquelle vaut 1 ou -1 . Le seul entier qui réussisse à diviser 1 est 1 lui-même.

Le seul diviseur commun de p_n et q_n est 1.

p_n et q_n sont toujours **premiers entre eux**.

Certains reconnaissent dans $p_n \times p_n - (5.q_n).q_n = 1$ ou -1 (ou dans la relation $|p_n.q_{n+1} - p_{n+1}.q_n| = 1$), il y a des élèves qui viennent à juste titre une relation de **Bézout** entre p_n et q_n qui prouve qu'ils sont premiers entre eux... On en reparlera.

2011/12

L'homographie $x \longrightarrow (2.x + 5)/(x + 2)$.

D.S.3

Avec ses coefficients 2, 5 et 1 on devine qu'elle a un lien avec nos suites p et q . Cette homographie est définie sur $[0, +\infty[$, et sa dérivée est négative ($x \longrightarrow \frac{-1}{(x+2)^2}$). Elle est donc décroissante.

La composée $h \circ h$ de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ dans lui-même est croissante comme composée de deux applications décroissantes (sans redériver). On a en effet $(a < b) \Rightarrow (h(a) > h(b)) \Rightarrow (h(h(a)) < h(h(b)))$.

On calcule $h(\sqrt{5}) - \sqrt{5} = 0$. On déduit alors $h(h(\sqrt{5})) = h(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$.

On vérifie ensuite : $h\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{2.\frac{p_n}{q_n} + 5}{\frac{p_n}{q_n} + 2} = \frac{2.p_n + 5.q_n}{p_n + 2.q_n} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

Pour l'encadrement, on compare les carrés des réels positifs : $\left(\frac{2}{1}\right)^2 \leq 5 \leq \frac{9^2}{4^2}$ avec des produits en croix si nécessaire. On notera que ça se joue à peu de choses, mais c'est encore pire aux rangs suivants.

Ensuite, on conduit une **récurrence** qu'on vient ici d'initialiser. On suppose ensuite pour un rang n : $0 < \frac{p_{2.n}}{q_{2.n}} < \sqrt{5} < \frac{p_{2.n+1}}{q_{2.n+1}}$. On applique h strictement décroissante : $\frac{p_{2.n+1}}{q_{2.n+1}} = h\left(\frac{p_{2.n}}{q_{2.n}}\right) > h(\sqrt{5}) = \sqrt{5} > h\left(\frac{p_{2.n+1}}{q_{2.n+1}}\right) = \frac{p_{2.n+2}}{q_{2.n+2}}$.

On réapplique h strictement décroissante, et on arrive à la formule au rang $n + 1$.

Oui, avec la monotonie de h et la relation $h(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$, tout va très vite. Mais avec une mauvaise approche, on écrit vite des choses horriblement lourdes, comme un mauvais élève de Terminale qui vise juste le bac (trouvez le pléonasme).

2011/12

L'encadrement $0 < q_{2.n}.\sqrt{5} - p_{2.n} < 1/q_{2.n+1}$.

D.S.3

On repart de la formule $\frac{p_{2.n}}{q_{2.n}} < \sqrt{5} < \frac{p_{2.n+1}}{q_{2.n+1}}$. On la multiplie par $q_{2.n}$ (strictement positif). On soustrait $p_{2.n}$. On trouve alors $0 < q_{2.n}.\sqrt{5} - p_{2.n} < \frac{p_{2.n+1}}{q_{2.n+1}}.q_{2.n} - p_{2.n} = \frac{p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1}}{q_{2.n+1}}$. Un rappel sur la relation $p_k.q_{k+1} - p_{k+1}.q_k = (-1)^{k+1}$ appliquée au rang $2.n$ nous permet de trouver la majoration par $\frac{1}{q_{2.n+1}}$.

C'est une majoration qui nous parle de la qualité d'approximation de $\sqrt{5}$ par $p_{2.n}/q_{2.n}$.

En effet, on peut écrire $0 < \sqrt{5} - \frac{p_{2.n}}{q_{2.n}} < \frac{1}{q_{2.n+1}.q_{2.n}}$ en divisant encore par $q_{2.n}$. Comme la suite (q_k) est

strictement croissante à valeurs entières, elle tend vers l'infini (on montre aisément, par récurrence s'il le faut, que sa croissance stricte entraîne $q_n \geq n$ pour tout n , et ensuite, c'est le théorème du gendarme qui donne la réponse). Par théorème d'encadrement, $\sqrt{5} - \frac{p_n}{q_n}$ tend vers 0. Par définition, $\left(\frac{p_{2.n}}{q_{2.n}}\right)$ converge vers $\sqrt{5}$.

2011/12

$\sqrt{5}$ est irrationnel (bis), par l'absurde.

D.S.3

On suppose donc que $\sqrt{5}$ est le rationnel r/s avec r et s entiers naturels non nuls. On remplace dans la relation $0 < q_{2.n} \cdot \sqrt{5} - p_{2.n} < \frac{1}{q_{2.n+1}}$, on obtient $0 < q_{2.n} \cdot \frac{r}{s} - p_{2.n} < \frac{1}{q_{2.n+1}}$. On multiplie par s strictement positif : $0 < q_{2.n} \cdot r - p_{2.n} \cdot s < \frac{s}{q_{2.n+1}}$.

Il faut ensuite aboutir à une contradiction ? C'est simple quand on a la réponse. Le terme du milieu est un entier. Le terme de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini car (q_k) est une suite qui tend vers $+\infty$. Pour n assez grand, le terme de droite est donc par exemple plus petit que $1/2$.

On aboutit à un encadrement $0 < \text{entier} < 0,5$. C'est un peu louche, vous ne trouvez pas ? Non ? Dans ce cas, je ne peux plus rien pour vous. Oui ! On a donc fini ce **joli raisonnement par l'absurde**.

Vous reverrez des raisonnements de ce type en classe étoile sur quelques exercices classiques d'arithmétique.

2011/12

La relation $\sqrt{5} \cdot q_n - p_n = (-1)^n / (p_n + \sqrt{5} \cdot q_n)$.

D.S.3

On repart de la formule $(p_n)^2 - 5 \cdot (q_n)^2 = (-1)^n$ qui fut établie par récurrence sur n . On la factorise en $(p_n - \sqrt{5} \cdot q_n) \cdot (p_n + \sqrt{5} \cdot q_n) = (-1)^{n+1}$ et on divise par $p_n + q_n \cdot \sqrt{5}$.

On prend $2.n$ à la place de n , il est donc pair : $\sqrt{5} \cdot q_n - p_n = \frac{1}{p_{2.n} + \sqrt{5} \cdot q_{2.n}}$. On a donc $\sqrt{5} \cdot q_{2.n} = p_{2.n} + \frac{1}{p_{2.n} + \sqrt{5} \cdot q_{2.n}}$. On a écrit $\sqrt{5} \cdot q_{2.n}$ sous la forme d'un entier et d'un réel entre 0 et 1 (le dénominateur est strictement plus grand que 1). On identifie : $[\sqrt{5} \cdot q_{2.n}] = p_{2.n}$ et $\varphi(\sqrt{5} \cdot q_{2.n}) = \frac{1}{p_{2.n} + \sqrt{5} \cdot q_{2.n}}$.

Pour tout n , on a alors $\varphi(\sqrt{5} \cdot q_{2.n+2}) = \frac{1}{p_{2.n+2} + \sqrt{5} \cdot q_{2.n+2}} < \varphi(\sqrt{5} \cdot q_{2.n}) = \frac{1}{p_{2.n} + \sqrt{5} \cdot q_{2.n}}$. On recon-
naît : $q_{2.n+2} \alpha q_{2.n}$. C'est la décroissance de ma suite $(q_{2.n})$ pour la relation d'ordre α .

Quant à la minoration par 0, elle est toujours vraie.

Pauvre Fermat, heureusement qu'il n'a pas connu cet ordre α !

Grâce à cette suite, on a une infinité d'éléments entre 0 et 1 pour l'ordre α : tous les $q_{2.n}$.

Quelques calculs faits pour vous : 1, 17, 305 et 5473 sont les premiers termes de cette suite. On a alors $\sqrt{5} \simeq 2,23$, $17 \cdot \sqrt{5} \simeq 38,013$, $305 \cdot \sqrt{5} \simeq 682,00073$ et $5473 \cdot \sqrt{5} \simeq 12238,0000409$. On a l'impression de gagner un 0 de plus dans la partie décimale à chaque étape.

Avec des **indices impairs**, on a $\sqrt{5} \cdot q_{2.n+1} - p_{2.n+1} = \frac{1}{p_{2.n+1} + \sqrt{5} \cdot q_{2.n+1}}$. On ajoute 1 : $\sqrt{5} \cdot q_{2.n+1} = (p_{2.n+1} - 1) + \left(1 - \frac{1}{p_{2.n+1} + \sqrt{5} \cdot q_{2.n+1}}\right)$.

On a alors : $[\sqrt{5} \cdot q_{2.n+1}] = p_{2.n+1} - 1$ et $\varphi(\sqrt{5} \cdot q_{2.n}) = 1 - \frac{1}{p_{2.n+1} + \sqrt{5} \cdot q_{2.n+1}}$.

Le signe moins nous donne une suite strictement croissante cette fois.

2011/12

Des entiers entre deux entiers donnés.

D.S.3

On se donne K et N avec $K \alpha N$. On a donc $\varphi(K \cdot \sqrt{5}) < \varphi(N \cdot \sqrt{5})$. Comme K n'est pas égal à

N on ne peut pas avoir égalité (*injectivité de $n \rightarrow \varphi(\sqrt{5}.n)$*). De plus, on a les deux encadrements $0 \leq \varphi(N.\sqrt{5}) \leq 1$ et $-1 \leq -\varphi(N.\sqrt{5}) \leq 0$. On somme : $-1 \leq \varphi(\sqrt{5}.N) - \varphi(\sqrt{5}.K) \leq 1$ (*géométriquement, c'est la distance algébrique entre deux éléments d'un segment de longueur 1*).

Comme les deux suites $(p_{2.n})$ et $(q_{2.n})$ tendent vers l'infini (*pour l'ordre usuel*), la suite $\left(\frac{1}{p_n + \sqrt{5}.q_n}\right)$ tend vers 0. Par définition même, on déduit qu'à partir d'un certain rang, on aura $0 < \frac{1}{p_{2.n} + \sqrt{5}.q_{2.n}} <$

$\varphi(N.\sqrt{5}) - \varphi(K.\sqrt{5})$ (ou toute autre quantité posée à l'avance).

Plus proprement, on montre : $p_n \geq n$ et $q_n \geq n$ en y allant vraiment à la grosse louche. On déduit donc $\frac{1}{p_{2.n} + \sqrt{5}.q_{2.n}} \leq dsp_{6.n}^{\frac{1}{6}}$ et pour n plus grand que $\frac{1}{6.(\varphi(N.\sqrt{5}) - \varphi(K.\sqrt{5}))}$ on a bien la majoration demandée.

On a obtenu : $0 < \frac{1}{p_{2.n} + \sqrt{5}.q_{2.n}} < \varphi(N.\sqrt{5}) - \varphi(K.\sqrt{5})$. On remplace grâce à la formule

$(p_{2.n} + \sqrt{5}.q_{2.n}).(\sqrt{5}.q_{2.n} - p_{2.n}) = -(-1)^{2.n+1} = 1$ et grâce à la définition de $\varphi(a)$:

$0 < q_{2.n}.\sqrt{5} - p_{2.n} < N.\sqrt{5} - K.\sqrt{5} - [N.\sqrt{5}] + [K.\sqrt{5}]$

On fait basculer et on exploite quelques informations :

$0 < K.\sqrt{5} - [K.\sqrt{5}] < (K + q_{2.n}).\sqrt{5} - (p_{2.n} + [K.\sqrt{5}]) < N.\sqrt{5} - [N.\sqrt{5}] < 1$

En ne gardant que les extrémités, il reste $0 < (K + q_{2.n}).\sqrt{5} - (p_{2.n} + [K.\sqrt{5}]) < 1$ qui permet d'identifier la partie entière et la partie fractionnaire du réel $(K + q_{2.n}).\sqrt{5} : [K.\sqrt{5}] + p_{2.n}$ et $(K + q_{2.n}).\sqrt{5} - (p_{2.n} + [K.\sqrt{5}])$.

On a donc : $0 < \varphi(\sqrt{5}.K) < \varphi((K + q_{2.n}).\sqrt{5}) < \varphi(N.\sqrt{5})$.

On reconnaît la définition de $K\alpha(K + q_{2.n})\alpha N$.

L'entier $K + q_{2.n}$ s'est donc glissé entre K et N .

Bilan : entre deux entiers distincts K et N on peut toujours insérer un nouvel entier que l'on va noter H (même si il est de la forme $K + q_{2.n}$).

C'est du au fait que la suite $(q_{2.n})$ tend vers 0 en décroissant (pour l'ordre paradoxal α), donc $K + q_{2.n}$ se rapproche de K sans l'atteindre mais en finissant par passer sous N , même si il n'est "pas loin de K ".

Mais qu'est ce qui nous interdit de recommencer avec K et H ? Il y a au moins un nouvel entier entre ces deux là. Et il y a au moins un nouvel entier entre H et N .

Et si on recommençait avec ces nouveaux entiers?

Chaque fois qu'on trouve de nouveaux entiers, on peut en regliser entre eux. Et on double le nombre d'entiers entre K et N .

On n'arrête pas de coller de nouveaux entiers.

Pour l'ordre étonnant α , il y a toujours une infinité d'entiers entre deux entiers distincts... (même si on ne sait pas trop comment les construire).

D.S.3

MPSI2

178 points

Année 2011/12

D.S.3

D.S.4

Charlemagne

vendredi 4 novembre

2011/2012

D.S.4

2011/12

EXERCICES**D.S.4**

$\langle \diamond(5) \rangle$ A et B sont deux parties d'un ensemble E . On note 1_A la fonction caractéristique de A ($1_A(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$). Qui est $\left[\frac{1_A + 1_B}{2} \right]$? 2 pt.

$\langle \spadesuit(4) \rangle$ Déterminez le cardinal de $P(P(P(P(\{a, b\}))))$. 2 pt.
 Calculez ensuite le cardinal de $P(P(P(P(\{a, b\})) - \{\{a\}, \{a, b\}\}))$. 2 pt.
 Donnez un ordre de grandeur du nombre de chiffres de l'écriture décimale de ces deux nombres. 2 pt.

2011/12

HYPERBOLIQUES**D.S.4**

Les parties séparées par de grands traits sont très indépendantes les unes des autres.

- 1) On définit de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ les applications suivantes : $ch = x \rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $sh = x \rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $th = \frac{sh}{ch}$. Déterminez $ch + sh$, $ch - sh$ et $ch^2 - sh^2$. Simplifiez $ch^2 + sh^2$. 2 pt. Justifiez : $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) \geq 1$. 1 pt. Donnez le tableau de variations de chacune des trois applications ch , sh et th . 2 pt. Simplifiez $\frac{1 + th(1/2)}{1 - th(1/2)}$. 1 pt.

- 2) Une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite paire si $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ et elle est dite impaire si $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$. Qui l'est parmi les trois fonctions hyperboliques? 1 pt.

- 3) On demande de montrer que la dérivée d'une application paire est impaire. Un élève justifie ainsi : je pars de $f(-x) = f(x)$, je dérive de chaque côté : $(f(-x))' = f'(x)$, j'obtiens $-f'(-x) = f'(x)$ et au final $f'(-x) = -f'(x)$. Rendez rigoureux son raisonnement. 2 pt. Montrez qu'une application impaire est nulle en 0. 1 pt. Calculez $ch^{(n)}$, $sh^{(n)}$ et $th^{(2.n)}(0)$ pour tout entier naturel n . 2 pt.

- 1) On définit : $\gamma = x \rightarrow 2 \cdot \text{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}$ (fonction de Guderman). Vérifiez l'existence de $\tan(\gamma(x))$ et montrez qu'elle vaut $sh(x)$. Exprimez $\sin(\gamma(x))$ et $1/\cos(\gamma(x))$ à l'aide de $sh(x)$, $ch(x)$ et $th(x)$. Explicitez γ' , γ^{-1} et $(\gamma^{-1})'$. 5 pt.

- 1) Déterminez la réciproque de l'application sh (notée Argsh) ; vous serez amené pour ce faire à poser $X = e^x$ et à résoudre une équation du second degré. 2 pt. Déterminez de même Argch , réciproque de ch sur des intervalles à préciser. 2 pt. Faites en enfin de même pour Argth . 2 pt. Dérivez ces trois applications réciproques. 2 pt.

- 1) Pour tout entier naturel n , on note E_n l'ensemble des entiers de 1 à n , S_n l'ensemble des $n!$ permutations de E_n . Pour σ dans S_n , on pose : $up(\sigma) = \text{Card}\{k \in E_n - \{n\} | \sigma(k) < \sigma(k+1)\}$ (on pourrait définir aussi $down(\sigma)$ pour compter les descentes). Calculez $up(\text{Id})$. 1 pt. Trouvez l'unique permutation r de S_n vérifiant $up(r) = 0$. 2 pt. Calculez $up(\overrightarrow{(1, 2, \dots, n)})$. 1 pt. Calculez $up(\tau_{1,7} \circ \overrightarrow{(2, 4, 6, 8, 10)} \circ \overrightarrow{(3, 9, 5)})$ dans S_{12} même si ça ne sert à rien. 3 pt. Comparez $up(\sigma)$ et $up(r \circ \sigma)$ (où r a été définie plus haut). 2 pt.

- 2) Pour tout p de 0 à $n-1$, on pose $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \text{Card}\{\sigma \in S_n | \text{up}(\sigma) = p\}$. Déterminez $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$ pour tous les couples (n, p) vérifiant $0 \leq p < n \leq 4$ (et comme vous voulez devenir ingénieurs, pensez à justifier et à présenter sous forme de tableaux). (2 pt.)

- 1) Calculez th comme polynôme en th . (1 pt.) Calculez $th^{(3)}$ comme polynôme en th . (1 pt.)

- 2) Un résultat qui ne sera pas démontré ici (appelé "boustrophédon") dit : $th^{(n)}(0) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \cdot \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$.

Vérifiez le au moins pour n de 0 à 4 et pour n pair. (2 pt.)

- 1) Soient f et g deux applications au moins cinq fois dérivable. Calculez $(f.g)^{(n)}$ pour n de 1 à 5 à l'aide des $f^{(p)}$ et des $g^{(q)}$. (3 pt.)

- 2) Déduisez les valeurs de $th^{(3)}(0)$ et $th^{(5)}(0)$ (vous pourrez prendre $f = ch$ et $g = th$). (2 pt.)

- 1) On définit une suite (f_n) d'applications par $f_0 = sh$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = -2 \cdot \int_0^x t.f_n(t).dt$. Calculez f_1 et f_2 . (2 pt.) Montrez pour tout n (au moins égal à 2) et tout x réel : $f_n(x) = (4.n-2).f_{n-1}(x) + 4.x^2.f_{n-2}(x)$ (vous pourrez lors d'une étape prendre la fonction différence des deux membres, la dériver et aussi la calculer en 0). (2 pt.)

- 2) Montrez qu'il existe deux suites de polynômes (P_n) et (Q_n) vérifiant $f_n = sh \times Q_n - ch \times P_n$. Déterminez P_0, P_1, Q_0 et Q_1 . Montrez pour tout n au moins égal à 2 et tout x réel : $P_n(x) = (4.n-2).P_{n-1}(x) + 4.x^2.P_{n-2}(x)$ et $Q_n(x) = (4.n-2).Q_{n-1}(x) + 4.x^2.Q_{n-2}(x)$. (4 pt.)

- 3) Montrez que les coefficients de P_n et des Q_n sont des entiers naturels. Montrez que chaque P_n est une application impaire. Quelle est la parité de Q_n ? (4 pt.)

- 4) Montrez pour tout n et tout x positif : $|f_n(x)| \leq \frac{x^{2.n}}{n!} . sh(x)$. (2 pt.)

- 5) Montrez ensuite $|th(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}| \leq \frac{x^{2.n}}{n!} . (x) \cdot \frac{1}{Q_n(x)}$ puis $|th(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}| \leq \frac{x^{2.n}}{(2.n)!}$. (4 pt.)

- 6) Pour x fixé, on définit pour tout n $u_n(x) = \frac{x^{2.n}}{(2.n)!}$. Montrez $u_{n+1}(x) \leq u_n(x)/2$ pour n plus grand que $[x] + 1$. (2 pt.) Déduisez que $u_n(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. (2 pt.) Que pouvez vous dire de la suite de fractions $(\frac{P_n}{Q_n})$ quand n tend vers l'infini? (1 pt.)

- 1) Un résultat dit aussi : $th(x) = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{x^2}{5 + \frac{x^2}{7 + \dots}}}}$ (une infinité de fractions imbriquées?).

On définit $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ 1 & n \end{pmatrix}$. Calculez $A.B_3, A.B_3.B_5, A.B_3.B_5.B_7$. (4 pt.)

- 2) Calculez $\frac{x}{1 + \frac{x^2}{3}}, \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{x^2}{5}}}, \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{x^2}{5 + \frac{x^2}{7}}}}$ (une seule barre de fraction chacune). (3 pt.)

2011/12

Fonctions indicatrices.

D.S.4

On voit qu'on peut calculer $\left\lfloor \frac{1_A(x)+1_B(x)}{2} \right\rfloor$ pour tout x de E . On distingue suivant où se trouve x :

- dans $A \cap B$: $\left\lfloor \frac{1+1}{2} \right\rfloor = [1] = 1$
- dans $A - B$: $\left\lfloor \frac{1+0}{2} \right\rfloor = [1/2] = 0$
- dans $B - A$: $\left\lfloor \frac{0+1}{2} \right\rfloor = [1/2] = 0$
- hors de $A \cap B$: $\left\lfloor \frac{0+0}{2} \right\rfloor = [0] = 0$

On reconnaît l'indicatrice de $A \cap B$.

2011/12

Parties des parties des parties...

D.S.4

On rappelle le résultat : si E est un ensemble à n éléments, alors $P(E)$ est fait de 2^n parties (*réurrence sur n ou dénombrement...*).

On part de $E = \{a, b\}$, ensemble à 2 éléments.

Alors, $P(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ est un ensemble à 2^2 éléments (*valeur : 4*).

Ensuite, $P(P(E))$ est un ensemble à 2^{2^2} éléments (*valeur : 16*).

On continue : $P(P(P(E)))$ est un ensemble à $2^{2^{2^2}}$ éléments (*valeur encore calculable $2^{16} = 65536$*).

On termine avec $P(P(P(P(E))))$ qui a $2^{2^{2^{2^2}}}$ éléments. Ceci donne 2^{65536} que je ne chercherai pas à écrire ici.

On peut quand même y aller "à la louche". 2^{10} vaut 1024 qu'on arrondit à 1000 c'est à dire 10^3 . D'ailleurs, pour les informaticiens, le k de k -octet et k -byte ne signifie pas kilo au sens de 10^3 mais k au sens de 2^{10} . Mais vous ne faites guère la différence quand vous mesurez la capacité mémoire de vos ordinateurs et gadgets électroniques en Mega et autres Giga.

On effectue donc : $2^{65536} = 2^{10 \cdot 6553 + 6} = (2^{10})^{6553} \cdot 64$. On estime à $64 \cdot 10^{19659}$, Ce nombre s'écrit avec plus de 19661 chiffres.

La vraie valeur est 19729 en faisant appel au logarithme qui est justement là pour ça...

On reprend, mais en enlevant des éléments en cours de route.

- $P(E)$ a toujours 4 éléments dont $\{a\}$ et $\{a, b\}$
- $P(P(E))$ a toujours 2^4 éléments dont $\{\{a\}, \{a, b\}\}$;
- $P(P(E)) - \{\{a\}, \{a, b\}\}$ a donc 14 éléments,
- $P(P(P(E)) - \{\{a\}, \{a, b\}\})$ a donc 2^{14} éléments (*valeur : 16384*),
- $P(P(P(P(E)) - \{\{a\}, \{a, b\}\}))$ a enfin 2^{16384} éléments (*valeur affreuse*),

Cette fois, on estime à 4920 chiffres son écriture en base 10 (*en fait 4933 mais ça ne change pas grand chose, sauf quand on en est enfin au quatemillième chiffre*).

2011/12

Préliminaires sur les trois fonctions hyperboliques.

D.S.4

Les deux fonctions ch et sh sont définies sur tout $\mathbb{R}$.

On a sans problème pour tout x réel : $ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = ch(x)$ et $ch(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -sh(x)$.

Le cosinus hyperbolique est pair et le sinus hyperbolique impair.

On somme : $ch(x) + sh(x) = e^x$ et $ch(x) - sh(x) = e^{-x}$ (à l'étage des fonctions : $ch + sh = exp$, et rien d'aussi court pour la différence).

On multiplie terme à terme : $ch^2 - sh^2 = 1$.

On en profite pour écrire $ch^2 = 1 + sh^2 \geq 1$. Comme le cosinus hyperbolique est positif (*somme d'exponentielles*), on déduit : $ch(x) \geq 1$. Sans tableau de variations.

On pouvait aussi écrire $ch(x) - 1 = \frac{e^x + e^{-x} + 2}{2} = \frac{(e^{x/2} - e^{-x/2})^2}{2} \geq 0$.

Il s'ensuit que la tangente hyperbolique est définie sur tout $\mathbb{R}$ et est une application impaire.

On calcule aussi $ch^2 + sh^2$ et on trouve $x \rightarrow ch(2x)$ en présentant le résultat à l'étage des applications comme demandé.

Ce qui ne pourra pas être accepté : une formule déséquilibrée comme $ch^2 + sh^2 = ch(2x)$ dans laquelle la variable flotte d'un seul côté...

On calcule aussi :
$$\frac{1 + th(x/2)}{1 - th(x/2)} = \frac{1 + \frac{sh(1/2)}{ch(1/2)}}{1 - \frac{sh(1/2)}{ch(1/2)}} = \frac{ch(1/2) + sh(1/2)}{ch(1/2) - sh(1/2)} = \frac{e^{1/2}}{e^{-1/2}} = e^{1/2} \cdot e^{1/2} = e.$$

On dérive : $ch' = sh$ et $sh' = ch$.

Par récurrence sur p entier, on a $ch^{(2.p)} = ch$ et $ch^{(2.p+1)} = sh$.

De même, on a $sh^{(2.p)} = sh$ et $sh^{(2.p+1)} = ch$.

C'est encore plus pratique qu'avec les sinus et cosinus habituels pour lesquels la période est de 4 .

En tant que quotient, la tangente hyperbolique est impaire.

Ses dérivées ne sont pas des plus agréables, hormis la première qui se simplifie bien : $th' = \frac{sh'.ch - ch'.sh}{ch^2} = \frac{ch^2 - sh^2}{ch^2} = \frac{1}{ch^2}$. On a aussi en séparant la fraction : $th' = 1 - th^2$.

On note au passage : $th^2 = 1 - \frac{1}{ch^2} < 1$ et on encadre donc strictement la tangente hyperbolique par -1 et 1 , ses limites à l'infini.

Si f est une application impaire, alors on a $f(-0) = -f(0)$ d'où $2.f(0) = 0$. Une fonction impaire définie en 0 est nulle en 0 (*exemple : le sinus, la tangente,...*).

On reprend proprement le raisonnement de l'élève sur la dérivée d'une application paire. Mais premièrement en quantifiant proprement, et deuxièmement en travaillant à l'étage des fonctions.

On part de $(x \rightarrow f(x)) = (x \rightarrow f(-x))$.

On dérive : $(x \rightarrow f(x))' = (x \rightarrow f(-x))'$.

On reconnaît la dérivation d'une composée : $(x \rightarrow f(x))' = (x \rightarrow -f'(-x))$ (*rappelons* $(x \rightarrow f(\omega.x))' = (x \rightarrow \omega.f'(\omega.x))$).

On revient à l'étage des réels : pour tout x , on a $f'(x) = -f'(-x)$ et on fait passer le signe moins de l'autre côté. On reconnaît " f' est impaire".

Ce qui manquait vraiment au raisonnement de l'élève : le $\forall x$ sans lequel on ne peut pas dériver car on ne sait pas si il ne s'agit pas de relation simplement en un point. Ce qui était franchement faux : $(f(-x))'$ n'a pas de sens.

J'espère vous avoir convaincu, et j'espère que vous ne confondrez pas $f'(2.x)$ et $(x \rightarrow f(2.x))'$ par exemple.

On fait un raisonnement de même type avec les applications impaires. En dérivant une relation telle que $g(-x) = -g(x)$ valable en tout point, on trouve $-g'(-x) = -g'(x)$.

La dérivée d'une application impaire dérivable est paire.

Maintenant, on applique ceci à la tangente hyperbolique. Elle est impaire. th' est donc paire (*on le savait déjà*).

La dérivée seconde th'' est impaire. La suivante est paire. Et ainsi de suite. Par récurrence sur p , $th^{(2.p)}$ est impaire et $th^{(2.p+1)}$ est paire.

En 0, on a donc $th^{(2,p)}(0) = 0$ (valeur en 0 d'une application impaire).

2011/12

Variations et applications réciproques.

D.S.4

Le sinus hyperbolique est croissant, car sa dérivée est positive (et même plus grande que 1). Il est nul en 0 et tend vers $+\infty$ à l'infini, sans aucune forme indéterminée.

Il réalise donc un homéomorphisme de $] -\infty, +\infty[$ dans lui-même.

Pour expliciter sa réciproque, on part de $y = sh(x)$ et on exprime x comme fonction de y . On écrit

donc $e^x - e^{-x} = 2.y$. On pose $X = e^x$ et l'équation devient $X + \frac{1}{X} = 2.y$ avec X positif. On multiplie par X qui est non nul, et on raisonne donc par équivalences : $X^2 - 2.y.X - 1 = 0$. On calcule le discriminant : $4.(y^2 + 1)$ et on trouve deux racines réelles : $y + \sqrt{y^2 + 1}$ et $y - \sqrt{y^2 + 1}$. La première est positive, et la seconde négative, quoi qu'y fasse y (en effet, le produit des racines vaut -1 , l'une est donc positive, et l'autre est négative, et la plus grande avec son signe plus est donc la racine positive). Par élimination, on a donc : $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$. On revient à la variable x à isoler : $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$. On a donc : $Argsh = (y \rightarrow \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}))$ définie, continue et dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

On dérive d'ailleurs et on trouve : $Argsh' = (y \rightarrow \frac{1 + \frac{2.y}{2.\sqrt{y^2 + 1}}}{y + \sqrt{y^2 + 1}})$. En réduisant au dénominateur commun en haut, on retrouve $y + \sqrt{y^2 + 1}$ qui se simplifie avec le dénominateur et il reste $Argsh' = y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$ (déjà croisé en I.S. si je me souviens bien).

On fait le même type de cacul pour le cosinus hyperbolique. Mais sa dérivée n'est de signe constant que sur $[0, +\infty[$. Le cosinus est d'abord décroissant puis croissant. Les deux limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont $+\infty$. On n'a donc pour ch qu'un homéomorphisme de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$.

On résout $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$ de la même manière. On trouve l'équation du second degré $X^2 - 2.y.X + 1 = 0$ dont les deux racines réelles sont $y + \sqrt{y^2 - 1}$ et $y - \sqrt{y^2 - 1}$. On rappelle que y est plus grand que 1, le discriminant est bien positif ou nul. Les deux racines sont cette fois positives (leur produit vaut 1 et leur somme est positive). Laquelle va-t-on éliminer ? Laquelle va-t-on garder ? C'est $y + \sqrt{y^2 - 1}$, la seule des deux à être plus grande que 1 (produit égal à 1) et capable donc d'être égale à e^x avec x dans $[0, +\infty[$, domaine d'injectivité choisi.

On a donc, de $[1, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$: $Argch' = (y \rightarrow \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}))$.

On dérive en $Argch' = (y \rightarrow \frac{1 + \frac{2.y}{2.\sqrt{y^2 - 1}}}{y + \sqrt{y^2 - 1}})$ et on trouve $y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$ qui ne sera définie que sur $]1, +\infty[$ (on doit ouvrir en 1, avec demi-tangente verticale).

La dérivée de la tangente hyperbolique est positive. La tangente hyperbolique est croissante. Pour sa limite en $+\infty$, on la met sous la forme $th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2.x}}{1 + e^{-2.x}}$ et on trouve une limite égale à 1.

La limite en $-\infty$ est -1 , par imparité.

On résout ensuite $\frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} = y$ avec X strictement positif (c'est une exponentielle). On multiplie haut et bas par X :

$\frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} = y$. On inverse : $X^2 = \frac{y + 1}{1 - y}$. C'est cohérent, car y reste entre -1 et 1 (tableau

de variations de $y = th(x)$. On passe au logarithme : $x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{y+1}{1-y} \right)$. On peut aussi prendre le risque inutile d'écrire $\ln \left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \right)$.

On dérive sous la forme de différence de deux logarithmes : $y \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot \ln(y+1) - \frac{1}{2} \cdot \ln(1-y)$ se dérive en $y \longrightarrow \frac{1}{2 \cdot (y+1)} + \frac{1}{2 \cdot (1-y)}$ qui fusionne en $y \longrightarrow \frac{1}{1-y^2}$.

2011/12

Des permutations, d'étranges $\left[\begin{smallmatrix} n \\ p \end{smallmatrix} \right]$.

D.S.4

Pour toute permutation σ , on compte le nombre de k vérifiant $\sigma(k+1) > \sigma(k)$. Il s'agit du nombre de fois où la permutation σ "monte".

Pour l'identité, on a $\sigma(k+1) = k+1 > k = \sigma(k)$. Les $n-1$ valeurs de k sont autorisées. On a donc $up(Id) = n-1$ (*up*, c'est "haut" en anglais).

On prend le cycle qui transforme chaque k en $k+1$, et n en 1, noté $\overrightarrow{(1, 2, 3 \dots n)}$. Les k vérifiant $\sigma(k+1) > \sigma(k)$ sont donc tous les entiers de 1 à $n-2$. On a donc $up(\overrightarrow{(1, 2, 3 \dots n)}) = n-2$.

L'unique permutation r vérifiant $up(r) = 0$ est celle qui renverse toute la liste : elle transforme $[1, 2, 3, \dots, n]$ en $[n, n-1, n-2, \dots, 1]$. Elle est définie par $r(k) = n-k+1$. Pour tout k , on a $r(k+1) = n-k < n-k+1 = r(k)$, et donc l'ensemble $\{k \in E_n - \{n\} | r(k+1) > r(k)\}$ est vide, de cardinal 0.

On en a trouvé une. Mais est ce la seule ?

On veut une permutation vérifiant donc $r(k+1) \leq r(k)$ pour tout k et donc $r(k+1) < r(k)$ pour tout k puisque r est injective.

On doit atteindre une fois la valeur n , en quel point ? Ce ne peut être qu'en 1 (si l'on avait $r(i) = n$ pour un indice autre que 1, on pourrait écrire à coup sûr $r(i-1+1) > r(i-1)$ et on aurait au moins le nombre $i-1$ dans l'ensemble des k). On a donc déjà $r(1) = n$. Il faut ensuite trouver l'indice j vérifiant $r(j) = n-1$. Ce ne peut être que 2 (si l'on avait $r(i) = n-1$ pour un indice autre que 2, on pourrait écrire à coup sûr $n-1 = r(i-1+1) > r(i-1)$ et on aurait au moins le nombre $i-1$ dans l'ensemble des k). Et ainsi de suite.

On traite ensuite de la composition $(\tau_{1,7} \circ \overrightarrow{(2, 4, 6, 8, 10)} \circ \overrightarrow{(3, 9, 5)})$, où les cycles sont heureusement de supports disjoints.

Elle part de la liste $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$ (oui, on a imposé $n = 12$) et on en fait $[1, 2, 9, 4, 3, 6, 7, 8, 5, 10, 11, 12]$ puis $[1, 4, 9, 6, 3, 8, 7, 10, 5, 2, 11, 12]$ et enfin $[7, 4, 9, 6, 3, 8, 1, 10, 5, 2, 11, 12]$.

On traduit : $\sigma(1) = 7$, $\sigma(2) = 4$: 1 n'est pas dans $\{k | \sigma(k+1) > \sigma(k)\}$

On poursuit : $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 9$: 2 est dans $\{k | \sigma(k+1) > \sigma(k)\}$

On poursuit : $\sigma(3) = 9$, $\sigma(4) = 6$: 4 n'est pas dans $\{k | \sigma(k+1) > \sigma(k)\}$

Et ainsi de suite : $\{k | \sigma(k+1) > \sigma(k)\} = \{2, 5, 7, 10, 11\}$.

L'entier $up(\sigma)$ vaut 5.

• Pour n égal à 1, il n'y a qu'une permutation (définie par $\sigma(1) = 1$), et l'ensemble $\{k \in E_1 - \{1\} | \dots\}$ est vide. $up(\sigma)$ vaut 0.

On dénombre $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = 1$.

• Pour n égal à 2, il y a deux permutations : Id et $\tau_{1,2}$ qui est d'ailleurs celle qui renverse.

On a $up(Id) = 1$ et $up(\tau_{1,2}) = 0$. On déduit alors par dénombrement rapide : $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = 1$.

• Pour n égal à 3 il y a six permutations. Il faut commencer à être rigoureux. On dresse leur liste, en

assimilant chacune à ce qu'elle fait de la liste initiale $[1, 2, 3]$:

$[1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1]$

On calcule le up de chacune et on les place dans un tableau en fonction de la valeur de ce up :

0	1	2
$[3, 2, 1]$	$[1 < 3, 2]$	$[1 < 2 < 3]$
	$[2, 1 < 3]$	
	$[2 < 3, 1]$	
	$[3, 1 < 2]$	

Pour s'y retrouver, j'ai remplacé la virgule par $<$ quand on est sur un indice k vérifiant $\sigma(k+1) > \sigma(k)$.

On résume :

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
1	4	1

• On s'attaque à $n = 4$ avec ses 24 permutations. On dresse un tableau, avec la même convention de lecture : remplacement de la virgule par $<$ dès qu'on a un k vérifiant $\sigma(k+1) > \sigma(k)$:

0	1	2	3
$[4, 3, 2, 1]$	$[4, 3, 1 < 2]$	$[1 < 2 < 4, 3]$	$[1 < 2 < 3 < 4]$
	$[4, 2, 1 < 3]$	$[1 < 3 < 4, 2]$	
	$[4, 2 < 3, 1]$	$[1 < 3, 2 < 4]$	
	$[4, 1 < 3, 2]$	$[1 < 4, 2 < 3]$	
	$[3 < 4, 2, 1]$	$[2, 1 < 3 < 4]$	
	$[3, 2 < 4, 1]$	$[2 < 3, 1 < 4]$	
	$[3, 2, 1 < 4]$	$[2 < 3 < 4, 1]$	
	$[3, 1 < 4, 2]$	$[2 < 4, 1 < 3]$	
	$[2, 1 < 4, 3]$	$[3 < 4, 1 < 2]$	
	$[2 < 4, 3, 1]$	$[3, 1 < 2 < 4]$	
	$[1 < 4, 3, 2]$	$[4, 1 < 2 < 3]$	

Dans ce tableau, dans les deux colonnes centrales, chaque permutation est couplée avec son "renversé" $\sigma \circ r$. On passe donc de permutations de up égal à 1 à des permutations de up égal à 2 et vice versa.

On termine :

$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
1	11	11	1

On a bien nos 24 permutations au total.

On va justifier la relation $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-p-1 \end{pmatrix}$ par le fait que chaque fois qu'il y a une permutation σ évrifiant $up(\sigma) = p$, la permutation $r \circ \sigma$ vérifie $up(r \circ \sigma) = n - 1 - p$.

En effet, si l'on prend un k vérifiant $\sigma(k+1) > \sigma(k)$ alors on a automatiquement $r(\sigma(k+1)) < r(\sigma(k))$.

En revanche si on prend un i vérifiant $\sigma(i+1) < \sigma(i)$, alors on a $r(\sigma(i+1)) > r(\sigma(i))$.

Les deux ensembles $\{k \in E_n - \{n\} | \sigma(k+1) > \sigma(k)\}$ et $\{k \in E_n - \{n\} | r(\sigma(k+1)) > r(\sigma(k))\}$ sont donc complémentaires l'un de l'autre. Si l'un est de cardinal p , l'autre est de cardinal $n - 1 - p$.

Il y a donc autant de permutations de up égal à p que de permutations de up égal à $n - 1 - p$. On a donc bien $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-1-p \end{pmatrix}$ pour tout couple (n, p) . Le tableau où on range les σ de S_n en fonction de leur up possède un axe de symétrie.

Par exemple $[1, 5, 7, 4, 6, 3, 2, 8]$ a pour up 4 (on l'écrit $[1 < 5 < 7, 4 < 6, 3, 2 < 8]$) et son "renversé" $[8, 4, 2, 5, 3, 6, 7, 1]$ a pour up 3 (on l'écrit $[8, 4, 2 < 5, 3 < 6 < 7, 1]$).

Triangle :

1			
1	1		
1	4	1	
1	11	11	1

2011/12 Le lien entre ces $\binom{n}{p}$ et les dérivées successives de la tangente hyperbolique en 0. D.S.4 On

calcule alors les sommes alternées des “dénombrateurs de up ” pour les premières valeurs de n :

- : $n = 1$: $(-1)^0 \cdot \binom{1}{0} = 1$
- : $n = 2$: $\binom{2}{0} - \binom{2}{1} = 1 - 1 = 0$
- : $n = 3$: $\binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 1 - 4 + 1 = -2$
- : $n = 4$: $\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} = 1 - 11 + 11 - 1 = 0$

On vérifie la coïncidence avec les dérivées premières de la tangente hyperbolique qu'on va calculer en 0 :

0	1	2	3	4
th	$1 - th^2$	$-2.th.(1 - th^2)$	$-2 + 8.th^2 - 6.th^4$	?
0	1	0	-2	0

Comment ai-je calculé th'' ? Simple, je suis parti de $th' = 1 - th^2$ et j'ai redérivé : $th'' = -2.th.th' = -2.th.(1 - th^2) = 2.th^3 - 2.th$.

Et pour $th^{(3)}$? J'ai redérivé la formule du dessus : $th^{(3)} = 6.th^2.th' - 2.th'' = 6.th^2.(1 - th^2) - 2.(1 - th^2)$. La valeur en 0 est -2.

Pour ce qui est de $th^{(4)}(0)$ j'ai juste rappelé que $th^{(2.p)}$ était impaire donc nulle en 0.

On a donc $th^{(2.p)}(0) = 0$. Il serait bon de prouver que la somme alternée $\sum_{q=0}^{2.p} (-1)^q \cdot \binom{2.p}{q}$ est nulle.

C'est trop facile. Pour chaque $(-1)^q \cdot \binom{2.p}{q}$, il y a son opposé $(-1)^{2.p-q-1} \cdot \binom{2.p}{2.p-q-1}$. La somme totale est nulle.

En revanche, pour n impair de la forme $2.p + 1$, les termes $(-1)^q \cdot \binom{2.p+1}{q}$ et $(-1)^{2.p-q} \cdot \binom{2.p+1}{2.p-q}$ se complètent.

C'est un peu comme dans la somme $\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k}$ que nous recroiserons cette année.

On dérive à présent un produit de deux fonctions : $(f.g)' = f'.g + f.g'$. C'est dans le cours de Terminale, ça sert au bac et on l'a déjà réutilisé cette année.

On redérive : $(f.g)'' = (f'.g)' + (f.g')' = (f''.g + f'.g') + (f'.g' + f.g'') = f''.g + 2.f'.g' + f.g''$. Tiens...

On recommence : $(f.g)^{(3)} = (f^{(3)}.g + f'''.g') + 2.(f'''.g' + f'.g'') + (f'.g'' + f.g^{(3)})$.

On met au propre et on dresse une liste où une conjecture prend forme :

$(f.g)^{(0)} =$	$f.g$					
$(f.g)' =$	$f'.g +$	$f.g'$				
$(f.g)'' =$	$f''.g +$	$2.f'.g' +$	$f.g''$			
$(f.g)^{(3)} =$	$f^{(3)}.g +$	$3.f'''.g' +$	$3.f'.g'' +$	$f.g^{(3)}$		
$(f.g)^{(4)} =$	$f^{(4)}.g +$	$4.f^{(3)}.g' +$	$6.f'''.g'' +$	$4.f.g^{(3)} +$	$f.g^{(4)}$	
$(f.g)^{(5)} =$	$f^{(5)}.g +$	$5.f^{(4)}.g' +$	$10.f^{(3)}.g'' +$	$10.f'''.g^{(3)} +$	$5.f'.g^{(4)} +$	$f.g^{(5)}$

Si franchement vous n'émettez pas de conjecture, je déprime...

On prend ensuite comme proposé $f = th$ et $g = ch$. On a naturellement $f.g = sh$ (c'est ce réflexe qui vous aura peut être manqué...).

On applique par exemple à l'ordre 3 : $sh^{(3)} = th^{(3)}.ch + 3.th''.ch' + 3.th'.ch'' + th.ch^{(3)}$.

On remplace : $ch = th^{(3)}.ch + 3.th''.sh + 3.th'.ch + th.sh$.

On calcule en 0 : $1 = 1.th^{(3)}(0) + 0 + 3.th'(0) + 0$.

On remplace par ce qu'on sait : $1 = th^{(3)}(0) + 3 : th^{(3)}(0) = -2$.

On suit le même raisonnement avec n égal à 5, et tous calculs faits, on trouve $th^{(4)}(0) = 0$ et $th^{(5)}(0) = 16$ sans effort.

Je sais, certains préfèrent dériver comme des bourrins et faire des efforts inutiles. Ce n'est pas grave, on a besoin aussi de s'entraîner pour les devoirs de physique...

2011/12

Des matrices et des fractions imbriquées.

D.S.4

On calcule les produits matriciels pour commencer.

	$\begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x & 3x \\ 1 & 3+x^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3x & 15x+x^3 \\ 3+x^2 & 15+6x^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15x+x^3 & 105x+10x^3 \\ 15+6x^2 & 105+45x^2+x^4 \end{pmatrix}$

Composer des homographies, c'est multiplier les matrices associées. Ici, on a composé une $t \longrightarrow \frac{1}{t+1}$ avec des $t \longrightarrow \frac{x^2}{n+t}$ (la variable est bien t). C'est aussi ce qu'on fait avec nos fractions continuées.

Avec ensuite $t = 0$, que l'on code en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On récupère donc les fractions successives $\frac{x}{1}$ (non demandée), $\frac{3x}{3+x^2}$, $\frac{15x+x^3}{15+6x^2}$, $\frac{105x+10x^3}{105+45x^2+x^4}$. Et on pourrait aller loin comme ça. Juste avec des produits matriciels.

2011/12

La suite d'applications (f_n) .

D.S.4

On a donc $f_1 = sh$.

On intègre par parties : $f_1(x) = -2 \cdot \int_0^x t.sh(t).dt = -2.x.ch(x) + 2.sh(x)$

(j'ai dérivé $t \longrightarrow -2.t$ et intégré $t \longrightarrow sh(t)$).

On recommence par parties encore : $f_2(x) = (4.x^2 + 12).sh(x) - 12.x.ch(x)$.

On va vérifier la relation $f_n(x) = (4.n - 2).f_{n-1}(x) + 4.x^2.f_{n-2}(x)$ par récurrence sur n . Pour n égal à 2, on a bien $f_2(x) = 6.(2.sh(x) - 2.x.ch(x)) + 4.x^2.sh(x)$.

Supposons la formule vraie au rang n . On a donc $f_n(x) = (4.n - 2).f_{n-1}(x) + 4.x^2.f_{n-2}(x)$ pour tout x . On veut prouver $f_{n+1}(x) = (4.n + 2).f_n(x) + 4.x^2.f_{n-1}(x)$. On note g_n l'application différence $x \longrightarrow f_{n+1}(x) - (4.n + 2).f_n(x) - 4.x^2.f_{n-1}(x)$.

On calcule en 0 : $g_n(0) = 0$.

On dérive : $g' = x \longrightarrow -2.x.f_n(x) + 2.(4.n + 2).x.f_{n-1}(x) - (8.x.f_{n-1}(x) - 8.x^3.f_{n-1}(x))$. En effet, f_n se dérive en $x \longrightarrow -2.x.f_n(x)$, "de même" pour les autres indices.

On simplifie : $g'(x) = -2.x.(f_n(x) - (4.n - 2).f_{n-1}(x) - 4.x^2.f_{n-2}(x))$.

Par hypothèse de rang n il ne reste rien.

g' est nulle partout, g est donc constante. C'est sa valeur en 0 qui va nous donner sa valeur : $g(x) = g(0) = 0$ puisque toutes les f_k sont nulles en 0.

L'application g est nulle. On a donc bien la formule au rang $n + 1$.

2011/12

La fonction de Guderman.

D.S.4

On pose donc : $\gamma = x \longrightarrow 2 \cdot \text{Arctan}(e^x) - \pi/2$. L'exponentielle est strictement positive. Par croissance de l'arctangente, $\text{Arctan}(e^x)$ est strictement entre 0 et $\pi/2$. Son double est entre 0 et π et $\gamma(x)$ est entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

On peut en prendre la tangente.

On rappelle : $\cos(\theta - \pi/2) = \sin(\theta)$ et $\sin(\theta - \pi/2) = -\cos(\theta)$. On a donc $\tan(\theta - \pi/2) = -1/\tan(\theta)$ (surtout, n'allez pas chercher la formule $\tan(a+b)$ avec b égal à $-\pi/2$...).

$$\text{On a donc : } \tan(\gamma(x)) = -\frac{1}{\tan(2 \cdot \text{Arctan}(e^x))} = \frac{-1}{2 \cdot \frac{\tan(\text{Arctan}(e^x))}{1 - \tan^2(\text{Arctan}(e^x))}} = \frac{(e^x)^2 - 1}{2 \cdot e^x}.$$

On simplifie par e^x en haut et en bas, et on reconnaît : $\tan(\gamma(x)) = sh(x)$.

Les ensembles images sont cohérents, ce réel peut décrire tout $\mathbb{R}$.

On continue avec $\cos(\gamma(x)) = \sin(2 \cdot \text{Arctan}(e^x))$. On passe par la tangente de l'arc moitié, et cet arc moitié, c'est $\text{Arctan}(e^x)$. On remplace donc : $\cos(\gamma(x)) = \frac{2 \cdot e^x}{1 + (e^x)^2}$. On divise en haut et en bas par e^x et il reste $\frac{2}{e^x + e^{-x}}$. On a donc : $\cos(\gamma(x)) = \frac{1}{ch(x)}$. Cette quantité varie entre 0 et 1, quelle que soit la façon de la lire.

Enfin, on écrit juste $\sin(\gamma(x)) = \tan(\gamma(x)) \cdot \cos(\gamma(x)) = sh(x) \cdot \frac{1}{ch(x)} = th(x)$. Et là encore, l'ensemble image est cohérent : $] -1, 1[$.

On dérive ? On a une composée :

$$\gamma'(x) = 2 \cdot \frac{e^x}{1 + (e^x)^2} = 2 \cdot \frac{1}{e^{-x} + e^x} = \frac{1}{ch(x)}$$

On renverse ensuite $y = \gamma(x) = 2 \cdot \text{Arctan}(e^x) - \pi/2$ (x réel, y entre $-\pi/2$ et $\pi/2$).

On bascule : $2 \cdot \text{Arctan}(e^x) = y + \pi/2$.

On divise : $\text{Arctan}(e^x) = \frac{2 \cdot y + \pi}{4}$. On passe à la tangente : $e^x = \tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

On termine : $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$. Et on reconnaît une fonction déjà croisée. Sa dérivée est $y \longrightarrow \frac{1}{\cos(y)}$.

2011/12

Des matrices et des fractions continuées.

D.S.4

On effectue les produits matriciels les uns après les autres, en multipliant à chaque fois par une nouvelle matrice de la famille des B :

$$A \cdot B_3 = \begin{pmatrix} x & 3x \\ 1 & 3 + x^3 \end{pmatrix}, \text{ puis } A \cdot B_3 \cdot B_5 = \begin{pmatrix} 3x & 15x + x^3 \\ 3 + x^3 & 15 + 6x^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et enfin } A \cdot B_3 \cdot B_5 \cdot B_7 = \begin{pmatrix} 15x + x^3 & 75x + 8x^3 \\ 15 + 6x^2 & 75 + 33x^2 + x^4 \end{pmatrix}.$$

On peut se dire qu'on a déjà croisé ces polynômes quelquepart.

Mais ce n'est pas fini. Les fractions demandées donnent dans l'ordre :

$$\frac{x}{1 + \frac{x^2}{3}} = \frac{3x}{3 + x^2}, \quad \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{x^2}{5}}} = \frac{15x + x^3}{15 + 6x^2}, \quad \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{x^2}{5 + \frac{x^2}{7}}}} = \frac{75x + 8x^3}{75 + 33x^2 + x^4}$$

... et je ne suis plus trop surpris...

D.S.5	Charlemagne	Vendredi 25 novembre	2011/2012	D.S.5
2011/12	EXERCICES			D.S.5

<♠(5)> Résoudre $\text{Arctan}(x-2) = \text{Arctan}(x) + \frac{3\pi}{4}$ d'inconnue réelle x (attention!). (2 pt.)

<♠(6)> Calculez $\int_0^5 \text{Arctan}([x]).dx$ et $\int_0^5 [\text{Arctan}(x)].dx$ (les crochets désignent comme toujours la partie entière). (3 pt.)

<♠(7)> Montrez : $2.\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \text{Arccos}(x)$ pour tout x de $] -1, 1[$. (3 pt.)

<◇(6)> Si A est une matrice dont le terme de ligne i colonne k est noté a_i^k , on définit sa transposée (notée tA), dont le terme de ligne i et colonne k est α_i^k caractérisé par $\alpha_i^k = a_k^i$. Vérifiez les propriétés $\text{Tr}({}^tA.A) = \text{Tr}(A.{}^tA) \geq 0$ et ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$ pour les matrices carrées de taille 2, puis montrez ces mêmes résultats pour les matrices de taille n avec des manipulations propres et bien rédigées sur des sigmas. (4 pt.)

93 points 93 points

<◇(7)> On définit les suites récurrentes u et v par $\begin{cases} a_{n+1} = 5.a_n + 3.b_n - 5 \\ b_{n+1} = 3.b_n + a_n - 2 \end{cases}$. On définit

$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour tout n . Trouvez M (matrice carrée de taille 2) et C (vecteur colonne) vérifiant $U_{n+1} = M.U_n + C$. (1 pt.)

<◇(8)> Calculez $(I_2 - M)^{-1}.C$ (noté B) où I_2 est la matrice unité, élément neutre de la multiplication. (1 pt.)

<◇(9)> Quelle relation de récurrence vérifie alors la suites V définie par $V_n = U_n - B$? (1 pt.)

<◇(10)> Calculez M^n pour tout n . (3 pt.) Déterminez V_n et U_n puis a_n et b_n à l'aide de a_0, b_0 et n . (2 pt.)

<◇(11)> Indiquez graphiquement dans le plan l'ensemble des couples (a_0, b_0) pour lesquels on a $a_{10} \geq 0$ et $b_{10} \geq 0$. (3 pt.)

