

MPSI2 LYCEE CHARLEMAGNE 2020/2021	MARDI 6 OCTOBRE I.S.4.
--	--

♥ 0 ♥ Calculez $\int_0^1 t \cdot 5^t \cdot dt$. 2 pt.

♥ 1 ♥ Calculez $\int_0^1 e^{t+e^t} \cdot dt$. 2 pt.

On a besoin de votre bru pour approfondir ce cas.

♥ 2 ♥ Sachant que θ vaut $\text{Arccos}(1/4)$, calculez $\tan(4 \cdot \theta)$. 2 pt.

♦ 0 ♦ Sachant que θ vaut $\text{Arccos}(1/4)$, calculez $\tan(\theta/4)$. 2 pt.

Il faut que ces hommes baillent dans la main.

♠ 0 ♠ Calculez $\int_0^{1/2} e^{\text{Arccos}(t)} \cdot dt$. 4 pt.

Avec votre bonne bouille, vous trouverez bien une couche.

♦ 1 ♦ Prouvez $\int_0^1 \frac{dt}{9t^2 + 6t + 5} = \frac{1}{6} \cdot \text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)$. 3 pt.

♥ 3 ♥ Calculez $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{3 + \cos(\theta)}$ (changer de variable en $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$). 3 pt.

J'aime tout le monde.

C'est une manière de m'aimer moi sans que ça se remarque trop.

Philippe GELUCK (Le chat)

♦ 2 ♦ Sachant $n! \sim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2 \cdot n \cdot \pi}$, donnez la limite quand n tend vers l'infini de $\binom{3 \cdot n}{n} \cdot \left(\frac{4}{27}\right)^n \cdot \sqrt{n}$. 2 pt.

♦ 3 Calculez module et argument de $e^{3 \cdot i \cdot \theta} + e^{i \cdot \theta}$. 2 pt.

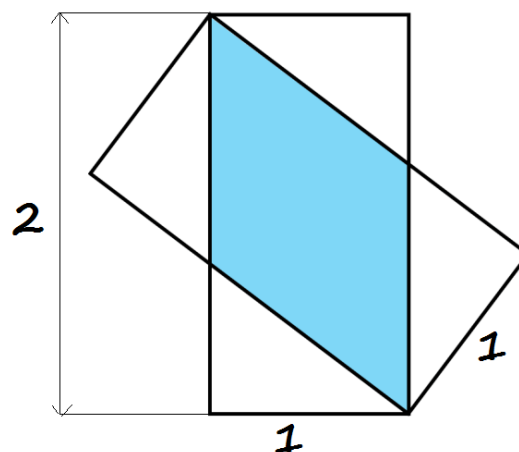
♣ 0 Qui est le plus petit $\text{Arccos}\left(\frac{2}{3}\right)$ ou $\text{Arcsin}\left(\frac{55}{73}\right)$? 2 pt.

♣ 1 L'entier $\sum_{k=0}^{2020} (-1)^{\binom{2020}{k}}$ est il pair ou impair? 2 pt.

♣ 2 Trouvez l'aire de la partie colorée sur le schéma ci-contre. 2 pt.

-1 Écrivez un script Python qui va calculer $\tan\left(\sum_{k=0}^{2020} \text{Arctan}\left(\frac{1}{2 \cdot k + 1}\right)\right)$ (valeur approchée avec

le module math comme le physicien 2 pt., ou valeur rationnelle exacte avec le module « votre cerveau » 5 pt.).



Les deux rectangles sont de format 1 sur 2 ;
retrouvez l'aire de la partie colorée.

Une femme fait un bébé en neuf mois. Mais on ne peut pas attendre de neuf femmes qu'elles fassent un bébé en un mois.

Fred BROOKS

♦ 3 ♦ Représentez graphiquement $x \mapsto \sin(\text{Arctan}(\cos(\text{Arcsin}(\sqrt{1+x}))))$ et donnez sa dérivée seconde. 3 pt.

M	P	S	I	2
---	---	---	---	---

LYCEE CHARLEMAGNE
2020/2021

CORRECTION

I.S.4.

M	P	S	I	2
---	---	---	---	---

Intégrales.

I.S.4.