11 points 11 points

2011/12	QUATRE SÉRIES	D.S.5
---------	----------------------	--------------

On définit la série harmonique H , sa variante alternée et deux autres séries :

H_n	h_n	G_n	g_n
$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$	$\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k}$	$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \cdot \ln(k)}{k}$
diverge	converge	diverge	converge

La dernière ligne, c'est ce qu'on va prouver dans ce qui suit.

- 1) Montrez par comparaison avec une intégrale : $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$. (2 pt.)

- 2) Montrez : $\frac{H_n}{\ln(n)} \xrightarrow{n \mapsto +\infty} 1$. (1 pt.)

- 1) Etudiez les variations de $t \rightarrow \frac{\ln(t)}{t}$. (1 pt.) Montrez alors $\int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} . dt \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(t)}{t} . dt$ pour tout k supérieur ou égal à 4. (2 pt.)

Déduisez la minoration de G_n par $\ln(\sqrt{2}) + \int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} . dt$ pour tout n au moins égal à 3. (2 pt.)

- 2) Calculez $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t} . dt$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$. (2 pt.) Déduisez le comportement à l'infini de la suite (G_n) . (1 pt.)

- 1) Montrez : $h_{2,n} < h_{2,n+2} < h_{2,n+3} < h_{2,n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. (3 pt.) Déduisez que la suite $(h_{2,p})$ converge. Déduisez aussi que la suite $(h_{2,p+1})$ converge. (2 pt.)

- 2) Montrez que $(h_{2,p})$ et $(h_{2,p+1})$ ont la même limite (sans forcément la calculer...). (1 pt.) Quantifiez la convergence de chacune de ces deux suites, et déduisez que la suite (h_n) converge, en revenant aux N_ϵ . (3 pt.)

- 3) Montrez : $g_{2,n+1} < g_{2,n+3} < g_{2,n+2} < g_{2,n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. Prouvez que la suite (g_n) converge. (3 pt.)

- 4) Donnez la limite de la suite (h_n) (démonstration exigée). (3 pt.)

- 1) Montrez : $\ln(1+x) \leq x$ pour tout x de $]0, +\infty[$. (2 pt.)

- 2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = H_n - \ln(n)$. Déduisez de la question précédente que u est décroissante. Déduisez que u converge. (2 pt.)

Sa limite est notée γ et s'appelle "constante d'Euler", la troisième constante des mathématiques, après π et e (ça en fait moins à connaître qu'en physique), elle est de l'ordre de $0,577$ à 10^{-3} près, mais on ne sait même pas si elle est rationnelle ou non.

- 3) Un élève dit "mais on avait prouvé que $\frac{H_n}{\ln(n)}$ tendait vers 1, on aurait donc dû trouver que $H_n - \ln(n)$ tendait vers 0". Que pouvez vous lui répondre? (1 pt.)

- 1) On définit : $v_n = G_n - \frac{(\ln(n))^2}{2}$ pour tout n . Montrez que v est décroissante (à partir du rang 3), minorée. (4 pt.)

- 1) Montrez pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $g_{2,n} + G_{2,n} = \ln(2) . H_n + G_n$. (3 pt.)

- 2) Déduisez : $g_{2,n} = \ln(2) . u_N + v_n - v_{2,n} - \frac{(\ln(n))^2}{2}$. (3 pt.)

- 3) Donnez la limite de g_n . (2 pt.)

D.S.5

MPSI2

325 points

Année 2011/12

D.S.5

D.S.5

MPSI2

Correction

Année 2011/2012

D.S.5**2011/12**Une équation trigonométrique : $\text{Arctan}(x-2) = \text{Arctan}(x) + 3\pi/4$.**D.S.5**

Il n'y a pas de problème de domaine de définition.

Et il n'y a même aucun problème. En effet, par croissance de l'arctangente, $\text{Arctan}(x-2)$ est plus petit que $\text{Arctan}(x)$. Et $\text{Arctan}(x) + 3\pi/4$ est plus grand que $\text{Arctan}(x)$. **Il ne peut donc pas y avoir de solutions réelle.**

Eh oui, aussi simple que ça.

Maintenant, tant pis pour vous si vous confondez maths et calculs grisants comme la partie numérique d'un devoir de mécanique. On pouvait en effet avec des réflexes bourrins de Terminable passer à la tangente sans réfléchir, aboutir à l'équation $x-2 = \frac{x+(-1)}{1-(-1).x}$ et trouver des solutions réelles : $-1 - \sqrt{2}$ et $-1 + \sqrt{2}$. Mais on pourrait voir qu'elles ne conduisent qu'à des égalités à π près.

Finalement, tant mieux si vous avez commis l'erreur. Normalement, ça devrait vous permettre de vous souvenir que prendre la tangente, le sinus, élever au carré sont des opérations non réversibles (applications non injectives). Elles se traduisent par des implications (conditions nécessaires) et vous conduisent à détecter des nombres qui ne sont pas solutions finalement. Si ensuite vous persistez dans vos habitudes de calculs sans lever le nez de la feuille et réfléchir aux variables, aux questions, tant pis pour vous.

2011/12 $\int_0^5 \text{Arctan}([x]).dx$ et $\int_0^5 \text{Arctan}([x]).dx$ **D.S.5**

Les deux intégrales existent, car on intègre des fonctions en escalier. Ah oui, qui a mis ici "pas de problème, car les applications intégrées sont continues" ?

On découpe l'intervalle en cinq morceaux pour la première :

$$\int_0^5 \text{Arctan}([x]).dx = \int_0^1 \text{Arctan}(0).dx + \int_1^2 \text{Arctan}(1).dx + \dots + \int_4^5 \text{Arctan}(4).dx.$$

La somme finale vaut $\text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3) + \text{Arctan}(4)$. On peut la simplifier en $\pi + \text{Arctan}(4)$.

L'autre intégrale est encore plus simple, car $\text{Arctan}(x)$ ne varie qu'entre 0 et $\pi/2$ sur notre intervalle d'intégration. Sa partie entière ne peut valoir que 0 ou 1. On regarde quand elle bascule : en $\tan(1)$ qui est un nombre digne de peu d'intérêt, mais qui existe.

On coupe par la relation de Chasles :

$$\int_0^5 [\text{Arctan}(x)].dx = \int_0^{\tan(1)} 0.dx + \int_{\tan(1)}^5 1.dx.$$

L'intégrale vaut $5 - \tan(1)$. C'est du grand n'importe quoi.

Mais ça permet de voir si vous avez bien la vision de l'intégrale comme un objet géométrique et non comme un quizz de Terminable sur les primitives.

2011/12L'égalité $2.\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \text{Arccos}(x)$.**D.S.5**

Les deux fonctions de x de part et d'autre du signe égale sont bien définies sur $] -1, 1[$ (un tableau de signe pour vérifier que $(1-x)$ et $1+x$ sont tous deux positifs entre -1 et 1).

La seconde est à valeurs dans $]0, \pi[$ par définition même.

Et la première est à valeurs dans $2.]0, \pi/2[$ par positivité de la racine carrée et croissance de l'arctangente.

En 0, on a égalité : $2.\text{Arctan}(1) = 2.\pi/4$ et $\text{Arccos}(0) = \pi/2$ (vraie égalité et pas de congruences).

On peut ensuite dériver de chaque côté par exemple. On a à droite $-1/\sqrt{1-x^2}$ (c'est du cours).

A gauche, on a une composée $x \rightarrow \frac{1-x}{1+x} \rightarrow \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \rightarrow 2.\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$.

On trouve $\frac{-2}{(1+x)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}$.

Croyez moi et faites le calcul, ça donne $x \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

L'application différence des deux membres a une dérivée nulle ; elle est constante sur l'intervalle $] -1, 1[$, et elle est nulle en 0. Cette différence est donc nulle.

On a mieux ? Oui. On pose $\theta = 2 \cdot \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$. C'est donc, comme déjà dit, une mesure angulaire entre 0 et π , caractérisée par $\tan(\theta/2) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Par les formules en arc moitié, on a alors $\cos(\theta) = \frac{1 - \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}{1 + \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}$. Et quand on simplifie, il reste

juste $\cos(\theta) = x$!

Un angle entre 0 et π dont le cosinus vaut x ? C'est la définition d' $\text{Arccos}(x)$ en personne.

Attention, c'est une preuve directe et rigoureuse.

Si vous aviez pris le cosinus de chaque côté, pour arriver à $x = x$, vous n'auriez rien prouvé. Juste vous auriez établi qu'il n'y avait pas d'incohérence à avoir écrit l'égalité. Mais il pouvait rester des signes et des congruences.

2011/12

Les deux suites récurrentes linéaires (a_n) et (b_n) , et la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

D.S.5

On reformule déjà : $\begin{cases} a_{n+1} = 5.a_n + 3.b_n - 5 \\ b_{n+1} = a_n + 3.b_n - 2 \end{cases}$.

On traduit : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On posera donc $M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On a une suite qui n'est pas tout à fait géométrique. On va "changer de repère par translation" pour qu'elle le soit.

On calcule : $I_2 - M = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, de déterminant non nul (égal à 9). On l'inverse en $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ (vérifiez).

On calcule bêtement : $B = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$.

On calcule : $V_{n+1} = U_{n+1} - B = M.U_n + C - B = M.(V_n + B) + C - B$.

On constate : $V_{n+1} = M.V_n + (M - I_2).B + C$. Or, justement, $(I_2 - M).B = C$. Tout se simplifie et il reste $V_{n+1} = M.V_n$.

Je pense que c'est là que l'on va perdre des élèves. En effet, le mauvais élève (*celui qui a gardé son niveau Terminale et se roule goulument dans les calculs idiots avec la complaisance d'un goret dans sa bauge*) revient aux coefficients. Alors, même si il fait les bons calculs, il ne voit pas au final qu'il ne reste qu'une relation du type $\begin{cases} \alpha_{n+1} = 5.\alpha_n + 3.\beta_n \\ \beta_{n+1} = \alpha_n + 3.\beta_n \end{cases}$ en notant α_n et β_n les coefficients de V_n .

La suite (V_n) est géométrique de raison à gauche M . On a donc $V_n = M^n.V_0$ pour tout n . On va donc diagonaliser M pour être en mesure de calculer M^n .

M a pour trace 8 et pour déterminant 12. Ses valeurs propres (coefficients diagonaux de D semblable à M) sont les racines de l'équation $\lambda^2 - 8.\lambda + 12 = 0$ d'inconnue λ . **On trouve 6 et 2.**

Il n'y a pas de racines carrées, merci. Mais certains d'entre vous vont quand même se planter et partir dans des horreurs avec des radicaux, dignes des cauchemars d'une application numérique de la nuit de lundi à mardi...

On choisit $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On résout $M.P = P.D$ d'inconnue P inversible, en imposant P de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$. On trouve $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix}$ dont on vérifie l'inversibilité.

Les récurrences classiques donnent la forme de D^n et la formule $M^n = P.D^n.P^{-1}$.

Ensuite, on fait tomber les colonnes sur les lignes : $M^n = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3.6^n + 2^n & 3.6^n - 3.2^n \\ 6^n - 2^n & 3.2^n + 6^n \end{pmatrix}$ (valable pour n égal à 0 et 1).

On effectue : $\alpha_n = \frac{(3.6^n + 2^n).a_0 + (3.6^n - 3.2^n).b_0}{4}$ et $\beta_n = \frac{(6 - 2^n).a_0 + (6 + 3.2^n).b_0}{4}$

en notant donc α et β les suites de coefficients de la suite vectorielle V .

On remplace a_0 et b_0 par leurs valeurs de même que α_n et β_n .

On extrait a_n et b_n : $a_n = \frac{(3.6^n + 2^n).(5.a_0 - 4) + (3.6^n - 3.2^n).(5.b_0 - 3)}{20} + \frac{4}{5}$

et $b_n = \frac{(6^n - 2^n).(5.a_0 - 4) + (6^n + 3.2^n).(5.b_0 - 3)}{20} + \frac{3}{5}$.

On vérifie pour n nul et pour n égal à 1.

On exploite maintenant les formules trouvées (on ne va pas se contenter du plaisir d'avoir trouvé une formule explicite, on va comprendre comment on exploite ceci). On demande la positivité de a_{10} ce qui donne $(3.6^{10} + 2^{10}).a_0 + (3.6^{10} - 3.2^{10}).b_0 \geq (-16 + 21.6^{10} - 9.2^{10})/5$. On demande aussi la positivité de b_{10} ce qui donne cette fois $(6^{10} - 2^{10}).a_0 + (6^{10} + 3.2^{10}).b_0 \geq (-12 + 7.6^{10} - 13.2^{10})/5$.

On a des domaines définis par des inéquations de demi-plans. On trace les deux droites dont les équations sont $(3.6^{10} + 2^{10}).a_0 + (3.6^{10} - 3.2^{10}).b_0 = (-16 + 21.6^{10} - 9.2^{10})/5$ et $(6^{10} - 2^{10}).a_0 + (6^{10} + 3.2^{10}).b_0 = (-12 + 7.6^{10} - 13.2^{10})/5$ et on ne garde que le quart de plan dans la bonne intersection.

Les dessins ne sont pas du tout à l'échelle mais donnent une idée de la méthode.

2011/12

Transposées de matrices.

D.S.5

On travaille déjà en dimension 2. Quand on part de $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}$, on obtient par transposition $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$.

Les termes diagonaux ne bougent pas. Les autres s'échangent deux à deux.

Plus lisiblement : ${}^t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

On effectue $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ puis on transpose. On trouve $\begin{pmatrix} a.\alpha + b.\gamma & c.\alpha + d.\gamma \\ a.\beta + b.\delta & c.\beta + d.\gamma \end{pmatrix}$. Avec le produit $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ on aurait trouvé la même chose. En taille 3, le calcul est similaire.

On effectue ensuite les produits de A et sa transposée : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & \cdot \\ \cdot & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$. La trace de cette matrice est une somme de carrés. Elle est positive ou nulle. Et elle n'est nulle que si A est la matrice nulle.

On passe au cas des matrices de taille n . On a deux matrices A et B de termes généraux a_i^k et b_i^k . On définit leur produit : $C = A.B$, de terme général c_i^k . Les deux matrices tA et tB ont pour termes généraux $\alpha_i^k = a_k^i$ et $\beta_i^k = b_k^i$. On définit leur produit dans l'ordre : $D = {}^tB.{}^tA$ de terme

général δ_i^k . Les formules propres disent : $c_i^k = \sum_{j=1}^n a_i^j . b_j^k$. On transpose : ${}^t(A.B)$ a pour terme général

$$\gamma_i^k = c_k^i = \sum_{j=1}^n a_k^j . b_j^i.$$

On applique aussi la définition du produit : $\delta_i^k = \sum_{j=1}^n \beta_i^j . \alpha_j^k$, puis des transposées : $\delta_i^k = \sum_{j=1}^n b_j^i . a_k^j$.

La commutativité de la multiplication sur les réels (*coefficients des matrices*) donne bien $\gamma_i^k = \delta_i^k$ pour tout couple (i, k) .

Il suffisait de bien donner des noms à tout le monde, et de le faire simplement. Mais hélas, "raisonner et non calculer" n'est pas l'habitude qu'on vous a donnée au lycée...

On reprend ensuite la formule pour le produit de deux matrices. Le terme de position (i, k) de $A.^tA$ est $\sum_{j=1}^n a_i^j . \alpha_j^k$. Le terme diagonal de position (i, i) est $\sum_{j=1}^n a_i^j . \alpha_j^i$. La somme des termes diagonaux est $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_i^j . \alpha_j^i \right)$, formule déjà croisée en T.D. et en cours, faite de n^2 termes.

On trouve donc ici : $Tr(A.^tA) = \sum_{\substack{i \leq n \\ j \leq n}} (a_i^j)^2$. C'est un réel positif en tant que somme de carrés de

réels.

Attention aux explications trop courtes : n'écrivez pas "un carré est positif", mais "un carré de réel est positif". Vous savez en effet que c'est faux sur $\mathbb{C}$. On est en mathématiques, on est précis...

2011/12

La série harmonique.

D.S.5

On fait un graphique pour comparer la série harmonique et une intégrale. On le fait plus proprement que dans le cours :

pour tout entier naturel k , on regarde l'application $t \longrightarrow \frac{1}{t}$ sur l'intervalle $[k, k+1]$. Elle est décroissante. On a donc : $\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$; on intègre de k à $k+1$ (sens de l'intervalle croissant) : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.

On somme de telles inégalités de 1 à $n-1$ en fusionnant les termes du milieu par relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \text{ ou de 1 à } n : \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Du premier encadrement, on garde l'inégalité de gauche après réindexation : $H_n - 1 \leq \ln(n)$.

Du deuxième encadrement, on ne garde que la partie de gauche : $\ln(n) \leq H_n$. On a l'encadrement voulu par l'énoncé en mettant tout bout à bout.

Quand n tend vers l'infini, la minoration par $\ln(n)$ fait tendre H_n vers l'infini.

Mais jouons le plus serré, en divisant par $\ln(n)$, strictement positif : $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq \frac{1 + \ln(n)}{\ln(n)}$.

Le membre de droite tend vers 1. Le membre de gauche s'écrit $\frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$. Il tend aussi vers

1 après avoir divisé haut et bas par $\ln(n)$.

On peut conclure par le théorème d'encadrement sur les suites.

2011/12La suite (G_n) .**D.S.5**

On étudie les variations de l'application $t \longrightarrow \frac{\ln(t)}{t}$ définie sur l'intervalle $[3, +\infty[$ en la dérivant. Sa dérivée est $t \longrightarrow \frac{1 - \ln(t)}{t^2}$. Elle est négative puisque t est plus grand que e . Par théorème de décroissance des applications à dérivée négative sur un intervalle, notre application décroît, et on a même sa limite à l'infini par croissances comparées : c'est vers 0 qu'elle tend à l'infini.

Par décroissance, sur un intervalle $[k, k+1]$ on a immédiatement : $\int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} .dt \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(k)}{k} .dt = \frac{\ln(k)}{k}$.

Par décroissance, sur un intervalle $[k-1, k]$ on a aussi : $\frac{\ln(k)}{k} = \int_{k-1}^k \frac{\ln(k)}{k} .dt \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(t)}{t} .dt$.

La première minoration est valable même pour k supérieur ou égal à 3.

On somme ensuite la première inégalité de 3 à n . Les termes intégrales se regroupent par relation de Chasles : $\int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} .dt \leq \sum_{k=3}^n \frac{\ln(k)}{k}$. On ajoute les deux premiers termes. L'un est nul, l'autre vaut $\ln(2)/2$, ce qui fait bien $\ln(\sqrt{2})$ si on y tient.

On calcule l'intégrale, en observant que l'on a la forme $u'.u$ avec u égale au logarithme. On intègre en $u^2/2$. La primitive en $(\ln)^2/2$ est nulle en 1 : $G_n \geq \ln(\sqrt{2}) + (\ln(n))^2/2$.

Le minorant part à l'infini quand n tend vers $+\infty$ et par théorème de minoration, la suite (G_n) tend vers l'infini positif.

On l'avait aussi en minorant $\frac{\ln(k)}{k}$ par $\frac{1}{k}$ dès que k a dépassé 3 : $G_n - G_3 \geq H_n - H_3$ et la constante $G_3 - H_3$ n'y change rien.

2011/12Convergence de la suite (h_n) , harmonique alternée.**D.S.5**

On calcule des différences : $h_{2.n+2} - h_{2.n} = \sum_{k=1}^{2.n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2.n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{2.n+2}}{2.n+1} + \frac{(-1)^{2.n+3}}{2.n+2} = -\frac{1}{2.n+2} + \frac{1}{2.n+1}$. On trouve $\frac{1}{(2.n+1).(2.n+2)}$. C'est positif.

On fait de même : $h_{2.n+1} - h_{2.n+3} = \sum_{k=1}^{2.n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2.n+3} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -\frac{(-1)^{2.n+3}}{2.n+2} - \frac{(-1)^{2.n+4}}{2.n+3}$ et il reste $\frac{1}{2.n+2} - \frac{1}{2.n+3} = \frac{1}{(2.n+2).(2.n+3)}$.

On termine : $h_{2.n+3} - h_{2.n+2} = \sum_{k=1}^{2.n+3} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2.n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{2.n+4}}{2.n+3} \geq 0$.

On rappelle juste ce qu'il faut faire : calculer des différences et trouver leur signe pour avoir des inégalités.

On rappelle aussi que quand on écrit $\sum_{k=1}^{2.n+1} a_k$ ce n'est pas parce que les bornes sont impaires qu'il n'y a dans la somme que des termes impairs. Dans cette somme, il y a bien $2.n+1$ termes. Et c'est juste dans $\sum_{p=0}^n a_{2.p+1}$ qu'il n'y a que les termes impairs.

On étudie la suite $(h_{2.n})$. On la voit croissante par l'inégalité $h_{2.n} \leq h_{2.n+2}$. On la majore par h_1 en

ayant pris la peine d'écrire $h_{2.n} \leq h_{2.n+3} \leq h_{2.n+1} \leq \dots \leq h_3 \leq h_1$ par récurrence dans la partie haute de l'inégalité.

La suite réelle $(h_{2.n})$ est croissante majorée, elle converge vers son plus petit majorant.

On a grandi depuis la Terminale, on précise bien "réelle" et on ajoute l'information "vers son plus petit majorant". On rappelle qu'il faut que le majorant ne dépende pas de n . On rappelle aussi qu'il y a une différence entre "inégalité" et "inéquation". Une inégalité est toujours vraie. Une inéquation est une question, et on cherche les valeurs de la variable pour lesquelles l'inégalité est vraie.

De même, la suite $(h_{2.n+1})$ est décroissante (c'est $h_{2.n+3} \leq h_{2.n+1}$). Elle est minorée par h_1 en écrivant $h_1 \leq h_3 \leq h_5 \leq \dots \leq h_{2.n+1} \leq h_{2.n}$. Le théorème de convergence des suites décroissantes minorées permet de conclure.

Les deux suites convergent. Notons λ et μ leurs limites respectives. On repart de $h_{2.n+1} - h_{2.n} = \frac{1}{2.n+1}$, valable pour tout n . On fait tendre n vers l'infini. Le terme de gauche tend vers $\lambda - \mu$ et celui de droite tend vers 0. Par unicité de la limite : $\lambda - \mu$ est nul. λ et μ sont égaux.

On est vraiment dans le cas des suites adjacentes. Comme les deux suites extraites ont la même limite, la grande suite reconstituée converge aussi. Mais il faut le prouver, en revant à la définition avec des ε . Et c'est là que je vais vérifier si vous avez atteint le stade Sup.

On traduit les hypothèses :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_\varepsilon) \Rightarrow (|h_{2.n+1} - \lambda| \leq \varepsilon)$ et $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq M_\varepsilon) \Rightarrow (|h_{2.n} - \lambda| \leq \varepsilon)$.

On veut : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists P_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (n \geq P_\varepsilon) \Rightarrow (|h_p - \lambda| \leq \varepsilon)$.

On donne ε . Il faut trouver un rang à partir duquel on a $|u_n - \lambda| \leq \varepsilon$, que n soit pair ou impair. Pour n pair, de la forme $2.p$ c'est à partir de $2.N_\varepsilon$ que c'est bon. Pour n impair, de la forme $2.p+1$ c'est à partir de $2.M_\varepsilon+1$ que c'est bon.

Globalement, c'est donc pour n plus grand que $\max(2.N_\varepsilon, 2.M_\varepsilon+1)$ qu'on a à coup sûr $|u_n - \lambda| \leq \varepsilon$.

On appelle P_ε ce rang.

On note qu'il est ici important que les deux suites extraites aient la même limite. On ne peut pas dire "si $(u_{2.p+1})$ et $(u_{2.p})$ convergent donc (u_n) converge".

2011/12

Convergence de la série alternée (g_n) .

D.S.5

Le raisonnement avec les suites adjacentes de limite commune sera le même que pour h . Tout ce qu'il nous faut prouver de nouveau, c'est juste le jeu de majorations $g_{2.n+1} < g_{2.n+3} < g_{2.n+2} < g_{2.n}$.

On effectue les différences. Par exemple $g_{2.n+2} - g_{2.n+3} = -\frac{(-1)^{2.n+3} \cdot \ln(2.n+3)}{2.n+3} = \frac{\ln(2.n+3)}{2.n+3} \geq 0$.

Une autre ? $g_{2.n+3} - g_{2.n+1} = \sum_{k=2.n+2}^{2.n+3} \frac{(-1)^k \cdot \ln(k)}{k} = \frac{\ln(2.n+2)}{2.n+2} - \frac{\ln(2.n+3)}{2.n+3}$ et cette différence est

positive par décroissance de l'application $t \longrightarrow \frac{\ln(t)}{t}$ sur notre intervalle d'usage.

On peut envisager un résultat général sur les sommes du type $\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot f(k)$ avec f décroissante, de limite nulle à l'infini.

2011/12

Limite de la suite (h_n) .

D.S.5

C'est comme du cours. On est en présence de la **série harmonique alternée**. On va passer par la **formule de Taylor** avec reste intégrale pour la fonction logarithme entre 1 et 2. On prend donc $a = 1$ et $h = 1$ pour $f = \ln$:

$$\ln(a+h) = \ln(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k-1)!}{a^k} \cdot \frac{h^k}{k!} + \frac{h^{n+1}}{n!} \cdot \int_{t=0}^1 (1-t)^n \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(a+th)^{n+1}} \cdot dt$$

$$\text{donne ici : } \ln(2) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^n \cdot \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{1+t} \cdot dt.$$

On a envie de faire tendre vers 0 le reste intégrale. On va l'encadrer, en valeur absolue. Seul le $(-1)^n$ joue sur le signe. On encadre donc en l'effaçant : $0 \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \cdot dt \leq \int_0^1 (1-t)^n \cdot dt = \frac{1}{n+1}$. C'est le théorème d'encadrement qui fait tendre vers 0 le reste intégrale.

Une fois que ce terme tend vers 0, il reste que h_n **tend vers** $\ln(2)$ quand n tend vers l'infini.

2011/12

La constante d'Euler.

D.S.5

On doit prouver $\ln(1+x) \leq x$ pour tout x positif. Déjà, tout existe pour x positif.

- Si on est nul, on parle de développement limité et on a tout perdu. On ne contrôle pas le signe d'une formule dans laquelle la variable est d'ailleurs obligée de tendre vers 0.

- Si on est laborieux, on fait une étude de fonction sur la fonction différence. Et on finit sa vie en P.C.S.I. (ce qui signifie Professeur de Chimie Supposé Intelligent).

- Si on est intelligent, on fait des maths et on utilise la **formule de Taylor avec reste intégrale pour le logarithme** entre 1 et $1+x$: $\ln(1+x) = \ln(1) + x \cdot 1 - x^2 \cdot \int_0^1 \frac{(1-t)}{(1+tx)^2} \cdot dt$ et le reste intégrale est négatif.

- Si l'on est plus simplement juste érudit, on dit "**inégalité de convexité**" et on consacre son temps à autre chose dans le sujet. Pourquoi pas, il en faut aussi, des physiciens.

On a posé $u_n = H_n - \ln(n)$. On calcule une différence : $H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n)$. On trouve $\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Comme il s'agit de déduire le signe de cette chose à partir de la question précédente, il s'agit de mettre cette quantité sous la forme $\ln(1+x) - x$. Le réel x serait alors la fraction négative $\frac{-1}{n+1}$: $\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{-1}{n+1}$ donne bien $\frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq 0$.

La suite u décroît. Ce serait bien de la minorer. On a prouvé $H_n \geq \ln(1+n)$. On soustrait $\ln(n)$: $u_n \geq \ln\left(\frac{1+n}{n}\right) \geq 0$.

La suite est décroissante minorée, elle converge vers son plus grand minorant qui est donc positif ou nul.

On peut donc avoir $\frac{a_n}{b_n}$ qui tend vers 1 et $a_n - b_n$ qui ne tend pas vers 0. Evidemment. Seul le naïf confond quotient et différence. Le quotient va juste exprimer qu'ici les deux suites (H_n) et $(\ln(n))$ sont du même ordre de grandeur.

On a des exemples encore plus simples, avec $a_n = n^2 + n$ et $b_n = n^2$. Le quotient tend vers 1, mais la différence tend vers l'infini.

Quand le quotient tend vers 1, c'est juste un comportement grossier, et on ne sait pas ce qu'il reste derrière ensuite.

Pour ceux qui veulent être précis, on a donc $H_n = \ln(n) + \gamma + \alpha_n$ où (α_n) est une suite qui tend vers 0 à l'infini.

2011/12

La suite $(G_n - (\ln(n))^2/2)$.

D.S.5

On note donc v cette suite et on calcule la différence $v_{n+1} - v_n$. Il y a un terme qui vient de la définition des sommes : $\frac{\ln(n+1)}{n+1}$ et une différence de carrés : $\frac{(\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2}{2}$.

Toute l'astuce consiste à revenir à une intégrale : $\frac{(\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2}{2}$ n'est autre que $\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} . dt$ en vertu d'un calcul déjà fait auparavant (*intégrale de la forme $u' . u$*).

On doit donc comparer $\frac{\ln(n+1)}{n+1}$ et $\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} . dt$. C'est l'intégrale qui l'emporte, par décroissance de l'application sous le signe intégrale, pour n plus grand que e .
La suite v est bien décroissante à partir du rang 3.

On a minoré G_n par $\ln(\sqrt{2}) + \int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} . dt$. On calcule l'intégrale, on soustrait $(\ln(n))^2/2$, et on a donc : $v_n \geq \frac{\ln(2) - (\ln(3))^2}{2} + \frac{(\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2}{2} \geq \frac{\ln(2) - (\ln(3))^2}{2}$ (le minorant devant être indépendant de n).

La suite v est décroissante minorée ; elle converge.

Mais je ne connais pas sa limite, et d'ailleurs, elle ne sert à rien dans la suite du devoir, comme on le verra.

2011/12

Limite de la suite (g_n) .

D.S.5

On se donne n et on calcule la somme $G_{2.n} + g_{2.n}$. Dans chacune des deux sommes, il y a $2.n$ termes. Dans l'une, ils ont tous un signe plus, et dans l'autre, les signes alternent. Seuls les termes d'indices pairs survivent, en quantité double. On les appelle alors $2.p$ avec p de 1 à n :

$$G_{2.n} + g_{2.n} = \sum_{k=1}^{2.n} \frac{\ln(k)}{k} . (1 + (-1)^k) = 2 . \sum_{p=1}^n \frac{\ln(2.p)}{2.p} = \sum_{p=1}^n \frac{\ln(2) + \ln(p)}{p}.$$

On sépare en deux sommes. Dans l'une, il y a un $\ln(2)$ en facteur de la série harmonique et la seconde s'appelle G_n .

On a donc : $G_{2.n} + g_{2.n} = \ln(2) . H_n + G_n$.

J'espère que vous n'êtes pas allé me faire une récurrence pour prouver ça. Certes, c'est jouable, mais on ne comprend pas alors ce qu'il se passe vraiment...

On isole le terme qui nous intéresse, et on remplace G_n par $v_n + \frac{(\ln(n))^2}{2}$ par définition même de v_n :

$$g_{2.n} = \ln(2) . H_n + v_n - v_{2.n} + \frac{(\ln(n))^2 - (\ln(2.n))^2}{2}.$$

On remplace $\ln(2.n)$ par $\ln(n) + \ln(2)$ et on développe le carré.

$$\text{Il reste : } g_{2.n} = \ln(2) . H_n + v_n - v_{2.n} - \frac{2 . \ln(n) . \ln(2) + (\ln(2))^2}{2}.$$

$$\text{On regroupe : } g_{2.n} = \ln(2) . (H_n - \ln(n)) + (v_n - v_{2.n}) - \frac{(\ln(2))^2}{2}.$$

On exploite les résultats précédents :

- $H_n - \ln(n)$ tend vers γ
- le terme $v_n - v_{2.n}$ converge vers 0 (du type $\lambda - \lambda$ en notant λ la limite inconnue de la suite g),

$$\text{La somme converge vers } \ln(2) . \gamma - \frac{(\ln(2))^2}{2}.$$

Réflexe à oublier mais que l'on vous a ancré dans la tête : je montre la convergence par "croissante majorée", puis je calcule la limite.

Rappelons que "converger", c'est avoir une limite. Si on écrit donc la suite comme somme de suites convergentes, elle converge, et c'est bon, on a la convergence et la limite en une fois...

Mais vos réflexes idiots ont la vie dure. Rappelez vous quand même qu'en Terminable, le contrat de vos professeur, c'est "leur faire réussir le bac" et pas "leur apprendre à faire des maths".

Attention ! A priori, on n'a pas trouvé la limite de la suite (g_n) , mais celle de la suite $(g_{2.n})$, qui ne voit qu'un terme sur deux de la suite considérée. Alors, faut il faire un autre raisonnement pour $g_{2.n+1}$? Pas du tout ! On aurait à faire un tel travail si on ne savait pas depuis plusieurs questions que (g_n) converge.

Source : oral de Polytechnique. L'étude de (H_n) et (h_n) est estimée être du cours. L'étude de (u_n) qui converge vers la constante d'Euler est considérée comme "classique", et les professeurs estiment que l'élève doit savoir mener l'étude de u de manière autonome.

Ce qui est donc vraiment nouveau dans l'exercice d'oral de Polytechnique pour un élève de Spé normal, c'est les suites G , g et v . Mais les comparaisons intégrale/somme sont des méthodes classiques à connaître.

D.S.5	MPSI2	325 points	Année 2011/12	D.S.5
--------------	-------	------------	---------------	--------------

D.S.6

Charlemagne

Vendredi 16 décembre

2011/2012

D.S.6

2011/12

TRIGONOMETRIE**D.S.6**

- 1) Echauffement : exprimez $\cos(2.t)$, $\cos(4.t)$ et $\cos(6.t)$ comme polynômes en $\cos(t)$ (pas de démonstration demandée). (2 pt.)

- 2) Exprimez alors $t \rightarrow \cos^2(t)$, $t \rightarrow \cos^4(t)$ et $t \rightarrow \cos^6(t)$ à l'aide de $\theta \rightarrow \cos(2.\theta)$, $\theta \rightarrow \cos(4.\theta)$ et $\theta \rightarrow \cos(6.\theta)$. (2 pt.)

- 3) Calculez $\int_0^{\pi/2} \cos^2(t).dt$, $\int_0^{\pi/2} \cos^4(t).dt$ et $\int_0^{\pi/2} \cos^6(t).dt$. (3 pt.)

50 points 50 points

- 1) Pour tout entier naturel n , on note c_n l'application $x \rightarrow \cos(n.x)$ et γ_n l'application $\cos^n$. On définit aussi l'intégrale de Wallis : $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t).dt$. Montrez que la suite W est décroissante. (1 pt.)

- 2) Exprimez $\gamma_{2.n}$ comme combinaison de $(c_0, c_2, \dots, c_{2.n})$ (indication : $\left(\frac{e^{i.t} + e^{-i.t}}{2}\right)^{2.n}$). (2 pt.) Calculez alors $W_{2.n}$. (2 pt.)

- 3) On va retrouver la valeur de $W_{2.n}$ par une autre méthode. Montrez : $W_{n+1} = \frac{n}{n+1}.W_{n-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ (indication : intégrez W_n par parties). (2 pt.) Retrouvez alors par récurrence sur n la valeur de $W_{2.n}$. (2 pt.)

- 1) Montrez : $W_{2.n+1} = \frac{2^{2.n}}{(2.n+1) \cdot \binom{2.n}{n}}$ pour tout n . (2 pt.)

11 points 11 points

- 1) Soient u et v deux applications continues de $[0, \pi/2]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout λ réel, on pose $S_\lambda = \int_0^{\pi/2} (\lambda.u(t) + v(t))^2 . dt$. Montrez que S_λ est un trinôme du second degré en λ à discriminant négatif. (2 pt.)

- 2) Déduisez : $\int_0^{\pi/2} u(t).v(t).dt)^2 \leq \left(\int_0^{\pi/2} (u(t))^2 . dt\right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} (v(t))^2 . dt\right)$ (inégalité de Cauchy-Schwarz). (1 pt.)

- 3) Déduisez : $(W_{2.n+1})^2 \leq W_{2.n} \cdot W_{2.n+2}$ et $(W_{2.n})^2 \leq W_{2.n-1} \cdot W_{2.n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. (2 pt.)

- 4) Déduisez : $\frac{2^{2.n+1}}{\sqrt{\pi} \cdot 4 \sqrt{\frac{2 \cdot (2.n+1)^3}{n+1}}} \leq \binom{2.n}{n}$. (2 pt.)

- 5) Trouvez la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{\binom{2.n}{n}}{2^{2.n}/\sqrt{n \cdot \pi}}$. (2 pt.)

9 points 9 points

- 1) On note E_n l'espace des applications de la forme $\sum_{k=0}^n a_k . c_k$ avec $(a_0, \dots, a_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ et F_n l'espace

des applications de la forme $\sum_{p=0}^n \alpha_p . \gamma_p$ avec $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

Justifiez : tout élément de E_n est dans F_n et tout élément de F_n est dans E_n (pour l'un des sens, vous pourrez faire usage des polynômes de Tchebitchev). (2 pt.)

- 2) Soit f une application s'écrivant à la fois $\sum_{k=0}^4 a_k \cdot c_{2,k}$ et $\sum_{k=0}^4 \alpha_k \cdot \gamma_{2,k}$. On pose

$$C = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 18 & -32 \\ 0 & 0 & 8 & -48 & 160 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & -256 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 128 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/8 & 10/32 & 35/128 \\ 0 & 1/2 & 4/8 & 15/32 & 56/128 \\ 0 & 0 & 1/8 & 6/32 & 28/128 \\ 0 & 0 & 0 & 1/32 & 8/128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/128 \end{pmatrix}.$$

Justifiez : $C = Q \cdot \Gamma$ et $\Gamma = P \cdot C$. 3 pt.

- 3) Calculez $P \cdot Q$ et $Q \cdot P$. 2 pt.

- 4) Généralisez "en dimension n " en expliquant. 2 pt.

9 points 9 points

2011/12

UNE SOMME

D.S.6

Pour tout p , on pose : $S_p = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \binom{p}{k} \right)$.

Calculez S_p pour p de 1 à 4. Quelle conjecture émettez vous ? 3 pt.

Calculez $\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \cdot \binom{p}{k}$ pour tout entier naturel p non nul. 1 pt.

Complétez : $S_p = \sum_{k=*}^* \left(\dots \binom{p}{k} \cdot \sum_{n=*}^* \dots \right)$. 2 pt.

Remplacez $\frac{1}{n}$ par $\int_0^1 t^{n-1} \cdot dt$ et après usage de deux formules du cours, validez votre conjecture. 4 pt.

Cette somme m'a été donnée par Jean Cornillon, professeur de mathématiques en P.C. dans notre beau lycée.

10 points 10 points

2011/12

EXERCICES

D.S.6

<◇(12)> Rappelez la formule de Taylor avec reste intégrale d'ordre 6, entre a et $a+h$ pour une application f six fois dérivable sur $\mathbb{R}$. 1 pt.

"Dégradez" la en formule de Taylor Young, avec un simple reste en $o(h^5)$. Calculez la limite de $\frac{f(a+5.h) - 5.f(a+4.h) + 10.f(a+3.h) - 10.f(a+2.h) + 5.f(a+h) - f(a)}{h^5}$ quand h tend vers 0. 3 pt.

<◇(13)> y est solution de l'équation différentielle $(1-t^2) \cdot y''_t = t \cdot y'_t$ avec conditions initiales $y_0 = 0$ et $y'_0 = 1$. Calculez $y_{1/2}$. 3 pt.

<♠(8)> Diagonalisez $\begin{pmatrix} 3.i & 1-2.i \\ -2+4.i & 3-3.i \end{pmatrix}$ (il faut trouver P et D , ainsi que P^{-1} , mais il n'est pas demandé la puissance n^{ieme}). 4 pt.

11 points 11 points

D.S.6

MPSI2

382 points

Année 2011/12

D.S.6

On rappelle donc : $\cos(2.t) = 2.\cos^2(t)$, $\cos(4.t) = 8.\cos^4(t) - 8.\cos^2(t) + 1$ et enfin $\cos(6.t) = 32.\cos^6(t) - 48.\cos^4(t) + 18.\cos^2(t) - 1$. Les deux premiers sont dans le cours et sont connus. Le dernier, on l'a avec $\cos(3.2.t) = 4.\cos^3(2.t) - 3.\cos(2.t) = 4.(2.c^2 - 1)^3 - 3.(2.c^2 - 1)$ ou avec $\cos(2.3.t) = 2.(4.c^3 - 3.c)^2 - 1$ en posant $c = \cos(t)$.

On peut aussi lire le sujet jusqu'au bout, tout comprendre et extraire la quatrième colonne de la matrice P .

On renverse ensuite les formules : $\cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2.t)}{2}$ (c'est du cours),

$$\cos^4(t) = \frac{\cos(4.t) + 4.\cos(2.t) + 3}{8} \text{ et } \cos^6(t) = \frac{\cos(6.t) + 6.\cos(4.t) + 15.\cos(2.t) + 10}{32}.$$

Il faut quand même écrire $\cos^6(t) = \frac{\cos(6.t) + 48.\cos^4(t) - 18.\cos^2(t) + 1}{32}$ puis remplacer $\cos^4(t)$ et $\cos^2(t)$ à l'aide des calculs précédents.

On peut aussi partir de $\left(\frac{e^{i.t} + e^{-i.t}}{2}\right)^6$ et développer par la formule du binôme :

$$\cos^6(t) = \frac{e^{6.i.t} + 6.e^{5.i.t}.e^{-i.t} + 15.e^{4.i.t}.e^{-2.i.t} + 20.e^{3.i.t}.e^{-3.i.t} + 15.e^{2.i.t}.e^{-4.i.t} + 6.e^{i.t}.e^{-5.i.t} + e^{-6.i.t}}{2^6}$$

regrouper au numérateur $e^{6.i.t}$ avec $e^{-6.i.t}$ et ainsi de suite. On retrouve des cosinus de multiples de t . On peut aussi aller à la fin du devoir et emprunter une colonne de la matrice Q .

Certains élèves vont bien mener le calcul, mais vont se planter à la fin à cause des étages. On peut écrire par exemple $\cos^4(t) = \frac{\cos(4.t) + 4.\cos(2.t) + 3.\cos(t)}{8}$ au niveau Terminale ou physique. Mais une telle formule est écrite à l'étage misérable des réels.

En mathématiques, on écrit $\cos^4 = \left(t \longrightarrow \frac{\cos(4.t) + 4.\cos(2.t) + 3.\cos(t)}{8}\right)$ à l'étage des fonctions.

$$\text{Ou } \left(t \longrightarrow \cos^4\right) = \left(t \longrightarrow \frac{\cos(4.t) + 4.\cos(2.t) + 3.\cos(t)}{8}\right).$$

Mais rien n'interdit d'écrire $\left(t \longrightarrow \cos^4\right) = \left(\theta \longrightarrow \frac{\cos(4.\theta) + 4.\cos(2.\theta) + 3.\cos(\theta)}{8}\right)$ puisque les variables sont muettes. On rappelle qu'on a : $f = (x \longrightarrow f(x)) = (u \longrightarrow f(u)) = (\zeta \longrightarrow f(\zeta))$ ou même $(\mathbb{N} \longrightarrow f(\mathbb{N}))$ si on aime.

$$\text{Et on peut même panacher } \cos^4 = \left(\theta \longrightarrow \frac{\cos(4.\theta) + 4.\cos(2.\theta)}{8}\right) + \left(\frac{3.\cos(\alpha)}{8}\right).$$

On prend ensuite ces formules et on les intègre de 0 à $\pi/2$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(t).dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2.t)}{2}.dt = \int_0^{\pi/2} dt + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2.t)}{2}.dt = \frac{\pi}{4} \text{ par linéarité. Le terme en cosinus saute tout de suite car il donne un sinus qui s'annule en 0 et en } \pi/2.$$

Quand on intègre $\cos^4$ de 0 à $\pi/2$, on a des intégrales $\int_0^{\pi/2} \cos(2.p.t).dt$ qui sont nulles pour p non nul, et on a $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{8}$.

On fait de même avec $\cos^6(t)$. Seule l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \frac{10.dt}{32}$ est non nulle.

Bilan :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n(t).dt = \begin{array}{ccccc} n & 0 & 2 & 4 & 6 \\ W_n & \pi/2 & \pi/4 & 3.\pi/16 & 5.\pi/32 \end{array} \text{ Et on va généraliser.}$$

2011/12Existence et décroissance de la suite (W_n) .**D.S.6**

Chaque intégrale W_n existe, comme intégrale d'une application continue sur un segment.

Pour n donné, on calcule la différence $W_{n+1} - W_n$ avec pour objectif "elle est négative" :

$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t).dt - \int_0^{\pi/2} \cos^n(t).dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t).(\cos(t) - 1).dt$. L'application intégrée est négative (*positif fois négatif*) et l'intervalle est dans le sens croissant. L'intégrale est négative, comme demandé.

On a prouvé la décroissance de la suite sans la calculer, mais juste en estimant le signe d'une différence.

2011/12Calcul de $\gamma_{2,n}$ et de $W_{2,n}$.**D.S.6**

On se donne n et t et on calcule avec les formules de trigonométrie complexe et la formule du binôme :

$$\cos^{2,n}(t) = \left(\frac{e^{i.t} + e^{-i.t}}{2} \right)^{2,n} = \frac{1}{2^{2,n}} \cdot \sum_{k=0}^{2,n} \binom{2,n}{k} e^{i.k.t} \cdot e^{-i.(2,n-k).t}$$

On coupe la somme en deux ou même en trois, par symétrie de ligne :

$$2^{2,n} \cdot \cos^{2,n}(t) = \binom{2,n}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2,n}{k} e^{i.2.(k-n).t} + \sum_{k=n+1}^{2,n} \binom{2,n}{k} e^{i.2.(k-n).t}.$$

On regroupe les deux dernières sommes après réindexation et usage de $\binom{2,n}{k} = \binom{2,n}{2,n-k}$:

$$\cos^{2,n}(t) = \frac{\binom{2,n}{n}}{2^{2,n}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{2,n}{k}}{2^{2,n-1}} \cdot \cos(2.(n-k).t)$$

On notera que les cosinus sont de "pulsation paire" comme l'exposant du cosinus.

On intègre de 0 à $\pi/2$. On sépare en plusieurs intégrales par linéarité. On a déjà l'intégrale de la constante : $\frac{\pi \cdot \binom{2,n}{n}}{2^{2,n+1}}$. Et les autres morceaux ? Ils donnent 0 car s'intègrent en des $t \rightarrow \sin(2.p.t)$, nuls en 0 et $\pi/2$.

$$\text{Il reste : } W_{2,n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2,n}(t).dt = \frac{\binom{2,n}{n} \cdot \pi}{2^{2,n+1}}.$$

Cette façon de trouver $W_{2,n}$ n'est pas la méthode la plus habituelle, même si elle permet vite de conclure...

2011/12

Les intégrales de Wallis en intégrant par parties.

D.S.6

On part de $W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t). \cos(t).dt$ qu'on intègre donc par parties. On dérive c^n en $-n.c^{n-1}.s$ et on remonte c en sa primitive s :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t).dt = \left[\cos^{n-1}(t). \sin(t) \right]_{t=0}^{t=\pi/2} + n \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}(t). \sin(t). \sin(t).dt.$$

Le crochet est nul (en 0 grâce au sinus et en $\pi/2$ grâce au cosinus). Dans l'intégrale, on remplace $\sin^2(t)$ par $(1 - \cos^2(t))$ (toute l'astuce est là, il ne faut pas intégrer une fois de plus, ça n'apporte rien). Par linéarité, on a donc : $W_{n+1} = 0 + n.(W_{n-1} - W_{n+1})$. On réunit d'un même côté, on divise par $n+1$ non nul : $W_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot W_{n-1}$ (relation de Wallis).

On retrouve un facteur positif mais plus petit que 1 qui confirme que la suite décroît. On sent venir les factorielles, mais on voit aussi que la formule saute une génération (c'est mon rêve, mais je ne sais pas quelle génération est finalement consentante).

On va donc effectivement avancer de deux en deux. On peut même peu à peu bâtir soi même la conjecture $W_{2,n} = \pi \cdot \binom{2,n}{n} \cdot 2^{-(2,n+1)}$ ou plutôt $W_{2,n} = \frac{(2,n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2^{2,n+1}}$.

En fait, c'est plutôt $\frac{1.3.5.7 \dots (2.n-1)}{2.4 \dots (2.n)} \cdot \frac{(2.n)!}{2^n.n!}$ qui se forme, mais on rappelle qu'on a le classique $1.3.5 \dots (2.n-1) = \frac{1.2.3.4.5.6 \dots (2.n-1).(2.n)}{2.4.6 \dots (2.n)} = \frac{(2.n)!}{2^n.n!}$.

Allez, la récurrence est initialisée.

On suppose ensuite qu'à un certain rang n on a $W_{2.n} = \frac{(2.n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2^{2.n+1}}$. On calcule alors : $W_{2.(n+1)} = W_{2.n+2} = \frac{2.n+1}{2.n+2} \cdot W_{2.n}$ d'après la formule démontrée en intégrant par parties. On remplace grâce à l'hypothèse de récurrence : $W_{2.n+2} = \frac{2.n+1}{2.(n+1)} \cdot \frac{(2.n)!}{n!.n!} \cdot \frac{\pi}{2^{2.n+1}}$. On multiplie numérateur et dénominateur par $(2.n+2)$ (qu'on écrit aussi $2.(n+1)$) et on a bien $W_{2.(n+1)} = \frac{(2.n+2)!}{(n+1)!. (n+1)! \cdot 2^2} \cdot \frac{\pi}{2^{2.n+1}}$ et tout se termine bien.

Ce qu'on a fait sur les termes pairs, on le refait sur les termes impairs. Pas le raisonnement avec la formule du binôme car cette fois si, aucune des intégrales ne se simplifie... Mais on peut en revanche calculer : $W_1 = 1$ (intégrale du cosinus sur un quart de période) puis $W_3 = \frac{2}{3} \cdot W_1 = \frac{2}{3}$, puis $W_5 = \frac{4}{5} \cdot W_3 = \frac{2.4}{3.5}$. On propage et on trouve $W_{2.n+1} = \frac{2.4.6 \dots 2.n}{3.5 \dots (2.n+1)}$.

On le prouve par récurrence sur n sous cette forme, ou sous la forme nettoyée $W_{2.n+1} = \frac{2^{2.n} \cdot (n!).(n!)}{(2.n+1)!}$. La récurrence est initialisée et l'hérédité passe en utilisant la formule $W_{2.n+3} = \frac{2.n+2}{2.n+3} \cdot W_{2.n+1}$ et en multipliant par $2.(n+1)$ en haut et en bas.

Cela dit, il y a plus simple. Si si ! Et si vous voulez briller en société (mathématique), je vous recommande ceci :

On rappelle qu'on a prouvé $(n+1).W_{n+1} = n.W_{n-1}$ pour tout n . On multiplie par W_n de chaque côté : $(n+1).W_{n+1}.W_n = n.W_n.W_{n-1}$. Quitte à poser $d_n = n.W_n.W_{n-1}$, on reconnaît avoir obtenu $d_{n+1} = d_n$. La suite d est constante, égale à sa valeur en 1 : $\pi/2$.

En particulier, au rang $2.n$, on va donc avoir $(2.n+1).W_{2.n+1}.W_{2.n} = \pi/2$.

On remplace $W_{2.n}$ par sa valeur "factorielle", on simplifie les π et on trouve donc encore $W_{2.n+1} = \frac{2^{2.n}}{(2.n+1) \cdot \binom{2.n}{n}}$.

On en profite pour compléter :

0	1	2	3	4	5	6
$\pi/2$		$\pi/4$		$3.\pi/16$		$5.\pi/32$
	1		$2/3$		$8/15$	

2011/12

Wallis rencontre Cauchy et Schwarz.

D.S.6

Si l'intégrale de Wallis est un classique qu'il est bon d'avoir croisé au moins une fois dans sa vie d'élève de C.P.G.E. (et je vous expliquerai un jour pourquoi elle est importante historiquement et en statistiques), l'inégalité de Cauchy-Schwarz est un morceau de cours qu'il faut vraiment avoir croisé et recroisé.

On part donc de $\int_a^b (\lambda.u(t) + v(t))^2 . dt$ dont l'existence ne pose pas de problème. On développe et on sépare par linéarité, et on trouve $\alpha.\lambda^2 + 2.\beta.\lambda + \gamma$ avec $\alpha = \int_a^b u^2(t).dt$, $\beta = \int_a^b u(t).v(t).dt$ et $\gamma = \int_a^b v^2(t).dt$.

C'est bien un trinôme du second degré en λ .

Si on calcule son discriminant, on trouve un réel qu'on ne va regarder qu'après puisque l'énoncé parle de déduire une certaine inégalité.

Il faut donc un bel argument pour le signe du discriminant.

Et cet argument, c'est : "le trinôme reste toujours positif".

En effet, c'est l'intégrale du carré d'une application réelle. L'intégrale d'un carré reste positive (*l'intégrale est ici une aire "au dessus de l'axe Ox"*).

Comme le trinôme reste de signe constant, il ne peut pas avoir deux racines, et son discriminant est donc négatif ou nul.

$$\text{On déduit donc : } \left(2 \cdot \int_a^b u(t) \cdot v(t) \cdot dt \right)^2 - 4 \cdot \int_a^b u^2(t) \cdot dt \cdot \int_a^b v^2(t) \cdot dt \leq 0.$$

$$\text{On fait passer d'un côté le terme au signe moins : } \left(\int_a^b u \cdot v \right)^2 \leq \int_a^b u^2 \cdot \int_a^b v^2.$$

C'est une des plus belles démonstrations des mathématiques élémentaires. Elle se traduit après en termes d'angle entre deux vecteurs dans un espace vectoriel de fonctions ou d'autres objets, car il en existe des variantes sous diverses formes (*intégrales, sommes,...*). C'est la même inégalité que $|x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ (que vous utilisez sans jamais l'avoir prouvée soit dit en passant...).

Il ne nous reste plus qu'à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les bornes 0 et $\pi/2$ et des fonctions u et v bien choisies.

On opte pour $u = \cos^n$ et $v = \cos^{n+1}$.

$$\text{On trouve : } \left(\int_0^{\pi/2} \cos^{2 \cdot n+1}(t) \cdot dt \right)^2 \leq \int_0^{\pi/2} \cos^{2 \cdot n}(t) \cdot dt \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^{2 \cdot n+2}(t) \cdot dt.$$

$$\text{C'est } (W_{2 \cdot n+1})^2 \leq W_{2 \cdot n} \cdot W_{2 \cdot n+2}.$$

On choisit ensuite $u = \cos^{n-1/2}$ et $v = \cos^{n+1/2}$ (dont les existences ne posent pas de problème, puisque le cosinus est positif sur $[0, \pi/2]$) et on a $(W_{2 \cdot n})^2 \leq W_{2 \cdot n-1} \cdot W_{2 \cdot n+1}$.

On repart donc de $(W_{2 \cdot n})^2 \leq W_{2 \cdot n-2} \cdot W_{2 \cdot n+2}$ et on remplace les intégrales par leurs valeurs :

$$\left(\frac{2^{2 \cdot n}}{(2 \cdot n+1) \cdot \binom{2 \cdot n}{n}} \right)^2 \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\binom{2 \cdot n}{n}}{2^{2 \cdot n}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\binom{2 \cdot n+2}{n+1}}{2^{2 \cdot n+2}}.$$

On regroupe les $\binom{2 \cdot n}{n}$ d'un même côté et les puissances de 2 de l'autre.

On remplace $\binom{2 \cdot n+2}{n+1}$ par $\binom{2 \cdot n}{n} \cdot \frac{(2 \cdot n+1) \cdot (2 \cdot n+2)}{(n+1)^2}$ en revenant un instant aux factorielles.

Il reste donc $\frac{2^{8 \cdot n+4}}{(2 \cdot n+1)^2} \leq \binom{2 \cdot n}{n}^4 \cdot \frac{(2 \cdot n+1) \cdot 2 \cdot (n+1)}{(n+1) \cdot (n+1)}$. On simplifie et on a l'inégalité demandée en passant à la racine quatrième, application croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$$\text{On regroupe encore un peu différemment : } \frac{\binom{2 \cdot n}{n}}{2^{2 \cdot n} / \sqrt{\pi \cdot n}} = \frac{\sqrt{\pi \cdot n} \cdot \binom{2 \cdot n}{n}}{2^{2 \cdot n}} \geq \sqrt[4]{\frac{n+1}{2 \cdot (2 \cdot n+1)^3}} \cdot 2 \cdot \sqrt{n}.$$

En mettant le membre de droite sous la forme d'une unique racine : $\sqrt[4]{\frac{8 \cdot (n+1) \cdot n^3}{2 \cdot (2 \cdot n+1)^3}}$, on le voit tendre

vers 1 (*comportement des termes de plus haut degré*).

C'est bien parti pour avoir la limite que l'on cherche : celle du premier membre.

Sauf que l'on ne sait même pas si ce membre a ou non une limite.

Le mauvais réflexe de Terminable : on va étudier la monotonie de cette suite. Comme si il n'y avait que ça dans la vie : la monotonie ! Bel objectif.

Comme si tout phénomène devait se ramener à une seule alternative : la croissance à tout prix... ou la décroissance. Et ne croyez pas que je parle économie ou politique.

Mais on vous a si crétinement enseigné cette approche systématique : j'ai une suite je regarde $u_{n+1} - u_n$ que vous ne voyez pas plus loin que le bout de votre nez aussi creux que votre cerveau dans ces instants là.

Pour voir si une suite converge, on regarde si elle a une limite.

Soit en la calculant comme somme /produit de suites convergentes, soit par un théorème comme celui de l'encadrement ou celui de Cauchy ou celui des suites réelles monotones bornées.

Ici, vu qu'on a une minoration, on va peut être essayer d'obtenir une majoration par une suite de limite 1.

Et pour ce faire, on va utiliser l'autre terme issu d'une majoration de Cauchy-Schwarz.

On va appeler u_n le quotient $\sqrt{n \cdot \pi} \cdot \binom{2n}{n} / 2^{2n}$.

On repart cette fois de $(W_{2n})^2 \leq W_{2n+1} \cdot W_{2n-1}$ et on remplace les intégrales par leurs valeurs :

$$\left(\frac{\pi \cdot \binom{2n}{n}}{2^{2n+1}} \right)^2 \leq \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n} \cdot (2n+1)} \cdot \frac{2^{2n-2}}{\binom{2n-2}{n-1} \cdot (2n-1)}.$$

On regroupe les binomiaux d'un côté et les puissances de 2 de l'autre :

$$\pi^2 \cdot \binom{2n}{n}^4 \cdot \frac{n \cdot (2n+1)}{2} \leq 2^{8n} \text{ en ayant remplacé } \binom{2n-2}{n-1} \text{ par } \binom{2n}{n} \cdot \frac{n^2}{(2n) \cdot (2n-1)} \text{ en revenant à la définition par des factorielles.}$$

On termine les regroupements et on passe à la racine quatrième (fort heureusement, tout est positif) :

$$\sqrt[4]{\pi} \cdot \binom{2n}{n} \leq 2^{2n} \left(\frac{2}{n \cdot (2n+1)} \right)^{1/4}$$

$$\text{On divise par } 2^{2n}, \text{ on multiplie par } \sqrt{n} : u_n \leq \left(\frac{2}{n \cdot (2n+1)} \right)^{1/4} \cdot \sqrt{n}.$$

$$\text{Le majorant tend vers 1 en l'écrivant } \left(\frac{2n^2}{n \cdot (2n+1)} \right)^{1/4} \text{ et même } \left(\frac{2}{2 + \frac{1}{n}} \right)^{1/4}.$$

Notre suite notée u est encadrée par deux suites de limite 1.

Le théorème de l'encadrement, que vous qualifiez du sobriquet de "théorème des gendarmes" donne la convergence de u_n vers 1 quand n tend vers l'infini.

C'est un théorème plus puissant que ce que vous lui attribuez, puisqu'il donne (sous des hypothèses précises) à la fois la convergence et la limite.

Bref : encadrée par deux suites de limite 1, le quotient $\frac{\sqrt{n \cdot \pi} \cdot \binom{2n}{n}}{2^{2n}}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

En langage malpropre qui ne veut rien dire : $\frac{2^{2n}}{\sqrt{n \cdot \pi}}$ est une bonne approximation de $\binom{2n}{n}$ pour n grand.

En langage d'élève qui lui ne dit que des conneries : $\binom{2n}{n}$ tend vers $2^{2n} / \sqrt{n \cdot \pi}$.

Là, c'est idiot, on ne peut pas tendre vers une autre suite qui bouge aussi.

C'est toute la différence entre la physique (un pseudo argot des mathématiques prononcées avec un accent à couper au couteau et un défaut de prononciation) et ce que vous faites (de vraies erreurs qui font que plus rien n'a de sens).

2011/12

Des fonctions de la forme $\sum_{k=0}^4 a_k \cdot c_k$.

D.S.6

On a donc deux espaces (vectoriels) :

- E_n est celui avec des combinaisons des c_k avec k de 0 à n
- F_n est celui avec des combinaisons des γ_p avec p de 0 à n .

Pour montrer que E_n est inclus dans F_n , on va montrer que chaque c_k est dans F_n . Par une sorte de transitivité, les combinaisons des c_k seront encore dans F_n .

On prend donc c_k . C'est $t \rightarrow \cos(kt)$.

En vertu des théorèmes sur les polynômes de Tchebitchev, on peut l'exprimer comme polynôme en

$\cos$, de degré inférieur ou égal à k (et même vraiment de degré k). On l'écrit donc comme combinaison de γ_0 à γ_k et donc *a fortiori* comme combinaison de γ_0 à γ_n . Il est dans F_n .

Réciproquement, on prend un des γ_p qui engendrent F_n . On l'écrit $t \rightarrow (e^{i.t} + e^{-i.t})^p/2^p$. On le développe par la formule du binôme et on regroupe deux à deux :

$$\gamma_p(t) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} e^{i.(2k-p).t}/2^p = \sum_{k=0}^{(p-1)/2} \binom{p}{k} \cdot \cos((2.k-p).t)/2^{p-1} \text{ si } p \text{ est impair}$$

$$\text{et } \gamma_p(t) = \left(2 \cdot \binom{2.p}{p} + \sum_{k=0}^{p/2-1} \binom{p}{k} \cdot \cos((2.k-p).t) \right) / 2^{p-1} \text{ sinon.}$$

C'est une combinaison de la forme "élément de E_n ". Chaque γ_p est dans E_n , les combinaisons de γ_p y sont aussi.

2011/12

Cas particulier des $\sum_{k=0}^4 a_k \cdot c_{2,k}$ et autres.

D.S.6

On explicite un élément de notre ensemble : $a_0 + a_1.c_2 + a_2.c_4 + a_3.c_6 + a_4.c_8$. C'est un certain $t \rightarrow a_0 + a_1.\cos(2.t) + a_2.\cos(4.t) + a_3.\cos(6.t) + a_4.\cos(8.t)$.

On utilise ce qu'on sait sur les polynômes de Tchebitchev et on regroupe :

$$\begin{vmatrix} & & & & a_0 \\ & & & 2.a_1.c^2 & -a_1 \\ & & 8.a_2.c^4 & -8.a_2.c^2 & +a_2 \\ 32.a_3.c^6 & -48.a_3.c^4 & +18.a_3.c^2 & -a_3 & \\ 128.a_4.c^8 & -256.a_4.c^6 & 160.a_4.c^4 & -32.a_4.c^2 & +a_4 \end{vmatrix}$$

Le tableau, c'est parce qu'on est ordonné comme un ingénieur. Les barres, c'est juste pour la lisibilité. Et la dernière ligne, c'est T_8 même si on ne l'a pas calculé soi même, on se doute bien que ça doit être ça.

On regroupe en colonne pour avoir le coefficient devant chaque puissance du cosinus (des puissances toutes paires, d'où les $\gamma_{2.p}$).

On identifie alors le coefficient de γ_0 : $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4$.

On identifie le coefficient de γ_2 : c'est $2.a_1 - 8.a_2 + 18.a_3 - 32.a_4$, et ainsi de suite.

On trouve donc le vecteur colonne des α_p : $\begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & +a_2 & -a_3 & +a_4 \\ & 2.a_1 & -8.a_2 & +18.a_3 & -32.a_4 \\ & & 8.a_2 & -48.a_3 & +160.a_4 \\ & & & 32.a_3 & -256.a_4 \\ & & & & 128.a_4 \end{pmatrix}$. C'est bien $P.C$.

En dimension supérieure, on aurait les coefficients des divers polynômes de Tchebitchev d'indices pairs.

On fait le même travail dans l'autre sens. Cette fois, c'est donc la matrice Q qui va se remplir, avec pour coefficients les nombres qui servent à exprimer les $\cos^{2.p}(t)$ à l'aide des $\cos(2.k.t)$.

Ce sont des coefficients binomiaux (on les avait reconnus, même si ils ne viennent que d'une ligne sur deux du triangle), divisés par des puissances de 2 (j'ai bien pris soin dans Q de ne pas simplifier les quotients "pairs"). On a donc cette fois $C = Q.\Gamma$.

On note qu'avec $C = Q.\Gamma$ et $\Gamma = P.C$, on aboutit à $C = Q.P.C$.

Ceci nous donne à penser qu'on va avoir $Q.P = I_5$ pour qu'elle reste aussi neutre. Et c'est ce que confirme le calcul.

Les matrices P et Q servent juste à changer de base ou changer d'univers. Elles nous déplacent de l'univers des c_k vers celui des γ_p et vice versa.

Elles sont inverses l'une de l'autre.

On a donc $P.Q = Q.P = I_5$.

2011/12

La somme $\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \binom{p}{k}$.

D.S.6

Il n'y a pas de problème d'existence dans ces sommes. On notera que tous les coefficients binomiaux viennent d'une même ligne : celle d'indice p .

D'ailleurs, on vérifie que n et k sont variables muettes, et cette somme ne dépend que de p .

On commence par les petites valeurs :

- $p = 1$: $S_1 = \frac{1}{1} \cdot (-1)^0 \cdot \binom{1}{0} = 1$
- $p = 2$: $S_2 = 1 \cdot (-1)^0 \cdot \binom{2}{0} + \frac{1}{2} \cdot \left(1 \cdot \binom{2}{0} - \binom{2}{1}\right) = \frac{1}{2}$
- $p = 3$: $S_3 = 1 \cdot (-1)^0 \cdot \binom{3}{0} + \frac{1}{2} \cdot \left(\binom{3}{0} - \binom{3}{1}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2}\right) = 1 + \frac{1-3}{2} + \frac{1}{3}(1-3+3) = \frac{1}{3}$
- $p=4$: il y a quatre termes : $1, \frac{1}{2} \cdot \left(\binom{4}{0} - \binom{4}{1}\right), \frac{1}{3} \cdot \left(\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2}\right)$ et $\frac{1}{4} \cdot \left(\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3}\right)$; tout se simplifie assez bien, et il reste $\frac{1}{4}$.

On se permet de permuter les sommes. La variable k sera un entier qui ne dépassera jamais $p-1$. Ensuite, n est aussi un entier naturel qui restera plus grand que k .

On peut alors écrire : $S_p = \sum_{0 \leq k < n \leq p} \frac{1}{n} \cdot (-1)^k \cdot \binom{p}{k}$ puis $S_p = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{n=k+1}^p \frac{1}{n} \cdot (-1)^k \cdot \binom{p}{k} \right)$. On sort ensuite ce qui ne dépend pas de n : $S_p = \sum_{k=0}^{p-1} \left((-1)^k \cdot \binom{p}{k} \cdot \sum_{n=k+1}^p \frac{1}{n} \right)$.

On peut visualiser la chose avec un tableau où l'on ne garde que les termes d'une des deux moitiés triangulaires.

On calcule juste une petite somme qui servira ensuite : $\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \cdot \binom{p}{k}$. C'est, à un terme près la somme

$\sum_{k=0}^p (-1)^k \cdot \binom{p}{k}$. Or, cette célèbre somme binomiale alternée est réputée pour être nulle. C'est en effet le développement de $(1-1)^p$ par la formule du binôme.

En écrivant donc $\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \cdot \binom{p}{k} = \sum_{k=0}^p (-1)^k \cdot \binom{p}{k} - (-1)^p \cdot \binom{p}{p} = 0 - (-1)^p$, on a $\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \cdot \binom{p}{k} = (-1)^{p+1}$.

On nous propose de remplacer les $\frac{1}{n}$ par $\int_0^1 t^{n-1} \cdot dt$, qui fait partie des formules à retenir (on intègre en t^n/n entre 0 et 1).

On a alors : $S_n = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \cdot \binom{p}{k} \cdot \sum_{n=k+1}^p \int_0^1 t^{n-1} \cdot dt$ puis par linéarité de l'intégrale :

$S_n = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \cdot \binom{p}{k} \cdot \int_0^1 \left(\sum_{n=k+1}^p t^{n-1} \right) \cdot dt$ on identifie une série géométrique de raison t :

$$S_n = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \cdot \binom{p}{k} \cdot \int_0^1 \left(\frac{t^k - t^p}{1-t} \right) \cdot dt$$

on sort encore plus en avant le signe intégrale par linéarité :

$$S_n = \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \cdot t^k \cdot \binom{p}{k} - \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \cdot \binom{p}{k} \cdot t^p}{1-t} \cdot dt$$

On voudrait des sommes de 0 à p ? Facile ! Les deux termes qui manquent sont tous les deux des t^p .

On peut donc même écrire

$$S_n = \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^p (-1)^k \cdot t^k \cdot \binom{p}{k} - \sum_{k=0}^p (-1)^k \cdot \binom{p}{k} \cdot t^p}{1-t} \cdot dt$$

La deuxième somme est nulle, puisque c'est $t^p \cdot \sum_{k=0}^p (-1)^k \cdot \binom{p}{k}$ qui vaut $t^p \cdot (1-1)^p$.

L'autre somme fait appel à la formule du binôme : $S_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^p - 0}{1-t} \cdot dt$.

On reconnaît $\int_0^1 (1-t)^{p-1} \cdot dt$ qui s'intègre en $t \rightarrow -(1-t)^p$ et donne bien $1/p$.

On peut conclure : $S_p = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{p}{k} = \frac{1}{p}$.

2011/12

Formule de Taylor et différences d'ordre 5.

D.S.6

On écrit la formule de Taylor comme demandé :

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(a) + \frac{h^3}{6} \cdot f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{24} \cdot f^{(4)}(a) + \frac{h^5}{5!} \cdot f^{(5)}(a) + \frac{h^6}{5!} \cdot \int_{t=0}^{t=1} (1-t)^5 \cdot f^{(6)}(a+t \cdot h) \cdot dt$$

On la dégrade en $f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(a) + \frac{h^3}{6} \cdot f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{24} \cdot f^{(4)}(a) + \frac{h^5}{5!} \cdot f^{(5)}(a) + o(h^5)$

où $o(h^5)$ est un produit du type $h^5 \cdot \varphi(h)$ avec $\varphi(h)$ qui tend aussi vers 0 quand h tend vers 0.

On calcule alors la somme pondérée :

somme							$o(h^5)$
$f(a) =$	$f(a)$						
$f(a+h) =$	$f(a)$	$+h \cdot f'(a)$	$+h^2 \cdot f''(a)/2!$	$+h^3 \cdot f^{(3)}(a)/3!$	$+h^4 \cdot f^{(4)}(a)/4!$	$+h^5 \cdot f^{(5)}(a)/5!$	$+5^5 \cdot h^5 \cdot \varphi(h)$
$f(a+2 \cdot h) =$	$f(a)$	$+2 \cdot h \cdot f'(a)$	$+2^2 \cdot h^2 \cdot f''(a)/2!$	$+2^3 \cdot h^3 \cdot f^{(3)}(a)/3!$	$+2^4 \cdot h^4 \cdot f^{(4)}(a)/4!$	$+2^5 \cdot h^5 \cdot f^{(5)}(a)/5!$	$+2^5 \cdot h^5 \cdot \varphi(2 \cdot h)$
$f(a+3 \cdot h) =$	$f(a)$	$+3 \cdot h \cdot f'(a)$	$+3^2 \cdot h^2 \cdot f''(a)/2!$	$+3^3 \cdot h^3 \cdot f^{(3)}(a)/3!$	$+3^4 \cdot h^4 \cdot f^{(4)}(a)/4!$	$+3^5 \cdot h^5 \cdot f^{(5)}(a)/5!$	$+3^5 \cdot h^5 \cdot \varphi(3 \cdot h)$
$f(a+4 \cdot h) =$	$f(a)$	$+4 \cdot h \cdot f'(a)$	$+4^2 \cdot h^2 \cdot f''(a)/2!$	$+4^3 \cdot h^3 \cdot f^{(3)}(a)/3!$	$+4^4 \cdot h^4 \cdot f^{(4)}(a)/4!$	$+4^5 \cdot h^5 \cdot f^{(5)}(a)/5!$	$+4^5 \cdot h^5 \cdot \varphi(4 \cdot h)$
$f(a+5 \cdot h) =$	$f(a)$	$+5 \cdot h \cdot f'(a)$	$+5^2 \cdot h^2 \cdot f''(a)/2!$	$+5^3 \cdot h^3 \cdot f^{(3)}(a)/3!$	$+5^4 \cdot h^4 \cdot f^{(4)}(a)/4!$	$+5^5 \cdot h^5 \cdot f^{(5)}(a)/5!$	$+5^5 \cdot h^5 \cdot \varphi(5 \cdot h)$

Si on effectue la somme avec les coefficients 1, -5, 10, -10, 5 et -1, il ne reste presque plus rien. Le seul terme qui ne soit pas nul est en $120 \cdot h^5/5!$ (calcul un peu long qui peut être justifié et généralisé par un exercice un peu plus long). Et il reste évidemment un terme en h^5 avec de multiples $\varphi(h)$ et autres.

On divise par h^5 , il reste $f^{(5)}(a)$ et les termes en $\varphi(h)$, jusqu'à $\varphi(5 \cdot h)$.

Quand on fait tendre h vers 0, il reste $\varphi^{(5)}(a)$.

On peut donc accéder directement à la dérivée cinquième par une seule limite. Et les coefficients sont bien sûr des coefficients binomiaux.

2011/12

Equation différentielle.

D.S.6

L'équation différentielle $(1-t^2) \cdot y''_t = t \cdot y'_t$ est linéaire du deuxième ordre, pas encore sous forme de Cauchy Lipschitz, à coefficients continus, avec condition initiale, à second membre identiquement nul (le $t \cdot y'_t$ fait partie du premier membre, puisque c'est un des termes linéaires). Les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2.

En fait, l'équation est du premier ordre en y'_t .

On résout donc $z'_t - \frac{t}{1-t^2} \cdot z_t = 0$ (ayant sous-entendu $z = y'$). La fonction notée a est ici

$t \rightarrow -t/(1-t^2)$. Elle s'intègre en $t \rightarrow \frac{\ln(1-t^2)}{2}$. Avec un signe moins, et une exponentielle on

trouve $z_t = \frac{z_0}{\sqrt{1-t^2}}$. Comme z n'est autre que y'_0 , on trouve $y'_t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

On intègre ensuite tout simplement entre 0 et 1/2 pour avoir la valeur en 1/2 et on trouve

$$y_{1/2} = \text{Arcsin}(1/2) = \pi/3.$$

2011/12

Diagonalisation de $\begin{pmatrix} 3.i & 1-2.i \\ 4.i-2 & 3-3.i \end{pmatrix}$.

D.S.6

C'est la question pour s'assurer des points sans autre effort que le calcul et la connaissance d'une méthode. Ca rassure...

On note M cette matrice. Sa trace vaut 3 et son déterminant $3+i$ (tous calculs faits).

Ses valeurs propres sont donc les deux racines de l'équation $\lambda^2 - 3\lambda + 3+i = 0$ d'inconnue λ a priori complexe.

Le discriminant de cette équation est $-3-4.i$. On en trouve les racines carrées en résolvant $(a+i.b)^2 = -3-4.i$ avec l'indication $a^2 + b^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$ obtenue par les modules. On trouve par combinaisons $a^2 = 1$ et $b^2 = 4$. La contrainte $2.a.b = -4$ dit que a et b sont de signes contraires.

On vérifie : $(1-2.i)^2 = -3-4.i$.

Les deux valeurs propres sont donc : $1+i$ et $3-3.i$ (on revérifie trace et déterminant).

On fait un choix arbitraire $D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$.

On impose aussi à la matrice de passage P une forme simplifiée : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ . & . \end{pmatrix}$. La résolution de $M.P = P.D$

donne très vite $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (si vous avez échangé les valeurs propres, échangez les deux colonnes).

Elle est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie : $M = P.D.P^{-1}$ si on y tient.

Une remarque : quand vous cherchez P , vous me mettez systématiquement les implications dans le sens dont je n'ai rien à faire. Vous raisonnez par conditions nécessaires : $M.P = P.D \Rightarrow \dots \Rightarrow \dots$ et ainsi de suite.

Ma réponse sera : "et alors?" Ceci prouve juste que si il y a une matrice P convenable, ce ne peut être que celle qui suit. Mais ce sens ne garantit pas qu'on a bien effectivement $M.P = P.D$ (avec sous regardé les quatre équations du système ou seulement les deux premières). Le problème est que l'on ne vous a pas habitué à raisonner, mais plutôt à vous ruer avec satisfaction sur ce que vous savez faire, afin de gagner des points au bac. Le niveau n'est plus le même. Maintenant, pour gagner des points, il faut aussi raisonner...

D.S.6

MPSI2

382 points

Année 2011/12

D.S.6

D.S.7	Charlemagne	Vendredi 13 janvier	2011/2012	D.S.7
2011/12	GÉOMÉTRIE			D.S.7

$\leq \diamond(14) \geq$ Dans le plan affine, on place les points $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, -\sqrt{2})$ et $D(-1, -\sqrt{2})$ (rectangle). Un point M décrit le demi cercle de diamètre $[A, B]$ dans la partie supérieure du plan. On note I l'intersection de (M, C) avec $[A, B]$ et J l'intersection de (M, D) avec $[A, B]$. Faites un schéma. Montrez que $AI^2 + BJ^2$ est constante (égale à AB^2). (problème dû à Pierre de Fermat). 6 pt.

2011/12	MATRICES	D.S.7
---------	----------	-------

Pour tout entier naturel n , on note S_n la matrice carrée de taille n sur n dont le terme de ligne i et colonne k est égal à $\min(i, k)$.

- 1) Calculez $\text{Tr}(S_n)$ et $\det(S_n)$ pour tout n (pour le déterminant, vous pourrez commencer par les petites valeurs de n pour comprendre et gagner déjà quelques demi-points). 3 pt.

Préliminaires (Cayley-Hamilton).

- 1) Calculez pour toute matrice carrée M de taille 2 sur 2 : $M^2 - \text{Tr}(M).M + \det(M).I_2$. 1 pt.

- 1) Soit M une matrice carrée de taille 3 sur 3. Identifiez $M^2 - \text{Tr}(M).M + \text{Tr}(\text{Com}(M)).I_3$. 2 pt.
Exprimez alors M^3 comme combinaison linéaire de M^2 , M et I_3 . 2 pt.

- 2) Soient A et B deux matrices carrées de taille 3, semblables (il existe P inversible vérifiant $A.P = P.B$). Montrez que A^n est semblable à B^n pour tout entier naturel n . Montrez alors $\text{Tr}(A^n) = \text{Tr}(B^n)$ pour tout entier naturel n . 3 pt.

- 3) On suppose que la matrice carrée de taille 3 A est diagonalisable (semblable à une matrice diagonale D , dont les termes diagonaux sont appelés valeurs propres de A). Exprimez $\text{Tr}(A)$, $\text{Tr}(A^n)$, $\det(A)$ et à l'aide des valeurs propres de A . 3 pt. Montrez : $\text{Tr}(\text{Com}(A)) = \text{Tr}(\text{Com}(D))$. 2 pt.
Montrez que les valeurs propres de A sont les racines de l'équation $\lambda^3 - \text{Tr}(A).\lambda^2 + \text{Tr}(\text{Com}(A)).\lambda - \det(A) = 0$ d'inconnue λ . 2 pt.

- 4) Soit M une matrice carrée de taille 3. Montrez que chaque M^n est combinaison linéaire de I_3, M et M^2 . 3 pt.

- 1) Diagonalisez la matrice S_2 . 2 pt. Calculez $(S_2)^n$ pour tout entier naturel n . vérifiez que la formule est encore correcte pour n égal à -1 . 3 pt.

- 2) On note R la matrice obtenue pour n égal à $1/2$. Vérifiez alors $R^2 = S_2$. 3 pt.

- 3) Montrez qu'on peut choisir P vérifiant $P^{-1} = {}^t P$ lors de l'étape de diagonalisation de S_2 . 2 pt.

- 1) Quel est le polynôme de degré 3 dont les racines sont les trois valeurs propres de S_3 . 2 pt. Etudiez ses variations (tableau de variations, limites aux bornes, extrema locaux, valeur en $1/2$), et donnez le nombre de racines réelles. 3 pt.

- 1) Trouvez une matrice L_2 carrée de taille 2 triangulaire supérieure à diagonale positive (c'est à dire

de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ avec a et c positifs) vérifiant ${}^t(L_2).L_2 = S_2$. (1 pt.)

- 2) Trouvez de même L_3 triangulaire supérieure à diagonale positive vérifiant ${}^t(L_3).L_3 = S_3$. (1 pt.)
 - 3) Trouvez de même L_n triangulaire supérieure à diagonale positive vérifiant ${}^t(L_n).L_n = S_n$ (je veux une preuve avec des sigmas, des termes généraux). (2 pt.)
 - 4) Retrouvez la valeur de $\det(S_n)$. (1 pt.)
 - 5) Montrez que pour tout vecteur colonne X de taille n ${}^tX.S_n.X$ est un réel positif (conseil : introduisez le vecteur $L_n.X$). (2 pt.)
 - 6) X et Y sont deux vecteurs colonnes de taille n . Montrez que ${}^t(\lambda.X + Y).S_n.(\lambda.X + Y)$ est un trinôme en λ dont le discriminant est négatif ou nul. (2 pt.)
- Déduisez : $|{}^tX.S_n.Y| \leq \sqrt{{}^tX.S_n.X}.\sqrt{{}^tY.S_n.Y}$. (3 pt.)

2011/12

ÉTOURDERIE

D.S.7

On se proposait de résoudre l'équation différentielle $y'_t = \frac{-y'_t}{2}$ avec condition initiale $y_0 = 1$. D'ailleurs, faites le. (2 pt.)

Un élève étourdi a cru qu'il fallait résoudre $y'_t = \frac{y-t}{2}$. Soit f une application dérivable vérifiant $f'(t) = f(-t)/2$ pour tout t . Montrez que f est deux fois dérivable. Quelle est l'équation différentielle liant $f''(t)$ et $f(t)$ pour tout t ? Trouvez f (attention, avez vous raisonné par équivalence ? et même, avez vous raisonné ?).

Un autre élève a cru qu'il s'agissait de résoudre l'équation presque différentielle $y'_t = -y_{t/2}$. Soit donc f une application dérivable vérifiant $g'(t) = -g(t/2)$ pour tout t et $g(0) = 1$. Montrez que g est de classe C^∞ (dérivable autant de fois qu'on veut). (2 pt.)

Calculez $g'(0)$, $g''(0)$. Tracez sommairement g au voisinage de 0 (tangente, convexité). (2 pt.)

Quelle relation lie $g^{(n+1)}(t)$ et $g^{(n)}(t/2)$ pour tout n ? Calculez $g^{(n)}(0)$ pour tout n ? (2 pt.)

Pour tout n , on définit $u_n = x \rightarrow \frac{x^n}{n!.2^{(n^2-n)/2}}$, définie de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que pour tout n, u_n est croissante sur $[0, 1]$. Montrez que pour tout x de $[0, 1]$, $(u_n(x))$ est décroissante. (2 pt.)

Montrez : $2. \int_0^{x/2} u_n(t).dt = u_{n+1}(x)$. (2 pt.)

Pour tout N , on définit $\phi_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n . u_n$.

x est un réel fixé dans $[0, 1]$. Montrez que la suite $(\phi_{2.p}(x))$ est décroissante. Montrez que la suite $(\phi_{2.p+1}(x))$ est croissante. Montrez pour tout N : $\phi_{2.p+1}(x) \leq \phi_{2.p}(x)$. Déduisez que $(\phi_N(x))$ converge, et montrez que sa limite (notée $\Phi(x)$) vérifie $\phi_{2.p+1}(x) \leq \Phi(x) \leq \phi_{2.p}(x)$ pour tout p . (4 pt.)

Montrez pour tout x de $[0, 1]$: $2. \int_0^{x/2} \Phi(t).dt = 1 - \Phi(x)$. (4 pt.)

Déduisez que Φ est solution de l'équation presque différentielle $y'_t = -y_{t/2}$. (4 pt.)

D.S.7

MPSI2

460 points

Année 2011/12

D.S.7

Graphiquement, on a une sorte de borne kilométrique à l'ancienne : un demi cercle sur un rectangle. On va se permettre pour l'instant une preuve bien décevante, puisque cartésienne. On va convertir un beau problème de géométrie contre de froids calculs. Bref, aussi passionnant que ce que certains élèves sont contraints de faire à partir de jolies questions de physique.

Le point mobile M a pour coordonnées (c, s) avec nos notations allégées (c pour $\cos(\theta)$ et s pour $\sin(\theta)$).

Le point I est sur l'axe des abscisses puisqu'il est sur $[A, B]$. Ses coordonnées sont donc de la forme $(x, 0)$. Son alignement avec M et I donne $\det(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MC}) = 0$ se traduit par la nullité d'un déterminant : $\begin{vmatrix} x-c & 1-c \\ -s & -\sqrt{2}-s \end{vmatrix} = 0$. On développe, on isole : $(x-c).(s+\sqrt{2}) = s.(1-c)$ puis

$$x_I = c + \frac{s - s.c}{s + \sqrt{2}} = \frac{s + \sqrt{2}.c}{s + \sqrt{2}}.$$

$$\text{On mesure : } AI^2 = \left(1 + \frac{s + \sqrt{2}.c}{s + \sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(2.s + \sqrt{2}.c + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{2} + s)^2}.$$

$$\text{On fait de même pour } J \text{ avec } \begin{vmatrix} x-c & -1-c \\ -s & -\sqrt{2}-s \end{vmatrix} = 0 \text{ d'où } x_J = \frac{\sqrt{2}.c - s}{\sqrt{2} + s}.$$

$$\text{On mesure : } BJ^2 = \left(-1 + \frac{\sqrt{2}.c - s}{s + \sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(2.s - \sqrt{2}.c + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{2} + s)^2}.$$

$$\text{On somme } \frac{(2.s + \sqrt{2} - \sqrt{2}.c)^2 + (2.s + \sqrt{2} + \sqrt{2}.c)^2}{(s + \sqrt{2})^2}.$$

Le numérateur se développe en $(x-y)^2 + (x+y)^2 = 2.x^2 + 2.y^2$ et donne $2.(2.s + \sqrt{2})^2 + 4.c^2$ qu'on développe en $4 + 4.c^2 + 8.s^2 + 8.\sqrt{2}.s$ et même $4 + 4 + 4.s^2 + 8.\sqrt{2}.s$.

Le dénominateur est $s^2 + 2 + 2.s^2$.

Le rapport numérateur à dénominateur est égal à 4 et on simplifie.

On a bien $AI^2 + BJ^2 = 4 = AB^2$.

Il reste à trouver une preuve plus jolie, purement géométrique.

$$\text{La trace de } S_n \text{ est } \sum_{k=1}^n \text{Min}(k, k) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n.(n+1)}{2}.$$

$$\text{On calcule les premiers déterminants : } \det((1)) = 1, \text{ puis } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \text{ puis } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-1 & 2-1 \\ 0 & 2-1 & 3-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Le troisième déterminant vaut aussi 1 par la même manipulation.

Supposons qu'en taille $n-1$ le déterminant vaille 1 et étudions le déterminant de la matrice de taille n .

On soustrait la première ligne à toutes les autres. La première colonne est alors faite d'un 1 et d'une liste de 0. On développe par rapport à cette colonne, et...on retrouve la matrice de taille $n-1$.

2011/12

Formule de Cayley Hamilton en taille 2 et 3.

D.S.7

On prend une matrice de taille 2 : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On calcule $M^2 - (a+d).M + (a.d - b.c).I_2$ et on trouve la matrice nulle. On garde donc en mémoire : $M^2 - Tr(M).M + \det(M).I_2 = 0_2$, mais valable seulement en taille 2.

On prend cette fois ci une matrice de taille 3 avec ses neuf coefficients : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$. On calcule $M^2 = \dots$, $Tr(M) = a+b'+c''$ et $Tr(Com(A)) = (b'.c'' - b''.c') + (a.c'' - a''.c) + (a.b' - a'.b)$. On effectue le gros calcul indiqué, et on trouve $M^2 - Tr(M).M + Tr(Com(M)).I_3 \stackrel{!}{=} (Com(M))$.

On multiplie cette formule par M (à droite ou à gauche, c'est sans importance). On trouve $M^3 - Tr(M).M^2 + Tr(Com(M)).M = (Com(M)).M = \det(M).I_3$.

On isole : $M^3 = Tr(M).M^2 - Tr(Com(M)).M + \det(M).I_3$. C'est une combinaison, de coefficients $Tr(M)$, $-Tr(Com(M))$ et $\det(M)$.

2011/12

Matrices semblables et traces.

D.S.7

On part d'une relation telle que $A = P.B.P^{-1}$ et on passe à la trace : $Tr(A) = Tr(P.B.P^{-1}) = Tr(P^{-1}.P.B) = Tr(I_3.B) = Tr(B)$. On utilise la célèbre formule $Tr(M.N) = Tr(N.M)$. On notera qu'on n'a pas le droit d'écrire $Tr(P.B.P^{-1}) = Tr(P.P^{-1}.B)$ normalement, puisque les matrices peuvent s'échanger mais pas se glisser les unes entre les autres.

On poursuit : $A^n = P.B^n.P^{-1}$ par récurrence sur n (ou par concaténation, en tout cas, avec un argument et pas juste un "donc"). A^n est semblable à B^n . Elles ont donc la même trace (sans refaire le raisonnement "matrices semblables implique même trace", il est fait une fois pour toutes).

Si A est semblable à une matrice diagonale D de termes diagonaux α , β et γ , alors on a $Tr(A^n) = Tr(D^n)$ pour tout n . Mais par récurrence sur n , on montre que D^n est la matrice diagonale de termes diagonaux α^n , β^n et γ^n . On a donc : $Tr(A^n) = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ pour tout n .

On a aussi $\det(A) = \det(D) = \alpha.\beta.\gamma$.

On prend ensuite la formule préparatoire à la formule de Cayley-Hamilton : $A^2 - Tr(A).A + Tr(Com(A)).I_3 \stackrel{!}{=} (Com(A))$ et on passe à la trace : $Tr(A^2) - Tr(A).Tr(A) + Tr(Com(A)).3 = Tr(Com(A)) = Tr(Com(A))$. On regroupe les $Tr(Com(A))$ d'un seul côté : $Tr(Com(A)) = \frac{Tr(A)^2 - Tr(A^2)}{2}$ (à rapprocher de $a.b + a.c + b.c = \frac{(a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2}{2}$).

On a la même relation pour D (qui est semblable à A) : $Tr(Com(D)) = \frac{Tr(D) - Tr(D^2)}{2}$.

On compare terme à terme les deux formules, sachant $Tr(D^n) = Tr(A^n)$ pour tout n , on obtient : $Tr(Com(D)) = Tr(Com(A))$.

Deux matrices semblables partagent donc beaucoup de choses en commun, en termes de traces, déterminant...

On calcule la comatrice d'une matrice diagonale : $Com\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \beta.\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha.\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha.\beta \end{pmatrix}$. On trouve $Tr(Com(A)) = Tr(Com(D)) = \alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma$.

Or, on rappelle que le polynôme unitaire de racines α , β et γ est $(X - \alpha).(X - \beta).(X - \gamma)$ qui se développe en $X^3 - (\alpha + \beta + \gamma).X^2 + (\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma).X - \alpha.\beta.\gamma$. Ces coefficients sont la trace, déterminant de A et de $Com(A)$.

On a bien : α, β et γ sont les racines de $X^3 - \text{Tr}(A).X^2 + \text{Tr}(\text{Com}(A)).X - \det(A)$.
 Les choses changent quand on passe à la taille 3. Retenez donc juste qu'il existe un polynôme de degré n pour les matrices de taille n dont les coefficients sont cachés dans la matrice, le premier étant la trace, le dernier étant le déterminant.

2011/12

Une récurrence sur M^n .

D.S.7

Soit M une matrice carrée de taille 3. Toutes les matrices M^n existent bien. On va montrer par récurrence sur n à double ou triple hérédité que M^n est combinaison de I_3 , M et M^2 .

L'initialisation se fait pour quelques rangs : $M^0 = 1.I_3 + 0.M + 0.M^2$, $M^1 = 0.I_3 + 1.M + 0.M^2$ et enfin $M^2 = 0.I_3 + 0.M + 1.M^2$. On a même : $M^3 = \det(M).I_3 - \text{Tr}(\text{Com}(M)).M + \text{Tr}(M).M^2$.

On doit gagner un rang de plus.

Comment s'y prendre? On multiplie la relation en question par M : $M^4 = \det(M).M - \text{Tr}(\text{Com}(M)).M^2 + \text{Tr}(M).M^3$. Or, M^3 est combinaison de I_3 , M et M^2 . On ne remplace pas explicitement, mais on déduit par "combinaison de combinaisons" que M^4 est combinaison de I_3 , M et M^2 .

C'est la même idée qui va servir pour l'hérédité.

On suppose ensuite à un rang n que M^n , M^{n+1} et M^{n+2} sont combinaisons linéaires de I_3 , M et M^2 . L'objectif est que M^{n+3} soit aussi combinaison de I_3 , M et M^2 .

On repart de $M^3 = \det(M).I_3 - \text{Tr}(\text{Com}(M)).M + \text{Tr}(M).M^2$ qu'on multiplie par M^n : $M^{n+4} = \det(M).M^n - \text{Tr}(\text{Com}(M)).M^{n+1} + \text{Tr}(M).M^{n+2}$. Les trois termes du membre de droite sont combinaisons de I_3 , M et M^2 , leur combinaison est encore combinaison de I_3 , M et M^2 (combinaison de combinaisons).

La récurrence à triple hérédité se termine.

Encore fallait il l'initialiser avec assez de rangs...

2011/12

Diagonalisation de S_2 .

D.S.7

On diagonalise $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en trouvant son polynôme caractéristique : $X^2 - 3.X + 1$ et ses valeurs propres : $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. On trouve une matrice de passage $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1-\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$ par exemple. On en vérifie l'inversibilité. On trouve son inverse.

Après, avec les récurrences plus qu'habituelles, on trouve : $(S_2)^n = P.D^n.P^{-1}$ qui donne $\frac{1}{4.\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2.a^n.(1+\sqrt{5}) + 2.b^n.(\sqrt{5}-1) & 4.\sqrt{b}-4.\sqrt{a} \\ 4.b^n-4.a^n & 2.(1+\sqrt{5}).\sqrt{b}-2.(1-\sqrt{5}).\sqrt{a} \end{pmatrix}$.

avec $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $b = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

On vérifie la formule pour n nul (on retrouve I_2) et n égal à 1.

Comment tester la formule pour n égal à -1 sans faire de trop gros calculs?

Cette matrice est simplement $P \cdot \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$. On ne la développe pas. On doit juste vérifier que c'est l'inverse de S_2 .

Il suffit de calculer son produit avec S_2 . Mais S_2 , c'est $P.D.P^{-1}$.

On teste donc simplement : $(P.D.P^{-1}) \cdot (P \cdot \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix} \cdot P^{-1})$. Les P et P^{-1} se simplifient au milieu.

Les deux matrices diagonales se simplifient. Les P et P^{-1} extrêmes se rencontrent enfin, et se simplifient. Il reste I_2 .

Et pour n égal à $1/2$, on a la matrice $\frac{1}{4.\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2.\sqrt{a}.(1+\sqrt{5}) + 2.\sqrt{b}.(\sqrt{5}-1) & 4.\sqrt{b}-4.\sqrt{a} \\ 4.\sqrt{b}-4.\sqrt{a} & 2.(1+\sqrt{5}).\sqrt{b}-2.(1-\sqrt{5}).\sqrt{a} \end{pmatrix}$.

On l'élève au carré.

Quand je dis "on", c'est bien vous ou moi. Mais avec intelligence...

Le professeur est toujours déçu de découvrir qu'au lieu de faire des mathématiques, les élèves se sont convertis en bourrins et ont calculé, calculé, calculé des trucs de mort d'une lourdeur indescriptible... Ils auront gagné des points. Mais je ne devrais pas les leur donner. Je devrais les reporter en notes de physique, c'est tout.

En maths, on cherche avant tout le plus court chemin. Il s'agit de calculer finalement le carré de $P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$. C'est $P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$. Sous cette forme, le calcul est

plus que rapide : les P et P^{-1} au milieu s'en vont. Le produit des deux matrices diagonales $\begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix}^2$ redonne D et le produit définitif $P \cdot D \cdot P^{-1}$ est bien S_2 .

Et hop !

Oui, je sais, Quand on prend le temps de réfléchir cinq minutes, on s'épargne une demi heure de calculs stériles. La question est simplement : vous voulez devenir ingénieur ou professeur de physique ?

On a donc trouvé facilement une des quatre racines carrées de la matrice S_2 . Oui, il y a quatre racines possibles ; $P \cdot \begin{pmatrix} \pm\sqrt{a} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{b} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$.

Il nous reste dans cette diagonalisation à se convaincre qu'on peut prendre un modèle de matrice particulier. On reprend la recherche de P sous la forme générale : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (3+\sqrt{5})/2 & 0 \\ 0 & (3-\sqrt{5})/2 \end{pmatrix}$.

La première colonne donne deux fois la même équation : $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot a$. De même, les seules informations de deuxième colonne sont $d = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot b$.

L'exigence $P^{-1} = {}^t P$ se résume à $P \cdot {}^t P = I_2$ c'est à dire $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ et $a \cdot c + b \cdot d = 0$. On résout ce système par équivalences, et il nous reste $a^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$ et $b^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$.

On peut expliciter les matrices P possibles, mais l'essentiel est d'avoir prouvé qu'il était possible de construire P répondant à tous ces critères par équivalences...

2011/12

Diagonalisation de S_3 .

D.S.7

On calcule la trace de S_3 , son déterminant et la trace de sa comatrice : 6, 1 et $Tr\left(\begin{pmatrix} 2 & . & . \\ . & 2 & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix}\right) = 5$.

Le polynôme caractéristique est donc $X^3 - 6X^2 + 5X - 1$.

On le dérive : $3X^2 - 12X + 5$. Les extréma sont donc en $\frac{6-\sqrt{21}}{3}$ et $\frac{6+\sqrt{21}}{3}$.

Le polynôme du troisième degré est croissant, décroissant et croissant.

On calcule la valeur du polynôme de degré 3 en $(6-\sqrt{21})/3$ et $(6+\sqrt{21})/3$.

On calcule vraiment $\frac{(6+\sqrt{21})^3}{27} - 6 \cdot \frac{(6+\sqrt{21})^2}{9} + 5 \cdot \frac{6+\sqrt{21}}{3} - 1$? Oui !

Mais avec efficacité. Entre les deux premiers termes, je factorise $(6+\sqrt{21})^2$ et j'ai $\left(\frac{6+\sqrt{21}}{27} - \frac{6}{9}\right) \cdot (6+\sqrt{21})^2$. Ceci me donne $\frac{\sqrt{21}-12}{27} \cdot (6+\sqrt{21})^2$. On lui ajoute $5 \cdot (6+\sqrt{21})/3$. On factorise donc : $(6+\sqrt{21}) \cdot \left(\frac{(\sqrt{21}-12) \cdot (\sqrt{21}+6)}{27} + \frac{5}{3}\right)$. On simplifie, et à l'issue du calcul, on trouve $-\frac{14\sqrt{21}+63}{9}$. Elle est visiblement négative.

Avec un changement de signe sur tous les $\sqrt{21}$ on trouve l'autre valeur : $\frac{14\sqrt{21}-63}{9}$. Elle est positive.

On résume : le polynôme $x \rightarrow x^3 - 6x^2 + 5x - 1$ croît (limite $-\infty$ en $-\infty$), atteint une valeur positive, redescend jusqu'à une valeur négative, puis repart vers $+\infty$. On dénombre donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, trois racines réelles.

On ne peut pas en avoir davantage. Toutes les racines sont réelles.

Il n'y a pas à invoquer le théorème de d'Alembert Gauss qui lui garantit l'existence de racines complexes quand le théorème des valeurs intermédiaires ne peut rien faire.

Avait-t-on vraiment besoin de calculer le polynôme en $(6 + \sqrt{21})/3$ et son conjugué ? Non ! On calcule en $1/2$ comme proposé. On trouve $\frac{1}{8} - \frac{6}{4} + \frac{5}{2} - 1 = \frac{1}{8}$. On dresse donc un rapide tableau de valeurs :

$P(0)$	$P(1/2)$	$P(1)$	$P(10)$
-1	1/2	-1	449

On détecte nos trois racines, et on ne peut pas en avoir plus. On cerne donc les trois valeurs propres.

2011/12

Décompositions $S_n = {}^t(L).L$.

D.S.7

On résout $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ avec conditions de positivité de a et c . On trouve $a^2 = 1$

d'où $a = 1$, puis $a + b = 2$ d'où $b = 1$. On reporte encore, et il nous reste $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En taille 3 on fait de même et on trouve $L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On va spontanément proposer : $L_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Une formule propre pour le terme général

(ligne i colonne k) : $\begin{cases} 1 & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On écrit le terme général de la transposée $\begin{cases} 1 & \text{si } i \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On effectue le produit ${}^t(L_n).L_n$ et on en calcule le terme de ligne i et colonne k : $\sum_{j=1}^n (a_j^i).(a_j^k)$ (on a a_j^i puisque c'est le terme α_i^j dans la transposée).

Le produit $(a_j^i).(a_j^k)$ est nul dès que l'un de ses deux facteurs est nul, et sinon il vaut 1. Les seuls termes égaux à 1 dans ce produit sont donc ceux du début, de $j = 1$ à $j = \text{Min}(i, k)$ et ensuite ils sont nuls. La somme est faite de $\text{Min}(i, k)$ termes égaux à 1, elle vaut $\text{Min}(i, k)$.

Ces formules du type $S = {}^t L.L$ s'appellent "décompositions de Cholewsky".

On recalcule rapidement : $\det(S_n) = \det({}^t L_n.L_n) = \det({}^t L_n) \cdot \det(L_n) = (\det(L_n))^2 = 1^2 = 1$.

2011/12

Les produits ${}^t X.S_n.X$ et l'inégalité de cauchy-Schwarz.

D.S.7

On effectue donc un produit ${}^t X.S_n.X$ avec X vecteur colonne. On regarde déjà si les formats sont compatibles : une ligne, un carré, une colonne. Le produit $S_n.X$ donne un vecteur colonne, qui "tombe" sur un vecteur ligne.

Par exemple $(x \ y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} x+y \\ x+2.y \end{pmatrix} = x^2 + 2.x.y + 2.y^2$. En taille 3 : $x^2 + 2.y^2 + 3.z^2 + 2.x.y + 2.x.z + 4.y.z$.

La positivité de ces réels ne saute pas aux yeux.

Mais il y a une indication. On pose $C = L_n.X$. On a alors ${}^tC = {}^tX.{}^tL_n$ et finalement ${}^tX.S_n.X = {}^tX.{}^tL_n.L_n.X = {}^tC.C$. Or, si on note c_1 à c_n les coefficients du produit C , on a alors ${}^tC.C = \sum_{i=1}^n (c_i)^2$.

C'est un réel en tant que somme de carrés de réels.

Attention, le seul argument "somme de carrés" ne suffit pas à donner la positivité. Il faut vraiment parler de "somme de carrés de réels".

On prend ensuite deux vecteurs colonne et un réel. La quantité $\lambda.X + Y$ est un vecteur colonne. On peut donc calculer ${}^t(\lambda.X + Y).S_n.(\lambda.X + Y)$ et on trouve un réel.

Mais on peut aussi développer avec les règles de calcul matriciel : $\lambda^2.{}^tX.S_n.X + \lambda.({}^tY.S_n.X + {}^tX.S_n.Y) + {}^tY.S_n.Y$. On a bien un trinôme du second degré en λ de la forme $\alpha.\lambda^2 + \lambda.\beta + \gamma$ avec trois réels α , β et γ .

Mais quand on doit calculer ${}^t(\lambda.X + Y).S_n.(\lambda.X + Y)$, on trouve un réel positif, puisqu'il s'agit d'une forme ${}^tZ.S_n.Z$ avec Z vecteur colonne.

Le trinôme du second degré est de signe constant.

Il s'ensuit que son discriminant est négatif ou nul.

On a la négativité de son discriminant non pas par le calcul, mais par le raisonnement...

Qu'en déduit on ? $({}^tX.S_n.Y + {}^tY.S_n.X)^2 - 4.({}^tX.S_n.X).({}^tY.S_n.Y) \leq 0$. On fait passer un terme dans le membre de droite. On divise par 4. On a presque la formule demandée.

Mais il nous faut la vraie formule. Et pour cela, il semblerait que l'on ait besoin de ${}^tX.S_n.Y = {}^tY.S_n.X$. Est ce vrai ? Ces deux quantités sont des réels. *Allez, on affirme qu'ils sont égaux.*

Ah, zut, c'est un devoir de maths. Il ne faut pas l'affirmer. Il faut le prouver.

La quantité ${}^tX.S_n.Y$ est un réel. On peut le transposer, il reste le même. Or, la transposée d'un produit est le produit des transposées, mais dans l'ordre inverse : ${}^t(M.N) = {}^tN.{}^tM$. On a donc sans effort : ${}^tX.S_n.Y = {}^t({}^tX.S_n.Y) = {}^tY.S_n.X$. Et on trouve l'inégalité de type Cauchy-Schwarz.

2011/12

L'équation différentielle $y'_t = -y_t/2$.

D.S.7

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant, à second membre identiquement nul. Ses solutions sur $\mathbb{R}$ forment un espace vectoriel de dimension 1 engendré par l'application $t \longrightarrow e^{-t/2}$. La condition initiale donne la solution $t \longrightarrow e^{-t/2}$ valable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2011/12

L'équation non différentielle $f'(t) = f(-t)/2$.

D.S.7

L'équation n'est pas différentielle, mais on n'en est pas loin.

On part de $f'(t) = f(-t)/2$ et on dérive de chaque côté du signe égale par rapport à t : $f''(t) = -f'(-t)/2$.

Il y a dans le membre de droite un signe moins de par la dérivation d'une composée $t \longrightarrow -t \longrightarrow f(-t)$.

On continue : $f'(-t) = f(-(-t))$ en utilisant $-t$ à la place de t .

On peut conclure : $f'''(t) = -f'(t)/4$. Et ce pour tout t réel.

On a alors une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique $\lambda^2 = -1/4$ a deux racines complexes conjuguées $i/2$ et $-i/2$. Ses solutions forment un espace vectoriel de dimension 2 engendré par $t \longrightarrow e^{i.t/2}$ et $t \longrightarrow e^{-i.t/2}$. Ou par le sinus et le cosinus. On déduit donc : $\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a.\cos(t/2) + b.\sin(t/2)$ (attention à l'ordre des quantificateurs).

Seulement voilà, on a raisonné par conditions nécessaires. S'il y a une solution, il faut qu'elle soit de cette forme. Mais en dérivant, reportant, on a peut être perdu des choses. On doit donc vérifier, avec l'espoir qu'il ne se passe pas de trop de casse.

$$f'(t) = \frac{-a \cdot \sin(t/2) + b \cdot \cos(t/2)}{2} \text{ et } f(-t) = a \cdot \cos(-t/2) + b \cdot \sin(-t/2) = -b \cdot \sin(t/2) + a \cdot \cos(t/2).$$

On identifie les deux fonctions terme à terme : $a = b$.

Finalement, par analyse et synthèse, condition nécessaire et suffisante, on trouve l'espace engendré par $\cos + \sin$. De dimension 1. On peut le dire engendré aussi par $t \rightarrow \cos(t - \pi/4)$.

Ah, et on a aussi une condition initiale : on trouve $t \rightarrow \cos(t) + \sin(t)$.

C'est bien la solution de notre problème.

Ah, au fait, qu'est ce qui nous autorisait à redériver la relation $f'(t) = f(-t)/2$? Déjà, f' existe pour qu'on puisse envisager l'équation elle-même. Mais ensuite, par composition, $t \rightarrow -t \rightarrow f(-t)$ est dérivable. Donc, f' est bien dérivable aussi.

2011/12

Premiers éléments sur l'équation presque différentielle $f'(t) = -f(t/2)$.

D.S.7

C'est une étrange équation, dans laquelle la valeur de la dérivée en t dépend de la valeur de la fonction en $t/2$. Quitte à ne travailler qu'avec t positif, on voit que la vitesse à l'instant t dépend de l'état du système à un instant situé dans son passé... Ce que vous faites à l'instant t va avoir de l'influence sur la vitesse à l'instant futur $2t$ et même à l'accélération à l'instant $4t$. C'est étrange, non? D'ailleurs la courbe de la solution est assez jolie. On a une courbe oscillante sur $\mathbb{R}^+$, avec une sorte de période qui augmente, et une amplitude qui grandit aussi...

On montre par récurrence sur n que g est au moins n fois dérivable.

Première fois : c'est dans les hypothèses, pour que l'on puisse même envisager l'équation.

Supposons ensuite g n fois dérivable. Alors, par composition $t \rightarrow g(-t/2)$ est n fois dérivable. En reportant, g' est donc aussi n fois dérivable. Ceci entraîne que g est $n+1$ fois dérivable. C'est exactement ce que l'on attendait comme conclusion de l'hérédité.