Toutes les intégrales de l'énoncé existent, argument de continuité.

Toutes les intégrations par parties sont légitimes (fonctions de classe C^1).

$$\int_0^1 t \cdot 5^t \cdot dt = \int_0^1 t \cdot e^{t \cdot \ln(5)} \cdot dt = \left[\frac{e^{t \cdot \ln(5)}}{\ln(5)} \cdot t \right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \frac{e^{t \cdot \ln(5)}}{\ln(5)} \cdot dt = \left[\frac{e^{t \cdot \ln(5)}}{\ln(5)} \cdot t - \frac{e^{t \cdot \ln(5)}}{(\ln(5))^2} \right]_0^1$$

On effectue : $\int_0^1 t \cdot 5^t \cdot dt = \frac{5}{\ln(5)} - \frac{4}{(\ln(5))^2}$ et $(\ln(5))^2$ ne se simplifie pas, sauf en $\ln(5^{\ln(5)})$ si on y tient.

$$\int_0^1 e^{t+e^t} \cdot dt \text{ s'écrit } \int_0^1 e^t \cdot e^{e^t} \cdot dt \text{ et est en fait une simple } \int u' \cdot e^u \cdot du \text{ avec } u = t \mapsto e^t.$$

On intègre en $t \mapsto e^{(e^t)}$ et trouve $e^{(e^1)} - e$

$$\int_0^1 \frac{dt}{9t^2 + 6t + 5} \text{ se met sous forme canonique : } \int_0^1 \frac{dt}{(3t+1)^2 + 4}.$$

$$\text{On force ensuite la main : } \int_0^1 \frac{dt}{9t^2 + 6t + 5} = \frac{1}{4} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{1 + \left(\frac{3t+1}{2}\right)^2}.$$

Si nécessaire, on pose $u = \frac{3t+1}{2}$ pour s'occuper des constantes et on intègre en arctangente :

$$\int_0^1 \frac{dt}{9t^2 + 6t + 5} = \left[\frac{1}{6} \cdot \text{Arctan}\left(\frac{3t+1}{2}\right) \right]_0^1 = \frac{\text{Arctan}(2) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)}{6}.$$

Pourquoi a-t-on ensuite $\text{Arctan}(2) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)$?

Les deux $\circ$ sont entre 0 et $\pi/2$ • pour l'un par définition

• pour l'autre comme distance entre deux termes de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\circ$ ont la même tangente car $\frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$.

Puisqu'on change de variable $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{3 + \cos(\theta)}$

$t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$\theta = 2 \cdot \text{Arctan}(t)$
	$d\theta = \frac{2 \cdot dt}{1+t^2}$
$\theta = 0$	$t = 0$
$\theta = \frac{\pi}{2}$	$t = 1$
$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\frac{1}{3 + \cos(\theta)} = \frac{1+t^2}{4+2t^2}$

L'intégrale devient $\int_{t=0}^1 \frac{2 \cdot dt}{4+2t^2}$. On simplifie et force la main : $\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \text{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \right]_{t=0}^{t=1}$.

Tous calculs faits : $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{3 + \cos(\theta)} = \frac{\text{Arctan}(1/\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$

Posons $I = \int_0^{1/2} e^{\text{Arccos}(t)} \cdot dt$. Intégrons par parties :

$\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$	$\leftrightarrow$	$-\sqrt{1-t^2}$
$e^{\text{Arccos}(t)}$	$\hookrightarrow$	$-\frac{e^{\text{Arccos}(t)}}{\sqrt{1-t^2}}$

$$I = \left[t \cdot e^{\operatorname{Arccos}(t)} \right]_0^{1/2} + \int_0^{1/2} t \cdot \frac{e^{\operatorname{Arccos}(t)}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{e^{\pi/3}}{2} + \int_0^{1/2} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \cdot e^{\operatorname{Arccos}(t)} dt \text{ et à nouveau par parties}$$

$$I = \frac{e^{\pi/3}}{2} + \left[-\sqrt{1-t^2} \cdot e^{\operatorname{Arccos}(t)} \right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}} \cdot e^{\operatorname{Arccos}(t)} dt$$

$$\text{On a donc } 2I = \frac{e^{\pi/3}}{2} + \left[-\sqrt{1-t^2} \cdot e^{\operatorname{Arccos}(t)} \right]_0^{1/2} = \frac{e^{\pi/3}}{2} - \frac{e^{\pi/3} \cdot \sqrt{3}}{2} + e^{\pi/2}$$

Il ne reste qu'à diviser par 2.