Alors, on dérive vraiment : $g''(t) = -g'(t/2)/2$. On remplace : $g''(t) = -(-g(t/4))/2 = g(t/4)/2$.

En particulier, en 0 : $g'(0) = -g(0) = -1$. On a ensuite $g''(0) = g(0)/2 = 1/2$.

On écrit le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 obtenu par la formule de Taylor-Young :

$g(0+h) = 1 - h + \frac{h^2}{4} + o(h^2)$ quand h tend vers 0. On a la valeur, la tangente parallèle à la seconde bissectrice, et le graphe est localement convexe.

On redérive la relation $g''(t) = g(t/4)/2$ valable pour tout t (sans le $\forall t$, comment redériver?). On a alors $g^{(3)}(t) = g'(t/4)/8 = g(t/8)/8$.

Petit à petit, il y a des puissances de 2. Une qui augmente au fur et à mesure dans le $g(t/2^n)$ et une autre qui grandit par accumulation au dénominateur. La formule, après avoir mouliné un peu est

$g^{(n)}(t) = t \rightarrow (-1)^n \cdot \frac{g(t/2^n)}{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \dots 2^{n-1}}$. On la démontre par récurrence sur n .

Cette formule est initialisée. On la suppose vraie à un rang n . On redérive : $g^{(n+1)}(t) = t \rightarrow$

$(-1)^n \cdot \frac{g'(t/2^n)}{(2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \dots 2^{n-1}) \cdot 2^n}$. On exploite la relation qui définit g en $t/2^n$: $g'(t/2^n) = -g(t/2^{n+1})$.

On reporte et on obtient $g^{(n+1)}(t) = t \rightarrow (-1)^{n+1} \cdot \frac{-g(t/2^{n+1})}{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \dots 2^{n-1} \cdot 2^n}$ comme attendu.

Mon notera qu'on peut remplacer $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \dots 2^{n-1}$ par $2^{n \cdot (n-1)/2}$ en additionnant les exposants. Il ne faut pas ensuite essayer de trouver plus simple.

Une fois démontré ce résultat par récurrence sur n , on l'exploite en 0 : $g^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot 2^{(n-n^2)/2}$.

2011/12

La suite de fonctions (u_n) .

D.S.7

Chaque application est bien définie sur $[0, 1]$.

Pour n donné, l'application u_n est croissante, comme multiple positif de $t \rightarrow t^n$.

Ensuite, on échange les rôles de n et x . On fixe donc x et c'est n qui varie. On calcule une différence en factorisant : $u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)! \cdot 2^{n \cdot (n+1)/2}} - \frac{x^n}{n! \cdot 2^{n(n-1)/2}} = \frac{x^n}{(n+1)! \cdot 2^{n \cdot (n+1)/2}} (x - 2^n \cdot (n+1))$. Le facteur devant est positif. La différence dans la parenthèse est négative (on a placé x dans un intervalle assez petit pour être tranquille). La différence $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ est négative, la suite décroît.

On a donc une suite décroissante d'applications croissantes.

Cette phrase n'est pas un oxymore. Il faut surveiller les variables, c'est tout !

2011/12

L'intégrale $\int_0^{x/2} u_n(t).dt$.

D.S.7

On utilise la définition :

$$\int_0^{x/2} u_n(t).dt = \int_0^{x/2} \frac{t^n}{n! \cdot 2^{(n^2-n)/2}}.dt = \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)! \cdot 2^{(n^2-n)/2}} \right]_{t=0}^{t=x/2}.$$

La valeur en 0 est nulle, et en $x/2$, on trouve $\frac{x^{n+1}}{(n+1)! \cdot 2^{n+1} \cdot 2^{(n^2-n)/2}}$. On regroupe les puissances de 2 au dénominateur après avoir mis de côté un 2 : $2^{n+1} \cdot 2^{(n^2-n)/2} = 2 \cdot 2^{n+(n^2-n)/2} = 2 \cdot 2^{(n^2+n)/2}$.

2011/12

La suite de fonctions (Φ_N) .

D.S.7

x est un réel donné. On travaille donc sur une suite où la variable est l'entier naturel qui est en haut du sigma.

- On calcule $\phi_{2,p+2}(x) - \phi_{2,p}(x)$. C'est la différence entre $\sum_{n=0}^{2,p+2} (-1)^n \cdot u_n(x)$ et $\sum_{n=0}^{2,p} (-1)^n \cdot u_n(x)$. Il n'y reste que $(-1)^{2,p+1} \cdot u_{2,p+1}(x) + (-1)^{2,p+2} \cdot u_{2,p+2}(x)$. On tient compte des signes : $u_{2,p+2}(x) - u_{2,p+1}(x)$. Cette différence est négative, par décroissance de la suite $(u_n(x))_n$. La suite $p \rightarrow \phi_{2,p}(x)$ décroît.
- De même, $\phi_{2,p+3}(x) - \phi_{2,p+1}(x) = (-1)^{2,p+2} \cdot u_{2,p+2}(x) + (-1)^{2,p+3} \cdot u_{2,p+3}(x)$, et il reste $u_{2,p+2}(x) - u_{2,p+3}(x)$, qui est positif. La suite des sommes croît.
- Selon un schéma maintenant éprouvé, encore une différence : $\phi_{2,p+1}(x) - \phi_{2,p}(x) = (-1)^{2,p+1} \cdot u_{2,p+1}(x) = u_{2,p+1}(x)$ et c'est positif.
- On met bout à bout : $\phi_1(x) \leq \phi_{2,p+1}(x) \leq \phi_{2,p+3}(x) \leq \phi_{2,p+2}(x) \leq \phi_{2,p}(x) \leq \phi_0(x)$. La suite des $\phi_{2,p+3}(x)$ est croissante, majorée par $\phi_0(x)$ (donc convergente), De même, la suite $(u_{2,p})$ est décroissante, minorée par $\phi_1(x)$ (donc convergente). Les deux suites ont la même limite, car leur différence tend vers 0 ($x^{2,p}$ tend vers 0 et les dénominateurs en $n!$ et puissance de 2 renforcent encore le phénomène). Les deux suites ont la même limite. Et la limite est encadrée par les deux suites (on vient de reformuler le théorème spécial des séries alternées).

x par x on vient de créer une fonction ϕ qui est la somme infinie de tous les $(-1)^n \cdot u_n(x)$.

On intègre une somme (infinie ?). On s'empresse d'intégrer chaque terme de la somme : $\sum_{0 \leq n} (-1)^n \cdot \int_0^{x/2} u_n(t).dt$.

On trouve la somme des $(-1)^n \cdot u_{n+1}(x)/2$. On décale les indices. On prend garde à un terme : $\sum_{0 \leq n} (-1)^{n+1} u_n(x)/2 + 1/2$.

On reconnaît donc $-\Phi(x) + 1$.

On résume : $\int_0^{x/2} \Phi(t).dt = \frac{1-\Phi(x)}{2}$.

Il ne reste plus qu'à dériver de chaque côté pour arriver à l'équation différentielle...

D.S.8

Charlemagne

Vendredi 27 janvier

2011/2012

D.S.8

2011/12

EXERCICES**D.S.8**

$\langle \diamond(15) \rangle$ Soit f une application vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = f(1-t)$ et $f(0) = 2$. Exprimez alors $f''(t)$ à l'aide de $f'(1-t)$ et de $f(t)$. 2 pt.
 Trouvez alors f . 4 pt.

$\langle \spadesuit(9) \rangle$ Pour tout entier naturel n , on note A_n la matrice carrée de taille n de terme général "nombre de diviseur du p.g.c.d. de i et k ". On note T_n la matrice de terme général $\begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ divise } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (i est l'indice de ligne et k l'indice de colonne). Lesquelles de ces propositions sont correctes? 5 pt.

- ₁ : $\det(A_n) \in \mathbb{Z}$ pour tout n
- ₂ : A_n est une matrice symétrique pour tout n
- ₃ : $Tr(T_n) = n$ pour tout n
- ₄ : $A_4 = (T_4)^2$
- ₅ : $A_6 = {}^t(T_6).T_6$
- ₆ : T_n est une matrice triangulaire pour tout n .

Rappeler la formule qui permet de calculer le terme général du produit de deux matrices. 1 pt.
 Calculez $\det(T_n)$ et $\det(A_n)$ pour tout n . 4 pt.

94 points

94 points

2011/12

ROTATIONS**D.S.8**

- 1) On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$ (supposée orthonormée). Montrez que si $x \times \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ est un vecteur non nul, alors $(x \times \vec{i} + y \cdot \vec{j}, -y \times \vec{i} + x \cdot \vec{j})$ est une base de $\mathbb{R}^2$. 1 pt.

- 2) Justifiez : la rotation vectorielle (donc autour de l'origine) d'angle θ est la transformation $x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \longrightarrow (\cos(\theta) \cdot x - \sin(\theta) \cdot y) \cdot \vec{i} + (\sin(\theta) \cdot x + \cos(\theta) \cdot y) \cdot \vec{j}$. Mettez la sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow R_\theta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où R_θ est une matrice réelle que vous déterminerez et diagonaliserez (dans $\mathbb{C}$ s'il le faut). 4 pt.

- 3) Calculez $R_\alpha \cdot R_\beta$ (α et β réels donnés). Inversez R_θ . 2 pt.

- 4) Donnez une infinité de matrices de la forme R_θ à coefficients dans $\mathbb{Q}$. 2 pt.

9 points

9 points

- 1) Montrez que pour toute matrice réelle M de taille 3 sur 3, $\det(M - \lambda I_3)$ est un polynôme en λ de degré 3 dont les coefficients sont à prendre dans la liste suivante : $\det(M)$, $\det(M^2)$, $\det(Com(M))$, $Tr(M)$, $Tr(M^2)$, $Tr(Com(M))$. 3 pt. Ce polynôme s'appelle "polynôme caractéristique de M " et ses racines s'appellent "valeurs propres de M ".

- 2) Montrez que M et tM ont les mêmes valeurs propres. 1 pt.

- 3) Montrez, pour P inversible, que M et $P^{-1} \cdot M \cdot P$ ont les mêmes valeurs propres. 2 pt.

- 4) Montrez, pour M donnée et λ donné dans $\mathbb{R}$, que le système $M \cdot U = \lambda \cdot U$ d'inconnues U (vecteur colonne) admet une unique solution si et seulement si λ n'est pas valeur propre de M (qui est alors l'unique solution?). 2 pt.

8 points

8 points

- 1) On se place à présent dans $\mathbb{R}^3$, cette fois, la base canonique est donc $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ toujours supposée

orthonormée. Une rotation fait tourner d'un certain angle autour d'un axe (passant par l'origine). On se donne donc un vecteur $\vec{n}$ de norme 1 et de composantes (α, β, γ) (on a donc $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) ; c'est lui qui servira d'axe. Soit $\vec{u}$ un vecteur, de composantes (x, y, z) . Montrez que $(\vec{u} \cdot \vec{n}) \times \vec{n}$ (noté $d(\vec{u})$) est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur la droite engendrée par $\vec{n}$. (2 pt.) Montrez que $p(\vec{u})$ (égal à $\vec{u} - d(\vec{u})$) et $\vec{n} \wedge p(\vec{u})$ sont dans le plan orthogonal à $\vec{n}$ et forment une base orthogonale de ce plan (sauf si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{n}$). (2 pt.)

- 2) Calculez $\det(d(\vec{u}), p(\vec{u}), \vec{n} \wedge p(\vec{u}))$. (2 pt.)

- 3) Mettez chacune des trois transformations $\vec{u} \rightarrow d(\vec{u})$ puis $\vec{u} \rightarrow p(\vec{u})$ et $\vec{u} \rightarrow \vec{n} \wedge p(\vec{u})$ sous la forme $U \rightarrow R.U$ avec R matrice de taille 3 sur 3 à déterminer. Calculez la trace et le déterminant de chacune des trois matrices. (4 pt.)

- 4) On se donne à présent un réel θ et on note c et s son cosinus et son sinus. Justifiez que $r(p(\vec{u}))$ est égal à $c \times p(\vec{u}) + s \times \vec{n} \wedge p(\vec{u})$. Justifiez : $r(\vec{u}) = d(\vec{u}) + c \times p(\vec{u}) + s \times \vec{n} \wedge p(\vec{u})$ et exprimez $r(\vec{u})$ comme combinaison de $\vec{u}$, $\vec{n}$, $\vec{n} \wedge \vec{u}$. (3 pt.)

- 5) Mettez la transformation $\vec{u} \rightarrow r(\vec{u})$ sous la forme $U \rightarrow R.U$ avec R matrice de taille 3 sur 3 à déterminer. (3 pt.)

- 6) Montrez que tR se déduit de R par remplacement de s par $-s$. Justifiez géométriquement. Justifiez aussi : $R^{-1} = {}^tR$. (3 pt.)

- 7) Déterminez R pour $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\theta = \arccos(1/3)$. (2 pt.)

21 points 21 points

- 1) On note O^+ l'ensemble des matrices R de taille 3 sur 3 à déterminant positif ou nul vérifiant $R.{}^tR = I_3$. Montrez que O^+ est non vide, stable par multiplication. (2 pt.)

- 2) Montrez que toute matrice R de O^+ est inversible et donnez son inverse, puis vérifiez qu'il est dans O^+ . (2 pt.) Que pouvez vous dire de $(O^+, \cdot)$? (1 pt.) On note C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de la matrice R . Montrez, sans gros calcul : $C_1 \wedge C_2 = C_3$. (2 pt.)

- 3) Soit R une matrice de O^+ . Montrez que R admet au moins une valeur propre réelle positive, qu'on va noter λ . (2 pt.) Déduisez qu'il existe au moins un vecteur non nul U vérifiant $R.U = \lambda.U$. Montrez ${}^tU.{}^tR.R.U = \lambda^2.{}^tU.U$. Déduisez que λ vaut 1. (4 pt.)

13 points 13 points

- 1) Soient r et ρ deux rotations de $\mathbb{R}^3$. Montrez que la matrice de $r \circ \rho^{-1}$ est une matrice de O^+ . (2 pt.) Déduire l'existence d'au moins un vecteur non nul $\vec{u}$ vérifiant $r \circ \rho^{-1}(\vec{u}) = \vec{u}$. (2 pt.)

Concluez : il existe une droite vectorielle Δ dont l'image par r est la même que l'image par ρ . (2 pt.)

Voici les premières matrices de la famille des A_n :

$$(1), \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ jusqu'à par exemple } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

On a assez souvent des 1 (*quand i et k sont premiers entre eux, leur p.g.c.d. vaut 1 et n'a qu'un diviseur*), et parfois des valeurs plus grandes.

Les valeurs obtenues sont toujours entières, car issues de calculs de l'arithmétique.

Il s'ensuit que le déterminant est entier, par la formule $\sum_{\sigma \in S_n} \text{Sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_i^{\sigma(i)}$.

On construit les matrices A_n successives en agrandissant, d'où la fausse piste pour certains d'une tentative de récurrence.

Par symétrie des rôles de i et k dans la définition du p.g.c.d. et donc de son nombre de diviseurs, la matrice A_n est symétrique. Mais on ne peut rien en déduire sur son déterminant.

Les termes de la matrice T_n sont aussi entiers, puisqu'ils valent 0 ou 1. Sur la diagonale, on a des 1 puisque ils répondent à la question " i divise i ?"

On somme et on trouve n puisque la matrice est de taille n .

$$\text{On détermine } T_4 \text{ et } T_6 : T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On commence à calculer $(T_4)^2$ et on s'arrête très vite. De toutes façons, $(T_n)^2$ reste une matrice triangulaire...

$$\text{En revanche : } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

On passe au déterminant? Mais oui! On a donc $\det(A_n) = \det({}^t T_n) \cdot \det(T_n) = 1 \cdot 1 = 1$. En tout cas, pour n égal à 6!

Chaque matrice T_n est bien triangulaire. En effet, si i est plus grand que k il ne peut pas diviser k . Les termes avec "indice de ligne plus grand que l'indice de colonne" sont donc tous nuls.

$\det(A_n) \in \mathbb{Z}$	A_n symétrique	$\text{Tr}(T_n) = n$	$A_4 = (T_4)^2$	$A_6 = {}^t(T_6) \cdot T_6$	T_n triangulaire
vrai	vrai	vrai	faux	vrai	vrai
stabilité Z	$\text{pgcd}(i, j) = \text{pgcd}(j, i)$	n fois 1	calcul	calcul	$i \mid k \Rightarrow$

On rappelle la formule pour le produit matriciel : on note α_i^k le terme général de la première matrice et β_i^k le terme général de la deuxième. Le terme général (*ligne i et colonne k*) de la matrice produit est

$$\gamma_i^k = \sum_{j=1}^n \alpha_i^j \cdot \beta_j^k.$$

On prend le cas particulier du produit ${}^t T_n \cdot T_n$. Si T a pour terme général d_i^k , alors ${}^t T_n$ a pour terme général δ_i^k égal à d_k^i .

La formule pour le produit ${}^t T_n \cdot T_n$ est donc $\sum_{j=1}^n d_j^i \cdot d_j^k$.

Chacun des n termes de la somme est un entier égal à 0 ou 1 (produit de 0 et de 1). Il ne vaut 1 que

si “ j divise i ” et “ j divise k ”.

On a donc $1 + 1 + \dots + 1$ avec autant de 1 qu’il n’y a de j divisant à la fois i et k . On compte donc le nombre de diviseurs communs de i et k .

Par définition du plus grand diviseur commun, les j qui sont comptés sont exactement les diviseurs de $p.g.c.d.(i, j)$.

On a donc : $A_n = {}^t(T_n).T_n$.

On passe au déterminant. On trouve : $\det(A_n) = \det({}^tT_n) \cdot \det(T_n) = 1.1$ En effet, la matrice T_n a pour déterminant 1, produit des termes diagonaux (*matrice diagonale*).

2011/12

L’équation non différentielle $f'(1-t) = f(t)$.

D.S.8

L’équation n’est pas différentielle, mais on n’en est pas loin.

On part de $f'(t) = f(1-t)$ et on dérive de chaque côté du signe égale par rapport à t :

$$f''(t) = -f'(1-t)$$

Il y a dans le membre de gauche un signe moins de par la dérivation d’une composée $t \rightarrow 1-t \rightarrow f(1-t)$.

On continue : $f'(1-t) = f(1-(1-t))$ en utilisant $1-t$ à la place de t .

On peut conclure : $f''(t) = -f(t)$ Et ce pour tout t réel.

On a alors une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique $\lambda^2 = -1$ a deux racines complexes conjuguées i et $-i$. Ses solutions forment un espace vectoriel de dimension 2 engendré par $t \rightarrow e^{i \cdot t}$ et $t \rightarrow e^{-i \cdot t}$. Ou par le sinus et le cosinus.

On déduit donc : $\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a \cdot \cos(t) + b \cdot \sin(t)$ (attention à l’ordre des quantificateurs).

Seulement voilà, on a raisonné par conditions nécessaires. S’il y a une solution, il faut qu’elle soit de cette forme. Mais en dérivant, reportant, on a peut être perdu des choses. On doit donc vérifier, avec l’espoir qu’il ne se passe pas de trop de casse.

$f'(t) = -a \cdot \sin(t) + b \cdot \cos(t)$ et $f(1-t) = a \cdot \cos(1-t) + b \cdot \sin(1-t) = (a \cdot \cos(1) + b \cdot \sin(1)) \cdot \cos(t) + (a \cdot \sin(1) - b \cdot \cos(1)) \cdot \sin(t)$.

On identifie les deux fonctions terme à terme : $a \cdot \cos(1) + b \cdot \sin(1) = b$ et $a \cdot \sin(1) - b \cdot \cos(1) = -a$.

On déduit : $b = a \cdot \frac{1 + \sin(1)}{\cos(1)} = a \cdot \frac{\cos(1)}{1 - \sin(1)}$ (par produit en croix, c’est deux fois la même

exigence. Et on y trouve une tangente de l’arc moitié (le cours, oui, le cours...).

Ah, et on a aussi une condition initiale : on n’en est qu’à $a \cdot \left(\cos(t) + \frac{1 + \sin(1)}{\cos(1)} \cdot \sin(t) \right)$. La valeur 2 en 0 donne $a = 2$.

On termine en réduisant au dénominateur commun $2 \cdot \frac{\cos(1) \cdot \cos(t) + \sin(t) + \sin(t) \cdot \sin(1)}{\cos(1)}$ et on sim-

plifie en $2 \cdot \frac{\cos(t-1) + \sin(t)}{\cos(1)}$ aux erreurs de calcul près.

2011/12

Rotations dans le plan.

D.S.8

On se donne un vecteur non nul : $x \times \vec{i} + y \times \vec{j}$. On construit une famille de deux vecteurs dont la matrice sur la bse canonique est $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. Cette matrice a pour déterminant $x^2 + y^2$. Il est non nul, cette famille est libre et est même une base du plan.

On étudie géométriquement la rotation. On note $\vec{u}$ le vecteur $x \times \vec{i} + y \times \vec{j}$ et $\vec{u}'$ le vecteur $x \times \vec{i} + y \times \vec{j}$. Par rotation, on doit construire le vecteur $\cos(\theta) \times \vec{u} + \sin(\theta) \times \vec{u}'$ (sur la base

$(\vec{u}, \vec{u'})$. On effectue la combinaison et on trouve justement le vecteur $\begin{pmatrix} x \cdot \cos(\theta) - y \cdot \sin(\theta) \\ x \cdot \sin(\theta) + y \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Ce vecteur s'écrit $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. La matrice R_θ est donc la matrice carrée de taille 2 écrite ci dessus.

On cherche ses deux valeurs propres de somme $2 \cdot \cos(\theta)$ et le produit 1 (*le déterminant*). Ce sont donc les deux racines de l'équation $\lambda^2 - 2 \cdot \cos(\theta) \cdot \lambda + 1 = 0$ d'inconnue λ . Cette équation bien connue a pour racines $e^{i \cdot \theta}$ et $e^{-i \cdot \theta}$. On choisit comme matrice diagonale $\begin{pmatrix} e^{-i \cdot \theta} & 0 \\ 0 & e^{i \cdot \theta} \end{pmatrix}$. On trouve ensuite la matrice

de passage P suivante : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$.

Il ne nous reste qu'à vérifier : $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-i \cdot \theta} & 0 \\ 0 & e^{i \cdot \theta} \end{pmatrix}$.

On effectue le produit $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$ et on synthétise : $R_\alpha \cdot R_\beta = R_{\alpha + \beta}$.

C'est normal, on enchaîne la rotation d'angle β et celle d'angle α . Il est normal d'obtenir celle d'angle $\alpha + \beta$.

On généralise la formule : $(R_\alpha)^n = R_{n \cdot \alpha}$ même si ce n'est pas demandé.

On écrit aussi : $R_\theta \cdot R_{-\theta} = R_0 = I_2$ ce qui prouve que l'inverse de R_θ n'est autre que $R_{-\theta}$ qui coïncide aussi avec ${}^t(R_\theta)$.

On connaît quelques matrices de rotations à coefficients dans $\mathbb{Q}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mais aussi

$\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$ issue du grand classique $3^2 + 4^2 = 5^2$ croisés dans notre cours en début d'année.

Comme le produit de deux matrices de rotation est encore une matrice de rotation, toutes les puissances de celle ci en sont encore.

On peut donc répondre : $\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}^n$. Ces matrices seront bien toutes différentes (*dénominateurs*

de plus en plus gros). On peut aussi les écrire $\begin{pmatrix} \cos(n \cdot \text{Arcos}(3/5)) & -\sin(n \cdot \text{Arcos}(3/5)) \\ \sin(n \cdot \text{Arcos}(3/5)) & \cos(n \cdot \text{Arcos}(3/5)) \end{pmatrix}$.

2011/12

A propos du polynôme caractéristique.

D.S.8

On calcule, c'est tout. On prend une matrice avec ses neuf coefficients, que l'on note avec neuf lettres

(ou plutôt trois lettres et des primes) plutôt que des indices tant qu'on reste en petite taille : $\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$.

La matrice $A - \lambda \cdot I_3$ est $\begin{pmatrix} a - \lambda & a' & a'' \\ b & b' - \lambda & b'' \\ c & c' & c'' - \lambda \end{pmatrix}$ et on calcule son déterminant sans aucune astuce (*dans*

ces formats là, inutile de perdre du temps à essayer de trouver un raccourci...).

Pour une raison que j'ignore, des élèves réussissent à perdre leur peu de points sur une telle question en mettant des $-\lambda$ partout et non juste sur la diagonale. Et j'aurai beau vous mettre en garde, certains le feront.

On trouve, après développement par rapport à une des lignes et regroupement :

$-\lambda^3 + (a + b' + c'') \cdot \lambda^2 - (a \cdot b' - a' \cdot b + a \cdot c'' - a'' \cdot c + b' \cdot c'' - b'' \cdot c') \cdot \lambda + a \cdot b' \cdot c'' - a \cdot b'' \cdot c' + a' \cdot b'' \cdot c - a' \cdot b' \cdot c''$

C'est un polynôme de degré 3 qu'on écrit $\boxed{-\lambda^3 + \text{Tr}(M) \cdot \lambda^2 - \text{Tr}(\text{Com}(A)) \cdot \lambda + \det(A)}$ en ayant calculé et reconnu quelques coefficients.

L'égalité $\det(A) = \det({}^t A)$ passe à $\det(A - \lambda \cdot I_3) = \det({}^t A - \lambda \cdot {}^t I_3) = \det({}^t A - \lambda \cdot I_3)$. Les deux matrices A et ${}^t A$ ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres.

On nomme M' la matrice $P^{-1}.M.P$. On calcule son polynôme caractéristique en y remplaçant I_3 par $P^{-1}.I_3.P$ ce qui ne change rien :

$$\det(P^{-1}.M.P - \lambda.P^{-1}.I_3.P) = \det(P^{-1}.(M - \lambda.I_3).P) = \det(P^{-1}).\det(M - \lambda.I_3).\det(P)$$

Les deux termes en $\det(P^{-1})$ et $\det(P)$ réussissent à commuter avec $\det(M - \lambda.I_3)$ (réels) et à se simplifier. Il reste $\det(P^{-1}.M.P - \lambda.I_3) = \det(M - \lambda.I_3)$. Ayant alors le même polynôme caractéristique, les deux matrices ont les mêmes valeurs propres.

Rappelons que l'ensemble des valeurs propres est appelé spectre.

On s'intéresse ensuite aux systèmes de la forme $M.U = \lambda.U$. Les élèves qui ne réfléchissent pas (*en M.P.S.I. ça devrait être un oxymore, et en P.C.S.I. c'est un pléonasme*) simplifient par U alors que U n'est qu'un pauvre vecteur colonne. Ceux qui réfléchissent encore moins ne regardent même pas qui est quoi. Bref, toujours le même problème : les variables.

Sinon, il s'agit bien d'un système, de la forme
$$\begin{cases} a.x + a'.y + a''.z = \lambda.x \\ b.x + b'.y + b''.z = \lambda.y \\ c.x + c'.y + c''.z = \lambda.z \end{cases}$$
 d'inconnues x, y et z mais

pour lequel il y aura ou non des solutions suivant la valeur de λ .

On reformule ce système : $M.U - \lambda.U = 0$ (vecteur nul). On factorise U à droite : $(M - \lambda).U = 0$.

Non! Crétin! Comment peux-tu additionner une matrice et un réel?

Alors quoi? Comment mettre U en valeur? En l'écrivant $I_3.U$.

On reprend : $M.U - \lambda.I_3.U = 0$. On factorise : $(M - \lambda.I_3).U = 0$ (vecteur nul). Et on raisonne par équivalences.

Ce système admet une unique solution si et seulement si le déterminant est non nul.

Cette solution est alors bien décevante : $U = (M - \lambda.I_3)^{-1}.0 = 0$ (vecteur nul).

On retient plutôt dans l'autre sens :

$\lambda \in \text{Spectre}(M) \Leftrightarrow \det(M - \lambda.I_3) = 0 \Leftrightarrow (M - \lambda.I_3) \text{ non-inversible} \Leftrightarrow (M.U = \lambda.U \text{ a des solutions non nulles})$

(abusivement sur les chaînes d'équivalences)

2011/12

Projections sur un axe dans $\mathbb{R}^3$.

D.S.8

Le réel $\vec{u} \cdot \vec{n}$ vaut $|\vec{u}|.1.\cos(\alpha)$ où α est l'angle entre les deux vecteurs. On multiplie par $\vec{n}$ et on a le vecteur colinéaire à $\vec{n}$ (sur la droite), de bonne longueur. C'est bien le projeté orthogonal.

Graphiquement, on prend $\vec{u}$ et on lui soustrait le vecteur orthogonal au plan. On arrive dans le plan orthogonal à la droite.

La preuve : $p(\vec{u}).\vec{n}$ est nul (c'est $\vec{u} \cdot \vec{n} - (\vec{u} \cdot \vec{n}) \times \vec{n} \cdot \vec{n}$ avec $|\vec{n}|^2 = \vec{n} \cdot \vec{n} = 1$).

D'autre part, on peut reconstruire $\vec{u}$ par la somme des deux vecteurs : $d(\vec{u}) + p(\vec{u}) = \vec{u}$.

Qui est ensuite le vecteur $\vec{n} \wedge p(\vec{u})$? C'est un vecteur orthogonal à la fois à $\vec{n}$ (donc il est dans le plan) et à $p(\vec{u})$.

Les deux vecteurs $p(\vec{u})$ et $\vec{n} \wedge p(\vec{u})$ sont dans le plan et sont orthogonaux. Forment ils une famille libre? Tout ce qu'il faut éviter, c'est que l'un des deux soit nul. $p(\vec{u})$ n'est nul que si l'on a $\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{n}) \times \vec{n}$ qui conduit à $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{n}$, et ça, on l'a refusé. Quant à $\vec{n} \wedge p(\vec{u})$ il n'est nul que si $\vec{n}$ est colinéaire à $p(\vec{u})$, mais $\vec{n}$ et $p(\vec{u})$ sont orthogonaux...

Et si finalement on reprenait tout avec des composantes?

On effectue : $d(\vec{u}) = \begin{pmatrix} (\alpha.x + \beta.y + \gamma.z).\alpha \\ (\alpha.x + \beta.y + \gamma.z).\delta \\ (\alpha.x + \beta.y + \gamma.z).\gamma \end{pmatrix}$ puis $p(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x - (\alpha.x + \beta.y + \gamma.z).\alpha \\ y - (\alpha.x + \beta.y + \gamma.z).\delta \\ z - (\alpha.x + \beta.y + \gamma.z).\gamma \end{pmatrix}$ et enfin

$$\vec{n} \wedge p(\vec{u}) = \vec{n} \wedge \vec{u} - 0 = \begin{pmatrix} \beta.z - \gamma.y \\ \gamma.x - \alpha.z \\ \alpha.y - \beta.x \end{pmatrix}.$$

On trouve les matrices associées à ces diverses opérations :

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha.\beta & \alpha.\gamma \\ \alpha.\beta & \beta^2 & \beta.\gamma \\ \alpha.\gamma & \beta.\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (oh, une matrice symétrique de la forme $U.^tU$ déjà croisée) son rang est égal à 1 et son déterminant est nul (colonnes liées). Sa trace vaut 1.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1-\alpha^2 & -\alpha.\beta & -\alpha.\gamma \\ -\alpha.\beta & 1-\beta^2 & -\beta.\gamma \\ -\alpha.\gamma & -\beta.\gamma & 1-\gamma^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Encore une matrice symétrique. Sa trace vaut 2. Son déterminant est nul. Par un gros calcul? Non! Les trois vecteurs colonne sont tous par construction dans le plan orthogonal à $\vec{n}$. Ils sont donc coplanaires, et forment une famille liée.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Celle là, elle est antisymétrique. Son déterminant est nul, sa trace aussi.

$\vec{u} \longrightarrow d(\vec{u})$	$\vec{u} \longrightarrow p(\vec{u})$	$\vec{u} \longrightarrow \vec{n} \wedge p(\vec{u})$
$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha.\beta & \alpha.\gamma \\ \alpha.\beta & \beta^2 & \beta.\gamma \\ \alpha.\gamma & \beta.\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1-\alpha^2 & -\alpha.\beta & -\alpha.\gamma \\ -\alpha.\beta & 1-\beta^2 & -\beta.\gamma \\ -\alpha.\gamma & -\beta.\gamma & 1-\gamma^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$
symétrique	symétrique	antisymétrique
(1, 0)	(0, 0)	(0, 0)

Oui! On pense à synthétiser avec un tableau... C'est là qu'on cesse d'être matheux et qu'on commence à être ingénieur formé par des matheux.

On doit calculer un déterminant. Celui de $(d(\vec{u}), \vec{u} - d(\vec{u}), \vec{n} \wedge \vec{u})$ (j'ai d'ores et déjà allégé $\vec{n} \wedge (\vec{u} + k.\vec{n})$ par bilinéarité et antisymétrie).

Ensuite, par combinaisons entre colonnes, le déterminant cherché est celui de $(d(\vec{u}), \vec{u}, \vec{n} \wedge \vec{u})$. Par multilinéarité, on trouve $(\vec{n}.\vec{u}) \times \det(\vec{n}, \vec{u}, \vec{n} \wedge \vec{u})$.

On transforme en $(\vec{n}.\vec{u}) \times (\vec{n} \wedge \vec{u}).(\vec{n} \wedge \vec{u})$ et donc $(\vec{n}.\vec{u}) \times |\vec{n} \wedge \vec{u}|^2$

On peut noter α l'angle entre $\vec{n}$ et $\vec{u}$ et on a alors $\cos(\alpha).\sin^2(\alpha).|\vec{u}|^3$.

Qui a fait de gros calculs en développant le déterminant au lieu d'utiliser ses propriétés?

Une remarque utile : si $\vec{u}$ n'est ni colinéaire ni orthogonal à $\vec{n}$, le déterminant est non nul. La famille est libre. Et ses sous-familles le sont aussi.

2011/12

Les rotations de $\mathbb{R}^3$.

D.S.8

On veut donc faire tourner des vecteurs autour de l'axe $Vect(\vec{n})$ d'un angle θ .

On commence, même si ce n'est pas demandé, par les vecteurs de l'axe. Ils "tournent sur eux même" sous l'effet de la rotation. Donc, ils ne changent pas : $r(\vec{n}) = \vec{n}$ et aussi $r(d(\vec{u})) = d(\vec{u})$.

Il y a aussi les vecteurs du plan orthogonal à l'axe. Ils tournent d'un "vrai angle" θ dans le plan. On reprend alors l'idée de l'étude faite dans le plan : un vecteur tel que $p(\vec{u})$ donne $\vec{n} \wedge p(\vec{u})$ quand il tourne de $\pi/2$. Et quand il tourne d'un angle θ , il donne $\cos(\theta) \times p(\vec{u}) + \sin(\theta) \times (\vec{n} \wedge p(\vec{u}))$. C'est justement la formule de l'annoncé. Il n'y a donc que des explications à donner.

Ensuite, si $\vec{u}$ est un vecteur quelconque, on le décompose en une somme : $\vec{u} = d(\vec{u}) + p(\vec{u})$ et on lui applique la rotation r . Le vecteur $d(\vec{u})$ ne bouge pas. Quant à $p(\vec{u})$, on vient de dire comment il tourne.

Par linéarité, leur somme donne $r(d(\vec{u})) + r(p(\vec{u}))$, c'est à dire $d(\vec{u}) + c.p(\vec{u}) + s \times \vec{n} \wedge p(\vec{u})$.

On synthétise : $r(\vec{u}) = \cos(\theta).\vec{u} + (1 - \cos(\theta)) \times (\vec{u}.\vec{n}) \times \vec{n} + \sin(\theta) \times (\vec{n} \wedge \vec{u})$

On veut ensuite la forme matricielle de cette transformation. On réfléchit. On vient d'exprimer r

comme combinaison des trois applications élémentaires déjà croisées d, p et $\vec{u} \longrightarrow \vec{n} \wedge p(\vec{u})$.

On a donc juste à effectuer la combinaison des trois matrices :

$$\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + (1-c) \cdot \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha.\beta & \alpha.\gamma \\ \alpha.\beta & \beta^2 & \beta.\gamma \\ \alpha.\gamma & \beta.\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \beta.z - \gamma.y \\ \gamma.x - \alpha.z \\ \alpha.y - \beta.x \end{pmatrix}.$$

On peut certes tout fusionner en une seule matrice, mais on lit la suite de l'énoncé. S'il s'agit de changer s en $-s$ ou de transposer, autant garder cette forme du type $c.I_3 + c.S + s.A$ avec S symétrique et A antisymétrique...

Quand on remplace s en $-s$, seul le dernier bloc change. Et c'est une matrice antisymétrique...

On a donc bien $c.I_3 + c.S + (-s).A = c.I_3 + c.S + s.^tA$.

Mais quelle est l'opération qui conserve c et change s en $-s$? C'est celle qui transforme θ en $-\theta$. Et c'est la rotation r^{-1} qui fait le trajet en sens inverse.

La rotation d'angle θ et de même axe $Vect(\vec{n})$ a pour matrice R_θ . Son inverse a pour matrice tout à la fois $R_{-\theta}$, $^tR_\theta$ et $(R_\theta)^{-1}$.

On pouvait aussi écrire explicitement la matrice en un seul bloc, la multiplier par son homologue avec $-s$ à la place de s et vérifier que le produit donne I_3 . Ce qu'il ne fallait surtout pas faire : inverser explicitement cette matrice (par des cofacteurs) et voir si on retrouvait la transposée de la matrice initiale. Mais c'est sans doute hélas la voie qu'auront choisie certains d'entre vous.

On prend $\vec{n}$ égal à $\frac{\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{2}}$. On a donc $\alpha = 0, \beta = -\gamma = \sqrt{2}/2$. On détermine les trois matrices utiles :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

On prend θ égal à $Arccos(1/3)$. On a donc : $c = \frac{1}{3}$ et $s = \frac{2.\sqrt{2}}{3}$ (par la relation $\sin^2 = 1 - \cos^2$ et $\sin(\theta) >$

0 car θ est entre 0 et π). On effectue la combinaison et on trouve la matrice

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il me semble vous l'avoir déjà présentée. Ou une de ses variantes.

2011/12

Ensemble O^+ .

D.S.8

On connaît au moins une matrice dans cet ensemble : la matrice unité.

On prend deux matrices A et B dans cet ensemble. Leur produit est encore une matrice carrée de taille 3. Comme le déterminant du produit est le produit des déterminants, leur produit garde un déterminant positif. On a aussi : $(A.B).^t(A.B) = A.B.^tB.^tA = A.(B.^tB).^tA = A.I_3.^tA = A.^tA = I_3$. On utilise le fait que le déterminant de la transposée est la transposée du produit mais avec changement d'ordre.

On prend R vérifiant $R.^tR = I_3$. On reconnaît que tR est l'inverse à droite de R . Mais on sait que toute matrice carrée admetant un inverse à droite l'est aussi à gauche, avec le même inverse.

Je pense aussi que certains élèves passeront par la solution plus calculatoire : $\det(R.^tR) = \det(I_3) = 1$, d'où $\det(R)^2 = 1$. La matrice a pour déterminant 1 ou -1 , elle est inversible.

On déduit donc : $R^{-1} = {}^t R$. Le déterminant de R^{-1} est positif, puisque c'est juste l'inverse du déterminant de R .

On veut aussi prouver : $R^{-1} \cdot {}^t(R^{-1}) = I_3$. Cette formule se réduit à ${}^t R \cdot R = I_3$. Et on ne l'a pas par une affirmation bidon comme "on passe à la transposée dans la relation $R \cdot {}^t R = I_3$ ". En effet, la transposée de $R \cdot {}^t R$ reste $R \cdot {}^t R$. On ne l'a qu'en disant "dès qu'une matrice carrée a un inverse à droite, le même inverse sert aussi à gauche".

Avec tout cela, O^+ est un groupe pour la multiplication. Vraisemblablement non commutatif.

On prend donc R formée de trois colonnes. La colonne $C_1 \wedge C_2$ est la troisième colonne de la comatrice de R . C'est donc, au déterminant près, la troisième ligne de la matrice R^{-1} . Or, le déterminant de R vaut 1 ou -1 (car $\det(R)^2$ vaut 1). Comme il est positif, il vaut 1.

$C_1 \wedge C_2$ est donc la troisième ligne de R^{-1} . Mais R^{-1} est égale à ${}^t R$ (propriété $R \cdot {}^t R = I_3$). On revient donc à $C_1 \wedge C_2$ est la troisième colonne de R .

Attention, cette propriété n'est valable que pour les matrices de O^+ .

2011/12

Valeurs propres et vecteurs propres de matrices de O^+ .

D.S.8

On prend une matrice R dans O^+ . Son polynôme caractéristique est un polynôme à coefficients réels de degré 3. Il est même de la forme $-\lambda^3 + \tau \cdot \lambda^2 - \mu \cdot \lambda + 1$ (le dernier coefficient est le déterminant, positif...). En 0, ce polynôme vaut 1, il est positif. Quand λ tend vers $+\infty$, $-\lambda^3 + \tau \cdot \lambda^2 - \mu \cdot \lambda + 1$ tend vers $-\infty$ (comportement asymptotique des polynômes).

Par le théorème des valeurs intermédiaires, le polynôme va s'annuler au moins une fois entre 0 et $+\infty$ (un polynôme, c'est continu).

Comme $\det(R - \lambda \cdot I_3)$ est nul, la matrice $R - \lambda \cdot I_3$ est non inversible. Il existe donc au moins un vecteur non nul U vérifiant $(R - \lambda \cdot I_3) \cdot U = 0$ (vecteur nul). Ce vecteur, on le construit en prenant la famille des coefficients qui fait que les trois colonnes soient liées.

On développe pour ce vecteur U : $R \cdot U - \lambda \cdot U = 0$. On bascule de l'autre côté : $R \cdot U = \lambda \cdot U$.

Et ce n'est pas parce que U est un vecteur non nul qu'il faut, comme le croisement d'un zébu et d'une limace géante, en déduire $R = \lambda \cdot I_3$. Même en prétendant invoquer le lemme d'identification. Celui-ci réclame un $\forall U$ alors qu'ici on a juste un $\exists U$.

On transpose : ${}^t U \cdot {}^t R = \lambda \cdot {}^t U$.

On multiplie terme à terme (les formats sont compatibles : vecteur ligne fois vecteur colonne donne un réel) : $({}^t U \cdot {}^t R) \cdot (R \cdot U) = \lambda^2 \cdot {}^t U \cdot U$.

On regroupe les deux matrices du milieu par associativité : ${}^t U \cdot {}^t R \cdot R \cdot U = \lambda^2 \cdot {}^t U \cdot U$.

Mais la matrice ${}^t R \cdot R$ est neutre. Il nous reste ${}^t U \cdot U = \lambda^2 \cdot {}^t U \cdot U$.

Or, le réel (ou plutôt la matrice de taille 1 sur 1) est non nul (de la forme $\sum_{k=1}^n (x_k)^2$).

On simplifie : $\lambda^2 = 1$.

Et comme λ est positif, il vaut donc 1.

Normal, quand on a une matrice vérifiant ${}^t R \cdot R = I_3$, c'est qu'on a la matrice d'une rotation (réciproque des résultats d'une des parties précédentes). Et pour une rotation, il y a un vecteur non nul vérifiant $R \cdot U = U$ (un vecteur de l'axe).

2011/12

Une histoire de droite et de rotations.

D.S.8

On prend deux rotations r et ρ .

On a montré que r et ρ avaient chacune une matrice R et R' .

On a montré que la matrice d'une rotation vérifiait $R^{-1} = {}^t R$.

Les deux matrices R et R' sont donc dans O^+ .

Mais O^+ est stable par passage à l'inverse. R^{-1} est donc dans O^+ .
Et O^+ est stable par multiplication. Le produit $R^{-1}.R'$ est dans O^+ .

On a montré que les éléments de O^+ avaient tous 1 dans leur spectre.
Il existe donc au moins un vecteur non nul U vérifiant $R^{-1}.R'.U = U$.
On multiplie à gauche par R : $R'.U = R.U$.

On considère la droite engendrée par ce vecteur U .
La droite image par r est celle engendrée par le vecteur $R.U$.
La droite image par ρ est celle engendrée par le vecteur $R'.U$.
Et ces deux droites sont confondues.

Il y a donc bien une droite qui sous l'effet de chacune des deux rotations arrive au même endroit.

D.S.8

MPSI2

533 points

Année 2011/12

D.S.8

D.S.9	Charlemagne	Vendredi 10 février	2011/2012	D.S.9
2011/12	COURS			D.S.9

$\leq \heartsuit(2) \geq$ Donnez une primitive de $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (sous forme logarithmique). 2 pt.

$\leq \heartsuit(3) \geq$ Ajustez c pour que la droite (AB) soit parallèle au plan $P : A(1, 3, 4), B(2, 2, c)$ et P a pour équation $x + 3y - z = 2$. 2 pt.

$\leq \heartsuit(4) \geq$ Quantifiez “la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est libre” dans l’espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. 1 pt.

$\leq \heartsuit(5) \geq$ Complétez : $a^7 - b^7 = (a - b) \times \dots$ 1 pt.

2011/12	NEWTON	D.S.9
---------	---------------	--------------

- 1) On se donne cinq complexes non nuls a_1 à a_5 (cinq, c’est généralisable, mais c’est pour que vous puissiez mener certains calculs sans points de suspension). Pour tout n de $\mathbb{Z}$, on note S_n la somme de Newton : $S_n = \sum_{k=1}^5 (a_k)^n$ et (pour n positif) σ_n la fonction symétrique des racines :

$\sigma_n = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} a_{i_1} \cdot a_{i_2} \dots a_{i_n}$. Rappelez les relations qui lient S_1, σ_1, S_2 et σ_2 . 1 pt.

- 2) Simplifiez $\sigma_1 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot S_1 + 3 \cdot \sigma_3$. 3 pt.

- 3) Calculez les déterminants suivants : $\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} S_1 & 1 \\ S_2 & S_1 \end{vmatrix}, \frac{1}{6} \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 \\ S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 \\ 2 \cdot \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 \\ 2 \cdot \sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 3 \cdot \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$ (chaque réponse ne devra au final ne contenir qu’un terme, je vous conseille par exemple pour l’un d’entre eux la combinaison $C_1 - \sigma_1 \cdot C_2 + \sigma_2 \cdot C_3$). 4 pt.

- 4) Montrez pour tout k : $(a_k)^4 = \sigma_1 \cdot (a_k)^3 - \sigma_2 \cdot (a_k)^2 + \sigma_3 \cdot a_k - \sigma_4 + \sigma_5 \cdot (a_k)^{-1}$. 2 pt.

- 5) Trouvez (et prouvez) la formule qui calcule S_4 à l’aide des $\sigma_k \cdot S_{4-k}$ pour k de 1 à 5, puis pour k de 1 à 4. 2 pt. Prouvez alors : $S_4 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 \cdot \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 \\ 3 \cdot \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 4 \cdot \sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$ et simplifiez $\frac{1}{4!} \cdot \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & 3 \\ S_4 & S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$. 3 pt.

- 6) Démontrez aussi les formules à l’ordre 5 (une qui calcule S_5 à l’aide des $S_k \cdot \sigma_{5-k}$ et deux déterminants). 4 pt.

- 7) Donnez sans preuve le coefficient du terme général de la matrice dont le déterminant calcule $k! \cdot \sigma_k$ à l’aide des S_p pour p de 1 à k (avec des “si $i < j$ et autres). De même, donnez sans preuve le coefficient du terme général de la matrice dont le déterminant calcule S_k à l’aide des σ_p pour p de 1 à k . 3 pt.

2011/12	TANGENTE	D.S.9
---------	-----------------	--------------

I- 1) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on va noter u_n la n^{ieme} solution strictement positive de l’équation $\tan(x) = x$,

dont on va commencer par établir l'existence. On pose alors $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(u_k)^2}$. On va montrer la con-

vergence de S_n (vers un réel étonnamment simple). Tracez sommairement (mais proprement... désolé Benjamin) sur un même graphe l'identité et la tangente sur l'intervalle $[0, 4\pi]$. (1 pt.)

I- 2) On définit : $f = x \longrightarrow x \cdot \cos(x) - \sin(x)$. Déterminez f' . (1 pt.)

I- 3) Etudiez les variations de f sur le segment $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$ (noté I_n). Déduisez, sans rien omettre, que l'équation $\tan(x) = x$ admet une infinité de solutions strictement positives et que la n^{ieme} par ordre croissant est dans I_n (n'oubliez rien). (4 pt.)

II- 1) Montrez que S est une suite croissante. (1 pt.)

II- 2) Montrez pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \geq \frac{\pi^2}{(u_n)^2}$. Déduisez : $\pi^2 \cdot S_n \leq 2 - \frac{2}{2n+1}$. (2 pt.)

II- 3) Montrez que $(S_n)_n$ converge. (1 pt.) On notera λ sa limite.

III- 1) Calculez $f^{(n)}$ et $f^{(n)}(0)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (distinguez suivant la parité). (3 pt.)

III- 2) Déduisez le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 12. (1 pt.)

IV- 1) Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $P_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{(u_k)^2}\right)$. Montrez que la suite

$(|P_n(x)|)_n$ est décroissante à partir d'un certain rang (en l'occurrence $n \geq |x|/\pi$). (3 pt.)

IV- 2) Déduisez que les suites $(|P_n(x)|)_n$ et $(P_n(x))_n$ convergent. (3 pt.)

V- 1) Soit Q un polynôme de la forme $X^d + \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k X^k$ de racines r_1 à r_d supposées non nulles. Ex-

primez alors $\sum_{p=1}^d \frac{1}{r_p}$ et $\sum_{p=1}^d \frac{1}{(r_p)^2}$ à l'aide des α_k , puis des $Q^{(k)}(0)$. (4 pt.)

V- 2) Exprimez alors S_n à l'aide des $P_n^{(k)}(0)$.

VI- 1) On admet que $x^3 \cdot P_n(x)$ converge vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini (f admet 0 comme racine triple, et ensuite, ses racines sont celles des P_n , f est une sorte de polynôme qu'on factorise par son infinité de racines... hum hum). On admet qu'on a aussi la convergence des dérivées. Montrez alors : $\lambda = 1/10$.

2011/12

ASYMPTOTIQUE

D.S.9

I- 1) On reprend avec l'équation $\tan(x) = x$ d'inconnue x et de n^{ieme} solution positive notée u_n .

On a montré : $n\pi \leq u_n \leq n\pi + \frac{\pi}{2}$.

On pose $d_n = u_n - n\pi$. Montrez que (d_n) est une suite bornée vérifiant " $\tan(d_n)$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini". Déduisez que $(d_n)_n$ converge et donnez sa limite, notée μ . (3 pt.)

I- 2) On pose alors $r_n = u_n - n\pi - \mu$. Montrez que la suite r_n vérifie $\tan(r_n) = -\frac{1}{u_n}$. (2 pt.)

I- 3) Déduisez l'existence d'une suite (e_n) de limite nulle vérifiant $u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{e_n}{n}$ pour tout n . (2 pt.)

D.S.9

MPSI2

Correction

Année 2011/2012

D.S.9**2011/12**

Questions de cours.

D.S.9

Sur $\mathbb{R}$ tout entier, l'application $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ a pour primitive $x \rightarrow \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

Une famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est libre si et seulement si

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p, \left((\alpha_1 \cdot \vec{u}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \alpha_p \cdot \vec{u}_p = \vec{0}) \Rightarrow (\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0) \right)$$

La droite (AB) est parallèle au plan si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal au vecteur normal au plan. Ici, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes 1, -1 et $c-4$ tandis que le vecteur normal a pour composantes 1, 3 et -1. On aboutit à $c = 2$

On pouvait aussi demander à ce que la famille formée par $\overrightarrow{AB}$ et deux vecteurs directeurs du plan soit liée, ce qui se traduit par la nullité du déterminant. Même résultat en remplaçant le déterminant par produit scalaire avec un produit vectoriel.

On pouvait aussi demander à ce que le système *droite* $\cap$ *plan* n'ait pas de solution. On va devoir annuler son déterminant. Même calcul.

La factorisation $a^7 - b^7 = (a-b) \cdot (a^6 + a^5 \cdot b + a^4 \cdot b^2 + a^3 \cdot b^3 + a^2 \cdot b^4 + a \cdot b^5 + b^6)$ est issue de la série géométrique. Elle est valable dans tout anneau commutatif.

2011/12

Premières relations.

D.S.9

On connaît bien la relation $(\sigma_1)^2 = S_2 + 2 \cdot \sigma_2$ (on développe $(a_1 + \dots + a_5)^2$ en somme des carrés et doubles produits).

Et on a aussi $\sigma_1 = S_1$ évidemment.

On calcule les déterminants : $\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} S_1 & 1 \\ S_2 & S_1 \end{vmatrix} = \frac{(a_1 + \dots + a_5)^2 - (a_1)^2 - \dots - (a_5)^2}{2} = \sigma_2$ et $\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 \\ 2 \cdot \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix} = (\sigma_1)^2 - 2 \cdot \sigma_2 = S_2$

On effectue l'autre calcul proposé : $\sigma_1 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot S_1 + 3 \cdot \sigma_3$.

Quand on développe $(a_1 + \dots + a_5) \cdot ((a_1)^2 + \dots + (a_1)^2)$ on a la somme des cubes (c'est S_3) et des termes sur le modèle $a_i \cdot (a_j)^2$ avec i différent de j .

On développe aussi : $\sigma_2 \cdot S_1 = (a_1 \cdot a_2 + \dots + a_4 \cdot a_5) \cdot (a_1 + \dots + a_5)$, On a donc proprement

$$\left(\sum_{i < j} a_i \cdot a_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k \right). \text{ Il y a deux types de termes : quand } k \text{ est égal à } i \text{ ou } j, \text{ on a des } a_i \cdot (a_j)^2.$$

Ils vont partir avec ceux de $\sigma_1 \cdot S_2$. Et puis il y a ceux où k est différent de i et j . On a alors des termes de σ_3 . Mais chacun peut intervenir trois fois : $k < i, i < k < j$ ou $i < j < k$.

$$\text{On a donc } \sigma_2 \cdot S_1 = \sum_{i \neq j} (a_i)^2 \cdot a_j + 3 \cdot \sigma_3.$$

$$\text{Au final, on a } \sigma_1 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot S_1 + 3 \cdot \sigma_3 = S_3$$

Pour ceux qui manquent de conviction : $(a+b+c) \cdot (a^2+b^2+c^2) - (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \cdot (a+b+c) + 3 \cdot a \cdot b \cdot c = a^3 + b^3 + c^3$.

Et pour qui a vraiment du mal, on peut aussi développer $(a+b+c+d) \cdot (a^2+b^2+c^2+d^2)$, $(a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d + c \cdot d) \cdot (a+b+c+d)$ et $3 \cdot (a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot d + a \cdot c \cdot d + b \cdot c \cdot d)$ et regarder ce qu'il reste.

On attaque ensuite le déterminant $\frac{1}{6} \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 \\ S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$. On peut le développer brutalement, et remplacer

ce qu'on peut : $S_1 \cdot ((S_1)^2 - 2 \cdot S_2) - S_2 \cdot S_1 + 2 \cdot S_3$ donne toutes simplifications faites S_3 (en utilisant la formule de la question précédente).

Mais on peut aussi faire la bonne combinaison : C_1 reçoit $C_1 - \sigma_1 \cdot C_2 + \sigma_2 \cdot C_3$. Le déterminant ne change pas, mais la matrice dont on calcule le déterminant est alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & S_1 & 2 \\ 3 \cdot \sigma_3 & S_2 & S_1 \end{pmatrix}$. On a tout intérêt à

développer par rapport à la première colonne. Il ne reste que $3 \cdot \sigma_3$ avec cofacteur $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ S_1 & 2 \end{vmatrix}$ ce qui fait $3 \cdot \sigma_3$.

Quitte à diviser : $\frac{1}{6} \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 \\ S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix} = \sigma_3$

Pour ce qui est du dernier déterminant, on va tenter une combinaison avec des S_k comme coefficients pour effacer ce qu'on peut en première colonne (ah zut se dit l'élève qui a tout développé, croyant que c'était un devoir en amphi 21 et qui a été tout fier de trouver une réponse après un calcul dément de deux pages que seul le premier de classe en physique sait conduire).

$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 \\ 2 \cdot \sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 3 \cdot \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 1 \\ \dots & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$ par $C_1 \leftarrow C_1 - S_1 \cdot C_2 + S_2 \cdot C_3$, avec $3 \cdot \sigma_3 - \sigma_2 \cdot S_1 + \sigma_1 \cdot S_2$ dans le rôle des trois petits points. Et cette quantité n'est autre que S_3 .

On développe ce déterminant par rapport à sa première colonne. Il reste S_3 avec le cofacteur $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sigma_1 & 1 \end{vmatrix}$, ce qui donne S_3 .

Bilan : $\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} S_1 & 1 \\ S_2 & S_1 \end{vmatrix} = \sigma_2, \frac{1}{6} \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 \\ S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix} = \sigma_3, \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 \\ 2 \cdot \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix} = S_2$ et $\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 \\ 2 \cdot \sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 3 \cdot \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix} = S_3$.

2011/12

La formule avec des puissances quatrièmes et les déterminants de taille 4.

D.S.9

On doit étudier $(a_k)^4$ et $\sigma_1 \cdot (a_k)^3 - \sigma_2 \cdot (a_k)^2 + \sigma_3 \cdot a_k - \sigma_4 + \sigma_5 \cdot (a_k)^{-1}$. Là encore, pas de calcul idiot (pléonasme ?). On rappelle que le polynôme $(X - a_1) \cdot (X - a_2) \dots (X - a_5)$ se développe en $X^5 - \sigma_1 \cdot X^4 + \sigma_2 \cdot X^3 - \dots - \sigma_5$ (dans la mesure où σ_5 est juste le produit des racines). Il a pour racines les a_k . Il est donc nul pour chaque a_k .

Pour un k donné, on a donc : $(a_k)^5 - \sigma_1 \cdot (a_k)^4 + \sigma_2 \cdot (a_k)^3 - \dots - \sigma_5 = 0$. On isole $(a_k)^5$, il vaut $\sigma_1 \cdot (a_k)^4 - \sigma_2 \cdot (a_k)^3 + \sigma_3 \cdot (a_k)^2 - \sigma_4 \cdot a_k + \sigma_5$. On divise par a_k qui est non nul par hypothèse. On a l'égalité demandée.

On écrit ces égalités pour k de 1 à 5 et on somme :

$$\begin{array}{rcl} (a_1)^4 & = & \sigma_1 \cdot (a_1)^3 - \dots - \sigma_4 + \sigma_5 / a_1 \\ (a_2)^4 & = & \sigma_1 \cdot (a_2)^3 - \dots - \sigma_4 + \sigma_5 / a_2 \\ \dots & = & \dots \dots \dots \dots \dots \\ (a_5)^4 & = & \sigma_1 \cdot (a_5)^3 - \dots - \sigma_4 + \sigma_5 / a_5 \\ S_4 & = & \sigma_1 \cdot S_3 - \dots - 5 \cdot \sigma_4 + \sigma_5 \cdot S_{-1} \end{array}$$

Le nombre S_1 n'est autre que la somme des inverses des racines. Et finalement S_0 est égal à 5 (somme des $(a_k)^0$).

Proprement ou non : $S_4 = \sum_{i=1}^5 (-1)^{i+1} \cdot \sigma_i \cdot S_{4-i} = \sigma_1 \cdot S_3 - \sigma_2 \cdot S_2 + \sigma_3 \cdot S_1 - 5 \cdot \sigma_4 + \sigma_5 \cdot S_{-1}$

Mais on nous demande de faire mieux. Il faut s'arrêter avant les indices négatifs.

On calcule $S_{-1} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_5} = \frac{a_2.a_3.a_4.a_5 + \dots + a_1.a_2.a_3.a_4}{a_1.a_2 \dots a_5} = \frac{\sigma_4}{\sigma_5}$.

Le terme $\sigma_5 \cdot \frac{\sigma_4}{\sigma_5}$ se simplifie et donne un σ_4 qui se simplifie un peu avec les cinq qui précèdent.

On trouve $S_4 = \sigma_1.S_3 - \sigma_2.S_2 + \sigma_3.S_1 - 4.\sigma_4$

Cette formule généralise les précédentes : $S_3 = \sigma_1.S_2 - \sigma_2.S_1 + 3.\sigma_3$ et $S_2 = \sigma_1.S_1 - 2.\sigma_2$, et augure des suivantes (les formules de Newton).

On passe au déterminant : $\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 4.\sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ \dots & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$ en remplaçant C_1 par

$C_1 - S_1.C_2 + S_2.C_3 - S_3.C_4$. Le terme en ligne 4 colonne 1 est égal à $4.\sigma_4 - S_1.\sigma_3 + S_2.\sigma_2 - S_3.\sigma_1$ (les autres termes de la colonne 1 sont partis par les formules de Newton). Il vaut donc $-\sigma_4$. Tiens, un signe moins !

On développe par rapport à la première colonne. Cet unique terme est en position impaire, son cofacteur a donc un signe moins. Les deux signes moins se simplifient. Le cofacteur est ensuite le déterminant d'une matrice triangulaire de termes diagonaux égaux à 1, il vaut 1 (arrêtez de me demander si on a le droit d'utiliser que le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux, on l'a prouvé dès le début du cours sur les déterminants...).

On a un autre déterminant à calculer. Là aussi sans gros calcul. Mais je suis sûr que ceux et celles d'entre vous que je veux soutenir, pousser, hisser auront calculé, calculé, calculé. Juste parce que en Terminale, ça marchait encore pour marquer quelques points précieux. Ou parce que c'est rassurant de rester le nez collé à la feuille avec un gros calcul à conduire... Et ça me désespère. Je veux faire de vous des gens intelligents, programme plus vaste que de faire de vous des machins et machines à calculer.

On le regarde et on fait une combinaison à l'aide des formules de Newton :

$\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & 3 \\ S_4 & S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 2 & 0 \\ 0 & S_2 & S_1 & 3 \\ -4.\sigma_4 & S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$ par la combinaison $C_1 - \sigma_1.C_2 + \sigma_2.C_3 - \sigma_3.C_4$ à la

place de C_1 .

On développe par rapport à la première colonne. On a encore deux signes moins qui se compensent.

Et un cofacteur égal à $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ S_1 & 2 & 0 \\ S_2 & S_1 & 3 \end{vmatrix}$ qui vaut 3!. Avec le facteur 4 et la division par 4! tout se simplifie...

2011/12

Passage à la taille 5.

D.S.9

La formule de Newton est ici $S_5 = \sigma_1.S_4 - \sigma_2.S_3 + \sigma_3.S_2 - \sigma_4.S_1 + 5.\sigma_5$.

Comment l'a-t-on ? On écrivant que chaque a_k est solution de l'équation $X^5 = \sigma_1.X^4 - \sigma_2.X^3 + \sigma_3.X^2 - \sigma_4.X + \sigma_5$ (issue de $(X - a_1).(X - a_2) \dots (X - a_5)$). Il n'y a plus qu'à sommer.

Avec de bonnes combinaisons, on montre

$$\sigma_5 = \frac{1}{5!} \cdot \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & 0 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & 3 & 0 \\ S_4 & S_3 & S_2 & S_1 & 4 \\ S_5 & S_4 & S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix} \text{ et } S_5 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 & 0 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 \\ 4.\sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 5.\sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$$

2011/12

Formules générales.

D.S.9

On peut écrire les formules de Newton, tant qu'elles sont cohérentes (c'est à dire tant que les σ_k existent) : $S_n = \sigma_1.S_{n-1} - \sigma_2.S_{n-2} + \sigma_3.S_{n-3} - \dots + (-1)^n.\sigma_{n-1}.S_1 + (-1)^{n+1}.n.\sigma_n$ qu'on résume en

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot \sigma_k \cdot S_{n-k} \text{ avec la convention qui n'en est même pas une : } S_0 = n.$$

Au fait, serait il aussi cohérent de décider pour uniformiser : $\sigma_0 = 1$?

Pour ce qui est des déterminants...

Le terme général de la matrice dont le déterminant va calculer σ_n est (en ligne i colonne k :

$$\begin{cases} S_{i-k+1} & \text{si } k \leq i \\ i & \text{si } k = i + 1 \\ 0 & \text{si } k > i + 1 \end{cases} \text{ il faudra ensuite diviser par } n!. \text{ On remplit bien des lignes avec des } [S_k, S_{k-1}, \dots, S_1, k, 0, \dots, 0].$$

Pour l'autre sens, $\begin{cases} i \cdot \sigma_i & \text{si } k = 1 \\ \sigma_{k-i+1} & \text{si } 1 < k \leq i \\ 1 & \text{si } k = i + 1 \\ 0 & \text{si } k > i + 1 \end{cases}$ pour avoir $\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 \cdot \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \dots & 0 \\ 3 \cdot \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & \sigma_1 \end{vmatrix}$

On ne pose pas souvent ce genre d'exercice dans les concours : définir le terme général pour que la matrice donne ce que vous devinez dans la version avec des points de suspension. Je trouve pourtant ceci très formateur. Et je suis persuadé qu'on finira par en croiser dans les concours.

2011/12

L'équation $\tan(x) = x$.

D.S.9

En soi, cette équation n'a aucun intérêt. Mais elle nous permet de faire des exercices où l'on teste si les élèves ont la bonne approche des mathématiques : une approche visuelle et non à base de formules.

On trace le graphe de l'identité : la première bissectrice.

On trace le graphe de la tangente, avec ses tangentes verticales en $\pi/2$, en $3\pi/2$ en $5\pi/2$ et ainsi de suite.

On comprend alors que les deux graphes vont se couper à chaque asymptote verticale.

Il ne reste qu'à le prouver de manière froide et sèche, pour passer du "on voit que" au "on démontre que".

On introduit donc l'application différence. Ou plutôt "produit en croix". L'équation $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = x$ se ramène (au domaine près) à $x \cdot \cos(x) = \sin(x)$ c'est à dire $x \cdot \cos(x) - \sin(x) = 0$.

On définit donc f et on la dérive : $f' = x \longrightarrow -x \cdot \sin(x)$. Sur $[0, +\infty[$, son signe est donc celui du sinus. Sur l'intervalle I_n (égal à $[n\pi, n\pi + \pi/2]$, la dérivée f' est du signe de $(-1)^{n+1}$. f est donc d'ores et déjà strictement monotone. On va distinguer les cas.

- Pour n pair, f est décroissante sur l'intervalle I_n (et continue). En $n\pi$ elle est positive (égale à $n\pi$) et en $n\pi + \frac{\pi}{2}$, elle vaut -1 . Le théorème de l'homéomorphisme garantit l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x .

- Pour n impair, f est croissante sur I_n (et continue). En $n\pi$ elle est négative (égale à $-n\pi$) et en $n\pi + \frac{\pi}{2}$, elle vaut 1 . Le théorème de l'homéomorphisme donne existence et unicité d'une solution à l'équation $f(x) = 0$.

On fait usage du théorème de l'homéomorphisme. C'est le théorème que vous appelez en Terminale "théorème de la bijection". On en cite les hypothèses : continuité, stricte monotonie par signe de la dérivée et intervalle. L'absence du mot intervalle sera sanctionnée.

On a donc une solution et une seule sur chaque I_n . Reste à préciser que la réunion des I_n ne fait pas encore $]0, +\infty[$. Il nous manque tous les intervalles de la forme $[n\pi + \frac{\pi}{2}, (n+1)\pi]$. Mais sur chacun de ces intervalles, la tangente est négative. Et l'identité est positive. Il ne peut donc pas y avoir de

solution à l'équation $\tan(x) = x$ d'inconnue réelle x .

Encore fallait il le préciser pour ne pas se retrouver avec des solutions qui se glisseraient entre les solutions déjà trouvées et en perturberaient le décompte. Je me prépare déjà, en tapant ce corrigé, à sanctionner ceux qui auront oublié cet argument. Mais je sens aussi venir qu'il faudra déjà que je sois heureux que la première partie du raisonnement soit conduite proprement et sans faille.

On a donc des solutions, qu'on peut ordonner, et même cerner : $0 < n.\pi \leq u_n \leq n.\pi + \frac{\pi}{2}$.
Par le théorème des gendarmes (ou du gendarme), la suite u tend vers l'infini positif.

2011/12

La série $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(u_k)^2}$.

D.S.9

La croissance de S est liée à la seule positivité de u . Et pas à sa croissance.

En effet, pour n donné, on calcule $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(u_{n+1})^2}$ par simple définition de ce qu'est une somme (il n'y a pas de télescopage là dessous). Cette différence est positive pour tout n . La suite S croît. On va la majorer.

On écrit $(u_n)^2 \geq n^2.\pi^2$ pour commencer (par positivité, l'élévation au carré ne change pas le sens des inégalités). On divise, on soustrait : $(u_n)^2 \geq \pi^2 \cdot \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) = \pi^2 \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)$.

On passe aux inverses (tout est positif). On décompose ensuite en éléments simples

$$\frac{1}{(n+1/2) \cdot (n-1/2)} = \frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}}.$$

On rédige dans le sens "de ce qu'on sait vers ce qu'on cherche". Même si on a cherché en partant à rebours de ce qu'on cherchait.

On somme de 1 à n : $S_n \leq \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}}$. Cette fois, la somme est télescopique. Et il reste

$$\frac{1}{1/2} - \frac{2}{2.n + 1}.$$

On veut une suite croissante majorée. Il nous faut donc un vrai majorant. Or, $2 - \frac{2}{2.n + 1}$ n'est pas un majorant, puisque c'est une suite...

On doit majorer encore, par 2.

La suite réelle $(S_n)_n$ est croissante, majorée. Elle converge vers son plus petit majorant.

Je vous rappelle qu'à partir de cette année, on attend de vous tous les mots du théorème : "suite réelle croissante majorée" et "convergence vers son plus petit majorant".

On ne connaît pas encore la limite de la série "somme des inverses des carrés". Mais ça va venir.

2011/12

Les dérivées successives de f .

D.S.9

Déjà, la dérivée première est simple : $x \rightarrow -x.\sin(x)$. C'est sur elle qu'on va travailler. On va utiliser la formule de Leibniz pour dériver ce produit. Mais attention, la formule de Leibniz s'écrit à l'étage des fonction, alors, pas de $(x.\sin(x))'$ ou autres $x^{(n)}$.

On écrit donc : $f' = -Id.\sin$ et on dérive $n-1$ fois (tout est C^∞). Les dérivées successives de Id s'effacent très vite : $f^{(n)} = -Id.\sin^{(n-1)} - (n-1).1.\sin^{(n-2)}$ (pour n plus grand que 1).

On revient à des x : $f^{(n)}(x) = -x.\sin\left(x + (n-1).\frac{\pi}{2}\right) + (1-n).\sin\left(x + (n-2).\frac{\pi}{2}\right)$.

Ce qu'il ne faut pas oublier : rédiger à l'étage des fonctions, et surtout, éviter la récurrence. Ce n'est pas parce qu'il y a un n dans la formule qu'il faut nécessairement mener une récurrence...

On fait ensuite un calcul en 0. Le premier terme s'efface. Et le second donne un "clignotant" : $(1-n) \cdot \sin((n-2) \cdot \pi/2)$ qu'on écrit même $(n-1) \cdot \sin(n \cdot \pi/2)$ par le déphasage classique.

Le plus simple pour décrire le phénomène est de distinguer suivant la parité de n : pour n pair, on a 0. Sinon, on a $n-1$ au signe près :

$n \bmod 4$	0	1	2	3
$f^{(n)}(0)$	0	$n-1$	0	$1-n$

de liste $[0, 0, 0, -2, 0, 4, -6, 0, 8, 0, -10, \dots]$ (on en est à la dérivée onzième).

On déduit aisément le développement limité d'ordre 12 comme demandé, en prétendant avoir écrit la formule de Taylor avec reste intégrale et en dégradant le reste $\frac{x^{13}}{12!} \int_{t=0}^{t=1} (1-t)^{12} \cdot f^{(13)}(t \cdot x) \cdot dt$ par

majoration : $f(0+x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2} \cdot f''(0) \dots + \frac{x^{12}}{12!} \cdot f^{(12)}(0) + o(x^{12})$ quand x tend vers 0 (le $o(x^{12})$ est de la forme $x^{12} \cdot \varphi(x)$ avec $\varphi(x)$ qui réussit encore à tendre vers 0 quand x tend vers 0.

On remplace par les valeurs trouvées :

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{30} - \frac{6 \cdot x^7}{7!} + \frac{8 \cdot x^9}{9!} - \frac{10 \cdot x^{11}}{11!} + o(x^{12}) \text{ quand } x \text{ tend vers } 0$$

2011/12

Une suite de polynômes.

D.S.9

On pose donc $P_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{(u_k)^2}\right)$ pour tout x et tout n . Il n'y a aucun problème d'existence.

Pour étudier la monotonie, on calcule la différence entre deux termes consécutifs $|P_{n+1}(x)| - |P_n(x)|$.

On y factorise le produit $|P_n(x)| = \left| \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{(u_k)^2}\right) \right|$ et il reste $\left|1 - \frac{x^2}{(u_{n+1})^2}\right| - 1$ c'est à dire $-x^2/(u_{n+1})^2$. Ce terme est négatif. Le terme factorisé devant est positif. Le produit est négatif. La différence $|P_{n+1}(x) - P_n(x)|$ est négative.

La suite décroît.

Ah non ! Il y a un problème. La valeur absolue partait elle ? Si le terme $x^2/(u_{n+1})^2$ est plus grand que 1, elle ne part pas, et on a $\frac{x^2}{(u_{n+1})^2} - 2$ dont le signe est plus incertain.

Mais pour n plus grand que $|x|/\pi$, u_{n+1} est plus grand que $n \cdot \pi$ (propriété de la suite) et donc plus grand que $\frac{|x|}{\pi} \cdot \pi$. Par passage au carré, on a bien $(u_{n+1})^2 \geq |x|^2$ et $\left|1 - \frac{x^2}{(u_{n+1})^2}\right| = 1 - \frac{x^2}{(u_{n+1})^2}$.

La suite $(|P_n(x)|)_n$ est donc décroissante à partir d'un certain rang, minorée par 0 (il s'agit de valeurs absolues). Elle converge. Mais on ne connaît pas la valeur de sa limite (plus grand minorant).

La convergence se transmet elle forcément à la suite $(P_n(x))_n$?

Pas forcément, j'en veux pour preuve le contre-exemple universel $((-1)^n)_n$.

Il nous faut affirmer que la suite $(P_n(x))_n$ est de signe constant à partir d'un certain rang ?

Lequel ? Le même. En effet, pour n plus grand que $|x|/\pi$, chaque nouveau facteur $(1 - x^2/(u_n)^2)$ est positif, et le produit reste de même signe.

Si l'on note N le rang $\lceil |x|/\pi \rceil + 1$, le signe de $P_n(x)$ reste celui de $P_N(x)$ à partir du rang N .

La suite des valeurs absolues converge et la suite est de signe constant à partir d'un certain rang. Elle converge vers la même limite que $(|P_n(x)|)$ ou vers son opposé.

2011/12

Relations coefficients racines sur un polynôme Q .

D.S.9

On prend donc un polynôme Q et on identifie une fois de plus le polynôme développé $X^d + \alpha_{d-1} \cdot X^{d-1} + \dots + \alpha_0$ et sous forme factorisée $(X - r_1) \dots (X - r_d)$ (même degré, même terme dominant).

On sait que α_0 est au signe près (*et encore...*) le produit des racines, que $-\alpha_{d-1}$ est la somme des racines.

On réduit la première somme $\frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_d}$ au dénominateur commun. C'est $\frac{\sigma_{d-1}}{\sigma_d}$ (en degré 4 : $\frac{a.b.c + a.b.d + a.c.d + b.c.d}{a.b.c.d}$). On a donc $\frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_d} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$ (les signes moins ne se compensent pas totalement).

Quitte à identifier le polynôme avec son développement de Taylor, ou à calculer en 0, on a même

$$\boxed{\frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_d} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = -\frac{Q'(0)}{Q(0)}}$$

On peut aussi prendre le polynôme renversé $\alpha_0.X^d + \alpha_1.X^{d-1} + \dots + \alpha_{d-1}.X + 1$, de racines $1/r_1$ à $1/r_n$, et dont la somme des racines se retrouve aisément.

On passe aux carrés des inverses des racines.

Dans $\frac{1}{(r_1)^2} + \dots + \frac{1}{(r_d)^2}$, le dénominateur est déjà $(\alpha_0)^2$ (ou $(-\alpha_0)^2$, mais ça ne change pas grand chose).

Le numérateur est la somme des d termes de la forme $(r_1 \dots r_{k-1}.r_{k+1} \dots r_d)^2$. On y accède en élevant au carré la somme des $r_1 \dots r_{k-1}.r_{k+1} \dots r_d$. On retrouve notre terme, mais aussi des double-produits du type $(r_1 \dots r_{p-1}.r_{p+1} \dots r_d).(r_1 \dots r_{q-1}.r_{q+1} \dots r_d)$ avec p différent de q .

dans un tel terme, on factorise la partie commune avec tous les termes, et il reste un produit où il manque r_p et r_q :

$$(r_1 \dots r_{p-1}.r_{p+1} \dots r_d).(r_1 \dots r_{q-1}.r_{q+1} \dots r_d) = (r_1 \dots r_d).(r_1 \dots r_{p-1}.r_{p+1} \dots r_{q-1}.r_{q+1} \dots r_n)$$

On factorise $r_1 \dots r_d$ (appelé σ_d) et on a un terme de la somme σ_{d-2} . Quand on somme, on retrouve donc $\sigma_d.\sigma_{d-2}$.

Le numérateur de $\frac{1}{(r_1)^2} + \dots + \frac{1}{(r_d)^2}$ est donc $(\sigma_{d-1})^2 - 2.\sigma_d.\sigma_{d-2}$.

On résume :
$$\boxed{\frac{1}{(r_1)^2} + \dots + \frac{1}{(r_d)^2} = \frac{(\sigma_{d-1})^2 - 2.\sigma_d.\sigma_{d-2}}{(\sigma_d)^2}}$$

On accède à cette formule aussi avec la somme des carrés des racines du polynôme $\alpha_0.X^d + \alpha_1.X^{d-1} + \dots + \alpha_{d-1}.X + 1$.

En prenant les valeurs en 0 :
$$\frac{1}{(r_1)^2} + \dots + \frac{1}{(r_d)^2} = \frac{(Q'(0))^2 - Q(0).Q''(0)}{(Q(0))^2}.$$

Comme les u_k sont les racines du polynôme P_n (pour k de 1 à n), de même que les $-u_k$, on peut utiliser la formule précédente sur la somme des carrés des inverses des racines : $\frac{1}{(u_1)^2} + \dots + \frac{1}{(u_n)^2} =$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(P'_n(0))^2 - P_n(0).P''_n(0)}{(P_n(0))^2}.$$

2011/12

Calcul de la somme λ .

D.S.9

On a presque fini. Il ne reste plus qu'à passer à la limite dans la formule écrite ci dessus.

On note φ la fonction obtenue à la limite. Abusivement : $\varphi(x) = \prod_{1 \leq k} \left(1 - \frac{x^2}{(u_k)^2}\right)$ au sens de

$$\varphi(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(u_k)^2}\right). \text{ On a donc } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(u_k)^2} = \lambda = \frac{\varphi'(0)^2 - \varphi(0).\varphi''(0)}{\varphi(0)^2}.$$

Mais comment calculer sans effort les dérivées de φ en 0 ?

Ce sont les coefficients du développement limité de φ en 0.

Or, on a le développement limité de f en 0 : $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{30} - \frac{6x^7}{7!} + \frac{8x^9}{9!} - \frac{10x^{11}}{11!} + o(x^{12})$. On divise par x^3 :

$$\frac{f(x)}{x^3} = -\frac{1}{3} + \frac{x^2}{30} - \frac{6x^4}{7!} + \frac{8x^6}{9!} + o(x^7).$$

On extrait la valeur en 0 : $-1/3$ et les dérivées attendues.

On trouve bien que la somme λ vaut $1/10$

C'est surprenant qu'une équation mêlant tangente et fonction identité, avec une infinité de racines finisse par donner une somme rationnelle.

D.S.9	MPSI2	592 points	Année 2011/12	D.S.9
--------------	-------	------------	---------------	--------------

D.S.10

Charlemagne

Vendredi 9 mars

2011/2012

D.S.10

2011/12

ALGÈBRE**D.S.10**

II- 1) Soient A et B deux matrices réelles carrées de taille 3 sur 3. On définit $\varphi = M \longrightarrow A.M - M.B$. Montrez que φ est linéaire de $M_3(\mathbb{R})$ dans lui même. (2 pt.)

II- 2) Déterminez $\varphi \circ \varphi$. (1 pt.)

III- 1) Montrez que $\lambda \longrightarrow \det(A - \lambda.I_3)$ est une fonction polynôme de degré 3 dont vous exprimerez les coefficients à l'aide des traces et déterminants de A et $\text{Com}(A)$ et que l'on notera χ_A (polynôme caractéristique de A). (2 pt.) Pour la suite, on écrira $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \tau.\lambda^2 - \mu.\lambda + \delta.\lambda^0$.

III- 2) Qu'a-t-on même prouvé dans le D.S.9 sur $\chi_A(A)$? (1 pt.)

III- 3) Montrez que A et tA ont le même polynôme caractéristique. (1 pt.)

III- 4) Montrez que χ_A admet au moins une racine réelle λ_0 . Déduez alors qu'il existe au moins un vecteur U_0 non nul, de taille 3 vérifiant $A.U_0 = \lambda_0.U_0$. (2 pt.)

IV- 1) On suppose pour cette partie que χ_A et χ_B ont une racine commune λ_0 . Montrez qu'il existe deux vecteurs U_0 et V_0 non nuls, de taille 3 vérifiant $A.U_0 = \lambda_0.U_0$ et ${}^tB.U_0 = \lambda_0.U_0$. (1 pt.)

IV- 2) Quel est le format de $U_0.{}^tV_0$? (1 pt.) Calculez son image par φ et déduisez que φ n'est pas injective. (2 pt.)

V- 1) On suppose pour cette partie que φ n'est pas injective. Montrez qu'il existe au moins une matrice M_0 non nulle vérifiant $\varphi(M_0) = O_{3 \times 3}$ (matrice nulle de taille 3). (1 pt.)

V- 2) Montrez alors $A^n.M_0 = M_0.B^n$ pour n de 0 à 3. (2 pt.)

V- 3) Calculez alors $M_0.(B^3 - \tau.B^2 + \mu.B - \delta.I_3)$. (1 pt.)

V- 4) Déduez $\det(B^3 - \tau.B^2 + \mu.B - \delta.I_3) = 0$. (1 pt.)

V- 5) Déduez que χ_A et χ_B ont une racine commune. (3 pt.)

86 points

86 points

2011/12

CLASSIQUE**D.S.10**

On va regarder le cas d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f lipschitzienne de rapport 1. On ne peut pas appliquer le théorème du point fixe (on a besoin d'un rapport strictement plus petit que 1). On va quand même étudier la vitesse de convergence vers le point fixe, à l'aide du développement limité en ce point. On va le faire sur un exemple, autre que $u_{n+1} = \sin(u_n)$ ou $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ que certains auront eu en colle.

On définit ici la suite (u_n) (n'oubliez pas les parenthèses) par $u_0 = \pi/2$ et $u_{n+1} = \ln(1 + \sin(u_n))$ pour tout n .

<♠(10)> Étudiez l'application $x \longrightarrow \ln(1 + \sin(x))$ (notée f) sur $] -\pi/2, \pi/2]$, en particulier sa position par rapport à la première bissectrice. (2 pt.)

<♠(11)> Donnez le développement limité d'ordre 2 de f en 0, sous la forme $f(0 + h) = a + b.h + c.h^2 + h^2.\varphi(h)$ où φ est une application de limite nulle en 0. (2 pt.)

<♠(12)> Montrez que la suite (u_n) existe bien, est positive, décroissante. (2 pt.)

<♠(13)> Concluez sur sa convergence et sa limite. (2 pt.)

<♠(14)> On pose alors $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. Montrez que la suite v tend vers 1/2 à l'infini. (2 pt.)

<♠(15)> Déduez la limite de $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k$. (1 pt.)

< ♠(16) > Concluez : u_n est équivalent à $\frac{2}{n}$ quand n tend vers l'infini. (2 pt.)

13 points

13 points

2011/12

REPRÉSENTATION

D.S.10

On va montrer que tout réel de $]1, 2]$ peut se représenter comme “produit infini” à l’aide de suites d’entiers ayant une propriété de croissance rapide.

On pose donc $I =]1, 2]$ et CR l’ensemble des suites (p_n) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $p_0 \geq 2$ et $p_{n+1} \geq (p_n)^2$ pour tout n .

< ♦(16) > Explicitez l’exposant a_n dans la formule suivante : $\forall n, p_n \geq (p_0)^{a_n}$ pour p dans CR . (2 pt.)

< ♦(17) > Montrez par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in]0, 1[, (1 - \alpha) \cdot \prod_{k=0}^n (1 + \alpha^{(2^k)}) < 1$. (3 pt.)

< ♦(18) > On prend p dans CR et on définit pour tout n : $u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)$. Montrez que la suite u converge vers un réel de I qu’on notera $r(p)$. (3 pt.)

< ♦(19) > Montrez que p_0 est égal à $\left\lfloor \frac{r(p)}{r(p) - 1} \right\rfloor$ (on pourra utiliser l’application $t \rightarrow \frac{t}{t - 1}$). (2 pt.)

< ♣(3) > En guise de réciproque. On se donne x dans I . On pose alors $p_0 = \left\lfloor \frac{x}{x - 1} \right\rfloor$. Montrez que p_0 est un entier supérieur ou égal à 2. (2 pt.)

< ♣(4) > On pose alors $u_0 = \left(1 + \frac{1}{p_0}\right)$. Montrez : $0 < x - u_0 \leq \frac{1}{p_0 \cdot (p_0 - 1)}$. (1 pt.) On pose alors

$p_1 = \left\lfloor \frac{x}{x - u_0} \right\rfloor$ puis $u_1 = u_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{p_1}\right)$. Montrez que p_1 est un entier, plus grand que $(p_0)^2$. (3 pt.)

< ♣(5) > Montrez que $\left\lfloor \frac{x}{x - u_1} \right\rfloor$ définit un entier plus grand que $(p_1)^2$. (3 pt.)

< ♣(6) > Montrez l’existence d’une suite (p_n) dans CR telle que la suite $\left(\prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)\right)$ converge vers x . (3 pt.)

D.S.10

MPSI2

648 points

Année 2011/12

D.S.10

D.S.10

MPSI2

Correction

Année 2011/2012

D.S.10**2011/12**L'application $M \longrightarrow A.M - M.B$.**D.S.10**

On vérifie déjà l'existence. Pour M matrice carrée de taille 3, on peut effectuer les produits $A.M$ et $M.B$, on trouve deux matrices de taille 3 sur 3 qu'on peut additionner ou soustraire.

Ensuite, on compare $\lambda.\varphi(M) + \mu.\varphi(N)$ et $\varphi(\lambda.M + \mu.N)$. Il y a égalité (c'est $A.(\lambda.M + \mu.N) - (\lambda.M + \mu.N).B$ par simple calcul algébrique).

On termine en calculant $\varphi(\varphi(M))$ et en n'inventant surtout pas de fausse commutativité : $\varphi \circ \varphi = M \longrightarrow A^2 - 2.A.M.B + M.B^2$.

Et on évite les confusions entre $\varphi(\varphi(M))$ et $(\varphi(M))^2$.

2011/12Polynôme caractéristique d'une matrice carrée A de taille 3.**D.S.10**

On effectue le calcul de $\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2 & a_2^2 - \lambda & a_2^3 \\ a_3 & a_3^2 & a_3^3 - \lambda \end{vmatrix}$ et on trouve $-\lambda^3 + \tau.\lambda^2 - \mu.\lambda + \delta$ avec $\tau = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 = \text{Tr}(A)$, $\tau = a_1^1.a_2^2 - a_1^1.a_2^1 + a_1^1.a_3^3 - a_1^3.a_3^1 + a_2^2.a_3^3 - a_2^3.a_3^2 = \text{Tr}(\text{Com}(A))$ et enfin $\delta = \det(A)$ (obtenu dans le cas $\lambda = 0$).

On a montré dans le D.S.9. par un calcul (pour l'instant brutal) : $A^3 - \text{Tr}(A).A^2 + \text{Tr}(\text{Com}(A)).A - \det(A).I_3 = 0_{3 \times 3}$ pour toute matrice A de taille 3 sur 3. C'est la généralisation en taille 3 de notre formule $A^2 - \text{Tr}(A).A + \det(A).I_2 = 0_{2 \times 2}$ (pour les matrices de taille 2) qui porte le nom de théorème de Cayley-Hamilton.

On compare χ_A et $\chi_{^tA}$? On sait que A et tA ont même trace et même déterminant. On compare ensuite le terme $a_1^1.a_2^2 - a_2^2.a_1^1 + a_1^1.a_3^3 - a_3^3.a_1^1 + a_2^2.a_3^3 - a_3^3.a_2^2$. Tout passe bien.

Mais non! Il y a tellement plus simple : $\det(^tA - \lambda.I_3)$ coïncide avec $\det(^tA - \lambda.^tI_3)$ puis avec $\det(A - \lambda.I_3)$ par la propriété $\det(^tM) = \det(M)$ établie dans le cours.

On a un polynôme de degré 3. Il tend vers $-\infty$ en $+\infty$ et vice versa. On peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. Le polynôme (continu) admet au moins une racine réelle.

Il se peut qu'il y ait trois racines. Ou deux racines... dont une double.

Un polynôme de degré 3 ne peut ensuite pas avoir plus de trois racines...

Que dire ensuite du fait qu'on ait $\det(A - \lambda_0.I_3) = 0$ pour λ_0 racine du polynôme caractéristique de A ? Le déterminant nul! La matrice n'est pas inversible. J'en déduis qu'il existe au moins un vecteur dans le "noyau". D'où sort-il? Mais c'est du cours!

Si $\det(M)$ est nul, les vecteurs colonne C_1 à C_n forment une famille liée par une relation non triviale du type $\alpha_1.C_1 + \dots + \alpha_n.C_n = 0_n$. Mais alors par calcul composante par composante, le produit $M.U$ est nul, où U est le vecteur de composantes α_1 à α_n .

La relation $(A - \lambda_0.I_3).U_0 = 0_3$ donne vite $A.U_0 - \lambda_0.U_0 = 0_3$ par distributivité puis $A.U_0 = \lambda_0.U_0$. Seuls les idiots ont alors la prétention de simplifier par U_0 . Un vecteur n'a pas d'inverse...

2011/12Quand χ_A et χ_B ont une racine commune.**D.S.10**

On note donc λ_0 la matrice commune. De $\chi_A(\lambda_0) = 0$ on déduit l'existence d'un U_0 non nul vérifiant $A.U_0 = \lambda_0.U_0$.

De $\chi_B(\lambda_0) = 0$, on déduit $\chi_{(^tB)}(\lambda_0) = 0$, puis l'existence d'un vecteur non nul V_0 (un autre que U_0 en

général) vérifiant ${}^tB.V_0 = \lambda.V_0$ (en prenant tB à la place de A).

On effectue ensuite le produit d'un vecteur colonne par un vecteur ligne. Qu'obtient on ? Une matrice carrée : $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \cdot (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3) = \begin{pmatrix} \alpha_1.\beta_1 & \alpha_1.\beta_2 & \alpha_1.\beta_3 \\ \alpha_2.\beta_1 & \alpha_2.\beta_2 & \alpha_2.\beta_3 \\ \alpha_3.\beta_1 & \alpha_3.\beta_2 & \alpha_3.\beta_3 \end{pmatrix}$

Ensuite, surtout, on évite de rester à l'étage des coefficients, on est vendredi, pas jeudi ou mercredi ni mardi. On calcule avec efficacité et intelligence. On multiplie : $A.M_0 = A.U_0.{}^tV_0 = \lambda_0.U_0.{}^tV_0 = \lambda_0.M_0$.

On continue : $M_0.B = U_0.{}^tV_0.B = U_0.{}^tV_0.({}^tB) = U_0.({}^tB.V_0) = U_0.({}^t(\lambda_0.V_0)) = U_0.({}^t\lambda_0.{}^tV_0) = \lambda_0.U_0.{}^tV_0 = \lambda_0.M_0$ (on a utilisé ${}^tC.{}^tD = {}^t(D.C)$ et ${}^t(\lambda.V) = \lambda.{}^tV$ et ${}^t({}^tP) = P$).

On soustrait : $\varphi(M_0) = A.M_0 - M_0.B = \lambda_0.M_0 - \lambda_0.M_0 = 0_{3 \times 3}$.

On a une matrice non nulle M_0 vérifiant $\varphi(M_0) = 0_{3 \times 3}$ mais on a aussi $\varphi(0_{3 \times 3}) = 0_{3 \times 3}$. On a donc deux matrices différentes ayant la même image.

φ n'est pas injective.

Je ne peux rien faire pour celles et ceux qui face à ces questions en sont encore à dire "l'injectivité, au fait, c'est quoi ?". Rappelons qu'il y a un cours et qu'on en apprend les définitions...

2011/12

En guise de réciproque, on part cette fois de " φ non injective.

D.S.10

Si φ n'est pas injective, il existe deux matrices différentes M et N ayant la même image. Mais alors, par linéarité, on a $\varphi(M - N) = \varphi(M) - \varphi(N) = 0_{3 \times 3}$. La matrice $M - N$ est dans le noyau de φ .

On retrouve l'équivalence "injective si et seulement si noyau réduit au seul vecteur nul".

On traduit : $A.M_0 - M_0.B = 0_{3 \times 3}$. C'est la relation $A^n.M_0 = M_0.B^n$ pour n égal à 1.

Pour n nul, c'est simple, c'est $I_3.M = M.I_3$.

On calcule alors aussi : $A^2.M_0 = A.(A.M_0) = A.(M_0.B) = (A.M_0).B = (M_0.B).B = M_0.B^2$.

On recommence : $A^3.M_0 = A.(A^2.M_0) = A.(M_0.B^2) = (A.M_0).B^2 = (M_0.B).B^2 = M_0.B^3$ et on fait le même type de calcul pour $A^4.M_0 = M_0.B^4$ si on nous le demande.

Et hop, une récurrence ! Ah non, tiens, on ne nous le demande pas. Pour une fois qu'on aurait u gagner des points simplement...

On distribue alors et on échange les A en B :

$(A^3 - \tau.A^2 + \mu.A - \delta.I_3).M_0 = A^3.M_0 - \tau.A^2.M_0 + \mu.A.M_0 - \delta.M_0$ donne ensuite $M_0.B^3 - \tau.M_0.A^2 + \mu.M_0.B - \delta.M_0$ puis $M_0.(B^3 - \tau.A^2 + \mu.B - \delta.I_3)$. Cette matrice qu'on nous demande de calculer est nulle.

On ne passe pas brutalement de $M_0.(B^3 - \tau.A^2 + \mu.B - \delta.I_3) = 0_{3 \times 3}$ à des informations sur B . Par exemple, on ne simplifie pas par M_0 sous le seul prétexte de "elle est non nulle". Ce dont on aurait besoin, c'est de M inversible. Et c'est quand même plus exigeant. On ne passe pas non plus au déterminant. M non nulle a le droit d'être de rang 1 ou 2, et d'être alors non inversible. Par exemple la matrice $U_0.{}^tV_0$ n'est que de rang 1.

Mais effectuons ici un petit raisonnement par l'absurde.

Si $B - \tau.A^2 + \mu.B - \delta.I_3$ était inversible, alors, en multipliant à droite par son inverse, on aurait $M_0 = 0_{3 \times 3}$, ce qui n'est pas le cas. On a donc quand même déjà $B - \tau.A^2 + \mu.B - \delta.I_3$ non inversible.

On note que la relation $P.Q = 0_{n \times m}$ conduit juste à "au moins une des deux n'est pas inversible".

Comme la matrice n'est pas inversible, son déterminant est nul. C'est même une équivalence...

On prend le polynôme $X^3 - \tau.X^2 + \mu.X - \delta$ et on le factorise dans $\mathbb{C}$, là où on est sûr qu'il admet trois racines : $(X - \lambda_1).(X - \lambda_2).(X - \lambda_3)$ (une racine réelle, puis un trinôme du second degré qu'on factorise dans $\mathbb{C}$).

On peut alors écrire : $B^3 - \tau.B^2 + \mu.B - \delta.I_3 = (B - \lambda_1.I_3).(B - \lambda_2.I_3).(B - \lambda_3.I_3)$ (développer, les B et puissances de B commutent).

On a alors : $\det((B - \lambda_1.I_3).(B - \lambda_2.I_3).(B - \lambda_3.I_3)) = 0$ puis $\det(B - \lambda_1.I_3). \det(B - \lambda_2.I_3). \det(B - \lambda_3.I_3) = 0$ car l'application déterminant est un morphisme multiplicatif.

On est à présent dans $\mathbb{C}$ avec trois complexes. Cette fois, on dispose de l'intégrité, et on déduit que $\det(B - \lambda_p.I_3)$ est nul pour un p de 1 à 3.

Avec $\det(B - \lambda_p.I_3) = 0$, on arrive à $B - \lambda_p.I_3$ non inversible et surtout, on reconnaît $\chi_B(\lambda_p) = 0$.

Le complexe λ_p est racine à la fois de χ_A et χ_B .

On a établi une équivalence :

$(M \longrightarrow A.M - M.A)$ injective si et seulement si χ_A et χ_B ont une racine commune par contraposée.

2011/12

L'application $x \longrightarrow \ln(1 + \sin(x))$.

D.S.10

L'application $t \longrightarrow \ln(1 + \sin(t))$ est définie sur $] -\pi/2, \pi/2[$ et même sur $] -\pi/2, 3\pi/2[$. Elle y est continue, dérivable, de dérivée $x \longrightarrow \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}$ dans laquelle on pourra identifier une tangente de l'arc moitié, déphasée, si on y tient. Cette dérivée est positive sur notre intervalle d'étude. f croît. En $-\pi/2$ on a une asymptote verticale. En 0 on a une tangente égale à la première bissectrice. En $\pi/2$ on a une tangente horizontale.

On étudie ensuite la différence $f - Id$ de dérivée $x \longrightarrow \frac{\cos(x) - 1 - \sin(x)}{1 + \sin(x)}$. Il n'est pas évident d'avoir le signe de cette quantité, même si c'est juste celui de son numérateur.

Mais la bonne surprise est quand on redérive. Par une belle simplification, il ne reste que $\frac{-1}{1 + \sin(x)}$.

La dérivée seconde de $f - Id$ est négative. On en déduit que $(f - Id)'$ est décroissante. Or, $(f - Id)'$ est nulle en 0. Elle est donc d'abord positive, puis négative.

On en déduit que $f - Id$ admet un maximum en 0. Mais $f - Id$ est (aussi) nulle en 0.

$f - Id$ est donc d'abord négative, nulle en 0 puis à nouveau négative.

Le graphe de f est sous la bissectrice, et ne la touche qu'en 0.

Si vous avez reconnu de la concavité, vous avez bien raison...

Pour avoir le développement limité de f en 0, on écrit une formule de Taylor, puisque f est de classe C_∞ par les théorèmes algébriques. On dérive plusieurs fois : $f' = x \longrightarrow \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}$, $f'' = x \longrightarrow \frac{-1}{1 + \sin(x)}$ après des simplifications étonnantes (on retrouve la concavité de f).

On calcule ces dérivées en 0 : $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $f''(0) = -1$.

On écrit une formule de Taylor avec reste intégrale : $f(0+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2} \cdot \int_{t=0}^{t=1} f^{(3)}(t.h) \cdot (1-t)^2 \cdot dt$.

Devant l'intégrale, on factorise h^2 (il reste h), et dans l'intégrale on borne $f^{(3)}$. En notant donc φ l'application $h \longrightarrow h \cdot \int_0^1 (1-t)^2 \cdot f^{(3)}(t.h) \cdot dt$, on a le développement limité demandé $f(h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$ quand h tend vers 0.

2011/12

La suite $u_{n+1} = \ln(1 + \sin(u_n))$.

D.S.10

On a obtenu grâce aux variations de $f : \forall x \in [0, \pi/2], f(x) \in [0, \pi/2]$, et on montre alors par récurrence sur $n : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, \pi/2]$ qui prouve à la fois l'existence et le caractère borné de la suite (u_n) .

Ensuite, la position par rapport à la bissectrice ($f(x) \leq x$ pour tout x de $[0, \pi/2]$) permet d'écrire $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$ (on ne peut l'écrire qu'après avoir montré que les u_n sont dans l'intervalle d'application de la formule $f(x) \leq x$).

Avec la minoration par 0 et la décroissance, on a la convergence de la suite vers son plus grand minorant (théorème).

On ne connaît pas encore la valeur de la limite. Appelons la pour l'instant β .

On reprend : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n . On fait tendre n vers $+\infty$. Le membre de gauche tend vers β . Le membre de droite tend vers $f(\beta)$ (continuité de f). Par unicité de la limite : $\beta = f(\beta)$. La limite est un point fixe de f .

Or, f n'a qu'un point fixe (étude des variations de $f - Id$), et c'est 0.

On en déduit : la suite u converge vers 0 (pas de raccourci dans le raisonnement).

2011/12

Vitesse de convergence.

D.S.10

On définit la suite v par $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. On a deux termes qui explosent tous les deux... A la même vitesse. On a vraiment en forme indéterminée.

Cette quantité est de la forme $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x}$ avec x qui tend vers 0.

On réduit au dénominateur commun : $\frac{x - f(x)}{x \cdot f(x)}$ et on fait appel au développement limité en 0 :

$\frac{x - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x \cdot (x + o(x))}$ (en prenant en bas un développement d'ordre 1 qui doit être suffisant).

On simplifie par x^2 en haut et en bas : $\frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)}$. On fait n tendre vers l'infini, donc x vers 0 et la limite vaut $1/2$ comme indiqué.

Au grand dam de ceux qui disaient $\frac{1}{f(x)}$ est équivalent à $\frac{1}{x}$, donc par soustraction, il ne reste que 0.

On somme, on divise par n (nombre de termes). On a une moyenne de Cesàro. Or, quand une suite telle que v converge vers $1/2$, sa moyenne de Cesàro converge aussi vers $1/2$.

Mais $\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ est une somme télescopique de valeur $\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}$.

On divise par n : $\frac{1}{n \cdot u_n} - \frac{1}{n \cdot u_0}$ converge vers $1/2$.

Or, $\frac{1}{n \cdot u_0}$ converge déjà vers 0 (la variable c'est n). Il reste juste " $\frac{1}{n \cdot u_n}$ tend vers $\frac{1}{2}$ ".

On en déduit que $\frac{2/n}{u_n}$ converge vers 1.

C'est la définition de " u_n est équivalent à $\frac{2}{n}$ ".

La valeur initiale $u_0 = \pi/2$ n'a aucun rôle, la vitesse de convergence reste la même, dès lors qu'on démarre avec un u_0 dans l'intervalle stable $]0, \pi]$.

Si on démarre avec une valeur plus basse que 0, un raisonnement qui ne sera pas fait ici nous fait quitter l'intervalle $] -\pi/2, 0[$ et nous ramène au cas précédent.

2011/12

Résultats préliminaires pour la représentation des réels de $]1, 2]$.

D.S.10

On regarde les premiers termes : $p_1 \geq (p_0)^2$, puis $p_2 \geq (p_1)^2 \geq ((p_0)^2)^2 = (p_0)^4$, puis $p_3 \geq (p_2)^2 \geq ((p_0)^4)^2 = (p_0)^8$ (tous les facteurs sont positifs, les sens des inégalités sont préservés).

On continue : $p_3 \geq (p_2)^2 \geq ((p_0)^8)^2 = (p_0)^{16}$.

On trouve des exposants "puissances de 2" : $p_n \geq (p_0)^{2^n}$ pour tout n . On le prouve par récurrence sur

n (non rédigée ici). Et on évite des fausses manipulations sur les exposants...

On regarde la formule à prouver au rang 0 :

$\forall \alpha \in]0, 1[, (1 - \alpha) \cdot (1 + \alpha^{(2^0)}) = (1 - \alpha) \cdot (1 + \alpha) = 1 - \alpha^2 < 1$. C'est fait.

On suppose ensuite à un rang n : $\forall \alpha \in]0, 1[, (1 - \alpha) \cdot \prod_{k=0}^n (1 + \alpha^{(2^k)}) < 1$.

On se donne alors α dans $]0, 1[$ et on veut majorer $(1 - \alpha) \cdot \prod_{k=0}^{n+1} (1 + \alpha^{(2^k)})$. Or, il y a un terme de plus

que dans $(1 - \alpha) \cdot \prod_{k=0}^n (1 + \alpha^{(2^k)})$, et ce terme $(1 + \alpha^{(2^{n+1})})$ est plus grand que 1.

On a l'impression de ne pas pouvoir conclure. Sauf en buffant, en inventant de fausses formules sur les exposants.

Aors, où est l'idée ? Dans le fait que la récurrence se conduit sur n avec α non fixé.

On écrit le résultat à l'ordre n pour a égal à α^2 , qui est bien dans $]0, 1[$ aussi. On écrit donc :

$(1 - \alpha^2) \cdot \prod_{k=0}^n (1 + (\alpha^2)^{(2^k)}) < 1$.

On arrange, avec de vraies formules sur les exposants : $(1 - \alpha) \cdot (1 + \alpha) \cdot \prod_{k=0}^n (1 + \alpha^{2 \cdot (2^k)}) < 1$.

On obtient $(1 - \alpha) \cdot (1 + \alpha) \cdot \prod_{k=0}^n (1 + \alpha^{(2^{k+1})}) < 1$.

On réindexe : $(1 - \alpha) \cdot (1 + \alpha) \cdot \prod_{p=1}^{n+1} (1 + \alpha^{(2^p)}) < 1$.

On place un terme de plus en tête, c'est $1 + \alpha$: $(1 - \alpha) \cdot \prod_{p=0}^{n+1} (1 + \alpha^{(2^p)}) < 1$.

On a obtenu : $\forall \alpha \in]0, 1[, (1 - \alpha) \cdot \prod_{p=0}^{n+1} (1 + \alpha^{(2^p)}) < 1$, comme demandé au rang $n + 1$.

On pouvait aussi arriver au résultat en voyant dans $(1 - \alpha) \cdot \prod_{p=0}^n (1 + \alpha^{(2^p)})$ un joli produit télescopique.

2011/12

Convergence de la suite (u_n) .

D.S.10

La suite (u_n) est bien définie. Ses termes sont tous positifs, comme produit de termes positifs. De plus, pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par $\left(1 + \frac{1}{p_{n+1}}\right)$, plus grand que 1. La suite est croissante.

On majore ensuite grâce à notre premier lemme (tous les termes sont positifs) : $u_n \leq \prod_{k=0}^n \left(1 + \left(\frac{1}{p_0}\right)^{(2^k)}\right)$.

On poursuit avec notre second lemme : $u_n \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_0}}$ (α y est égal à $1/p_0$).

La suite est majorée (le majorant est un réel et non une suite qui bougerait aussi avec n). Elle converge vers son plus petit majorant.

On précise toujours : "toute suite réelle croissante majorée converge vers son plus petit majorant" à la place de la version "toute suite croissante majorée converge" telle qu'elle est parfois énoncée en Terminale.

La limite est entre $\left(1 + \frac{1}{p_0}\right)$ et $\frac{1}{1 - \frac{1}{p_0}}$.

On explicite : $\frac{1+p_0}{p_0} < r(p) \leq \frac{p_0}{p_0-1}$, et on élargit : $1 < \frac{1+p_0}{p_0} < r(p) \leq \frac{p_0}{p_0-1} \leq 2$

Tiens, c'est la même formule à droite qu'à gauche, mais avec $p_0 - 1$ à la place de p_0 . Si on a un peu d'habitude des idées sous ce type d'exercice, on devine le découpage de $]1, 2]$ en petits intervalles qui s'emboîtent les uns derrière les autres.

On compose par l'application $t \rightarrow \frac{t}{t-1}$ (appelée g), décroissante sur I ; tous calculs faits :

$$p_0 + 1 > \frac{r(p)}{r(p)-1} \geq p_0.$$

Comme p_0 est entier, on reconnaît la définition de " p_0 est la partie entière de $\frac{r(p)}{r(p)-1}$ ".

2011/12

Réciproque.

D.S.10

On part cette fois de x vérifiant $1 < x \leq 2$. On applique g définie ci dessus (par $g(t) = \frac{t}{t-1}$). $g(x)$ est alors un réel supérieur ou égal à 2. On peut en prendre la partie entière.

On l'appelle p_0 . On a donc $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1} - 1 < p_0 \leq \frac{x}{x-1} < p_0 + 1$.

On applique g décroissante : $g\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{2-x} > \frac{p_0}{p_0-1} \geq x > g(p_0+1) = \frac{p_0+1}{p_0} = u_0$ (g a une belle particularité : $g \circ g = Id$).

On soustrait u_0 : $\frac{1}{p_0 \cdot (p_0-1)} \geq x - u_0 > 0$ tous calculs faits.

Le réel $\frac{x}{x-u_0}$ est strictement positif. Il a une partie entière positive ou nulle.

D.S.11

Charlemagne

Vendredi 9 mars

2011/2012

D.S.11

2011/12

ALGÈBRE**D.S.11**

VI- 1) Soient A et B deux matrices réelles carrées de taille 3 sur 3. On définit $\varphi = M \longrightarrow A.M - M.B$. Montrez que φ est linéaire de $M_3(\mathbb{R})$ dans lui même. (2 pt.)

VI- 2) Déterminez $\varphi \circ \varphi$. (1 pt.)

VII- 1) Montrez que $\lambda \longrightarrow \det(A - \lambda.I_3)$ est une fonction polynôme de degré 3 dont vous exprimerez les coefficients à l'aide des traces et déterminants de A et $\text{Com}(A)$ et que l'on notera χ_A (polynôme caractéristique de A). (2 pt.) Pour la suite, on écrira $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \tau.\lambda^2 - \mu.\lambda + \delta$.