M	P	S	I	2	Trigonométrie.	I.S.4.
---	---	---	---	---	----------------	--------

Si on pose $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right)$ alors on a $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $\cos(\theta) = \frac{1}{4}$.

La formule $1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)} = 16$ couplée avec $\tan(\theta) > 0$ donne $\tan(\theta) = \sqrt{15}$.

$$\text{On duplique : } \tan(2\theta) = \frac{2 \cdot \sqrt{15}}{1 - 15} = -\frac{\sqrt{15}}{7} \text{ et encore : } \tan(4\theta) = \frac{-2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{7}}{1 - \frac{15}{49}} = \frac{-7 \cdot \sqrt{15}}{17}$$

En posant ensuite $T = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a $\frac{1 - T^2}{1 + T^2} = \frac{1}{4}$ d'où $T^2 = \frac{3}{5}$.

On trouve donc $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{5}}$ (le signe est imposé par notre intervalle).

Avec la même idée, on résout ensuite $\frac{2t}{1-t^2} = \sqrt{\frac{3}{5}}$ et garder la seule racine cohérente :

$$\tan\left(\frac{\theta}{4}\right) = \frac{2 \cdot \sqrt{6} - \sqrt{15}}{3}$$

On pouvait aussi obtenir $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{5}{8}}$ (à partir de $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{5}}$ et $\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}$).

Restait à écrire enfin : $\frac{1-t^2}{1+t^2} = \sqrt{\frac{5}{8}} : t^2 = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{8}-\sqrt{5})^2}{3}$ et donc $\tan\left(\frac{\theta}{4}\right) = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

Le complexe $e^{3i\theta} + e^{i\theta}$ s'écrit $e^{2i\theta} \cdot (e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ c'est dire $2 \cdot \cos(\theta) \cdot e^{2i\theta}$.

Le module est $2 \cdot \cos(\theta)$ et l'argument 2θ . En tout cas pour $\cos(\theta)$ positif.

Sinon, c'est $2 \cdot |\cos(\theta)|$ comme module et $2\theta + \pi$ comme argument.

On pouvait bien sûr passer par $(\cos(3\theta) + \cos(\theta)) + i \cdot (\sin(3\theta) + \sin(\theta))$ et se débrouiller avec des formules de trigonométrie.

Pour comparer $\operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{3}\right)$ ou $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{55}{73}\right)$ qu'on va noter α et β , on va calculer le sinus de chacun (comme ils sont entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, ils sont dans le même ordre que leurs sinus).

angle	$\operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{3}\right)$	$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{55}{73}\right)$
sinus	$\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{55}{73}$
carré du sinus	$\frac{5}{9}$	$\frac{55^2}{73^2}$

On compare « en croix », c'est à dire qu'on regarde le numérateur de la différence : $\frac{5}{9} - \frac{55^2}{73^2} = \frac{5 \cdot 73^2 - 9 \cdot 55^2}{9 \cdot 73^2}$
 $: 5 \cdot 73^2 - 9 \cdot 55^2 = -580$.

On a donc $\frac{5}{9} < \frac{55^2}{73^2}$ puis $\frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{55}{73}$ et enfin $\text{Arccos}\left(\frac{2}{3}\right) < \text{Arcsin}\left(\frac{55}{73}\right)$

La calculatrice donne 0,84 radians pour l'un et 0,85 pour l'autre (à 10^{-2} près), ce qui fait 0,7 degré. Un dessin ne nous l'aurait pas donné.