VII- 2) Qu'a-t-on même prouvé dans le D.S.9 sur $\chi_A(A)$? (1 pt.)

VII- 3) Montrez que A et tA ont le même polynôme caractéristique. (1 pt.)

VII- 4) Montrez que χ_A admet au moins une racine réelle λ_0 . Déduisez alors qu'il existe au moins un vecteur U_0 non nul, de taille 3 vérifiant $A.U_0 = \lambda_0.U_0$. (2 pt.)

VIII- 1) On suppose pour cette partie que χ_A et χ_B ont une racine commune λ_0 . Montrez qu'il existe deux vecteurs U_0 et V_0 non nuls, de taille 3 vérifiant $A.U_0 = \lambda_0.U_0$ et ${}^tB.V_0 = V_0$. (1 pt.)

VIII- 2) Quel est le format de $U_0.{}^tV_0$? (1 pt.) Calculez son image par φ et déduisez que φ n'est pas injective. (2 pt.)

IX- 1) On suppose pour cette partie que φ n'est pas injective. Montrez qu'il existe au moins une matrice M_0 non nulle vérifiant $\varphi(M_0) = O_{3 \times 3}$ (matrice nulle de taille 3). (1 pt.)

IX- 2) Montrez alors $A^n.M_0 = M_0.B^n$ pour n de 0 à 3. (2 pt.)

IX- 3) Calculez alors $M_0.(B^3 - \tau.B^2 + \mu.B - \delta.I_3)$. (1 pt.)

IX- 4) Déduisez $\det(B^3 - \tau.B^2 + \mu.B - \delta.I_3) = 0$. (1 pt.)

IX- 5) Déduisez que χ_A et χ_B ont une racine commune. (3 pt.)

43 points

43 points

2011/12

CLASSIQUE**D.S.11**

On va regarder le cas d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f lipschitzienne de rapport 1. On ne peut pas appliquer le théorème du point fixe (on a besoin d'un rapport strictement plus petit que 1). On va quand même étudier la vitesse de convergence vers le point fixe, à l'aide du développement limité en ce point. On va le faire sur un exemple, autre que $u_{n+1} = \sin(u_n)$ ou $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ que certains auront eu en colle.

On définit ici la suite (u_n) (n'oubliez pas les parenthèses) par $u_0 = \pi/2$ et $u_{n+1} = \ln(1 + \sin(u_n))$ pour tout n .

<♠(17)> Etudiez l'application $x \longrightarrow \ln(1 + \sin(x))$ (notée f) sur $] -\pi/2, \pi/2]$, en particulier sa position par rapport à la première bissectrice. (2 pt.)

<♠(18)> Donnez le développement limité d'ordre 2 de f en 0, sous la forme $f(0 + h) = a + b.h + c.h^2 + h^2.\varphi(h)$ où φ est une application de limite nulle en 0. (2 pt.)

<♠(19)> Montrez que la suite (u_n) existe bien, est positive, décroissante. (2 pt.)

<♠(20)> Concluez sur sa convergence et sa limite. (2 pt.)

<♠(21)> On pose alors $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. Montrez que la suite v tend vers 1/2 à l'infini. (2 pt.)

<♠(22)> Déduisez la limite de $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k$. (1 pt.)

$\langle \spadesuit(23) \rangle$ Concluez : u_n est équivalent à $\frac{2}{n}$ quand n tend vers l'infini. 2 pt.

13 points

13 points

2011/12

REPRÉSENTATION

D.S.11

On va montrer que tout réel de $]1, 2]$ peut se représenter comme “produit infini” à l’aide de suites d’entiers ayant une propriété de croissance rapide.

On pose donc $I =]0, 2]$ et CR l’ensemble des suites (p_n) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $p_0 \geq 2$ et $p_{n+1} \geq (p_n)^2$ pour tout n .

$\langle \diamond(20) \rangle$ Explicitez l’exposant a_n dans la formule suivante : $\forall n, p_n \geq (p_0)^{a_n}$ pour p dans CR . 2 pt.

$\langle \diamond(21) \rangle$ Montrez par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in]0, 1[, (1 - \alpha) \cdot \prod_{k=0}^n (1 + \alpha^{(2^k)}) < 1$. 3 pt.

$\langle \diamond(22) \rangle$ On prend p dans CR et on définit pour tout n : $u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)$. Montrez que la suite u converge vers un réel de I qu’on notera $r(p)$. 3 pt.

$\langle \diamond(23) \rangle$ Montrez que p_0 est égal à $\left\lfloor \frac{r(p)}{r(p) - 1} \right\rfloor$. 2 pt.

D.S.11

MPSI2

692 points

Année 2011/12

D.S.11

D.S.11

MPSI2

Correction

Année 2011/2012

D.S.11**2011/12**L'application $M \longrightarrow A.M - M.B$.**D.S.11**

On vérifie déjà l'existence. Pour M matrice carrée de taille 3, on peut effectuer les produits $A.M$ et $M.B$, on trouve deux matrices de taille 3 sur 3 qu'on peut additionner ou soustraire.

Ensuite, on compare $\lambda.\varphi(M) + \mu.\varphi(N)$ et $\varphi(\lambda.M + \mu.N)$. Il y a égalité (c'est $A.(\lambda.M + \mu.N) - (\lambda.M + \mu.N).B$ par simple calcul algébrique).

On termine en calculant $\varphi(\varphi(M))$ et en n'inventant surtout pas de fausse commutativité : $\varphi \circ \varphi = M \longrightarrow A^2 - 2.A.M.B + M.B^2$.

Et on évite les confusions entre $\varphi(\varphi(M))$ et $(\varphi(M))^2$.

2011/12Polynôme caractéristique d'une matrice carrée A de taille 3.**D.S.11**

On effectue le calcul de $\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2 & a_2^2 - \lambda & a_2^3 \\ a_3 & a_3^2 & a_3^3 - \lambda \end{vmatrix}$ et on trouve $-\lambda^3 + \tau.\lambda^2 - \mu.\lambda + \delta$ avec $\tau = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 = \text{Tr}(A)$, $\tau = a_1^1.a_2^2 - a_1^2.a_2^1 + a_1^1.a_3^3 - a_1^3.a_3^1 + a_2^2.a_3^3 - a_2^3.a_3^2 = \text{Tr}(\text{Com}(A))$ et enfin $\delta = \det(A)$ (obtenu dans le cas $\lambda = 0$).

On a montré dans le D.S.9. par un calcul (pour l'instant brutal) : $A^3 - \text{Tr}(A).A^2 + \text{Tr}(\text{Com}(A)).A - \det(A).I_3 = 0_{3 \times 3}$ pour toute matrice A de taille 3 sur 3. C'est la généralisation en taille 3 de notre formule $A^2 - \text{Tr}(A).A + \det(A).I_2 = 0_{2 \times 2}$ (pour les matrices de taille 2) qui porte le nom de théorème de Cayley-Hamilton.

On compare χ_A et $\chi_{^tA}$? On sait que A et tA ont même trace et même déterminant. On compare ensuite le terme $a_1^1.a_2^2 - a_2^2.a_1^1 + a_1^1.a_3^3 - a_3^3.a_1^1 + a_2^2.a_3^3 - a_3^3.a_2^2$. Tout passe bien.

Mais non! Il y a tellement plus simple : $\det(^tA - \lambda.I_3)$ coïncide avec $\det(^tA - \lambda.^tI_3)$ puis avec $\det(A - \lambda.I_3)$ par la propriété $\det(^tM) = \det(M)$ établie dans le cours.

On a un polynôme de degré 3. Il tend vers $-\infty$ en $+\infty$ et vice versa. On peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. Le polynôme (continu) admet au moins une racine réelle.

Il se peut qu'il y ait trois racines. Ou deux racines... dont une double.

Un polynôme de degré 3 ne peut ensuite pas avoir plus de trois racines...

Que dire ensuite du fait qu'on ait $\det(A - \lambda_0.I_3) = 0$ pour λ_0 racine du polynôme caractéristique de A ? Le déterminant nul! La matrice n'est pas inversible. J'en déduis qu'il existe au moins un vecteur dans le "noyau". D'où sort-il? Mais c'est du cours!

Si $\det(M)$ est nul, les vecteurs colonne C_1 à C_n forment une famille liée par une relation non triviale du type $\alpha_1.C_1 + \dots + \alpha_n.C_n = 0_n$. Mais alors par calcul composante par composante, le produit $M.U$ est nul, où U est le vecteur de composantes α_1 à α_n .

La relation $(A - \lambda_0.I_3).U_0 = 0_3$ donne vite $A.U_0 - \lambda_0.U_0 = 0_3$ par distributivité puis $A.U_0 = \lambda_0.U_0$. Seuls les idiots ont alors la prétention de simplifier par U_0 . Un vecteur n'a pas d'inverse...

2011/12Quand χ_A et χ_B ont une racine commune.**D.S.11**

On note donc λ_0 la matrice commune. De $\chi_A(\lambda_0) = 0$ on déduit l'existence d'un U_0 non nul vérifiant $A.U_0 = \lambda_0.U_0$.

De $\chi_B(\lambda_0) = 0$, on déduit $\chi_{(^tB)}(\lambda_0) = 0$, puis l'existence d'un vecteur non nul V_0 (un autre que U_0 en

général) vérifiant ${}^tB.V_0 = \lambda.V_0$ (en prenant tB à la place de A).

On effectue ensuite le produit d'un vecteur colonne par un vecteur ligne. Qu'obtient on ? Une matrice carrée :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \cdot (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3) = \begin{pmatrix} \alpha_1.\beta_1 & \alpha_1.\beta_2 & \alpha_1.\beta_3 \\ \alpha_2.\beta_1 & \alpha_2.\beta_2 & \alpha_2.\beta_3 \\ \alpha_3.\beta_1 & \alpha_3.\beta_2 & \alpha_3.\beta_3 \end{pmatrix}$$

Ensuite, surtout, on évite de rester à l'étage des coefficients, on est vendredi, pas jeudi ou mercredi ni mardi. On calcule avec efficacité et intelligence. On multiplie : $A.M_0 = A.U_0.{}^tV_0 = \lambda_0.U_0.{}^tV_0 = \lambda_0.M_0$.

On continue : $M_0.B = U_0.{}^tV_0.B = U_0.{}^tV_0.({}^tB) = U_0.({}^tB.V_0) = U_0.({}^t(\lambda_0.V_0)) = U_0.({}^t\lambda_0.{}^tV_0) = \lambda_0.U_0.{}^tV_0 = \lambda_0.M_0$ (on a utilisé ${}^tC.{}^tD = {}^t(D.C)$ et ${}^t(\lambda.V) = \lambda.{}^tV$ et ${}^t({}^tP) = P$).

On soustrait : $\varphi(M_0) = A.M_0 - M_0.B = \lambda_0.M_0 - \lambda_0.M_0 = 0_{3 \times 3}$.

On a une matrice non nulle M_0 vérifiant $\varphi(M_0) = 0_{3 \times 3}$ mais on a aussi $\varphi(0_{3 \times 3}) = 0_{3 \times 3}$. On a donc deux matrices différentes ayant la même image.

φ n'est pas injective.

Je ne peux rien faire pour celles et ceux qui face à ces questions en sont encore à dire "l'injectivité, au fait, c'est quoi ?". Rappelons qu'il y a un cours et qu'on en apprend les définitions...

2011/12

En guise de réciproque, on part cette fois de " φ non injective.

D.S.11

Si φ n'est pas injective, il existe deux matrices différentes M et N ayant la même image. Mais alors, par linéarité, on a $\varphi(M - N) = \varphi(M) - \varphi(N) = 0_{3 \times 3}$. La matrice $M - N$ est dans le noyau de φ .

On retrouve l'équivalence "injective si et seulement si noyau réduit au seul vecteur nul".

On traduit : $A.M_0 - M_0.B = 0_{3 \times 3}$. C'est la relation $A^n.M_0 = M_0.B^n$ pour n égal à 1.

Pour n nul, c'est simple, c'est $I_3.M = M.I_3$.

On calcule alors aussi : $A^2.M_0 = A.(A.M_0) = A.(M_0.B) = (A.M_0).B = (M_0.B).B = M_0.B^2$.

On recommence : $A^3.M_0 = A.(A^2.M_0) = A.(M_0.B^2) = (A.M_0).B^2 = (M_0.B).B^2 = M_0.B^3$ et on fait le même type de calcul pour $A^4.M_0 = M_0.B^4$ si on nous le demande.

Et hop, une récurrence ! Ah non, tiens, on ne nous le demande pas. Pour une fois qu'on aurait u gagner des points simplement...

On distribue alors et on échange les A en B :

$(A^3 - \tau.A^2 + \mu.A - \delta.I_3).M_0 = A^3.M_0 - \tau.A^2.M_0 + \mu.A.M_0 - \delta.M_0$ donne ensuite $M_0.B^3 - \tau.M_0.A^2 + \mu.M_0.B - \delta.M_0$ puis $M_0.(B^3 - \tau.A^2 + \mu.B - \delta.I_3)$. Cette matrice qu'on nous demande de calculer est nulle.

On ne passe pas brutalement de $M_0.(B^3 - \tau.A^2 + \mu.B - \delta.I_3) = 0_{3 \times 3}$ à des informations sur B . Par exemple, on ne simplifie pas par M_0 sous le seul prétexte de "elle est non nulle". Ce dont on aurait besoin, c'est de M inversible. Et c'est quand même plus exigeant. On ne passe pas non plus au déterminant. M non nulle a le droit d'être de rang 1 ou 2, et d'être alors non inversible. Par exemple la matrice $U_0.{}^tV_0$ n'est que de rang 1.

Mais effectuons ici un petit raisonnement par l'absurde.

Si $B - \tau.A^2 + \mu.B - \delta.I_3$ était inversible, alors, en multipliant à droite par son inverse, on aurait $M_0 = 0_{3 \times 3}$, ce qui n'est pas le cas. On a donc quand même déjà $B - \tau.A^2 + \mu.B - \delta.I_3$ non inversible.

On note que la relation $P.Q = 0_{n \times m}$ conduit juste à "au moins une des deux n'est pas inversible".

Comme la matrice n'est pas inversible, son déterminant est nul. C'est même une équivalence...

On prend le polynôme $X^3 - \tau.X^2 + \mu.X - \delta$ et on le factorise dans $\mathbb{C}$, là où on est sûr qu'il admet trois racines : $(X - \lambda_1).(X - \lambda_2).(X - \lambda_3)$ (une racine réelle, puis un trinôme du second degré qu'on factorise dans $\mathbb{C}$).

On peut alors écrire : $B^3 - \tau.B^2 + \mu.B - \delta.I_3 = (B - \lambda_1.I_3).(B - \lambda_2.I_3).(B - \lambda_3.I_3)$ (développer, les B et puissances de B commutent).

On a alors : $\det((B - \lambda_1.I_3).(B - \lambda_2.I_3).(B - \lambda_3.I_3)) = 0$ puis $\det(B - \lambda_1.I_3). \det(B - \lambda_2.I_3). \det(B - \lambda_3.I_3) = 0$ car l'application déterminant est un morphisme multiplicatif.

On est à présent dans $\mathbb{C}$ avec trois complexes. Cette fois, on dispose de l'intégrité, et on déduit que $\det(B - \lambda_p.I_3)$ est nul pour un p de 1 à 3.

Avec $\det(B - \lambda_p.I_3) = 0$, on arrive à $B - \lambda_p.I_3$ non inversible et surtout, on reconnaît $\chi_B(\lambda_p) = 0$.

Le complexe λ_p est racine à la fois de χ_A et χ_B .

On a établi une équivalence :

$(M \longrightarrow A.M - M.A)$ injective si et seulement si χ_A et χ_B ont une racine commune par contraposée.

2011/12

L'application $x \longrightarrow \ln(1 + \sin(x))$.

D.S.11

L'application $t \longrightarrow \ln(1 + \sin(t))$ est définie sur $] -\pi/2, \pi/2[$ et même sur $] -\pi/2, 3\pi/2[$. Elle y est continue, dérivable, de dérivée $x \longrightarrow \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}$ dans laquelle on pourra identifier une tangente de l'arc moitié, déphasée, si on y tient. Cette dérivée est positive sur notre intervalle d'étude. f croît. En $-\pi/2$ on a une asymptote verticale. En 0 on a une tangente égale à la première bissectrice. En $\pi/2$ on a une tangente horizontale.

On étudie ensuite la différence $f - Id$ de dérivée $x \longrightarrow \frac{\cos(x) - 1 - \sin(x)}{1 + \sin(x)}$. On étudie le numérateur de cette dérivée comme une fonction auxiliaire g (le dénominateur est positif). g' est égale à $x \longrightarrow -\sin(x) - \cos(x)$.

g est positive avant 0, négative après. $(f - Id)'$ est positive puis négative. $f - Id$ est croissante, puis décroissante. En 0 elle est nulle.

$f - Id$ admet un maximum nul en 0, elle est donc négative.

Le graphe de f est sous la bissectrice, et ne la touche qu'en 0.

Pour avoir le développement limité de f en 0, on écrit une formule de Taylor, puisque f est de classe C_∞ par les théorèmes algébriques. On dérive plusieurs fois : $f' = x \longrightarrow \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}$, $f'' = x \longrightarrow \frac{-1}{1 + \sin(x)}$ après des simplifications étonnantes (on retrouve la concavité de f).

On calcule ces dérivées en 0 : $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $f''(0) = -1$.

On écrit une formule de Taylor avec reste intégrale : $f(0 + h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2} \cdot \int_{t=0}^{t=1} f^{(3)}(t.h). (1-t)^2 . dt$.

Devant l'intégrale, on factorise h^2 (il reste h), et dans l'intégrale on borne $f^{(3)}$. En notant donc φ l'application $h \longrightarrow h \cdot \int_0^1 (1-t)^2 . f^{(3)}(t.h). dt$, on a le développement limité demandé $f(h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$ quand h tend vers 0.

2011/12

La suite $u_{n+1} = \ln(1 + \sin(u_n))$.

D.S.11

On a obtenu grâce aux variations de $f : \forall x \in [0, \pi/2], f(x) \in [0, \pi/2]$, et on montre alors par récurrence sur $n : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, \pi/2]$ qui prouve à la fois l'existence et le caractère borné de la suite (u_n) .

Ensuite, la position par rapport à la bissectrice ($f(x) \leq x$ pour tout x de $[0, \pi/2]$) permet d'écrire $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$ (on ne peut l'écrire qu'après avoir montré que les u_n sont dans l'intervalle d'application de la formule $f(x) \leq x$).

Avec la minoration par 0 et la décroissance, on a la convergence de la suite vers son plus grand minorant (théorème).

On ne connaît pas encore la valeur de la limite. Appelons la pour l'instant β .

On reprend : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n . On fait tendre n vers $+\infty$. Le membre de gauche tend vers β . Le membre de droite tend vers $f(\beta)$ (*continuité de f*). Par unicité de la limite : $\beta = f(\beta)$. La limite est un point fixe de f .

Or, f n'a qu'un point fixe (étude des variations de $f - Id$), et c'est 0.

On en déduit : la suite u converge vers 0 (*pas de raccourci dans le raisonnement*).

2011/12

Vitesse de convergence.

D.S.11

On définit la suite v par $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. On a deux termes qui explosent tous les deux... A la même vitesse. On a vraiment en forme indéterminée.

Cette quantité est de la forme $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x}$ avec x qui tend vers 0.

On réduit au dénominateur commun : $\frac{x - f(x)}{x \cdot f(x)}$ et on fait appel au développement limité en 0 :

$\frac{x - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x \cdot (x + o(x))}$ (en prenant en bas un développement d'ordre 1 qui doit être suffisant).

On simplifie par x^2 en haut et en bas : $\frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)}$. On fait g tend n vers l'infini, donc x vers 0 et la limite vaut $1/2$ comme indiqué.

Au grand dam de ceux qui disaient $\frac{1}{f(x)}$ est équivalent à $\frac{1}{x}$, donc par soustraction, il ne reste que 0.

On somme, on divise par n (nombre de termes). On a une moyenne de Cesàro. Or, quand une suite telle que v converge vers $1/2$, sa moyenne de Cesàro converge aussi vers $1/2$.

Mais $\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ est une somme télescopique de valeur $\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}$.

On divise par n : $\frac{1}{n \cdot u_n} - \frac{1}{n \cdot u_0}$ converge vers $1/2$.

Or, $\frac{1}{n \cdot u_0}$ converge déjà vers 0 (la variable c'est n). Il reste juste " $\frac{1}{n \cdot u_n}$ tend vers $\frac{1}{2}$ ".

On en déduit que $\frac{2/n}{u_n}$ converge vers 1.

C'est la définition de " u_n est équivalent à $\frac{2}{n}$ ".

La valeur initiale $u_0 = \pi/2$ n'a aucun rôle, la vitesse de convergence reste la même, dès lors qu'on démarre avec un u_0 dans l'intervalle stable $]0, \pi]$.

Si on démarre avec une valeur plus basse que 0, un raisonnement qui ne sera pas fait ici nous fait quitter l'intervalle $] - \pi/2, 0[$ et nous ramène au cas précédent.

2011/12

Résultats préliminaires pour la représentation des réels de $]1, 2]$.

D.S.11

On regarde les premiers termes : $p_1 \geq (p_0)^2$, puis $p_2 \geq (p_1)^2 \geq ((p_0)^2)^2 = (p_0)^4$, puis $p_3 \geq (p_2)^2 \geq ((p_0)^4)^2 = (p_0)^8$ (tous les facteurs sont positifs, les sens des inégalités sont préservés).

On continue : $p_3 \geq (p_2)^2 \geq ((p_0)^8)^2 = (p_0)^{16}$.

On trouve des exposants "puissances de 2" : $p_n \geq (p_0)^{2^n}$ pour tout n . On le prouve par récurrence sur n (non rédigée ici). Et on évite des fausses manipulations sur les exposants...

On regarde la formule à prouver au rang 0 :

$\forall \alpha \in]0, 1[, (1 - \alpha) \cdot (1 + \alpha^{(2^0)}) = (1 - \alpha) \cdot (1 + \alpha) = 1 - \alpha^2 < 1$. C'est fait.

On suppose ensuite à un rang n : $\forall \alpha \in]0, 1[, (1 - \alpha) \cdot \prod_{k=0}^n (1 + \alpha^{(2^k)}) < 1$.

On se donne alors α dans $]0, 1[$ et on veut majorer $(1 - \alpha) \cdot \prod_{k=0}^{n+1} (1 + \alpha^{(2^k)})$. Or, il y a un terme de plus que dans $(1 - \alpha) \cdot \prod_{k=0}^n (1 + \alpha^{(2^k)})$, et ce terme $(1 + \alpha^{(2^{n+1})})$ est plus grand que 1.

On a l'impression de ne pas pouvoir conclure. Sauf en buffant, en inventant de fausses formules sur les exposants.

Aors, où est l'idée ? Dans le fait que la récurrence se conduit sur n avec α non fixé.

On écrit le résultat à l'ordre n pour a égal à α^2 , qui est bien dans $]0, 1[$ aussi. On écrit donc : $(1 - \alpha^2) \cdot \prod_{k=0}^n (1 + (\alpha^2)^{(2^k)}) < 1$.

On arrange, avec de vraies formules sur les exposants : $(1 - \alpha) \cdot (1 + \alpha) \cdot \prod_{k=0}^n (1 + \alpha^{2 \cdot (2^k)}) < 1$.

On obtient $(1 - \alpha) \cdot (1 + \alpha) \cdot \prod_{k=0}^n (1 + \alpha^{(2^{k+1})}) < 1$.

On réindexe : $(1 - \alpha) \cdot (1 + \alpha) \cdot \prod_{p=1}^{n+1} (1 + \alpha^{(2^p)}) < 1$.

On place un terme de plus en tête, c'est $1 + \alpha$: $(1 - \alpha) \cdot \prod_{p=0}^{n+1} (1 + \alpha^{(2^p)}) < 1$.

On a obtenu : $\forall \alpha \in]0, 1[, (1 - \alpha) \cdot \prod_{p=0}^{n+1} (1 + \alpha^{(2^p)}) < 1$, comme demandé au rang $n + 1$.

On pouvait aussi arriver au résultat en voyant dans $(1 - \alpha) \cdot \prod_{p=0}^n (1 + \alpha^{(2^p)})$ un joli produit télescopique.

2011/12

Convergence de la suite (u_n) .

D.S.11

La suite (u_n) est bien définie. Ses termes sont tous positifs, comme produit de termes positifs. De plus, pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par $\left(1 + \frac{1}{p_{n+1}}\right)$, plus grand que 1. La suite est croissante.

On majore ensuite grâce à notre premier lemme (tous les termes sont positifs) : $u_n \leq \prod_{k=0}^n \left(1 + \left(\frac{1}{p_0}\right)^{(2^k)}\right)$.

On poursuit avec notre second lemme : $u_n \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_0}}$ (α y est égal à $1/p_0$).

La suite est majorée (le majorant est un réel et non une suite qui bougerait aussi avec n). Elle converge vers son plus petit majorant.

On précise toujours : "toute suite réelle croissante majorée converge vers son plus petit majorant" à la place de la version "toute suite croissante majorée converge" telle qu'elle est parfois énoncée en Terminale.

La limite est entre $\left(1 + \frac{1}{p_0}\right)$ et $\frac{1}{1 - \frac{1}{p_0}}$.

On explicite : $\frac{1 + p_0}{p_0} < r(p) \leq \frac{p_0}{p_0 - 1}$, et on élargit : $1 < \frac{1 + p_0}{p_0} < r(p) \leq \frac{p_0}{p_0 - 1} \leq 2$

Tiens, c'est la même formule à droite qu'à gauche, mais avec $p_0 - 1$ à la place de p_0 . Si on a un peu

d'habitude des idées sous ce type d'exercice, on devine le découpage de $]1, 2]$ en petits intervalles qui s'emboîtent les uns derrière les autres.

On compose par l'application $t \longrightarrow \frac{t}{t-1}$, décroissante sur I ; tous calculs faits : $p_0 + 1 > \frac{r(p)}{r(p)-1} \geq p_0$.

Comme p_0 est entier, on reconnaît la définition de p_0 est la partie entière de $\frac{r(p)}{r(p)-1}$.

D.S.12	Charlemagne	vendredi 23 mars	2011/2012	D.S.12
---------------	-------------	------------------	-----------	---------------

2011/12	DISTANCE	D.S.12
---------	-----------------	---------------

Rappel une distance sur un ensemble E est une application d de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant
 $\forall (a, b, c) \in E^3, \left(d(a, b) = d(b, a) \right), \left(d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) \right), \left(d(a, b) = 0 \Rightarrow a = b \right).$

< ♠(24) > Montrez que $(x, y) \rightarrow |y - x|$ est une distance sur $\mathbb{R}$. (2 pt.)

< ♠(25) > Montrez que $(a, b) \rightarrow \frac{|b - a|}{1 + |b - a|}$ est une distance sur $\mathbb{C}$. (4 pt.)

Déterminez l'ensemble des points à égale distance des deux complexes 1 et 0. (2 pt.)

< ♠(26) > Montrez $Tr(tA.A) \geq 0$ pour toute matrice réelle A de taille 3 sur 3. (1 pt.) Montrez $(Tr(tA.B))^2 \leq Tr(tA.A).Tr(tB.B)$ pour tout couple de matrices A et B (vous pourrez regarder le signe du trinome $Tr(t(\lambda.A + B).(\lambda.A + B))$). (2 pt.) Montrez que $(AB) \rightarrow (Tr(t(A - B).(A - B)))^{1/2}$ est une distance sur $M_n(\mathbb{R})$. (3 pt.)

< ♠(27) > Soit A une partie non vide d'un ensemble E muni d'une distance d . Montrez pour tout x de E l'existence de $\inf\{d(x, a) | a \in A\}$ (on note alors cette quantité $dist(x, A)$). (1 pt.)

< ♠(28) > On se donne x et y dans E . Montrez pour tout a de A : $dist(y, A) \leq d(x, y) + d(x, a)$. (2 pt.)
Déduez : $dist(y, A) - d(x, y) \leq dist(x, A)$, puis $|dist(y, A) - dist(x, A)| \leq d(x, y)$ (comment appelleriez vous cette propriété). (3 pt.)

2011/12	CORDES	D.S.12
---------	---------------	---------------

On note I le segment $[0, 1]$ et E l'ensemble des applications continues de I dans $\mathbb{R}$ nulles en 0 et en 1. Pour f dans E , un réel positif a est appelé une corde de f si il existe au moins un x dans I vérifiant $f(x + a) = f(x)$. Pour f dans E note $C(f)$ l'ensemble des cordes de f . On pose $H^* = \left\{ \frac{1}{n+1} | n \in \mathbb{N} \right\}$ et $H = H^* \cup \{0\}$. On définit l'ensemble U des "cordes universelles" : $U = \bigcap_{f \in E} C(f)$. Montrez que 0 et 1 sont dans U . (1 pt.)

MPSI2	Premiers exemples	2011/12	D.S.12
-------	-------------------	---------	---------------

X- 1) Montrez que $x \rightarrow \sin(\pi.x)$ est dans E et déterminez ses cordes. (3 pt.)

X- 2) Donnez un polynôme de degré 2 de E et déterminez ses cordes. (3 pt.)

X- 3) Montrez que $x \rightarrow x^3 - 4.x^2 + 3.x$ est dans E , représentez la sur I et déterminez ses cordes. (4 pt.)

X- 4) Montrez que $x \rightarrow 3.x^3 - 4.x^2 + x$ est dans E , représentez la sur I et déterminez ses cordes. (4 pt.)

MPSI2	Inclusion	2011/12	D.S.12
-------	-----------	---------	---------------

XI- 1) Soit f dans E . Déterminez les entiers naturels de $C(f)$. (1 pt.)

XI- 2) On définit $\varphi = x \rightarrow f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$. Montrez : $\varphi(1/2) = -\varphi(0)$. Déduez que 1/2 est dans $C(f)$. (2 pt.)

XI- 3) On se donne un h dans H^* . On définit alors $\varphi_h = x \rightarrow f(x + h) - f(x)$. Calculez alors

$k=(1-h)/h$
 $\sum_{k=0} \varphi_h(k.h)$ après avoir prouvé que cette somme a bien un sens. (2 pt.) Déduisez l'existence d'au moins un entier k vérifiant $\varphi_h(k.h) \cdot \varphi_h((k+1).h) \leq 0$. Déduisez que h est une corde de f . (3 pt.)
 On a donc prouvé : $H \subset C(f)$ pour tout f de E .

XII- 1) Soit f un élément de E . On suppose que f est de signe constant sur un segment $[0, \alpha]$ avec $f(\alpha) = 0$. Soit β un élément de $]0, \alpha[$. Montrez que β est dans $C(f)$ (vous pourrez étudier l'accroissement de f entre 0 et β puis l'accroissement entre $\alpha - \beta$ et α). (3 pt.)

XII- 2) Représentez graphiquement $x \rightarrow 15.x - 5 - 4.|5.x - 1| + 3.|5.x - 3|$ sur I après avoir montré qu'elle est dans E (pour le graphe, vous penserez à découper I en plusieurs segments). (3 pt.) Montrez que l'ensemble de ses cordes est exactement $[0, 3/5] \cup \{1\}$. (3 pt.)

MPSI2	Topologie	2011/12	D.S.12
-------	-----------	---------	--------

XIII- 1) Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite fermée si elle est "stable par passage à la limite", c'est à dire : si une suite (a_n) d'éléments de A converge vers un réel α , alors α est dans A . Montrez que I est fermé.

- (2 pt.)
 XIII- 2) Montrez que $]0, 1[$ n'est pas fermé. (2 pt.)
 XIII- 3) Montrez que $\mathbb{Z}$ est fermé. (2 pt.)
 XIII- 4) Montrez que $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé. (1 pt.)
 XIII- 5) Le vide est il fermé? $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est il fermé? (2 pt.)
 XIII- 6) Montrez que l'intersection de deux fermés est un fermé. (2 pt.) Montrez que la réunion de deux fermés est un fermé. (2 pt.)

XIV- 1) Soit f dans E . On veut montrer que $C(f)$ est fermé. Soit (a_n) une suite d'éléments de $C(f)$ qui converge vers un réel α . Montrez qu'il existe une suite (x_n) de réels de I vérifiant $f(x_n + a_n) = f(x_n)$. (2 pt.) En appliquant un théorème de nom à consonnance italo-germanique, déduisez qu'il existe un réel λ de I vérifiant $f(\lambda + \alpha) = f(\lambda)$. (3 pt.)

XIV- 2) Montrer que U est aussi un fermé. (2 pt.)

MPSI2	Contre-exemple	2011/12	D.S.12
-------	----------------	---------	--------

- 1) On veut montrer qu'un nombre qui n'est pas dans H n'est pas une corde universelle. On va prendre un choix arbitraire (ici $2/7$) et montrer qu'il existe au moins une fonction dont λ n'est pas une corde. On veut définir une application φ sur $[0, 2/7]$, dont le graphe est ci-contre. Si je n'ai pas donné de graphe,

en voici la description : φ est un polynôme de degré 2 de tableau de valeurs

x	0	1/7	2/7
$\varphi(x)$	0	-1	1/3

Explicitiez φ . (2 pt.)

- 2) On pose ensuite : $f = x \rightarrow \varphi\left(x - \frac{2}{7}\left[\frac{7.x}{2}\right]\right) + \frac{[7.x/2]}{3}$. Montrez que f est continue en $2/7$, $4/7$ et $6/7$. (3 pt.) Montrez que f est dans E . (2 pt.)

- 3) Montrez : $f\left(x + \frac{2}{7}\right) = f(x) + \frac{1}{3}$ pour tout x . (2 pt.) Montrez que $2/7$ n'est pas une corde de f . (1 pt.)

D.S.12	MPSI2	774 points	Année 2011/12	D.S.12
--------	-------	------------	---------------	--------

Les parties du problème "cordes" sont très indépendantes...

Il n'y a pas de problème : $x \rightarrow |y - x|$ est une distance sur $\mathbb{R}$, c'est du cours de Terminale.

L'application $(x, y) \rightarrow \frac{|y - x|}{1 + |y - x|}$ est définie sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ (dénominateur jamais nul). Les rôles de x et y sont symétriques. Cette quantité est positive, car un module de complexe est positif (qui a oublié de vérifier "dans $\mathbb{R}^+$ "?). Cette quantité est nulle si et seulement si son numérateur est nul, ce qui se traduit par $y = x$.

La seule difficulté est l'inégalité triangulaire. On se donne trois complexes x, y et z . On calcule la différence $\frac{|y - x|}{1 + |y - x|} + \frac{|z - y|}{1 + |z - y|} - \frac{|z - x|}{1 + |z - x|}$ en ne regardant que le signe du dénominateur.

On trouve $b.(1 + c).(1 + a) + a.(1 + c).(1 + b) - c.(1 + a).(1 + b)$ en posant $a = |y - x|$, $b = |z - y|$ et $c = |z - x|$ pour alléger. On développe et il reste $a + b + a.b.c + 2.a.b - c$. Or, on a $|z - x| \leq |z - y| + |y - x|$ par inégalité triangulaire usuelle sur $\mathbb{C}$. La différence $a + b - c$ est positive, et les autres termes le sont aussi...

Bref, la différence $\frac{|y - x|}{1 + |y - x|} + \frac{|z - y|}{1 + |z - y|} - \frac{|z - x|}{1 + |z - x|}$ est toujours positive. L'inégalité triangulaire est prouvée.

Pas de difficulté, question juste un tout petit peu calculatoire.

Ah si, il est facile de partir dans des calculs idiots et inextricables, en écrivant les complexes sous la forme $\alpha + i.\beta$ et en calculant des $\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}$ à tout bout de champ.

Rappelons que les complexes ont leur existence propre, et qu'il faut travailler avec eux sans les écrire "partie réelle et partie imaginaire". Retenez le, sinon, vous ne dépasserez jamais le niveau bac... à sable.

L'égalité $\frac{|z|}{1 + |z|} = \frac{|z - 1|}{1 + |z - 1|}$ conduit après produit en croix à $|z| = |z - 1|$. On traduit géométriquement : "égale distance de 0 et de 1 (au sens traditionnel du terme)". Géométriquement, c'est la médiatrice du segment $[0, 1]$. C'est la droite parallèle à l'axe imaginaire, d'abscisse $1/2$.

Le début est presque du cours. Quand on prend une matrice (carrée de taille 3), on effectue le produit de la matrice et de sa transposée, en n'en regardant que les termes diagonaux. Ce sont des sommes de trois carrés. On a donc $Tr(^tA.A) = \sum_{\substack{i \leq 3 \\ k \leq 3}} (a_i^k)^2$. C'est une somme de carrés de réels, c'est donc un réel

positif. Et il n'est nul que si la matrice est nulle.

Quand on développe $Tr(^t(\lambda.A + B).(\lambda.A + B))$ on trouve $\lambda^2.Tr(^tA.A) + \lambda.Tr(^tA.B + ^tB.A) + Tr(^tB.B)$ qui est bien un trinôme du second degré en λ . Il reste toujours positif, grâce à la question précédente. Ses racines ne sont donc pas réelles distinctes, et son discriminant est donc négatif ou nul : $(Tr(^tA.B) + Tr(^tB.A))^2 - 4.Tr(^tA.A).Tr(^tB.B)$ est négatif ou nul.

Or, les deux matrices $^tA.B$ et $^tB.A$ sont transposées l'une de l'autre et ont la même trace. On a donc $(Tr(^tA.B))^2 \leq Tr(^tA.A).Tr(^tB.B)$.

Oui, c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour A et B données, $B - A$ est une matrice qu'on peut noter C . La quantité $Tr(^tC.C)$ est donc un réel positif ou nul. On peut en prendre la racine carrée : $d(A, B)$ existe et est positif en tant que racine

d'un réel positif. C'est même $\sqrt{\sum_{\substack{i \leq 3 \\ j \leq 3}} (a_i^k - b_i^k)^2}$.

Cette quantité est nulle si et seulement si on a $(a_i^k - b_i^k)^2 = 0$ pour tous les couples (i, k) ce qui donne $A = B$.

Ensuite, les rôles de A et B sont symétriques : $d(A, B) = d(B, A)$.

Il nous manque encore l'inégalité triangulaire. On se donne trois matrices M , N et P . On doit comparer $d(M, N) + d(N, P)$ à $d(M, P)$. On compare les carrés, car ces réels sont positifs. Et on pose $A = M - N$, $B = N - P$ et $C = M - P$ pour alléger.

On en est à comparer $Tr({}^t A.A) + Tr({}^t B.B) + 2.\sqrt{Tr({}^t A.A).Tr({}^t B.B)}$ et $Tr({}^t C.C)$.

Mais on a $C = A+B$ (Chasles, finalement non ?). On développe $Tr({}^t C.C)$ et il sort $Tr({}^t A.A) + Tr({}^t B.B) + 2.Tr({}^t A.B)$.

C'est précisément l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui permet de conclure.

Là encore, rien de bien original, et des questions un peu calculatoires.

Elles deviennent terriblement calculatoires et stériles si on redescend jusqu'au niveau des coefficients là encore...

Mais là encore, une matrice de taille 3 sur 3 existe sans qu'on soit obligé de poser neuf coefficients réels.

2011/12

Distance à une partie.

D.S.12

On se donne donc A et x . La partie $\{d(x, a) | a \in A\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (on prend un point a dans A pour avoir au moins un élément dans cet ensemble), minorée (par 0 puisqu'il s'agit de distances).

Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure (atteinte ou non).

Comme 0 est un minorant, $\text{dist}(x, A)$ est le plus grand minorant, il est plus grand que 0.

On se donne x et y . On écrit pour tout a de A :

$$\text{dist}(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

La première inégalité, c'est par définition de la borne inférieure (minorant) et la deuxième, c'est par l'inégalité triangulaire.

On fait passer $d(x, y)$ de l'autre côté : le réel $\text{dist}(x, A) - d(x, y)$ minore tous les $d(y, a)$ quand a décrit A .

Le réel $\text{dist}(x, A) - d(x, y)$ est un minorant de $\{d(y, a) | a \in A\}$.

Par définition du "plus grand de tous les minorants", on a donc $\text{dist}(y, A) - d(x, y) \leq \text{dist}(x, A)$.

Les plus idiots d'entre vous font là dessus un massacre sur les variables, laissant trainer des a alors qu'on est passé à la borne supérieure ou autre.

On ré-équilibre les choses : $\text{dist}(y, A) - \text{dist}(x, A) \leq d(x, y)$.

On refait le même raisonnement avec y et x à la place de x et y . On obtient $\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A) \leq d(y, x) = d(x, y)$.

On fait le bilan : $\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A)$ est dans $[-d(x, y), d(x, y)]$.

C'est précisément dans ce segment que sont les nombres de valeur absolue plus petite que $d(x, y)$.

On a donc $|\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A)| \leq d(x, y)$.

On qualifiera naturellement cette propriété de "caractère lipschitzien de la fonction distance à un ensemble".

2011/12

Premières cordes.

D.S.12

On a déjà $f(x+0) = f(x)$ pour tout x et donc au moins pour x égal à 0 par exemple. On en déduit que 0 est une corde. Et ce pour toute fonction.

De plus pour toute fonction f de E , on a $f(0+1) = f(0)$, ce qui prouve que 1 est une corde.

Or, l'ensemble U est fait des réels qui sont cordes pour toutes les fonctions (intersection).

La fonction sinus admet tous les réels de I comme cordes.

En effet, pour a donné, il existe au moins un réel x vérifiant $\sin(\pi.x + \pi.a) = \sin(\pi.x)$ (attention, un réel x pas tous!).

Il faut quand même l'explicitier, sinon on n'a pas tous les points.

Graphiquement, on connaît bien $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$. Il suffit donc d'avoir $\theta = \pi.x$ et $\pi - \theta = \pi.x + \pi.a$.

La réponse est donc $x = \frac{1-a}{2}$.

Et on interprète avec l'axe de symétrie en $1/2$ sur le graphe du sinus.

On n'a guère le choix pour ce qui est des trinômes du second degré : $x.(x-1)$ ou ses multiples, afin qu'ils soient nuls en 0 et en 1.

Là encore, on a un axe de symétrie en $1/2$ et pour a donné, on constate : $f\left(\frac{1-a}{2}\right) = f\left(\frac{1-a}{2} + a\right)$.

On ne pouvait pas prendre le polynôme nul, puisque on demandait un polynôme de degré 2 et pas de degré inférieur ou égal à 2.

On regarde le polynôme de degré 3 : $X^3 - 4.X^2 + 3.X$. Il est continu, nul en 0 et en 1. On le dérive en $3.X^2 - 8.X + 3$ de racines $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$ et $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$. Une et une seule est dans I (c'est normal, le graphe du polynôme part de $(0,0)$, croît puis décroît pour passer par $(1,0)$).

Graphiquement toujours, on peut tracer des cordes de toute longueur a entre 0 et 1.

On vérifie pour a donné en s'intéressant à $P(x+a) - P(x)$. On obtient $3.a.X^2 + (3.a^2 - 8.a).X + a^3 - 4.a^2 + 3.a$.

Il faut annuler ce terme issu de l'équation $P(X+a) = P(X)$.

Et en plus, il faut l'annuler pour au moins un X de I . On calcule donc la valeur en 0 (c'est $a^3 - 4.a^2 + 3.a$) et en 1 : c'est $a^3 - a^2 - 2.a$.

Or, la quantité $a^3 - 4.a^2 + 3.a$ est positive (a est dans I) et la quantité $a^3 - a^2 - 2.a$ est négative pour a dans I .

Notre trinôme $3.a.X^2 + (3.a^2 - 8.a).X + a^3 - 4.a^2 + 3.a$ change donc de signe et s'annule donc au moins une fois sur I . C'est ce qu'on lui demande de faire...

La dernière fonction du troisième degré $x \longrightarrow 3.x^3 - 4.x^2 + x$ est continue, nulle en 0 et en 1. Et aussi en $1/3$ par factorisation ou somme des racines.

On la dérive en $x \longrightarrow 9.x^2 - 8.x + 1$ dont les deux racines r_1 et r_2 sont dans I . Comment je le sais sans effort ? Simplement parce qu'il faut que cette dérivée s'annule entre 0 et $1/3$ puis entre $1/3$ et 1...

Notre application est donc croissante sur $[0, r_1]$, décroissante sur $[r_1, r_2]$ (avec $1/3$ entre ces deux racines) puis à nouveau croissante sur $[r_2, 1]$.

Les réels plus grands que $2/3$ ne peuvent pas être des cordes (à part 1 avec la solution $P(0) = P(0+1)$). En effet, si a est plus grand que $2/3$, les seuls réels pouvant servir dans une équation telle que $P(x) = P(x+a)$ doivent rester entre 0 et $1/3$ pour que $x+a$ ne sorte pas de I . Mais alors $P(x)$ est positif et $P(x+a)$ est négatif. Il ne peut y avoir égalité.

Ensuite, tout réel plus petit que $2/3$ est une corde. Et c'est morceau de graphe au dessus de $[2/3, 1]$ qui sert.

Et comme il serait fastidieux de faire des calculs explicites, on modifie l'ordre des questions et on utilise le fait que P soit de signe constant sur $[1/3, 0]$, nulle aux deux extrémités...

2011/12

Éléments de $C(f)$ nécessairement présents.

D.S.12

Par construction, 0 et 1 sont dans $C(f)$. Par définition, une corde ne doit pas être négative ni dépasser 1 (puisque x et $x+a$ doivent être dans I). Les seuls entiers de $C(f)$ sont 0 et 1.

On définit donc $x \longrightarrow f(x+1/2) - f(x)$. On calcule $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$. On trouve $f(1/2)$ dans un cas et $-f(1/2)$ dans l'autre.

Ces deux valeurs sont par construction opposées en signe. Et l'application φ est continue sur $[0, 1/2]$. Il y a donc au moins un point x de $[0, 1/2]$ pour lequel on a $f(x + 1/2) - f(x) = 0$ (théorème des valeurs intermédiaires, version simple).

L'existence d'un tel x prouve que $1/2$ est une corde.

On prend un élément h de H^* . Il est de la forme $\frac{1}{n+1}$ avec n entier. La quantité $\varphi_h(x)$ est définie pour x et $x+h$ dans I , c'est à dire pour x entre 0 et $1 - \frac{1}{n+1}$.

On effectue la somme $\sum_{k=0}^{k=(1-h)/h} \varphi_h(k.h)$. C'est quoi cette borne haute de la somme ? Pour h de la forme

$\frac{1}{n+1}$ est simplement n . Et il y a $n+1$ termes dans la somme.

Ils télescopent dans la somme des $f((k+1).h) - f(k.h)$ et il reste juste $f(1) - f(0)$ (termes extrêmes). La fonction f est dans E ; la somme est nulle !

Ensuite, il y a deux possibilités. Ou bien tous les termes de la somme sont nuls, ou bien il y en a au moins un qui est positif. Mais alors il en faut au moins un de négatif pour compenser.

On prend le premier indice pour lequel on bascule d'un $\varphi_h(k.h)$ d'un signe à un $\varphi_h((k+1).h)$ de l'autre signe.

Mais alors le produit $\varphi_h((k+1).h) \cdot \varphi_h(k.h)$ est alors négatif ou nul comme demandé.

On déduit que $t \rightarrow \varphi_h(t)$ change de signe sur $[k.h, (k+1).h]$. Cette application continue va donc s'annuler au moins une fois sur cet intervalle. Il existe donc au moins un t de $[k.h, (k+1).h]$ (donc a fortiori de I) vérifiant $f(t+h) - f(t) = 0$.

Le graphe de f a donc une corde horizontale entre $(t, f(t))$ et $(t+h, f(t))$ (le même $f(t)$).

C'est la généralisation du cas $h = 1/2$ croisé une question plus haut (et en T.D.).

2011/12

Cas où f reste de signe constant sur $[0, \alpha]$.

D.S.12

On a une application qui s'annule aux deux extrémités et reste de signe constant. On va supposer qu'elle reste positive, quitte à travailler avec $-f$.

Visuellement, on a un petit monticule de largeur α . Il doit être facile de trouver une corde de largeur inférieure.

On définit donc $x \rightarrow f(x+\beta) - f(x)$, avec x entre 0 et $\alpha - \beta$. On la note ψ pour changer.

On calcule : $\psi(0) = f(\beta) - f(0) = f(\beta) - 0 \geq 0$.

On poursuit : $\psi(\alpha - \beta) = f(\alpha) - f(\alpha - \beta) = -f(\alpha - \beta) \leq 0$.

La première valeur est positive. La deuxième valeur est négative.

Par le théorème des valeurs intermédiaires (mots clés intervalle et continuité), on a au moins un x vérifiant $\psi(x) = 0$.

Ce x sert à définir une corde de largeur β .

2011/12

Un exemple affine par morceaux.

D.S.12

On a une application continue, comme somme de termes continus.

On la calcule en 0 et en 1 et on trouve 0 dans les deux cas. Cette application est dans E .

Pour la représenter graphiquement, on distingue les intervalles.

La présence de valeurs absolues nous incite à découper en $1/5$ et $3/5$.

x	0		$1/5$		$3/5$		1
$15.x - 5$	-5	$15.x - 5$	-2	$15.x - 5$	4	$15.x - 5$	10
$-4 \cdot 5.x - 1 $	-4	$20.x - 4$	0	$4 - 20.x$	-8	$4 - 20.x$	-16
$3 \cdot 5.x - 3 $	9	$9 - 15.x$	6	$9 - 15.x$	0	$15.x - 9$	6
$f(x)$	0	$20.x$	4	$-20.x + 8$	-4	$10.x - 10$	0

La connaissance des valeurs en 0, 1/5, 3/5 et 1 permet de tracer le graphe, comme un simple “jeu à points”, sans même utiliser les formules telles que $y = -20.x + 8$.

On note que le théorème des valeurs intermédiaires fait que f s'annule et change de signe en un point de $[1/5, 3/5]$. Ce point, c'est 2/5.

1 est une corde (prendre x égal à 0).

3/5 est une corde (prendre x égal à 2/5).

Comme f est de signe constant sur $[2/5, 1]$, nulle aux deux extrémités, tous les réels de 0 à 3/5 (longueur de l'intervalle) sont des corde.

Les réels plus grands de 3/5 ne peuvent pas être des cordes, puisque sur chaque intervalle de I de longueur plus grande que 3/5, f change de signe...

2011/12

Une fonction issue d'un polynôme P vérifiant $2/7 \notin C(f)$.

D.S.12

On trouve le polynôme du second degré dont les valeurs sont données en trois points : il se factorise par x car il est nul en 0. Il ne reste qu'un trinôme de la forme $a.X^2 + b.X$. Les valeurs en 1/7 et 2/7 donnent le système $\begin{cases} a + 7.b = -49 \\ 4.a + 14.b = 49/3 \end{cases}$ que l'on résout : $\varphi(x) = \frac{343.x^2 - 91.x}{6}$ (et si on se contentait de proposer et vérifier?).

On pouvait aussi combiner des polynômes en $X(X - 1/7)$, $(X - 1/7).(X - 2/7)$ et $X.(X - 2/7)$.

On crée ensuite une formule avec des parties entières. On calcule en 2/7 par valeur inférieure l'éventuelle limite de l'application : $f(x) = \varphi\left(x - \frac{2}{7}\left[\frac{7.x}{2}\right]\right) + \frac{[7.x/2]}{3} = \varphi(x - 0) + 0$ tend vers $\varphi(2/7) = 1/3$.

On regarde par valeur supérieure : $f(x) = \varphi\left(x - \frac{2}{7}\left[\frac{7.x}{2}\right]\right) + \frac{[7.x/2]}{3} = \varphi\left(x - \frac{2}{7}\right) + \frac{1}{3}$ tend vers $\varphi(0) + 1/3$ c'est à dire vers 1/3.

Les deux limites en 2/7 sont égales, l'application est continue, puisque sa valeur en 2/7 est aussi cette valeur 1/3.

Les deux études en 4/7 et 6/7 sont du même modèle.

Ou alors on utilise la formule de presque-périodicité. Elle permet vite de remplacer $\lim_{\substack{x \rightarrow 4/7 \\ x < 4/7}} f(x)$ par

$$\frac{1}{3} + \lim_{\substack{x \rightarrow 2/7 \\ x < 4/7}} f(x) \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 4/7 \\ x > 4/7}} f(x) \text{ par } \frac{1}{3} + \lim_{\substack{x \rightarrow 2/7 \\ x > 4/7}} f(x).$$

$$\text{On la démontre } f(x + 2/7) = \varphi\left(x + \frac{2}{7} - \frac{2}{7}\left[\frac{7.x}{2} + \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{7}\right]\right) + \frac{[7.x/2 + 1]}{3}.$$

$$\text{On sort le 1 des parties entières : } f(x + 2/7) = \varphi\left(x + \frac{2}{7} - \frac{2}{7}\left[\frac{7.x}{2}\right] - \frac{2}{7}\right) + \frac{[7.x/2] + 1}{3}.$$

On rappelle qu'on n'a en général pas grand chose à dire (à part des bêtises) sur $[a+b]$ comparativement à $[a] + [b]$, sauf si b est entier.

$$\text{On simplifie et on a bien } f(x + 2/7) = f(x + 1/3).$$

f est par construction continue. On ne peut jamais avoir $f(x + 2/7) = f(x)$ puisque l'on a $f(x + 2/7) = f(x) + 1/3$ pour tout x .
2/7 ne peut donc pas être une corde.

Et pendant ce temps, f est continue...

f est nulle en 0.

$$\text{Et que vaut elle en 1 ? } f(1) = \varphi\left(1 - \frac{2}{7}\left[\frac{7}{2}\right]\right) + \frac{[7/2]}{3} \text{ par définition même.}$$

On poursuit : $f(1) = \varphi\left(1 - \frac{6}{7}\right) + \frac{3}{3}$ (normal, pour calculer $f(1)$ il suffit de calculer $f(1/7)$ et d'utiliser 3 fois la formule $f(x + 2/7) = f(x) + 1/3$).

On termine : $\varphi(1/7) = \frac{343/7 - 91}{6} \cdot \frac{1}{7} = \frac{343 - 637}{6 \cdot 7} = -1$.

On a donc $f(1) = 0$. Mais oui !

On a donc une application dans E dont $2/7$ n'est pas une corde.

2011/12

Des histoires de fermés.

D.S.12

On commence par I . On prend une suite (a_n) à valeurs dans I . On suppose qu'elle converge vers un réel α . On a donc $0 \leq a_n \leq 1$ pour tout n . On passe à la limite (les deux réels sont impassibles, et la suite du milieu est supposé converger). On obtient par passage à la limite $0 \leq \alpha \leq 1$.

Le réel α est aussi dans I .

En revanche, si ici l'hypothèse est $0 < a_n < 1$ pour tout n , le passage à la limite donne $0 \leq \alpha \leq 1$ et on peut être tombé hors de $]0, 1[$.

J'en veux pour exemple la suite $(1/n)_n$. Tous ses termes sont dans $]0, 1[$, elle converge, et sa limite n'est plus dans $]0, 1[$.

On prend donc une suite $(a_n)_n$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et on suppose qu'elle converge vers un réel α . Mais en prenant $\varepsilon = 1/4$ dans la définition de la convergence, on voit que pour n et p plus grand que $N_{1/3}$ on a $|a_n - \alpha| \leq 1/3$ et $|a_p - \alpha| \leq 1/3$. Ceci entraîne $|a_n - a_p| \leq 2/3$. Comme ce sont des entiers, ils sont égaux. La suite est constante à partir du rang $N_{1/3}$. Et sa limite est donc $a_{N_{1/3}}$. C'est un entier. Le réel α est donc cet entier.

Toute suite d'entiers qui converge a sa limite dans $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Q}$ n'est pas fermé. En effet, la suite des approximations décimales de π est une suite de rationnels dont la limite n'est plus rationnelle. Ces approximations sont de la forme $(10^{-n} \cdot [10^n \cdot \pi])$.

Il en va de même pour $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ par un contre-exemple. La suite des e/n est une suite d'irrationnels. Elle converge (vers 0) et sa limite n'est plus dans $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Le vide est fermé. En effet, si une suite d'éléments de l'ensemble vide converge, alors je suis le pape et sa limite est une glace à la cerise et au gras d'ours.

On prend deux fermés A et B . On prend une suite (a_n) d'éléments de $A \cap B$. On suppose qu'elle converge vers α .

Tous les termes de la suite sont dans A . La limite est dans le fermé A .

Tous les termes de la suite sont dans le fermé B . La limite est dans B .

Le réel α est à la fois dans A et B , il est dans $A \cap B$.

Cette fois, la suite est à valeurs dans $A \cup B$. C'est à dire que chaque terme est soit dans A , soit dans B . Comment se répartissent ils ? Je n'en sais rien, je ne peux donc pas faire d'hypothèse là dessus. Simplement, comme je n'ai que deux tiroirs A et B pour une infinité de chaussettes, j'en déduis qu'au moins un des tiroirs contient une infinité de termes de la suite.

Mais alors, je crée donc une sous-suite de (a_n) dont tous les termes sont dans un des deux fermés. En tant que suite extraite de (a_n) , elle converge et sa limite reste α . Comme on est dans un fermé, la limite α est dans ce fermé. Et il suffit d'être dans un des deux fermés pur être dans leur réunion...

2011/12

$C(f)$ est fermé.

D.S.12

Comme chaque a_n est une corde de f , on a, par définition même l'existence d'un x vérifiant $f(x + a_n) = f(x)$.

Pour chaque indice n un terme x_n dans I , c'est ce qu'on appelle une suite, non ?

La suite (x_n) est bornée par 0 et 1. Elle admet au moins une sous-suite qui converge (Bolzano-Weierstrass pour tout vous dire). Vers un élément de I , puisque I est un fermé.

La suite extraite $(a_{\varphi(n)})$ converge toujours vers α . La suite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers un certain γ par définition. De la relation de corde $f(a_{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)}) = f(x_{\varphi(n)})$, on déduit par continuité de f et passage à la limite : $f(\alpha + \gamma) = f(\gamma)$.

Mais γ est resté dans I (fermé), on a donc $f(\gamma + \alpha) = f(\gamma)$ pour au moins un réel de I . Ceci se lit “ α est une corde de f ”.

D.S.13

Charlemagne

vendredi 6 avril

2011/2012

D.S.13

Pour toute matrice A , on appelle exponentielle de A la limite de la suite matricielle $\left(\left(I_2 + \frac{A}{n}\right)^n\right)$.

Calculez les exponentielles des matrices suivantes : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ (conseil : diagonalisez les). (5 pt.)

2011/12

LANCZOS

D.S.13

On va étudier ce qu'on appelle la dérivée de Lanczos (1956). L'idée : calculer la dérivée en un point a d'une application f donnée par son graphe et non pas par une formule. On va voir qu'au lieu de passer par la limite des taux d'accroissement (trop sensibles aux incertitudes et perturbations), on a intérêt à passer par une intégrale (l'intégration étant un processus plus "robuste" que la dérivation).

MPSI2

Préliminaires.

2011/12

D.S.13

- 1) Soit f dérivable en a , calculez la limite de $\frac{3}{2.h^3} \cdot \int_{-h}^h t.f(a+t).dt$ quand h tend vers 0 (utiliser le développement d'ordre 1 de f). (2 pt.)

- 2) On suppose que f est même trois fois dérivable sur un segment $[a-\alpha, a+\alpha]$ avec $f^{(3)}$ bornée en valeur absolue par M_3 . Montrez que la différence $|f'(a) - \frac{3}{2.h^3} \cdot \int_{-h}^h t.f(a+t).dt|$ se majore par $\frac{\alpha.M_3}{16}$ (majoration grossière qu'on pourrait affiner avec la formule de Simpson). (2 pt.)

- 3) Quel est le prénom de Lanczos (c'est juste une question pour voir qui triche en utilisant son téléphone portable et manque de recul). (0 pt.)

MPSI2

Sujet de concours.

2011/12

D.S.13

- 1) Calculez (x et h réels fixés) : $\int_{-h}^h dt$, $\int_{-h}^h (x+t).dt$, $\int_{-h}^h t.(x+t).dt$, $\int_{-h}^h (x+t)^2 dt$ et $\int_{-h}^h t.(x+t)^2 .dt$. (2 pt.)

- 2) f est une application continue de $[a-\alpha, a+\alpha]$ dans $\mathbb{R}$ (a et α sont deux réels donnés avec α strictement positif). On définit, pour h entre 0 et α : $S_a(h) = \frac{1}{2.h} \cdot \int_{-h}^h f(a+t).dt$ et $G_a(h) = \frac{3}{2.h^3} \cdot \int_{-h}^h t.f(a+t).dt$. Montrez : $S_a(h) = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 f(a+h.t).dt$ et $G_a(h) = \frac{3}{2.h} \cdot \int_{-1}^1 t.f(a+h.t).dt$. (1 pt.)

- 3) Pour cette question, f est l'application $x \rightarrow x^n$ (n est un entier naturel donné). Calculez $S_0(h)$ et $G_0(h)$. (2 pt.) Montrez l'existence de deux polynômes A_a et B_a vérifiant $S_a(h) = a^n + h^2.A_a(h)$ et $G_a(h) = n.a^{n-1} + h^2.B_a(h)$. (2 pt.) Déterminez les limites de $S_a(h)$ et $G_a(h)$ quand h tend vers 0. (5 pt.)

- 4) Pour cette question, f est l'application valeur absolue. Calculez $S_0(h)$ et $G_0(h)$ et leurs limites en 0. f est-elle dérivable en 0? (3 pt.)

- 5) On revient au cas général. On note F une primitive de f . Exprimez $S_x(h)$ à l'aide de F . Montrez que $S_a(h)$ tend vers $f(a)$ quand h tend vers 0. Montrez que $G_a(h)$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0. (4 pt.)

- 6) h est fixé dans $]0, \alpha[$, pour tout couple (x, y) on définit : $\varphi(x, y) = \int_{-h}^h (f(a+t) - (x.t+y))^2 . dt$. Montrez : $\varphi(x, y) = \int_{-h}^h (f(a+t))^2 . dt - 2.x. \int_{-h}^h t.f(a+t).dt - 2.y. \int_{-h}^h f(a+t).dt + \frac{2.h^3}{3}.x^2 + 2.h.y^2$. 1 pt.
 Montrez que φ admet un unique point critique que vous déterminerez à l'aide de $S_a(h)$ et $G_a(h)$ (un point critique est un point où les deux dérivées partielles sont nulles). Interprétez. 3 pt.

MPSI2	Dérivées d'ordre supérieur.	2011/12	D.S.13
-------	-----------------------------	---------	---------------

- 1) f est de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout n on pose $P_n = \frac{(X^2 - 1)^n}{2^n . n!}$. Déterminez le terme de plus haut degré de $(P_n)^{(n)}$ et calculez $P_n^{(2.n)}$. 2 pt.

- 2) Montrez que $P_n^{(k)}$ est nul en 1 et -1 pour tout k de 0 à $n-1$. 3 pt.

- 3) Montrez : $\int_{-1}^1 (1-t^2)^n . dt = \frac{2^{2.n+1} . (n!)^2}{(2.n+1)!}$. 3 pt.

- 4) Montrez pour R polynôme de degré inférieur ou égal à n : $\int_{-1}^1 R(t) . P_n^{(n)}(t) . dt = - \int_{-1}^1 R'(t) . P_n^{(n-1)}(t) . dt$,
 $\int_{-1}^1 R(t) . P_n^{(n)}(t) . dt = (-1)^n . \int_{-1}^1 R^{(n)}(t) . P_n(t) . dt$. Que se passe-t-il si R est de degré strictement inférieur à n . 3 pt. Calculez $\int_{-1}^1 (P_n^{(n)}(t))^2 . dt$. 3 pt. Vérifiez pour n égal à 2. Donnez une instruction Maple pour vérifier pour les petites valeurs de n . 3 pt.

- 1) On note $L_n(a)$ la limite (si elle existe) de $\frac{(2.n+1)!}{2^{n+1} . h^n . n!} . \int_{-1}^1 f(a+h.t) . P_n^{(n)}(t) . dt$. Qui sont L_0 et L_1 ? 1 pt. Montrez : $\int_{-1}^1 f(a+h.t) . P_n^{(n)}(t) . dt = \frac{h^n}{2^n . n!} \int_{-1}^1 f^{(n)}(a+h.t) . (1-t^2)^n . dt$. 2 pt. Montrez que $\int_{-1}^1 (f^{(n)}(a+h.t) - f^{(n)}(a)) . (1-t^2)^n . dt$ tend vers 0 quand h tend vers 0. 2 pt. Dédisez existence et valeur de $L_n(a)$. 2 pt.

- 1) Montrez que $(P_0, P_1', P_2'', \dots, P_n^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ (espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n). 2 pt. On note $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ les composantes d'un polynôme Q sur cette base.

Montrez : $\int_{-1}^1 (Q(t))^2 . dt = \sum_{k=0}^n \frac{2 . (\lambda_k)^2}{2.k+1}$. 3 pt.

- 2) Montrez : $\int_{-1}^1 (f(a+\alpha.t) - Q(t))^2 . dt = \int_{-1}^1 (f(a+\alpha.t))^2 . dt + \sum_{k=0}^n \frac{2}{2.k+1} \left(\lambda_k - \frac{(2.k+1).y_k}{2} \right)^2 - \sum_{k=0}^n \frac{(2.k+1).(y_k)^2}{2}$ en posant $y_k = \int_{-1}^1 f(a+\alpha.t) . P_k^{(k)}(t) . dt$ pour tout k . 2 pt.

- 3) Pour quel polynôme Q l'intégrale $\int_{-1}^1 (f(a+\alpha.t) - Q(t))^2 . dt$ est elle minimale? 2 pt.

D.S.13	MPSI2	839 points	Année 2011/12	D.S.13
---------------	-------	------------	---------------	---------------

La première matrice se diagonalise sans effort : elle est déjà diagonale.

Mais je pense que certains élèves auront passé du temps à retrouver les deux valeurs propres 1 et 3. Et d'autres se seront même trompés...

Pour A égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, on a donc : $(I_2 + A/n)^n$ égale à $\begin{pmatrix} (1 + 1/n)^n & 0 \\ 0 & (1 + (-2/n)^n) \end{pmatrix}$ (par récurrence s'il le faut). La forme indéterminée $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ est connue quand n tend vers l'infini, elle tend vers e^a .

La première limite est $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}$

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ a pour trace et déterminant 0 et -4 , son polynôme caractéristique est $X^2 - 4$ de racines 2 et -2 . On choisit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et on trouve $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a alors $I_2 + A/n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1 + 2/n)^n & 0 \\ 0 & (1 - 2/n)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}$. Les termes $(1 + 2/n)^n$ et $(1 - 2/n)^n$ tendent vers e^2 et e^{-2} .

La matrice obtenue est $\begin{pmatrix} (e^2 + e^{-2})/2 & (e^2 - e^{-2})/2 \\ (e^2 - e^{-2})/2 & (e^2 + e^{-2})/2 \end{pmatrix}$ et on peut y trouver $ch(2)$ et $sh(2)$.

La troisième matrice (*somme des deux autres*) a pour trace -1 et pour déterminant -6 . Ses valeurs propres sont les racines de $X^2 + X - 6$. On trouve 2 et -3 . Une matrice diagonale est alors $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

(par choix arbitraire) et une matrice de passage est alors $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & -2 \end{pmatrix}$ (vérifiez les quatre coefficients).

On a donc : $M = P.D.P^{-1}$. On divise par n : $M/n = P.(D/n).P^{-1}$. On ajoute I_2 qu'on écrit $P.I_2.P^{-1}$: $I_2 + \frac{M}{n} = P.\left(I_2 + \frac{D}{n}\right).P^{-1}$. On élève à la puissance n après célèbre télescope : $\left(I_2 + \frac{M}{n}\right)^n = P.\left(I_2 + \frac{D}{n}\right)^n.P^{-1}$.

Le seul terme qui dépende de n est le terme central : $\left(I_2 + \frac{M}{n}\right)^n = \begin{pmatrix} (1 + 2/n)^n & 0 \\ 0 & (1 + (-3)/n)^n \end{pmatrix}$.

On passe à la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_2 + \frac{M}{n}\right)^n = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-3} \end{pmatrix}$.

On multiplie à droite et à gauche par P et P^{-1} . On trouve $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4.e^2 + e^{-3} & 2.e^2 - 2.e^{-3} \\ 2.e^2 - 2.e^{-3} & e^2 + 4.e^{-3} \end{pmatrix}$

On remarque qu'on n'a pas $e^A.e^B = e^{A+B}$. Ce résultat sera valable quand les matrices A et B seront permutables ($A.B = B.A$). Mais c'est pour l'an prochain...

Comme f est continue, l'intégrale $\int_{-h}^h t.f(a+t).dt$ existe. On y remplace f par son développement limité d'ordre 1, car quand h tend vers 0, t tend lui même vers 0 : $\int_{-h}^h t.f(a+t).dt =$

$\int_{-h}^h (t.f(a) + t^2.f'(a) + t^2.\varphi(t)).dt$ où φ est une application qui tend vers 0 en 0.

On intègre effectivement, en sortant les constantes numériques. L'intégrale en t est nulle par imparité. L'intégrale en t^2 donne $2.h^3/3$, et la dernière intégrale se majore pour h assez petit.

Plus précisément : pour h plus petit que η_ϵ , on a $|\int_{-h}^h t^2.\varphi(t).dt| \leq \int_{-h}^h t^2.|\varphi(t)|.dt \leq \int_{-h}^h t^2.\epsilon.dt \leq 2.\epsilon.h^3/3$.

On divise par h^3 strictement positif, ce terme correctif est plus petit que ϵ pour h plus petit que η_ϵ .

C'est la définition de $\frac{2.h^3}{3} \int_{-h}^h t^2.\varphi(t).dt$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

Il reste : $\frac{2}{3.h^3} \cdot \int_{-h}^h t.f(a+t).dt$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0.

On confirme : on peut calculer $f'(a)$ comme limite d'une intégrale...

On affine notre calcul, avec des hypothèses plus fortes. On remplace $f(a+t)$ par $f(a) + t.f'(a) + \frac{t^2}{2}.f''(a) + \frac{t^3}{6}.f^{(3)}(a + \theta.t)$ avec θ entre 0 et 1 (et dépendant de t et a). On multiplie par t , on intègre de 0 à h . Les termes de degré impair disparaissent par imparité. L'intégrale $\int_{-h}^h t^2.dt$ donne $\frac{2.h^3}{3}$.

On divise par $2.h^3/3$. On a donc $\frac{3}{2.h^3} \cdot \int_{-h}^h t.f(a+t).dt$ qui ne diffère de $f'(a)$ que de la quantité $\frac{1}{4.h^3} \cdot \int_{-h}^h t^3.f^{(3)}(a + \theta_t.t).dt$.

On la majore en valeur absolue par $\frac{1}{4.h^3} \cdot \int_{-h}^h |t|^3.|f^{(3)}(a + \theta_t.t)|.dt$.

On majore même $|f^{(3)}(a + \theta.t)|$ par M_3 et on a donc $f'(a) - \frac{2}{3.h^3} \cdot \int_{-h}^h t.f(t).dt$ qui se majore en valeur absolue par $h \cdot \frac{M_3}{16}$.

2011/12

$S_a(h)$ et $G_a(h)$.

D.S.13

On effectue les premiers calculs : $\int_{-h}^h dt = 0$, $\int_{-h}^h (x+t).dt = 2.h.x$, $\int_{-h}^h t.(x+t).dt = \frac{2.h^3}{3}$,
 $\int_{-h}^h (x+t)^2 dt = \frac{2.h^3 + 6.h.x^2}{3}$ et $\int_{-h}^h t.(x+t)^2.dt = \frac{4.h^3.x}{3}$.

On égalise $S_a(h) = \frac{1}{2.h} \cdot \int_{-h}^h f(x+t).dt = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 f(x+h.t).dt$ par un simple changement de variable en $T = h.t$. L'autre égalité est avec le même changement de variable.

2011/12

Cas de l'application $t \rightarrow t^n$.

D.S.13

On commence en 0. La définition est $S_0(h) = \frac{1}{2.h} \cdot \int_{-h}^h t^n.dt$. Si n est impair, cette intégrale est nulle.

Sinon, elle vaut $\frac{h^n}{n+1}$. L'autre définition est $G_0(h) = \frac{3}{2.h^3} \cdot \int_{-1}^1 t^{n+1}.dt$. On trouve 0 si n est pair, et $\frac{3.h^{n-1}}{n+2}$.

On ne demande pas la limite en 0 tout de suite, mais on la donne : $S_0(h)$ tend vers 0 (sauf pour n nul) ; $G_0(h)$ tend vers 0 (sauf pour n égal à 1).

Ailleurs qu'en 0 : $S_a(h) = \frac{1}{2.h} \cdot \int_{-h}^h (a+t)^n \cdot t$ se calcule en développant par la formule du binôme et en profitant de la linéarité : $S_a(h) = \frac{1}{2.h} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot \int_{-h}^h h^k \cdot dt = \frac{1}{2.h} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot h^{k+1} \cdot \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1}$.

On isole deux termes : $k=0$ puis $k=1$.

Pour k égal à 0, on a justement $2.h$ qui, avec $\binom{n}{0} \cdot a^n$ et $1/2.h$ donne a^n .

Pour k égal à 1, le terme saute.

Au delà, on peut factoriser h^2 .

On pose donc : $A_x(h) = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot h^{k-1} \cdot \frac{1 - (-1)^{k+1}}{2 \cdot (k+1)}$.

On fait de même avec $G_a(h) = \frac{3}{2.h^3} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot \int_{-h}^h h^{k+1} \cdot dt = \frac{3}{2.h^3} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot h^{k+2} \cdot \frac{1 - (-1)^{k+2}}{k+2}$.

On isole encore des termes.

Pour k égal à 0, le terme est nul (*parité*).

Pour k égal à 1, le terme vaut $n \cdot a^{n-1}$, comme demandé.

Pour k égal à 3, le terme est nul (*parité*).

Pour k plus grand que 3, on peut factoriser par h^2 .

On posera donc : $B_a(h) = \frac{3}{2} \cdot \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot h^{k-3} \cdot \frac{1 - (-1)^{k+2}}{k+2}$.

Quand h tend vers 0 les termes polynomiaux en $h^2 \cdot A_a(h)$ et $h^2 \cdot B_a(h)$ tendent vers 0. On en déduit que $S_a(h)$ tend vers a^n (retour de $f(a)$) et $G_a(h)$ tend vers $n \cdot a^{n-1}$ (c'est $f'(a)$).

Et pour avoir tous les points, on le vérifie aussi en 0.

2011/12

Le cas de la valeur absolue.

D.S.13

On se place donc en 0. On calcule donc $\frac{1}{2.h} \cdot \int_{-h}^h |t| \cdot dt$. On n'a pas de primitive simple. On coupe

l'intégrale en deux, en profitant de la parité, et on trouve $\frac{1}{2.h} \cdot 2 \cdot \frac{h^2}{2}$. On trouve $2.h$, qui tend vers 0 en 0.

On calcule ensuite $\frac{1}{2.h} \cdot \int_{-h}^h t \cdot |t| \cdot dt$. C'est vite fait, on trouve 0 pour des raisons de parité. La limite est nulle.

Pourquoi avoir fait ce calcul ? Pour voir que l'intégrale de Lanczos $G_a(h)$ (qui par passage à la limite donne $f'(a)$) donne parfois des surprises. Ici, l'intégrale a une limite, alors que l'application n'est pas dérivable.

Plus précisément, si f est dérivable à droite et à gauche en a (ce qui est ici le cas), $G_a(h)$ tend vers la moyenne $\frac{f'_g(a) + f'_d(a)}{2}$.

2011/12

Point critique de φ .

D.S.13

L'existence de l'intégrale $\int_{-h}^h (f(a+t) - (x \cdot t + b))^2 \cdot dt$ ne pose pas de problème par continuité de l'application sous le signe somme.

Il suffit ensuite de développer le carré, de séparer par linéarité, et de calculer les intégrales comme $\int_{-h}^h a \cdot t^2 \cdot dt$.

L'application obtenue est alors un polynôme de degré 2 en x et y . Je n'irai pas jusqu'à parler de trinôme, puisqu'un polynôme de degré 2 en deux variables contient cinq termes.

On dérive simplement ensuite $x \rightarrow \varphi(x, y)$ sans alourdir avec des “à y constant”, puisque la variable est nettement mise en valeur dès qu’on fait des mathématiques.

Avec des notations compréhensibles : $\varphi'_1(x, y) = -2 \cdot \int_{-h}^h t \cdot f(a+t) \cdot dt + \frac{4 \cdot x \cdot h^3}{3}$ (les termes maltraités du sobriquet de constante se dérivent en 0).

On dérive ensuite $y \rightarrow \varphi(x, y)$ et on trouve cette fois $\varphi'_2(x, y) = -2 \cdot \int_{-h}^h f(a+t) \cdot dt + 4 \cdot h \cdot b$.

On annule ensuite ces deux dérivées partielles pour détecter les éventuels points critiques. x_c et y_c sont donnés par des équations du premier degré. On a un unique point critique de coordonnées

$$\left(\frac{2}{3 \cdot h^3} \cdot \int_{-h}^h t \cdot f(a+t) \cdot dt, \frac{1}{2 \cdot h} \cdot \int_{-h}^h f(a+t) \cdot dt \right).$$

Tiens, heureuse surprise...

Comment interpréter la chose ? On cherchait à minimiser l’intégrale $\int_{-h}^h \left(f(a+t) - (x \cdot t + y) \right)^2 \cdot dt$ qui mesure la différence quadratique entre deux graphes (localement) : celui de f au voisinage de a et celui d’une application affine (terme $x \cdot t + b$ puisque la variable est t).

On se demandait donc quelle droite donnait la meilleure approximation du graphe de f au sens des moindres carrés.

Et c’est justement celle de coefficient directeur $G_a(h)$ (de limite $f'(a)$) et d’ordonnée $S_a(h)$ (de limite $f(a)$). Finalement, on s’en serait douté.

La question de l’interprétation ne figurait hélas pas dans le sujet dans lequel j’ai puisé ce sujet de concours. Mais a-t-on le temps en quelques petites heures de demander aux élèves de prouver leur capacités à faire des calculs, appliquer des théorèmes, mais en sus leur capacité à prendre le recul par rapport à ce qu’ils sont en train de faire. J’ai peur que d’ailleurs vos réponses se limitent à une paraphrase du calcul et non à une prise de recul avec la vision du graphe et de son approximation affine.

2011/12

Les polynômes P_n .

D.S.13

Par construction, P_n est de degré $2 \cdot n$. Son terme dominant est même $X^{2 \cdot n} / (2^n \cdot n!)$.

Quand on le dérive n fois, c’est la dérivée n^{ieme} de ce terme qui est terme dominant de $(P_n)^{(n)}$. Comme ce terme dominant est de degré $2 \cdot n$ sa dérivée n^{ieme} est de degré $2n - n$. Et le coefficient est fait du produit des entiers en descendant, de $2 \cdot n$ à $(2 \cdot n - n) + 1$. On trouve donc $\frac{(2 \cdot n) \cdot (2 \cdot n - 1) \dots (n + 1)}{2^n \cdot n!} \cdot X^{2 \cdot n - n}$.

On en allège la présentation en $\frac{(2 \cdot n)!}{n!} \cdot \frac{X^n}{2^n \cdot n!}$, et même en $\binom{2 \cdot n}{n} \cdot \frac{X^n}{2^n}$.

Pour ce qui est de la dérivée d’ordre $2 \cdot n$, c’est la dernière étape avant l’annulation pure et dure. Le dernier terme encore valide est en X^0 et, devant, tous les termes de $(2 \cdot n)!$ ont fini par se former. On

a donc : $\left((P_n)^{(2 \cdot n)} = \frac{(2 \cdot n)!}{2^n \cdot n!} \right)$ et au delà, $(P_n)^{(2n+k)} = 0$.

On écrit P_n sous forme factorisée : $2^n \cdot n! \cdot P_n = (X - 1)^n \cdot (X + 1)^n$. On voit que $P_n(1)$ et $P_n(-1)$ sont nuls. Quand on dérive, on a $2^n \cdot n! \cdot P'_n = n \cdot (X - 1)^{n-1} \cdot (X + 1)^n + n \cdot (X - 1)^n \cdot (X + 1)^{n-1}$. Là encore, c’est un polynôme nul en -1 et en 1 .

On redérive ? $2^n \cdot n! \cdot P''_n = n \cdot (n - 1) \cdot (X - 1)^{n-2} \cdot (X + 1)^n + 2 \cdot n^2 \cdot (X - 1)^{n-1} \cdot (X + 1)^{n-1} + n \cdot (n - 1) \cdot (X - 1)^n \cdot (X + 1)^{n-2}$ et (en tout cas pour n plus grand que 2), ce terme s’annule encore en 1 et -1 .

L’énoncé pour élèves de filière économique H.E.C. proposait d’écrire $(P_n)^k$ sous une forme $((1 - X)^2)^{n-k} \cdot T_k(X)$ par récurrence... Mais nous avons des outils plus probants : la formule de Leibniz.

Comme toujours, pour l’utiliser, il vaut mieux commencer par introduire des notations : $R = (X - 1)^n$

et $S = (X + 1)^n$. On a alors $2^n \cdot n! \cdot P_n = R \cdot S$ puis $(2^n \cdot n! \cdot P_n)^{(k)} = \sum_{q=0}^k \binom{k}{q} \cdot R^{(q)} \cdot S^{(k-q)}$. On explicite

vite : $R^{(i)} = \frac{n!}{(n-i)!} \cdot (X-1)^{n-i}$ (là, il faut citer la récurrence, je l'avoue).

On explicite donc : $(2^n \cdot n! \cdot P_n)^{(k)} = \sum_{q=0}^k \alpha_{n,k,q} \cdot (X-1)^{n-q} \cdot (X+1)^{n-k+q}$ où les $\alpha_{n,k,q}$ sont des coefficients entiers remplis de factorielles à tous les étages.

Tant que k est plus petit que $n-1$ et q lui même plus petit que k , les exposants sont strictement positifs, et le calcul en -1 et en 1 donne des termes tous nuls.

On a ainsi prouvé la nullité de $(P_n)^{(k)}$ en -1 et en 1 et/ou la présence d'un facteur $(X-1) \cdot (X+1)$.

2011/12

L'intégrale $\int -1^1 (1-t^2)^n \cdot dt$.

D.S.13

Cette intégrale ne pose pas de problème d'existence. On peut calculer les premières pour vérifier, mais la meilleure piste n'est pas un usage immodéré de la récurrence... quoi qu'en puisse croire l'élève qui n'a toujours pas décollé de sa Terminale (même si un calcul récurrent est possible, avec une intégration par parties bien choisie et une astuce digne du remplacement de $\cos^2$ par $1 - \sin^2$ dans les intégrales de Wallis).

Le plus simple est ici d'intégrer par parties un nombre suffisant de fois :

$\int_{-1}^1 (x-1)^n \cdot (x+1)^n \cdot dx = \left[(x-1)^n \cdot \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \right]_{x=-1}^{x=1} - \frac{n}{n+1} \cdot \int_{-1}^1 (x-1)^{n-1} \cdot (x+1)^{n+1} \cdot dx$; le terme crochet est nul.

On recommence : $\frac{n}{n+1} \cdot \int_{-1}^1 (x-1)^{n-1} \cdot (x+1)^{n+1} \cdot dx = \left[n \cdot (x-1)^{n-1} \cdot \frac{(x+1)^{n+2}}{(n+1) \cdot (n+2)} \right]_{x=-1}^{x=1} - \frac{n \cdot (n-1)}{(n+1) \cdot (n+2)} \cdot \int_{-1}^1 (x-1)^{n-2} \cdot (x+1)^{n+2} \cdot dx$; là encore le terme crochet est nul.

On effectue une récurrence sur k limitée au rang n pour aboutir à $(-1)^k \cdot \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{(n+1) \cdot (n+2) \dots (n+k)} \cdot \int_{-1}^1 (x-1)^{n-k} \cdot (x+1)^{n+k} \cdot dx$ (récurrence non rédigée ici).

Au rang n il reste $(-1)^n \cdot \frac{n \cdot (n-1) \dots}{(n+1) \cdot (n+2) \dots (2n)} \cdot \int_{-1}^1 (x+1)^{2n} \cdot dx$.

On intègre ce terme en $(x+1)^{2n+1} / (2n+1)$ qui donne $2^{2n+1} / (2n+1)$.

On lui accole $\frac{n!}{(2n)! / n!}$ issu des n intégrations par parties successives.

On a au final : $\int_{-1}^1 (x-1)^n \cdot (x+1)^n \cdot dx = (-1)^n \cdot \frac{2^{2n+1} \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}$ comme souhaité (on a pris (x^2-1) au lieu de $(1-x^2)$ d'où le signe), en regroupant les termes factorielles.

La formule $\int_{-1}^1 R(t) \cdot P_n^{(n)}(t) \cdot dt = - \int_{-1}^1 R'(t) \cdot P_n^{(n-1)}(t) \cdot dt$ pour un polynôme R (sans limitation de degré) vient d'une simple intégration par parties dans laquelle on dérive R en R' et intègre $(P_n)^{(n)}$ en $(P_n)^{(n-1)}$. On n'y aurait pas pensé. Il y a un signe moins, La clef est ensuite dans une des questions précédentes : $(P_n)^{(n-q)}$ est nul en -1 et 1 tant que q est strictement positif.

On recommence : $\int_{-1}^1 R'(t) \cdot P_n^{(n-1)}(t) \cdot dt = - \int_{-1}^1 R''(t) \cdot P_n^{(n-2)}(t) \cdot dt$ en dérivant encore R et en remontant $(P_n)^{(n-1)}$. Les termes crochets sont nuls par annulation des dérivées de P_n en -1 et 1 .

On pousse l'idée de la récurrence jusqu'au bout : $\int_{-1}^1 R(t) \cdot P_n^{(n)}(t) \cdot dt = (-1)^k \cdot \int_{-1}^1 R^{(k)}(t) \cdot P_n^{(n-k)}(t) \cdot dt$ pour k de 0 à $n-1$ (la variable qui sert à conduire la récurrence, c'est k).

Parvenu au rang n , on a bien $\int_{-1}^1 R(t).P_n^{(n)}(t).dt = (-1)^n \cdot \int_{-1}^1 R^{(n)}(t).P_n(t).dt$.

Si le polynôme R est de degré strictement plus petit que n , la récurrence peut quand même être conduite, et $(R_n)^{(n)}$ est le polynôme nul.

On a alors $\int_{-1}^1 R(t).P_n^{(n)}(t).dt = 0$.

On reprend la formule $\int_{-1}^1 R(t).P_n^{(n)}(t).dt = (-1)^n \cdot \int_{-1}^1 R^{(n)}(t).P_n(t).dt$ avec R égal à $(P_n)^{(n)}$. On est bien dans le cadre d'application de cette formule, et on trouve

$$\int_{-1}^1 \left(P_n^{(n)}(t)\right)^2 dt = (-1)^n \cdot \int_{-1}^1 \left((P_n)^{(n)}\right)^{(2,n)}(t).P_n(t).dt.$$

Or, qu'a-t-on calculé auparavant ? $(P_n)^{(2,n)}$ est le réel $\frac{(2.n)!}{2^n.n!}$. L'intégrale de $P_n(t)$ est directement multiple (il y a un $\frac{1}{2^n.n!}$) de $\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$ qui vaut $\frac{2^{2.n+1}.(n!)^2}{(2.n+1)!}$. On effectue donc notre produit pour trouver $\frac{(2.n)!}{2^n.n!} \cdot \frac{1}{2^n.n!} \cdot \frac{2^{2.n+1}.(n!)^2}{(2.n+1)!}$.

Belle simplification : $\left(\frac{2}{2.n+1}\right)$ Tout ça pour ça !

On vérifie d'ailleurs pour n égal à 2 : $2^2.2!.P_2 = (X^2 - 1)^2 = X^4 - 2.X^2 + 1$, $8.(P_2)'' = 12.X^2 - 4$ et $(P_2)'' = \frac{3.x^2 - 1}{2}$ puis $(P_2'')^2 = \frac{9.X^4 - 6.X^2 + 1}{4}$. Le calcul de l'intégrale donne bien 2/5.

Une suite d'instructions Maple ? Ou même le tout en un :

SEQ(INTEGRATE((DIFF((X*X-1)^N/(2^N*N!)),X\$N))^2,X=-1..1),N=1..6) ;

2011/12

Les opérateurs $L_n(a)$.

D.S.13

Les intégrales telles que $\frac{(2.n+1)!}{2^{n+1}.h^n.n!} \cdot \int_{-1}^1 f(a+h.t).P_n^{(n)}(t).dt$ ne posent pas de problèmes d'existence. Pour n petit, on retrouve S et G , comme par hasard, avec leurs coefficients étranges.

La formule $\int_{-1}^1 f(a+h.t).P_n^{(n)}(t).dt = \frac{h^n}{2^n.n!} \int_{-1}^1 f^{(n)}(a+h.t).(1-t^2)^n dt$ vient de n intégrations par parties successives, dans lesquelles on profite du fait que les dérivées successives d'ordre inférieur à n soient nulles en -1 et 1 . On ne refait pas ici la récurrence sur k donnant $\int_{-1}^1 f(a+h.t).P_n^{(n)}(t).dt = (-1)^k.h^k \int_{-1}^1 f^{(k)}(a+h.t).(P_n)^{(n-k)}(t).dt$. Une fois arrivé au rang n , on a une belle formule dans laquelle on est remonté jusqu'à P_n lui-même. On le remplace par $(-1)^n.(1-t^2)^n/2^n.n!$.

Mais d'où vient le h^n ? Des dérivations de $t \rightarrow f(a+h.t)$ qui sont des composées.

Pour $\int_{-1}^1 \left(f^{(n)}(a+h.t) - f^{(n)}(a)\right).(1-t^2)^n dt$ qu'il faut faire tendre vers 0, on rappelle un principe : "pour faire tendre une intégrale vers 0, on la majore en valeur absolue et on écrase par le théorème de l'encadrement".

On note Δ_h cette différence (qui dépend de a , h et f , mais pas de la variable muette t).

On majore par inégalité triangulaire : $|\Delta_h| \leq \int_{-1}^1 |f^{(n)}(a+ht) - f^{(n)}(a)| \cdot (1-t^2)^n \cdot dt$.

On majore $1-t^2$ par 1 en valeur absolue : $|\Delta_h| \leq \int_{-1}^1 |f^{(n)}(a+ht) - f^{(n)}(a)| \cdot dt$.

On rappelle que $f^{(n)}$ est continue en tout point, car f est C^∞ . En particulier, au point a : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \eta_\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \dots$

Pour h plus petit que η_ε , tous les $|ht|$ sont aussi plus petits que η_ε . On peut majorer chaque $|f^{(n)}(a+ht) - f^{(n)}(a)|$ par ε . L'intégrale se majore par 2ε .

On est arrivé à une quantification de la forme

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \eta_\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall h \in \mathbb{R}^{+*}, |h| \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow \left| \int_{-1}^1 (f^{(n)}(a+ht) - f^{(n)}(a)) \cdot (1-t^2)^n \cdot dt \right| \leq \varepsilon.$$

On reconnaît une histoire de limite nulle.

On sépare l'intégrale en deux intégrales par linéarité. Mais comme l'une ne dépend pas de h , on la fait passer de l'autre côté de la limite : $\int_{-1}^1 f^{(n)}(a+ht) \cdot (1-t^2)^n \cdot dt$ tend vers $\int_{-1}^1 f^{(n)}(a) \cdot (1-t^2)^n \cdot dt$ quand h tend vers 0.

Cette limite se calcule explicitement, puisque $f^{(n)}(a)$ ne dépend pas de t . On le sort, et on a l'intégrale de $(1-t^2)^n$ entre -1 et 1 . On la connaît, pour l'avoir déjà calculée...

Ensuite, on remplace le terme dont on étudie la limite par $\frac{2^n \cdot n!}{h^n} \cdot \int_{-1}^1 f(a+th) \cdot (P_n)^{(n)}(t) \cdot dt$. On ar-

range les factorielles : $\frac{(2n+1)!}{2^{n+1} \cdot h^n \cdot n!} \cdot \int_{-1}^1 f(a+th) \cdot P_n^{(n)}(t) \cdot dt$ tend vers $f^{(n)}(a)$.

C'est quand même fantastique ! On accède à la dérivée $n^{ième}$ en étudiant la limite d'une intégrale, et pas juste à la dérivée première...

2011/12

La base $(P_0, P'_1, \dots, (P_n)^{(n)})$.

D.S.13

L'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n est de dimension $n+1$ (base canonique $(1, X, \dots, X^n)$). Tous les polynômes de la liste sont dans cet espace (on oublie souvent de vérifier ceci), et sont en bonne quantité.

Il suffit de vérifier que cette famille est libre. A moins que vous ne préfériez calculer son déterminant par rapport à la base canonique. C'est le produit des termes diagonaux.

Allez, on opte pour "famille libre". On suppose qu'on a $\sum_{k=0}^n \lambda_k \cdot P_k^{(k)} = 0$ (polynôme nul) pour une famille de coefficients. On veut montrer que tous les coefficients sont nuls.

On cherche le coefficient du terme en X^n dans le membre $\sum_{k=0}^n \lambda_k \cdot P_k^{(k)}$. Il ne peut venir que de $\lambda_n \cdot P_n^{(n)}$ (degré de chaque $P_k^{(k)}$ déjà mentionné). Mais dans le terme de droite, il est nul. C'est donc que λ_n est nul.

On reporte : $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot P_k^{(k)}$. On recommence avec la recherche du terme en X^{n-1} et on a $\lambda_{n-1} = 0$. On continue ainsi de proche en proche jusqu'à $\lambda_0 = 0$.

La famille est libre et a le bon cardinal, c'est une base.

On parle de famille échelonnée en degrés, et on peut aller jusqu'à dire que c'est un résultat du cours...

On part d'un polynôme développé sur cette base. On l'élève au carré : $Q = \sum_{p=0}^n \lambda_p \cdot (P_p)^{(p)} \cdot \sum_{q=0}^n \lambda_q \cdot (P_q)^{(q)} =$

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ q \leq n}} \lambda_p \cdot \lambda_q \cdot (P_p)^{(p)} \cdot (P_q)^{(q)}.$$

On intègre de -1 à 1 et on trouve, par linéarité de l'intégrale, $(n+1)^2$ termes, de la forme $\lambda_p \cdot \lambda_q \cdot \int_{-1}^1 P_p^{(p)}(t) \cdot P_q^{(q)}(t) \cdot dt$.

On met de côté les termes pour lesquels p et q sont égaux : $\sum_{p=0}^n (\lambda_p)^2 \cdot \int_{-1}^1 (P_p^{(p)})^2(t) \cdot dt$. Ce sont des intégrales que l'on a calculées. On trouve bien $\sum_{p=0}^n \frac{2}{2 \cdot p + 1} \cdot (\lambda_p)^2$.

On espère donc que les autres termes de la somme soient nuls. Mais pourquoi ? Juste parce qu'on ne sait pas développer un carré ? Non ! Ils sont bien là, les $\int_{-1}^1 (P_p)^{(p)}(t) \cdot (P_q)^{(q)}(t) \cdot dt$ avec p différent de q .

Par symétrie des rôles, on peut supposer p strictement plus petit que q . Alors $P_p^{(p)}$ est de degré p strictement plus petit que q . On ressort alors un résultat déjà prouvé : $\int_{-1}^1 R(t) \cdot (P_n)^{(n)}(t) \cdot dt$ est égal à $\int_{-1}^1 R^{(n)}(t) \cdot (P_n)(t) \cdot dt$ au signe près, et $R^{(n)}$ est nul. Chacune de ces intégrales est nulle.

Bref, les $(n+1)^2 - (n+1)$ intégrales de la forme $\int_{-1}^1 P_p^{(p)} \cdot P_q^{(q)}$ sont nulles et effacent les $\lambda_p \cdot \lambda_q$ avec p différent de q .

2011/12

Intégrale quadratique $\int_{-1}^1 (Q(t) - f(a + \alpha \cdot t))^2 \cdot dt$.

D.S.13

On développe le carré, on sépare par linéarité et on calcule chaque intégrale.

On a déjà le terme très normal $\int_{-1}^1 f(a + \alpha \cdot t)^2 \cdot dt$.

On a aussi le terme $\int_{-1}^1 Q(t)^2 \cdot dt$, avec un signe plus. Il vaut, comme on l'a vu $\sum_{k=0}^n \frac{2}{2 \cdot k + 1} \cdot (\lambda_k)^2$.

Dans la formule avec des sigmas, on le trouve dans $\sum_{k=0}^n \frac{2}{2 \cdot k + 1} \left(\lambda_k - \frac{2 \cdot k + 1}{2} \cdot y_k \right)^2$ quand on développe les carrés.

Il nous reste le double produit $2 \cdot \int_{-1}^1 f(a + t \cdot \alpha) \cdot Q_n(t) \cdot dt$. On y développe Q_n et on a la somme des

$2 \cdot \int_{-1}^1 f(a + t \cdot \alpha) \cdot \lambda_k \cdot P_k^{(k)}(t) \cdot dt$. Dans le $\sum_{k=0}^n \frac{2}{2 \cdot k + 1} \left(\lambda_k - \frac{2 \cdot k + 1}{2} \cdot y_k \right)^2$ c'est la somme des doubles produits.

On a alors un terme en trop $\sum_{k=0}^n \frac{2}{2 \cdot k + 1} \left(\frac{2 \cdot k + 1}{2} \cdot y_k \right)^2$. Et on le compense précisément avec

$-\sum_{k=0}^n \frac{2 \cdot k + 1}{2} \cdot y_k^2$. Il y a bien égalité.

Il nous faut ajuster ensuite Q . On ne peut jouer que sur les coefficients λ_k . C'est donc sur

$\sum_{k=0}^n \frac{2}{2 \cdot k + 1} \left(\lambda_k - \frac{2 \cdot k + 1}{2} \cdot y_k \right)^2$ qu'on peut agir. Pour minimiser ce terme là, on l'annule carrément (c'est

une somme de carrés de réels, on ne peut pas faire plus petit que 0). On posera donc : $\lambda_k = \frac{2 \cdot k + 1}{2} \cdot y_k$ pour chaque k de 0 à n .

On a fait une projection orthogonale sur un sous-espace, mais vous avez peut être du mal à comprendre ça à ce stade de l'année et de vos années de prépas...

D.S.13	MPSI2	839 points	Année 2011/12	D.S.13
---------------	-------	------------	---------------	---------------

D.S.14

Charlemagne

vendredi 4 mai

2011/2012

D.S.14

< ♠(29) > On définit : $\varphi = x \longrightarrow \int_x^{x^2} |t-2|.dt$. Représentez graphiquement φ sur $[-2, 2]$ (en détaillant par segments). 3 pt.

φ est elle dérivable? Si oui, combien de fois? 3 pt.

< ♠(30) > Donnez le développement limité de φ en 1 à l'ordre 5. 3 pt.

< ♠(31) > Donnez un intervalle "le plus grand possible" sur lequel φ est convexe. 2 pt.

168 points

168 points

2011/12

STOCHASTIQUES**D.S.14**

- 1) Une matrice carrée A de taille n sur n , de terme général a_i^j est dite stochastique si et seulement $\sum_{k=1}^n a_i^k = 1$ pour tout i de 1 à n et $a_i^k \geq 0$ pour tout couple (i, j) (elles interviennent en probabilités et tous les phénomènes de transitions). A est dite bistochastique si A et tA sont stochastiques. L'ensemble des matrices stochastiques (respectivement bistochastiques) de taille n sera noté H_n (respectivement B_n). Déterminez toutes les matrices bistochastiques de taille 2.

- 2) Déterminez le maximum et le minimum de l'application *trace* puis de l'application *det* sur l'ensemble B_2 . 3 pt.

- 1) On définit le permanent d'une matrice carrée A de terme général a_i^k : $per(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_i^{\sigma(i)}$ (comme le déterminant, mais sans l'alternance des signes due à la signature). Déterminez aussi le maximum et le minimum de l'application permanent sur B_2 . 3 pt.

- 2) Montrez qu'une matrice et sa transposée ont le même permanent. 2 pt.

- 3) Montrez que le permanent est invariant par permutation des colonnes ou des lignes qui forment la matrice. 2 pt.

- 4) A-t-on la propriété $per(A.B) = per(A).per(B)$ pour tout couple de matrices (A, B) de taille n sur n . 2 pt.

12 points

12 points

- 1) Montrez que A est dans H_n si et seulement si A est à coefficients positifs et vérifie $A.U = U$ où U est le vecteur colonne de taille n dont tous les coefficients valent 1. 2 pt.

- 2) Déduisez que H_n et B_n sont stables par multiplication. 3 pt.

- 3) Déterminez le nombre d'éléments de B_n à coefficients entiers. 2 pt.

- 4) Déterminez le maximum et le minimum de l'application *trace* sur B_n . 2 pt.

- 5) Montrez que le permanent d'une matrice stochastique est positif ou nul. 1 pt. Montrez que le permanent d'une matrice bistochastique de taille 3 est strictement positif. 4 pt.

- 6) Déterminez le maximum et le minimum de l'application permanent sur B_3 . 6 pt.

20 points

20 points

- 1) Soit B une matrice bistochastique et X un vecteur de $(R^{*+})^n$ de composantes x_i , d'image $B.X$ de composantes y_j . Montrez pour tout i : $\ln(y_i) \geq \sum_{k=1}^n b_i^k \cdot \ln(x_k)$. 3 pt.

- 2) Déduisez : $\prod_{i=1}^n y_i \geq \prod_{i=1}^n x_i$. (2 pt.)
 5 points 5 points

- 1) On pose $M = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 6 & 10 & 15 \\ 18 & 10 & 15 \\ 6 & 10 & 0 \end{pmatrix}$. Montrez que tM est stochastique. (1 pt.) Calculez la trace et

le déterminant de M . (2 pt.) Trouvez au moins un vecteur non nul E_1 vérifiant $M.E_1 = E_1$ (ce qui prouvera que 1 est une des trois valeurs propres de M). (2 pt.)

- 2) Quelle est la somme des deux autres valeurs propres de M ? Quel est le produit des deux autres valeurs propres de M ? (2 pt.)

- 3) Déterminez le spectre de M . (1 pt.) Pour chacune des deux valeurs propres λ et μ différentes de 1, montrez l'existence de E_λ et E_μ , vecteurs non nuls, vérifiant $M.E_\lambda = \lambda.E_\lambda$ et $M.E_\mu = \mu.E_\mu$. (3 pt.)

- 4) Montrez que $\det(E_1, E_\lambda, E_\mu)$ est non nul. (2 pt.)

- 5) Déduisez que M est diagonalisable, avec une matrice diagonale D que vous déterminerez. (2 pt.) Montrez que $|\lambda|$ et $|\mu|$ sont plus petits que 1. (2 pt.) Montrez que M^n converge vers une matrice à préciser quand n tend vers l'infini. (2 pt.)

- 6) Des individus se déplacent sur les trois sommets A , B et C d'un triangle, suivant les règles suivantes à chaque unité de temps :

-    une personne qui est en A y reste avec probabilité 1/5, part en B avec probabilité 3/5 et part en C avec probabilité 1/5,

-    une personne qui est en B peut, de manière équiprobable y rester, partir en A ou partir en C ,

-    une personne qui est en C part en A ou en B avec probabilité 1/2 pour chacun des deux cas.

Comment calculerez vous la répartition des individus à la $n^{ième}$ étape? Indiquez ce que donne cette répartition quand n tend vers $+\infty$. (4 pt.)

23 points 23 points

2011/12 TORE D.S.14

< ♣(7) > On rappelle que le tore est la surface obtenue en faisant tourner un cercle autour d'une droite qui lui est coplanaire (chambre à air, anneau à section circulaire, doughnut de Homer Simson). On va faire tourner le cercle tracé dans le plan xOz de centre $(R, 0, 0)$ et de rayon a autour de l'axe Oz .

Montrez que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R + a \cdot \cos(t) \\ 0 \\ a \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$ avec θ et t décrivant $\mathbb{R}$ est un paramétrage de ce tore. (2 pt.)

< ♣(8) > Eliminez θ et t pour arriver à une équation de la forme $|z| = F(x, y)$ où vous préciserez la forme de l'application F . (3 pt.) Montrez que F s'écrit même $(x, y) \longrightarrow f(\sqrt{x^2 + y^2})$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$    préciser. (1 pt.)

< ♣(9) > Montrez alors, avec les notations de Monge et en posant $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} : p(x, y) = x \cdot \frac{f'(\rho)}{\rho}$.

Que direz vous à l'élève qui écrit $p(x, y) = \frac{x}{\rho} \cdot \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho}$?

< ♣(10) > Calculez q , r , s et t . (2 pt.) Déduisez : $r \cdot t - s^2 = \frac{a^2 \cdot (\rho - R)}{\rho \cdot (F(x, y))^4}$. (4 pt.)

< ♣(11) > Indiquez suivant la position de M sur le tore la position du tore par rapport au plan tangent. (2 pt.)

D.S.14 MPSI2 924 points Année 2011/12 D.S.14

2011/12

L'application $x \rightarrow \int_x^{x^2} |t-2|.dt$.

D.S.14

Comme l'application $t \rightarrow |t-2|$ est continue l'intégrale existe pour tout x . Mais ensuite, il faut discuter intervalle par intervalle, car on n'a pas de formule simple pour une primitive de cette application valeur absolue. Il faut donc découper en fonction de la position des bornes par rapport à 2 afin de pouvoir utiliser la relation de Chasles et effacer la valeur absolue.

Par exemple, pour x positif, entre 0 et $\sqrt{2}$, on calcule simplement :

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} (2-t).dt = \frac{-x^4 + 5x^2 - 4x}{2}$$

(on vérifie que cette intégrale est nulle pour x nul et pour x égal à 1 car dans ce cas, les deux bornes coïncident).

Ensuite, pour x entre $\sqrt{2}$ et 2, il faut couper en par la relation de Chasles :

$$\varphi(x) = \int_x^2 (2-t).dt + \int_2^{x^2} (t-2).dt = \frac{x^4 - 3x^2 - 4x + 8}{2}$$

Pour x a delà de 2, les deux bornes sont plus grandes que 2 et ne posent pas de problème :

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} (t-2).dt = \frac{x^4 - 5x^2 + 4x}{2}$$

Pour x négatif, il faut rester prudent. Tant que x n'est pas trop grand en valeur absolue, les deux bornes

x et x^2 (des signes opposés) sont plus petites que 2 et on utilise la formule $\varphi(x) = \int_x^{x^2} (2-t).dt = \frac{-x^4 + 5x^2 - 4x}{2}$.

Mais dès que x descend en deça de $-\sqrt{2}$, l'intervalle $[x, x^2]$ déborde au delà de 2 et il faut encore utiliser la relation de Chasles, et trouver à nouveau $\frac{x^4 - 3x^2 - 4x + 8}{2}$ (mais cette fois, le terme $-4x$ est positif).

On résume :

x	$] -\infty, -\sqrt{2}[$	$-\sqrt{2}$	$] -\sqrt{2}, 0[$	0	$]0, 1[$	1	$]1, \sqrt{2}[$	$\sqrt{2}$	$] \sqrt{2}, 2[$	2	$]2, +\infty[$
$\varphi(x)$	$\frac{x^4 - 3x^2 - 4x + 8}{2}$	$3 + 2\sqrt{2}$	$\frac{-x^4 + 5x^2 - 4x}{2}$	0	idem	0	$\frac{-x^4 + 5x^2 - 4x}{2}$	$3 - 2\sqrt{2}$	$\frac{x^4 - 3x^2 - 4x + 8}{2}$	2	$\frac{x^4 - 5x^2 + 4x}{2}$
$\varphi'(x)$	$2x^3 - 3x - 2$	$-2 - \sqrt{2}$	$-2x^3 + 5x - 2$	-2	idem	1	$-2x^3 + 5x - 2$	$\sqrt{2} - 2$	$2x^3 - 3x - 2$	8	$2x^3 - 5x$
$\varphi''(x)$	$6x^2 - 3$	$9/ - 7$	$-6x^2 + 5$	5	idem	-1	$-6x^2 + 5$	$-7/9$	$6x^2 - 3$	$21/7$	$6x - 5$

Les raccords se font de manière continue et même dérivable.

C'est normal, on intègre une application continue.

On note même que si on note ψ une primitive de $t \rightarrow |t-2|$ (elle existe, mais n'est pas simple à exprimer), alors on a $\varphi(x) = \psi(x^2) - \psi(x)$. On peut ensuite dériver : $\varphi'(x) = 2x.\psi'(x) - \psi'(x) = 2x.|x^2-2| - |x-2|$. En 2, en $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, la dérivée φ' n'est plus dérivable. Notre application φ est C^1 mais pas D^2 .

Au voisinage de 1, la fonction est polynomiale, et son développement limité est directement donné par l'application : $-2x + \frac{5x^2}{2} - \frac{x^4}{2}$ dans lequel on remplace x par $1+h$: $h - \frac{h^2}{2} - 2h^3 - \frac{h^4}{2}$ sauf erreur de calcul de ma part.

Pour la convexité, la ligne "dérivée seconde" nous permet de trouver un domaine sur lequel elle est positive...

2011/12

La matrice $\frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 10 & 15 \\ 18 & 10 & 15 \\ 6 & 10 & 0 \end{pmatrix}$.

D.S.14

Cette matrice est à coefficients positifs (*qui a oublié de vérifier cela ?*).

Les sommes en colonnes valent 1 : $\sum_{j=1}^3 a_1^j = \sum_{j=1}^3 a_2^j = \sum_{j=1}^3 a_3^j = 1$. La matrice transposée est stochastique.

Sa trace vaut $\frac{8}{15}$.

Pour ce qui est du déterminant, on travaille sur la matrice à coefficients entiers, on développe par rapport à la dernière colonne, en ayant soustrait la première ligne à la deuxième, histoire qu'il ne reste qu'un terme. On trouve au final un déterminant égal à $\frac{1}{15}$. On n'oublie pas en effet que si la matrice est divisée par 30, son déterminant est divisé par 30^3 pour des raisons de trilinearité.

On résout le système $M.X = X$ par combinaisons (*soustraire ligne 1 à la ligne 2*). Il dégénère, la dernière équation ne sert à rien. Les vecteurs solutions sont par exemple de la forme $\begin{pmatrix} 3.z/2 \\ 21.z/10 \\ z \end{pmatrix}$, et on a les multiples de $\begin{pmatrix} 15 \\ 21 \\ 10 \end{pmatrix}$. Une droite de vecteurs propres. Elle est engendrée par $\begin{pmatrix} 15 \\ 21 \\ 10 \end{pmatrix}$. Elle est de dimension 1. On garde le vecteur ci dessus dans le rôle du vecteur E_1 .

Admettons que M ait trois valeurs propres à mettre dans une matrice diagonale D semblable à M . Les deux auront la même trace (*calcul usuel* $Tr(P.D.P^{-1}) = Tr(P^{-1}.P.D) = Tr(D)$) : $1 + \lambda + \mu = \frac{8}{15}$ et le même déterminant (*calcul usuel* $\det(P.D.P^{-1}) = \det(P). \det(D). \det(P)^{-1} = \det(D)$) : $1.\lambda.\mu = \frac{1}{15}$. En effet, 1 est déjà une des valeurs propres. La somme $\lambda + \mu$ vaut $-\frac{7}{15}$ et le produit $\lambda.\mu$ vaut $\frac{1}{15}$.

Les deux valeurs propres qui manquent sont les racines de $X^2 + \frac{7}{15}.X + \frac{1}{15}$.

Le discriminant est négatif, les deux racines sont complexes conjuguées $\frac{-7 - i.\sqrt{11}}{30}$ et $\frac{-7 + i.\sqrt{11}}{30}$.

Les deux ont le même module : $\frac{\sqrt{15}}{15}$ (*le produit des deux racines conjuguées, c'est le carré du module!*).

On peut dire tout de suite une chose : la matrice diagonale D^n sera $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \mu^n \end{pmatrix}$ (à l'ordre près).

Quand n va tendre vers l'infini, il restera juste $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Une matrice de projecteur...

On prend λ égal à l'une des deux racines ($(-7 + i.\sqrt{11})/30$ ou son conjugué). On veut résoudre le système $M.U = \lambda.U$. On le reformule en $M.U - \lambda.U = 0$ (*vecteur nul*), puis $(M - \lambda.I_3).U = 0$ (*on n'écrit pas* $(M - \lambda).U = 0$ *qui n'aurait pas de sens à cause des formats*).

C'est un système de trois équations à trois inconnues (les composantes de U), dont le déterminant est $\det(M - \lambda.I_3)$. Ce déterminant est nul (calcul ou relations coefficients racines). Le système est dégénéré. Il a une infinité de solutions, en plus de la solution nulle (*une des équations ne sert à rien, on peut prendre z comme inconnue auxiliaire et extraire les autres variables*). On en prend une, et on a un vecteur propre.

Rien ne nous forçait à calculer le vecteur propre. Il suffisait d'en prouver l'existence. On est en mathématiques, pas en physique. Savoir qu'on peut le faire nous suffit, on n'a pas besoin de dépenser de l'argent (voire des

fortunes) pour trouver un vecteur explicite ou un boson (boson ? c'est φ !).

Les trois vecteurs E_1 , E_λ et E_μ sont trois vecteurs propres de M associés à trois valeurs propres distinctes. Un théorème du cours appelé localement “corollaire de Vandermonde” nous assure que ces trois vecteurs forment une famille libre. La famille libre de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ (dimension 3) est alors une base. Le déterminant $\det(E_1, E_\lambda, E_\mu)$ est non nul.

Notons P la matrice faite des trois vecteurs (E_1, E_λ, E_μ) .

La matrice $M.P$ se distribue en matrice de colonne $(M.E_1, M.E_\lambda, M.E_\mu)$ c'est à dire $(E_1, \lambda.E_\lambda, \mu.E_\mu)$ car ces trois vecteurs sont vecteurs propres de M de valeurs propres respectives 1, λ et μ .

Mais on a aussi $P.D$ qui est faite des mêmes colonnes (règle de calcul de produit d'une matrice de trois colonnes par une matrice diagonale).

On a donc : $M.P = P.D$.

Comme P est inversible, on arrive à $M = P.D.P^{-1}$. On reconnaît que M est diagonalisable.

Rappelons que “diagonalisable” n'a aucun rapport avec “inversible”.

On conduit une récurrence rapide et maintenant classique : $M^n = P.D^n.P^{-1}$. Comme D^n converge,

la suite $P.D^n.P^{-1}$ converge vers $P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$.

On élève au carré cette matrice limite notée L , et on trouve :

$$L^2 = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = L.$$

On reconnaît à cela une matrice de projecteur : $L^2 = L$.

Le système dynamique décrit par l'énoncé est régi par cette matrice justement. Si on a une ré-

partition $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ à un certain instant, alors on retrouve la répartition suivante à l'étape suivante : $\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{2} \\ \frac{3\alpha}{5} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{2} \\ \frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{3} \end{pmatrix}$. On reconnaît le vecteur $M.U$.

Quand on regarde évoluer le système, on a, à la n^{ieme} étape $M^n.U$.

Quand n tend vers l'infini, la répartition tend vers $L.U$ avec L définie plus haut. Tous calculs faits,

par simple cohérence aussi, on va trouver $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{46} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 21 \\ 10 \end{pmatrix}$.

2011/12

La majoration $\prod_{i=1}^n y_i \geq \prod_{i=1}^n x_i$.

D.S.14

On part donc d'un vecteur à coefficients strictement positifs. On calcule ligne par ligne : $y_i = a_i^1.x_1 + a_i^2.x_2 + \dots + a_i^n.x_n$.

Ce réel est positif, comme somme de termes positifs.

Au moins un des a_i^k est non nul, puisque leur somme vaut 1.

Ce réel est strictement positif.

On peut donc calculer son logarithme. Mais on a alors $\ln(y_i) = \ln(a_i^1.x_1 + a_i^2.x_2 + \dots + a_i^n.x_n)$ et pas $a_i^1.\ln(x_1) + a_i^2.\ln(x_2) + \dots + a_i^n.\ln(x_n)$. Alors ?

Alors ?

Alors on pense à la concavité du logarithme, qui est justement au programme des semaines écoulées.

La moyenne des images est plus petite que l'image de la moyenne ("grande inégalité de concavité").
 Mais cette inégalité donne plutôt $\ln\left(\frac{a_1^1 \cdot x_1 + a_1^2 \cdot x_2 + \dots + a_1^n \cdot x_n}{a_1^1 + a_1^2 + \dots + a_1^n}\right) \geq \frac{a_1^1 \cdot \ln(x_1) + a_1^2 \cdot \ln(x_2) + \dots + a_1^n \cdot \ln(x_n)}{a_1^1 + a_1^2 + \dots + a_1^n}$.
 Et là, tout va bien ! La matrice est bistochastique. Chaque somme telle que $a_i^1 + a_i^2 + \dots + a_i^n$ est égale à 1 !

On a n inégalités, de $\ln(y_1) \geq a_1^1 \cdot \ln(x_1) + \dots + a_1^n \cdot \ln(x_n)$ jusqu'à $\ln(y_n) \geq a_n^1 \cdot \ln(x_1) + \dots + a_n^n \cdot \ln(x_n)$.
 On somme ces inégalités. Le premier membre donne $\ln(y_1 \dots y_n)$.
 Dans le second, $\ln(x_1)$ est en facteur de $a_1^1 + \dots + a_n^1$. C'est la somme sur une colonne ! Elle vaut 1 par bistochasticité. De même, jusqu'à $(a_1^n + \dots + a_n^n) \cdot \ln(x_n)$ qui vaut $1 \cdot \ln(x_n)$.

Ayant sommé, on a donc obtenu $\ln\left(\prod_{i=1}^n y_i\right) \geq \ln(x_1) + \dots + \ln(x_n)$ et c'est exactement ce que l'on voulait.

2011/12

Le tore.

D.S.14

Le point $(R + a \cdot \cos(t), 0, a \cdot \sin(t))$ décrit le cercle de centre $(R, 0, 0)$ et de rayon a quand t décrit $\mathbb{R}$.

Ensuite, la matrice $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ sert à effectuer des rotations dans le plan xOy .

Mais pour tourner dans $\mathbb{R}^3$, il faut aussi tenir compte de l'axe. On garde la même cote z . C'est le rôle du 1 dans la grande matrice $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $x = (R + a \cdot \cos(t)) \cdot \cos(\theta)$, $y = (R + a \cdot \cos(t)) \cdot \sin(\theta)$ et $z = a \cdot \sin(t)$.

On va éliminer θ avec $x^2 + y^2 = (R + a \cdot \cos(t))^2$. On passe à la racine : $\sqrt{x^2 + y^2} = R + a \cdot \cos(t)$. *Pas de valeur absolue ? Non, car a est plus petit que R . On en déduit que $R + a \cdot \cos(t)$ reste entre $R - a$ et $R + a$ et reste donc positif.*

On isole $a \cdot \cos(t) = \sqrt{x^2 + y^2} - R$.

On élimine t avec $\cos^2 + \sin^2 = 1$ là encore : $z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 = a^2$.

On isole z en sachant qu'il y a deux valeurs possibles : au dessus ou au dessous du plan xOy : $z = \sqrt{a^2 - (\rho - R)^2}$ ou son opposé.

On pose donc : $F(x, y) = \sqrt{a^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2}$ et $f(\rho) = \sqrt{a^2 - (\rho - R)^2}$.

On dérive la composée $x \longrightarrow \rho \longrightarrow f(\rho)$ à y fixé (sans repasser par les taux d'accroissement). On trouve $f'(\rho) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x}$.

On remplace la dérivée de ρ par $\frac{2 \cdot x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}$, et on arrive à la formule demandée.

Oui, je rappelle pour celles et ceux qui ne lisent qu'une partie du cours qu'on ne repasse par les taux d'accroissements que quand la fonction est définie par des formules prolongées. Sinon, on dérive par rapport à x à y fixé. Comme en physique, sauf qu'on le fait avec rigueur et sans le mot constant qui perd vite son sens et induit des erreurs.

D'autre part, f est une fonction d'une variable. Quand on écrit $f(\rho)$ et $f'(\rho)$, c'est parce que ρ a une valeur et qu'on a oublié qu'il venait de x et/ou y . Si je vous dis qu'au point où on travaille, ρ vaut 2 par exemple, comment pourriez vous dériver "par rapport à x à y fixé" ?

On ne peut donc pas comme les élèves trop dociles et gentils (oui, il y a là un sous-entendu sur leur niveau en sciences) écrire des $\frac{\partial f}{\partial x}$ qui n'ont vraiment aucun sens.

De même, on dérive $y \longrightarrow f(\sqrt{x^2 + y^2})$ en $y \longrightarrow \frac{y \cdot f'(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Et on ne précise pas des notations pour indiquer "à x constant". Sinon, pourquoi n'irait on pas aussi préciser "à α constant", "à h constant" et

ainsi de suite ?

On écrit $p(x, y) = x.f'(\rho).\rho^{-1}$ et on redérive $x \rightarrow p(x, y)$ comme un produit en $r(x, y) = \frac{f'(\rho).\rho^{-1} + x^2.f''(\rho).\rho^{-2} - x^2.f'(\rho).\rho^{-3}}{1}$ le dernier terme correspondant à la dérivation de $x \rightarrow \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$.

On fait de même pour l'autre terme diagonal de la hessienne : $t(x, y) = f'(\rho).\rho^{-1} + y^2.f''(\rho).\rho^{-2} - y^2.f'(\rho).\rho^{-3}$.

Le terme “de Schwarz” est plus simple : $(y \rightarrow x.f'(\rho).\rho^{-1})'$ donne $y \rightarrow x.y.f''(\rho).\rho^{-2} - x.y.f'(\rho).\rho^{-3}$.

Après, on calcule : $f(\rho) = (a^2 - (\rho - R)^2)^{1/2}$, $f'(\rho) = \frac{R - \rho}{f(\rho)}$ et $f''(\rho) = \frac{-1}{f(\rho)} - \frac{(R - \rho)^2}{f(\rho)^3}$.

L'étape suivante est faite de gros calculs auxquels on n'échappe guère $r(x, y).t(x, y) - s(x, y)^2$ donne bien au final $\frac{a^2.(\rho - R)}{\rho.f(\rho)^4}$.

Il ne reste plus qu'à utiliser le cours.

- Tant que $r.t - s^2$ est positif, les deux valeurs propres de la hessienne sont de même signe, le graphe ne traverse pas le plan tangent. Ici, le signe de r nous dit même qu'on est sous le plan tangent. Il s'agit du cas $\rho \geq R$. C'est toute la partie “extérieure” du tore.
- Quand ρ vaut R le plan tangent est “très tangent”. On est “en haut du tore”, et le plan repose totalement sur le tore.
- Quand ρ est plus petit que R , on est dans la partie intérieure du tore, et on a systématiquement un point col, le tore a deux courbures de sens différents, et il traverse le plan tangent.

Je vais essayer de vous donner des schémas en annexe.

2011/12

Matrices stochastiques et permanent.

D.S.14

La condition $M.U = U$ se lit bien $\sum_{k=1}^n a_i^k.1 = 1$ pour tout i de 1 à n . C'est la condition “somme en lignes égale à 1” et elle traduit la stochasticité.

En taille 3 : $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 + a_1^2 + a_1^3 \\ a_2^1 + a_2^2 + a_2^3 \\ a_3^1 + a_3^2 + a_3^3 \end{pmatrix}$.

Pas de problème sur une telle question. Sauf avec les élèves qui mélangent calculs et équations dans une même ligne. Maintenant que la fin de l'année approche et que la Spé vous attend, je vais finir par sanctionner ces absurdités.

Quand on ajoute la condition tM est aussi stochastique, on demande que les sommes en colonne valent 1.

La stabilité de H_n s'obtient alors facilement. On prend A et B stochastiques. On calcule alors : $(A.B).U = A.(B.U) = A.U = U$ par stochasticité de B puis de A . Et on reconnaît alors la stochasticité de $A.B$.

Le tout sans gros calcul inutile sur la somme des coefficients en ligne de la matrice produit comme tentent en général de le faire les élèves.

Trois points pour une question si simple ? C'est cadeau !

Non, parce que je suis presque sûr que deux tiers des élèves vont n'avoir qu'un point à cette question. En effet, ils se seront focalisés sur $(A.B).U = U$, la partie “calcul”. Et “calcul” rime avec “nul” si on oublie la moitié de la question.

Quelle moitié ?

La positivité des coefficients. En effet, il faut vérifier cela aussi...

Si A et B sont à coefficients positifs, alors les $\sum_{j=1}^n a_i^j \cdot b_j^k$ sont positifs par stabilité de $\mathbb{R}^+$ par addition et multiplication.

C'est évident, mais il faut le dire. Sinon, vous ne prouvez qu'une chose : vous êtes un gros bourrin qui se focalise sur une chose reposante ("des calculs, des calculs" groigne l'élève dopé aux ogm) sans prendre le recul qu'on attend d'un ingénieur qui doit se demander "que dois je faire exactement ?".

Les matrices stochastiques de taille 2 sont de la forme $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ avec a et b entre 0 et 1 pour préserver la positivité.

Leur trace vaut $a + (1 - b)$. Elle varie entre 0 (atteinte pour $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$) et 2 (atteinte pour I_2).

Leur déterminant vaut $a - b$ et peut aller de -1 à 1 (valeurs atteintes pour $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et I_2).

Plus généralement, comme les matrices stochastiques ont des coefficients positifs, leur trace est toujours positive. Le minimum de la trace sur H_n est alors 0 atteint pour la matrice de permutation du cycle $(1, 2, \dots, n)$.

Ensuite, comme la somme des termes (tous positifs) sur une ligne vaut 1, on voit qu'aucun coefficient ne peut dépasser 1.

La trace ne peut donc pas dépasser n et cette valeur est atteinte pour la matrice I_n .

Les matrices bistochastiques de taille 2 sont peu nombreuses. Dès qu'on a fixé un coefficient $\begin{pmatrix} a & \\ & \end{pmatrix}$, ses deux voisins sont imposés par "somme en ligne égale à 1" et "somme en colonne égale à 1" $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$. Le dernier suit par recollement et tout est compatible $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$.

Le réel a doit rester entre 0 et 1 pour que a et $1 - a$ soient positifs.

La trace vaut alors $2a$ et varie entre 0 et 2 (atteint pour I_2).

Le déterminant vaut $a^2 - (1 - a)^2$ et varie entre -1 et 1 .

Le permanent vaut $a^2 + (1 - a)^2$ et varie entre 1 et $1/2$ (atteints pour une matrice de permutation et pour $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$).

Par positivité des coefficients, le permanent d'une matrice stochastique est positif.

Si une matrice stochastique est à coefficients entiers, il faut les prendre dans $\mathbb{N}$ par positivité. Mais comme toute somme en ligne doit valoir 1, on déduit que la grande majorité des coefficients doivent être nuls, avec un coefficient égal à 1 sur chaque ligne.

Mais la condition de bistochasticité dit qu'il y a ensuite un seul 1 par colonne.

Un 1 par ligne et par colonne! On identifie les matrices de permutations. Il y en a exactement $n!$.

On pourrait montrer que les matrices de permutation sont les éléments "extrémaux" de B_n et que toute matrice de B_n est barycentre à coefficients positifs de matrices de permutations...

Sinon, le moindre exemple avec des matrices de taille 2 montre qu'en général, on n'a pas $(a.d + b.c).(\alpha.\delta + \beta.\delta)$ égal à $(a.\alpha + b.\gamma).(c.\beta + d.\delta) + (c.\alpha + d.\gamma).(a.\beta + b.\delta)$. Le permanent n'a quand même pas toutes les mêmes propriétés que le déterminant.

D.S.15

Charlemagne

vendredi 1 juin

2011/2012

D.S.15

2011/12

EXERCICES**D.S.15**

$\langle \spadesuit(32) \rangle$ Inversez la matrice $\begin{pmatrix} 9 & -6 & 1 \\ 16 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. 2 pt.

$\langle \spadesuit(33) \rangle$ Soit ϕ un produit scalaire dans le plan pour lequel le triangle $(A, 0, B)$ est équilatéral de côté 7 avec $A(3, -1)$ et $B(4, 1)$.

Déterminez la matrice de Gram de ϕ sur la base canonique. 3 pt.

$\langle \spadesuit(34) \rangle$ Construisez un point S pour que (A, O, S) soit un triangle rectangle isocèle. 3 pt. Faites un dessin. 1 pt.

$\langle \diamond(24) \rangle$ Quantifiez les trois propositions suivantes et montrez en deux : 4 pt.

- Tout nombre premier est la somme d'au plus deux nombres impairs.
- Tout nombre pair est la somme d'au plus deux nombres premiers.
- Tout nombre premier impair est la différence de deux carrés.

2011/12

PÉRIODICITÉ/NORMES/FOURIER**D.S.15**

- 1) On note $(E, +, \cdot)$ l'espace vectoriel des applications C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de période 2π (ce n'est pas forcément la plus petite période).

Montrez que $(f, g) \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t).g(t).dt$ est un produit scalaire sur $(E, +, \cdot)$, qu'on va noter ϕ et dont la norme associée sera notée N_2 . 3 pt.

- 2) Montrez que $f \rightarrow \text{Max}(|f(t)|/t \in [-\pi, \pi])$ est une norme sur E qu'on va noter $|\cdot|_\infty$. Est elle issue d'un produit scalaire? 3 pt.

- 3) Montrez $N_2(f) \leq \sqrt{2}.|f|_\infty$ pour tout f de E . 1 pt.

- 1) Pour tout n , on note c_n et s_n les applications $t \rightarrow \cos(n.t)$ et $t \rightarrow \sin(n.t)$. Montrez que les éléments de $\{c_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{s_n | n \in \mathbb{N}^*\}$ sont deux à deux orthogonaux. Lesquels sont normés? 4 pt.

- 2) Montrez que chaque $\cos^{2.n}$ est dans E . Calculez $|\cos^{2.n}|_\infty$ pour tout n . Calculez $N_2(\cos^{2.n})$ pour tout n (exprimez $N_2(\cos^{2.n+2})$ à l'aide de $N_2(\cos^{2.n})$ par une intégration par parties). 4 pt. Montrez que $N_2(\cos^{2.n})$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. 3 pt.

- 3) A-t-on $\exists \mu \in \mathbb{R}^{+*}, \forall f \in E, |f|_\infty \leq \mu.N_2(f)$? 1 pt.

A-t-on $\forall f \in E, \exists \mu \in \mathbb{R}^{+*}, |f|_\infty \leq \mu.N_2(f)$? 1 pt.

47 points

47 points

- 1) Pour tout réel a on définit τ_a par $\tau_a(f) = (t \rightarrow f(t+a))$. Montrez que τ_a est un automorphisme de $(E, +, \cdot)$. 3 pt.

Montrez pour tout f de E : $N_2(\tau_a(f)) = N_2(f)$ et $|\tau_a(f)|_\infty = |\tau_a(f)|$. 2 pt.

- 2) On note D l'opérateur de dérivation. Montrez que c'est un endomorphisme de $(E, +, \cdot)$. Déterminez $\text{Ker}(D)$, et donnez sa dimension. Montrez : $\text{Im}(D) = \{g \in E / \phi(g, c_0) = 0\}$. 4 pt.

- 3) Montrez que D n'est pas lipschitzien (que ce soit pour N_2 ou pour $|\cdot|_\infty$). Vous aurez déjà un demi point si vous êtes capable d'écrire ce que c'est que " D est lipschitzien" dans le cadre de notre problème. 3 pt.

- 4) Montrez : $D \circ \tau_a = \tau_a \circ D$ pour tout a . (1 pt.)

- 5) Montrez que le spectre de D se réduit à $\{0\}$. (2 pt.)

Déterminez le spectre de $D \circ D$. (3 pt.)

- 1) Pour tout n , on note E_n l'espace vectoriel engendré par $(c_0, c_1, \dots, c_n)$. Quelle est sa dimension? (1 pt.)

- 2) Pour quelles valeurs de a l'application τ_a est-elle un endomorphisme de E_n ? Donnez alors sa trace et son déterminant. (3 pt.)

- 3) Montrez que D^2 est un endomorphisme de E_n et calculez sa trace et son déterminant. (2 pt.)

- 1) Montrez que $f \mapsto \frac{\phi(f, c_0)}{2} \cdot c_0 + \sum_{k=1}^n \phi(c_k, f) \cdot c_k$ est un projecteur d'ensemble image E_n . (4 pt.)

- 2) Calculez l'image de $\cos^3$. (2 pt.)

- 1) Montrez que $f \mapsto \frac{\phi(f, c_0)}{2} \cdot c_0 + \sum_{k=1}^n \phi(c_k, f) \cdot c_k + \phi(s_k, f) \cdot s_k$ est aussi un projecteur de E dans E dont vous donnerez le rang, et que vous appellerez p_n . (4 pt.)

- 2) Montrez : $p_n(f) = x \mapsto \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{\sin((2n+1) \cdot (x-t)/2)}{\sin((x-t)/2)} \cdot dx$. (4 pt.)

- 3) Montrez que chaque τ_a est un endomorphisme de $\text{Im}(p_n)$ et donnez sa trace et son déterminant. (3 pt.)

D.S.15

MPSI2

998 points

Année 2011/12

D.S.15

C'est un problème d'algèbre bilinéaire où il s'agit de travailler avec un produit scalaire autre que le produit scalaire canonique. On note G la matrice de Gram de la base canonique $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, qui n'est donc pas ici la matrice I_2 (*sinon, ça se verrait, le triangle serait bien équilatéral même pour le plus pointilleux des biochimistes*).

La ϕ -norme du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est alors $\sqrt{a.x^2 + 2.b.x.y + c.y^2}$.

On traduit alors le fait que le triangle de côtés $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ soit équilatéral, de côté 7 :

$$\begin{cases} 9.a & -6.b & +c & = & 49 \\ 16.a & +8.b & +c & = & 49 \\ a & +4.b & +4.c & = & 49 \end{cases}$$

On inverse cette matrice pour trouver a , b et c . C'est agréable, il s'agit de la matrice posée en tête d'exercice. Son déterminant vaut 98, elle est bien inversible.

On calcule ensuite les neuf cofacteurs pondérés. Ou alors on note U , V et W les trois colonnes et on écrit en ligne les trois vecteurs $V \wedge W$, $W \wedge U$ et $U \wedge V$ (*c'est exactement le même calcul*).

On trouve $\frac{1}{98} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -9 & 5 & 1 \\ 8 & -6 & 24 \end{pmatrix}$. On multiplie par $\begin{pmatrix} 49 \\ 49 \\ 49 \end{pmatrix}$ et si on ne s'est pas trompé, on trouve $a = 3$, $b = -3/2$ et $c = 13$.

La matrice de Gram cherchée est $\begin{pmatrix} 3 & -3/2 \\ -3/2 & 13 \end{pmatrix}$, qui obéit bien aux contraintes "norme" et "Cauchy-Schwarz".

On peut vérifier : $\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3/2 \\ -3/2 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 49 = 7^2$ de même avec $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a aussi $\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3/2 \\ -3/2 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{49}{2} = 7^2 \cdot \cos(2.\pi/3)$.

On veut ensuite un triangle rectangle isocèle pour ϕ . Il s'agit donc d'avoir deux côtés de même norme, orthogonaux entre eux (*demi carré*).

Moi j'appelle ça orthogonalisation de Gram Schmidt. Même si vous de votre côté vous avez juste appelé ça résolution d'un système par manque de recul (*il faut apprendre à faire de l'algèbre linéaire et pas de la mécanique*).

On garde le premier vecteur de base $3.\vec{i} - \vec{j}$ de norme 7, qu'on appelle $7.\vec{\epsilon}_1$.

On prend comme second vecteur $\vec{i}$ et on le "reboute" en $\vec{i} - \phi(\vec{i}, \vec{\epsilon}_1) \times \vec{\epsilon}_1$ qui donne $\begin{pmatrix} 35/98 \\ 21/98 \end{pmatrix}$.

Le calcul simple par condition $\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3/2 \\ -3/2 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$ donne bel et bien les vecteurs colinéaires à $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ce vecteur a pour norme $7.\sqrt{3}$. On le voulait de norme 7. On divise par $\sqrt{3}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ sera donc $\frac{5.\vec{i} + 3.\vec{j}}{\sqrt{3}}$ et le point D sera $(5/\sqrt{3}, 3/\sqrt{3})$.

On termine avec un dessin, en plaçant ces différents points.

Mais on peut aussi dessiner un chat ou un gateau pour mon fils, une femme nue pour les ex-MPSI2 de Spé MP, un être aux yeux étranges pour Sébastien ou une tache à coller sur sa copie pour Sylvain. Après tout, rien

n'a été précisé...

2011/12

La conjecture de Goldbach.

D.S.15

Parmi les propositions à quantifier, il y a celle ci :

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (p, q) \in (P \cup \{0\})^2, 2.n = p + q$ en notant P l'ensemble des nombres premiers.

Un nombre pair est quantifié par $\forall n \in \mathbb{N}, (2.n = \dots)$ (et le nombre pair est $2.n$).

Une somme de deux nombres premiers, ce sera pour $(p, q) \in P^2$, une "somme d'un nombre premier, ce sera pour $(p, q) \in P \times \{0\}$, et une somme d'aucun nombre premier, c'est $(p, q) \in \{0\}^2$.

Si on estime que la notation P pour désigner l'ensemble des nombres premiers n'est pas légitime, on remplacera $p \in P$ par $(p \in \mathbb{N}^*)$ et $(\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, p = a.b \Rightarrow (a-p).(b-a) = 0)$. A vous de comprendre pourquoi.

Au fait, ce résultat est faux, car 2 n'est pas la somme de 0, 1 ou 2 nombres premiers. Ce qui est amusant, c'est que 0 l'est...

Ensuite, on ignore encore si le résultat est vrai pour tout n . C'est la conjecture de Goldbach.

Tout nombre premier est la somme d'au plus deux nombres impairs :

$\forall p \in P, (\exists k \in \mathbb{N}, p = 2.k + 1)$ ou $(\exists (k, m) \in \mathbb{N}, p = (2.k + 1) + (2.m + 1))$ ou $p = 0$

Le troisième cas n'est même pas à envisager.

Mais le deuxième correspond à $p = 2$ qui est la somme 1 + 1.

Enfin, tous les autres nombres premiers sont impairs donc effectivement de la forme $2.k + 1$ (p donné, on prend $k = (p - 1)/2$).

Tout nombre premier impair est la différence de deux carrés. En effet, tout nombre impair est la différence de deux carrés, que ce nombre $2.q + 1$ soit premier ou non, il s'écrit $(q + 1)^2 - q^2$.

On a donc $\forall p \in P, (p \neq 2) \Rightarrow (\exists (r, s) \in \mathbb{N}^2, p = r^2 - s^2)$.

On rappelle que 2 est bien le seul nombre premier pair, à exclure donc.

2011/12

Le produit scalaire ϕ .

D.S.15

Pour f et g données dans E , l'application $f \times g$ est continue, donc intégrable. $\phi(f, g)$ existe.

Ensuite, par commutativité de la multiplication, on a $\phi(f, g) = \phi(g, f)$.

On ne teste qu'une seule des deux linéarités. On se donne f, g et h ainsi que λ et μ . On part de

$\lambda. \int_{-\pi}^{\pi} p.f(t).g(t).dt + \mu. \int_{-\pi}^{\pi} f(t).h(t).dt$ et on arrive vite par linéarité de l'intégrale et distributivité

de la multiplication sur l'addition à $\int_{-\pi}^{\pi} f(t).(\lambda.g(t) + \mu.h(t)).dt$.

L'autre linéarité se déduit par symétrie.

Pour f donnée toute seule, l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t).dt$ est positive, comme intégrale d'une application positive sur un intervalle pris dans le bon sens.

Il reste à envisager le cas où l'intégrale est nulle. Ce n'est possible qu'en supposant f^2 nulle sur tout $[-\pi, \pi]$ car f^2 est positive ou nulle. Et ensuite, par périodicité, il faut que f soit nulle partout.

Au fait, comment montre-t-on le passage de $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t).dt = 0$ à f est nulle sur $[-\pi, \pi]$? C'est un raisonnement qui utilise la continuité de f (*sans continuité, j'ai un contre-exemple, avec f nulle partout sauf en quelques points isolés qui n'ont aucun poids dans l'intégrale*).

On définit $F = x \longrightarrow \int_{-\pi}^x f^2(t).dt$. Cette application est croissante par positivité de f^2 . Elle est nulle en $-\pi$ (intégrale idiote) et en π (hypothèse). Par croissance, elle est nulle partout de $-\pi$ à π (on encadre par croissance : $0 = F(0) \leq F(x) \leq F(\pi) = 0$). On dérive : $F'(0) = 0$ et rappelle : $F'(x) = f^2(x)$. C'est tout.

On peut aussi construire un petit raisonnement par l'absurde utilisant aussi la continuité de f^2 .

2011/12

L'autre norme.

D.S.15

Si f est continue sur $\mathbb{R}$, elle l'est aussi sur le segment $[-\pi, \pi]$. Par théorème de compacité, elle y est bornée et atteint ses bornes. De même que $|f|$. Et le plus petit majorant de ces réels positifs est positif. Pour tout x de $[-\pi, \pi]$, on a alors aussi $0 \leq |f(x)| \leq |f|_\infty$. Si la borne supérieure est nulle, alors par antisymétrie, $f(x)$ est nul pour tout x .

On prend ensuite f et g et on passe progressivement à la borne supérieure de la façon suivante : pour tout t de $[-\pi, \pi]$, on a déjà $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$ par simple inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$, on a ensuite $|f(t) + g(t)| \leq |f|_\infty + |g|_\infty$ par définition même de $|f|_\infty$ et $|g|_\infty$,

le réel $|f|_\infty + |g|_\infty$ est alors un des majorants de $|f + g|$ sur $[-\pi, \pi]$, par définition du plus petit majorant, on a alors $|f + g|_\infty \leq |f|_\infty + |g|_\infty$

Toute autre démonstration est souvent une arnaque...

Il nous reste à démontrer $|\lambda \cdot f|_\infty = |\lambda| \cdot |f|_\infty$ pour λ réel et f continue.

On écrit pour tout t de $[-\pi, \pi]$: $|\lambda \cdot f(t)| = |\lambda| \cdot |f(t)| \leq |\lambda| \cdot |f|_\infty$, le réel $|\lambda| \cdot |f|_\infty$ est un majorant, pas forcément le plus petit, on a alors $|\lambda \cdot f|_\infty \leq |\lambda| \cdot |f|_\infty$; on reprend avec $|f(t)| = |1/\lambda| \cdot |\lambda \cdot f(t)| \leq |1/\lambda| \cdot |\lambda \cdot f|_\infty$, on arrive à $|f|_\infty \leq |\lambda \cdot f|_\infty / |\lambda|$, et les deux inégalités mises bout à bout donnent l'égalité $|\lambda \cdot f|_\infty = |\lambda| \cdot |f|_\infty$.

Cette norme n'est pas issue d'un produit scalaire, car elle ne vérifie pas les formules de polarisation et du parallélogramme :

$$|1|_\infty = |\cos|_\infty = 1 \text{ et } |1 + \cos|_\infty = |1 - \cos|_\infty = 2$$

$$2 \cdot |1|_\infty^2 + 2 \cdot |\cos|_\infty^2 = 4 \text{ et } |1 + \cos|_\infty^2 + |1 - \cos|_\infty^2 = 8.$$

2011/12

Inégalité $N_2(f) \leq \sqrt{2} \cdot |f|_\infty$.

D.S.15

On se donne f continue. Dans l'intégrale $\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \cdot dt$ on majore chaque $|f(t)|$ par le réel $|f|_\infty$ (puis son carré par le carré) et on calcule l'intégrale : $\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \cdot dt \leq \frac{2 \cdot \pi \cdot |f|_\infty^2}{\pi}$. On passe à la racine entre réels positifs, et il reste bien $\sqrt{2} \cdot |f|_\infty$.

2011/12

Orthogonalité des c_p et s_q .

D.S.15

C'est un calcul tellement classique qu'on l'a déjà fait dans le cours. Je n'irai pas jusqu'à dire que c'est cadeau, car il y a toujours des élèves pour plomber ça.

Pour p et q entiers distincts :

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(p.t) \cdot \sin(q.t) \cdot dt =$	$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(p.t) \cdot \cos(q.t) \cdot dt =$
$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((p-q).t) - \cos((p+q).t)}{2} \cdot dt$	$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((p-q).t) + \cos((p+q).t)}{2} \cdot dt$
$\left[\frac{\sin((p-q).t)}{2 \cdot (p-q)} - \frac{\sin((p+q).t)}{2 \cdot (p+q)} \right]_{-\pi}^{\pi}$	$\left[\frac{\sin((p-q).t)}{2 \cdot (p-q)} + \frac{\sin((p+q).t)}{2 \cdot (p+q)} \right]_{-\pi}^{\pi}$
$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(p.t) \cdot \cos(q.t) \cdot dt =$	$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(p.t) \cdot dt =$
$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((p+q).t) - \sin((p-q).t)}{2} \cdot dt$	$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos(2.p.t)}{2} \cdot dt$
$\left[-\frac{\cos((p-q).t)}{2 \cdot (p-q)} - \frac{\cos((p+q).t)}{2 \cdot (p+q)} \right]_{-\pi}^{\pi}$	$\pi + \left[\frac{\sin((p+q).t)}{2 \cdot (p+q)} \right]_{-\pi}^{\pi}$

On trouve des 0 pour $\phi(s_p, s_q)$, pour $\phi(c_p, c_q)$, pour $\phi(s_p, c_q)$.

Pour $\phi(c_p, c_p)$, l'intégrale vaut π , de même pour $\phi(s_p, s_q)$. On divise par π , on passe à la racine...
 Pour ce qui est de $\phi(s_p, s_q)$, on peut conclure géométriquement par imparité, ou en intégrant $t \rightarrow \sin(2.p.t)/2$.

Graphiquement, $t \rightarrow \cos^2(p.t)$ donne une sinusoïde translatée dont la valeur moyenne est facile à lire.
 On traite à part c_0 qui a pour norme $\sqrt{2}$.

Au fait, toutes ces applications sont bien dans E .

2011/12

Calcul de $N_2(\cos^{2.n})$.

D.S.15

On doit calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2.n}(t).dt$ en intégrant par parties. On retrouve les intégrales de Wallis :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2.n+2}(t).dt = \left[-(2.n+1).c^{2.n+1}.s.s \right]_{-\pi}^{\pi} + (2.n+1). \int_{-\pi}^{\pi} c^{2.n+1}.s.s \text{ le crochet est nul, et dans l'autre, on remplace } s^2 \text{ par } 1 - c^2, \text{ on fait passer le } -(2.n+1). \int_{-\pi}^{\pi} c^{2.n+2} \text{ de l'autre côté, et il reste}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2.n+2} = \frac{2.n+1}{2.n+2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2.n}.$$

On met en boucle les informations et on a une formule avec

- le produit des entiers pairs au dénominateur : $2^n.n!$
- le produit des entiers impairs au numérateur : $\frac{(2.n)!}{2^n.n!}$ en ayant inséré les entiers pairs.

Il reste à calculer l'intégrale pour n égal à 0 : $2.\pi$.

$$\text{On a donc : } N_2(\cos^{2.n}) = \frac{\sqrt{(2.n)!}.\pi}{2^{n-1}.n!}.$$

On bluffe ensuite et on prétend que ceci tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Et c'est de l'arnaque.

Cette question est là pour détecter les futurs profs de physique, et j'espère pour ne surtout pas détecter des ingénieurs.

Proprement ?

On pose pour alléger $w_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t).dt$ (la vraie intégrale de Wallis). On rappelle qu'on a alors $N_2(\cos^{2.n}) = \sqrt{4.w_{2.n}}$ par périodicité et parité. On montre que la suite (w_n) est décroissante, positive, donc convergente. On montre aussi que la suite $((n+1).w_n.w_{n+1})$ est constante. Si la suite (w_n) convergerait vers un réel non nul, cette suite produit tendrait vers $+\infty$ à cause du $n+1$. On en déduit donc par élimination que la suite (w_n) ne peut tendre que vers 0.

Graphiquement, c'est assez naturel. Et proprement, c'est à connaître en fin de Sup.

Autre comparaison entre normes.

On a donc la suite $N_2(\cos^{2.n})$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
 dans le même temps, on a $|\cos^{2.n}|_{\infty} = 1$ pour tout n .

On raisonne par l'absurde. S'il existait μ dans $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $\mu.|f|_{\infty} \leq N_2(f)$ pour tout f , on aurait $0 \leq \mu.| \cos^{2.n} |_{\infty} \leq N_2(\cos^{2.n})$ pour tout n et par théorème d'encadrement $\mu = 0$ (le passage à la limite peut aussi servir ici d'argument). On a une contradiction.

On n'a donc pas $\exists \mu \in \mathbb{R}^{+*}, \forall f \in E, |f|_{\infty} \leq \mu.N_2(f)$.

En revanche, on a bien $\forall f \in E, \exists \mu \in \mathbb{R}^{+*}, |f|_{\infty} \leq \mu.N_2(f)$, car l'ordre des quantificateurs change tout. Le réel μ a le droit de dépendre de f . On peut donc en changer chaque fois qu'on change de f .

Pour f quelconque donnée, je prends $\mu = \frac{|f|_{\infty}}{N_2(f)}$ et l'affaire est dans le sac.

Je rappelle qu'il y a une énorme différence entre $\exists\mu, \forall f$ et $\forall f, \exists\mu$. Si vous ne saisissez pas, comparez $(\forall \text{annee}, \exists \text{eleve}, (\text{eleve redouble}))$ et $(\exists \text{eleve}, \forall \text{annee}, (\text{eleve redouble}))$.

Bilan : on a une majoration de N_2 par $|\cdot|_\infty$ mais pas de majoration de $|\cdot|_\infty$ par N_2 .

2011/12

Automorphismes $f \longrightarrow (t \longrightarrow f(t+a))$.

D.S.15

On constate que $\tau_a(f)$ est une nouvelle application, obtenue par translation de a du graphe de f .

On prend f dans E et on voit que $\tau_a(f)$ est encore une application réelle de variable réelle, de même classe C_∞ que f . Cette application $\tau_a(f)$ est aussi 2π -périodique.

L'application τ_a va de E dans E .

On montre ensuite que $\lambda.\tau_a(f) + \mu.\tau_a(g)$ coïncide avec $\tau_a(\lambda.f + \mu.g)$, en vérifiant t par t . On reconnaît la linéarité de chaque τ_a .

On montre enfin que τ_a est bijective, en trouvant sa bijection réciproque. C'est simplement $\tau_{(-a)}$ puisque $\tau_a(\tau_{(-a)}(f)) = \tau_{(-a)}(\tau_a(f)) = f$ pour tout f .

Sinon, on peut chercher le noyau, fait de l'unique application vérifiant $f(t+a) = 0$ pour tout t . Mais l'injectivité ne suffira pas, car on n'est pas en dimension finie...

L'application $\tau_a(f)$ garde la même norme infinie que f , et si $|f|$ atteint son maximum en x_0 alors $\tau_a(f)$ atteint son maximum en $x_0 - a$.

La translation n'a pas d'effet non plus sur l'intégrale, par périodicité. Pour a donné, on calcule

$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t+a).dt$ en découpant des morceaux et en les recollant.

Mais on peut aussi noter F une primitive de f^2 . On doit alors comparer $F(\pi) - F(-\pi)$ et $F(\pi+a) - F(-\pi+a)$. On pose donc $G(a) = F(\pi+a) - F(-\pi+a)$ pour tout a et on dérive cette application G en $a \longrightarrow f^2(\pi+a) - f^2(-\pi+a)$. On constate que G' est nulle par périodicité de f et donc de f^2 . L'application G est constante. Sa valeur en 0 est donc sa valeur en tout a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t+a).dt = F(a+\pi) - F(a-\pi) = F(0+\pi) - F(0-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t).dt.$$

On traitera τ_a d'isométrie pour les deux normes $|\cdot|_\infty$ et N_2 .

2011/12

L'opérateur de dérivation.

D.S.15

Par construction, si f est C^∞ , alors f' existe et est encore C^∞ . Et en dérivant la relation $f(t+2\pi) = f(t)$ valable pour tout t on trouve $f'(t+2\pi) = f'(t)$ qui confirme que f' est restée dans E .

On n'oublie pas la linéarité : $\lambda.D(f) + \mu.D(g) = \lambda.f' + \mu.g' = (\lambda.f + \mu.g)' = D(\lambda.f + \mu.g)$.

Son noyau est fait des applications constantes. Elles sont bien dans E .

Son ensemble est fait des dérivées des applications 2π -périodiques. Obtient on toutes les applications périodiques?

Non, on n'obtient que les applications dont la moyenne sur une période est nulle. Ce qui se traduit par $\phi(f, 1) = 0$. Et l'énoncé cache bien son jeu avec $\phi(f, c_0) = 0$.

Mais pourquoi?

Imaginons que f est l'image par D d'une application de E notée g . On traduit : $f = D(g) = g'$.

On calcule alors $\phi(f, c_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t).1.dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(t).dt = \frac{g(\pi) - g(-\pi)}{\pi} = 0$. La condition est nécessaire.

Mais de là à ce que qu'elle soit suffisante... On ne peut pas raisonner sur les dimensions, ni sous les dimensions. On est en dimension infinie.

On prend f de moyenne nulle. On lui cherche un antécédent.

On a envie de poser : $g = t \longrightarrow \int_0^t f(u).du$. Mais qui dit que cet antécédent est bien dans E ? Sa dérivabilité et son caractère C^∞ ne font aucun doute.

Mais il nous manque la périodicité. On note G l'application différence $G = t \longrightarrow g(t + 2.\pi) - g(t)$. Elle se dérive en $t \longrightarrow f(t + 2.\pi) - f(t)$ c'est à dire en 0.

Par théorème, on déduit que G est constante. C'est déjà ça. Mais sa valeur en $-\pi$ (par exemple) est $g(\pi) - g(-\pi)$ qui s'écrit $\int_{-\pi}^{\pi} f(t).dt$ par relation de Chasles et vaut 0 par hypothèse (moyenne nulle).

L'application constante G est nulle en un point, donc partout, et g est $2.\pi$ -périodique.

Combien vais je trouver de "raisonnements" avec les mains, avec des "il est évident que" ou "il n'y a pas d'autre possibilité que ...".

2011/12

Caractère non lischitzien de D .

D.S.15

Le caractère lischitzien ce serait l'existence de K vérifiant $N_2(D(f) - D(g)) \leq K.N_2(f - g)$ pour tout couple (f, g) .

Autant se contenter de vérifier $N_2(h') \leq K.N_2(h)$ pour h dans E . Ou de l'invalider.

On pense à prendre c_n , de dérivée $-n.s_n$. On compare les normes : $N(D(c_n)) = N(n.s_n) = n.N(s_n) = n$ (qu'il s'agisse de la norme 2 ou ∞), et $N(c_n) = 1$. Difficile de majorer n par un multiple de 1 (qui ne dépende pas de n).

2011/12

Commutativité de τ_a et D . Spectres.

D.S.15

On prend f quelconque dans E et on calcule $\tau_a(D(f))$. C'est l'application $t \longrightarrow f'(t + a)$ et c'est exactement $D(\tau_a(f))$.

Attention, c'est fini le temps où je pouvais encore tolérer les erreurs d'étages... Par exemple $\tau_a(f(t))$ n'a pas de sens, alors que $\tau_a(f)(t)$ a un sens...

On cherche si il existe des réels λ vérifiant $f' = \lambda.f$ (c'est $D(f) = \lambda.f$) pour au moins une fonction f non nulle de E .

"C'est fac'!" dirait mon fils.

On trouve f de la forme exponentielle : $t \longrightarrow e^{\lambda.t}$ (ou tout multiple).

Mais alors f n'est pas périodique et n'est pas dans E .

La seule solution pour que f soit dans E , c'est $\lambda = 0$ qui conduit à f constante.

Normal, c'est la valeur propre 0 qui nous mène dans le noyau.

Rappelons que 0 a le droit d'être valeur propre. Ce qu'on refuse c'est le "vecteur propre nul".

Tout à coup, je me dis que certains élèves auront peut être bêtement tenté de calculer le polynôme caractéristique de D en cherchant déjà sa matrice sur une base. Mais quelle base? E est de dimension infinie...

Pour le spectre de $D \circ D$ (endomorphisme de E), on résout $f'' = \lambda.f$ d'inconnue λ et d'inconnue auxiliaire f non nulle dans E .

Pour λ nul, on trouve les applications affines comme vecteurs propres. Mais comme on doit rester dans E il faut se restreindre aux applications constantes.

- Pour λ positif, on trouve des combinaisons d'exponentielles, non périodiques... On refuse.

- Pour λ négatif, on trouve des combinaisons de sinusoides. C'est bon signe. Mais $t \longrightarrow A.\cos(\sqrt{|\lambda|}.x + \varphi)$ n'est dans E que si $\sqrt{|\lambda|}$ est un entier.

Le spectre est donc fait des carrés d'entiers.

On résume : $Sp(D) = \{0\}$ et $Sp(D^2) = \{-k^2 | k \in \mathbb{N}\}$.

2011/12

D et τ_a comme endomorphismes de E_n .

D.S.15

Chaque $(E_n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel, en tant qu'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. Il est de dimension inférieure ou égale à $n+1$ (nombre de vecteurs). Il est même de dimension n puisque ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux et forment une famille libre.

L'application $D \circ D$ va de E_n dans E_n et on peut tout de suite donner sa matrice sur la base $(c_0, c_1, \dots, c_n)$: elle est diagonale de termes diagonaux $[0, 1, 4, 9, \dots, n^2]$.

La trace est égale à $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et le déterminant est nul (application de toutes façons non injective).

L'application τ_a est un endomorphisme de E mais pas de E_n . En effet, elle transforme par exemple c_1 en $\cos(a).c_1 - \sin(a).s_1$ qui n'est pas dans E_n (le vecteur s_1 en est sorti, c'est une application impaire, orthogonale à tous les éléments de E_n). On ne s'en sort que si $\sin(a)$ est nul.

On a alors a de la forme $k.\pi$ avec k entier.

• Pour k pair, c'est l'identité, puisque la translation de $2.\pi$ est sans effet sur nos applications $2.\pi$ -périodiques.

Sa trace vaut alors $n+1$ (attention à la dimension de l'espace), et son déterminant vaut 1.

• Pour k impair, on a donc après réduction par congruence : $f \rightarrow (t \rightarrow f(t+\pi))$. Vecteur de base par vecteur de base, on a $\tau_\pi(c_p) = (t \rightarrow \cos(p.(t+\pi)))$. Pour p pair, on retrouve c_p et pour p impair, on a $-c_p$.

La matrice de τ_π sur la base $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ est donc la matrice diagonale dont les termes diagonaux valent 1 et -1 en alternance.

	diagonale	trace	déterminant
On a donc			
n pair	$[1, -1, 1, \dots, -1, 1]$	1	$(-1)^{n/2}$
n impair	$[1, -1, 1, \dots, 1, -1]$	0	$(-1)^{(n+1)/2}$

2011/12

Premier projecteur $f \rightarrow \phi(f, 1/2) + \sum_{k=1}^n \phi(f, c_k).c_k$.

D.S.15

Pour f donnée, chaque réel $\phi(f, c_k)$ existe, l'image existe et est un vecteur de E_n , comme combinaison linéaire de vecteurs de base de E_n .

Par (bi)linéarité de ϕ on a aussi l'égalité entre $\lambda. \left(\phi(f, 1) + \sum_{k=1}^n \phi(f, c_k).c_k \right) + \mu. \left(\phi(g, 1) + \sum_{k=1}^n \phi(g, c_k).c_k \right)$ et

$$\phi(\lambda.f + \mu.g, 1) + \sum_{k=1}^n \phi(\lambda.f + \mu.g, c_k).c_k.$$

Il ne reste qu'à prouver $p \circ p = p$ en notant p cette application linéaire (combien d'élèves hélas se concentrent sur ce point, en oubliant la linéarité).

Pour ne pas trainer des sommes de sommes (qui néanmoins se simplifient par orthonormalité de la famille de vecteurs $(c_0/\sqrt{2}, c_1, \dots, c_n)$), on commence par vérifier que chaque $p(f)$ est dans F .

On a donc juste besoin de prouver $p(g) = g$ pour g dans E_n et de l'appliquer à $g = p(f)$.

Mais plutôt que de le prouver pour tous les éléments de E_n , on peut se contenter de le prouver pour une famille génératrice de E_n .

On va donc juste prouver $p(c_q) = c_q$ pour q plus petit que n (plus on comprend l'algèbre linéaire, moins on a envie de faire des calculs bourrins dans les autres matières).

On calcule donc : $\frac{\phi(c_p, c_0)}{2}.c_0 + \sum_{k=1}^n \phi(c_k, c_p).c_k$ avec p fixé. Le terme hors somme est nul, et dans la somme, un seul terme survit, par orthogonalité, c'est $\phi(c_p, c_p).c_p$, égal à $1.c_p$ par (ortho)normalité. On

a donc $p(c_q) = c_q$ pour tout vecteur c_q de la base “canonique” de E_n .

On traite à part le cas de c_0 qui donnez $\frac{2}{2}.c_0 + 0$.

On a donc bien $p(g) = g$ pour tout g de E_n et $p(p(f)) = p(f)$ pour tout f de E .

L'ensemble image est inclus dans E_n . Est il égal à E_n ?

Chaque vecteur c_q de notre base de E_n est atteint (c'est $p(c_q)$). Par linéarité, tous les éléments de E_n sont atteints.

Par double inclusion, l'ensemble image est exactement égal à E_n .

On cherche ensuite l'image de $\cos^3$ qui est bien une application de E .

Et là encore, aucun effort. $\cos^3$ est dans E_n puisque n vaut au moins 3. Et on en profite pour rappeler :

$$\cos^3 = \frac{c_3 + 3.c_1}{4} \text{ (venant de la formule de Tchebitchev pour } \cos(3.t)).$$

2011/12

Deuxième projecteur $f \rightarrow \phi(f, 1/2) + \sum_{k=1}^n \phi(f, c_k).c_k + \phi(f, s_k).s_k$.

D.S.15

Les calculs sont exactement du même type.

L'ensemble image est $Vect(c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \dots, c_n, s_n)$ de dimension $2.n + 1$.

Tel est donc le rang de ce projecteur. Et sa trace.

On calcule en un point t la quantité image : $\phi(f, 1/2) + \sum_{k=1}^n \phi(f, c_k). \cos(k.t) + \phi(f, s_k). \sin(k.t)$.

On regarde chaque terme de la somme $\phi(f, c_k). \cos(k.t) + \phi(f, s_k). \sin(k.t)$ en y remplaçant chaque produit scalaire par une intégrale :

$$\cos(k.t). \int_{-\pi}^{\pi} f(x). \cos(k.x). dx + \sin(k.t). \int_{-\pi}^{\pi} f(x). \sin(k.x). dx$$

On fusionne par linéarité : $\int_{-\pi}^{\pi} f(x). (\cos(k.t). \cos(k.x) + \sin(k.t) \sin(k.x)). dx$

On fait un peu de trigonométrie : $\int_{-\pi}^{\pi} f(x). \cos(k.(t-x)). dx$.

On somme tous ces termes et on y ajoute $\phi(f, 1/2)$ écrit sous forme d'intégrale, et on trouve

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x). \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k.(t-x)) \right). dx.$$

Et qui reconnaît on ? Le noyau de Dirichlet (ah c'est donc là aussi qu'il sert !) avec θ égal à $(t-x)$.

$$\text{On a donc : } p_n(f)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x). \frac{\sin\left(\frac{(2.n+1).(x-t)}{2}\right)}{2.\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}. dx$$

On verra (ou vous verrez l'an prochain) ce que l'on peut faire de ce terme quand n tend vers l'infini.

2011/12

L'opérateur de translation.

D.S.15

Pour terminer, on rappelle que l'opérateur τ_a est linéaire.

On a juste à vérifier que τ_a va bien de $Vect(c_0, c_1, s_1, \dots, c_n, s_n)$ dans lui même.

On le vérifie vecteur par vecteur : chaque c_k a pour image la combinaison $\cos(k.a).c_k - \sin(k.a).s_k$ et chaque s_k a pour image $\sin(k.a).c_k + \cos(k.a).s_k$. On reste bien dans notre espace vectoriel.

On tient même la matrice sur la base dans l'ordre indiqué ; elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & \cos(a) & \sin(a) & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -\sin(a) & \cos(a) & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cos(2.a) & \sin(2.a) & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(2.a) & \cos(2.a) & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(3.a) & \sin(3.a) & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(3.a) & \cos(3.a) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

La trace de cette matrice vaut $1 + 2.\cos(a) + 2.\cos(2.a) + 2.\cos(3.a) + \dots$. On y reconnaît encore une somme de Dirichlet $\frac{\sin((2.n+1).a/2)}{\sin(a/2)}$.

Quant au déterminant, il vaut 1, en reconnaissant de petits déterminants de taille 2 qui valent 1.

D.S.15	MPSI2	998 points	Année 2011/12	D.S.15
---------------	-------	------------	---------------	---------------