Attention la rédaction $\left(\frac{5}{9} < \frac{55^2}{73^2}\right) \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{55}{73}\right) \Rightarrow \left(\text{Arccos}\left(\frac{2}{3}\right) < \text{Arcsin}\left(\frac{55}{73}\right)\right)$ est une grosse bêtise qu'on va croiser sur des copies, et même dans des cours faits par des professeurs de... de quoi déjà ?
 En effet, la signification de $\Rightarrow$ est « si... alors ».
 La quantification $a \Rightarrow b$ ne signifie par « a est vraie, donc b aussi ». Elle signifie « si a alors b ».
 Et je pouvais tout aussi bien écrire
 $\left(\frac{5}{9} < \frac{55^2}{73^2}\right) \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{55}{73}\right) \Rightarrow \left(\text{Arccos}\left(\frac{2}{3}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{55}{73}\right)\right)$.
 D'un point de vue logique, elle est totalement correcte. Du type *Faux implique Faux*.

M	P	S	I	2	Questions un peu spéciales.	I.S.4.
---	---	---	---	---	-----------------------------	--------

La somme $\sum_{k=0}^{2020} (-1)^{\binom{2020}{k}}$ est faite des 2021 entiers valant 1 ou -1.

Quand on les regroupe par deux, on obtient 2, 0 ou -2.

Donc, si on les regroupe deux à deux, on obtient 1010 entiers pairs, et un dernier entier à part qui vaut 1 ou -1.

La somme est impaire. Et je ne connais pas sa valeur (sauf à utiliser un théorème de Lucas sur la parité des coefficients binomiaux).

Remarques

- à la question « est il pair ou impair », je pouvais me contenter de répondre « oui ». Puisque tout entier est soit pair, soit impair.
- une réponse non argumentée ne pourra pas être prise en compte car au hasard, vous aviez en gros une chance sur deux...

Chaque rectangle du schéma a pour aire 2.

Et on visualise quatre triangles rectangles dont on semble ignorer les mesures.

Mais déjà, par symétrie ces quatre triangles ont la même aire. Et ils ont tous un côté de longueur 1.

On note x la longueur inconnue, qu'on retrouve en quatre endroits et qui est compensée par $2 - x$.

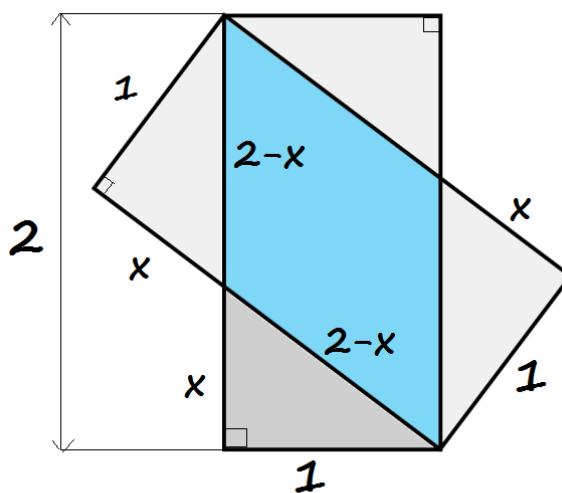
Nos triangles rectangles ont pour côtés 1 et x et pour hypoténuse $2 - x$.

Le théorème de Pythagore donne $1 + x^2 = (2 - x)^2$ soit immédiatement $x = \frac{3}{4}$.

Les triangles rectangles ont donc pour aire $\frac{1 \cdot \frac{3}{4}}{2}$.

On en enlève deux à un rectangle pour avoir l'aire

colorée, elle vaut $\frac{5}{4}$



Par théorème de Pythagore, x vaut $3/4$

M	P	S	I	2	Compositions de sinus, arctangentes...	I.S.4.
---	---	---	---	---	--	--------

$\sin^2(\text{Arctan}(\cos(\text{Arcsin}(\sqrt{1+x}))))$ est défini pour x plus grand que -1 mais plus petit que 0 pour que $\sqrt{1+x}$ existe mais ne dépasse pas 1.

On rappelle les formules du cours (et on les retrouve par $\cos^2(\text{Arcsin}(t)) = 1 - \cos^2(\text{Arccos}(x))$ et un argument de domaine) :

$$\cos(\text{Arcsin}(\sqrt{1+x})) = \sqrt{1 - (\sqrt{1+x})^2} = \sqrt{-x}$$

$$\sin^2(\text{Arctan}(x)) = \frac{x^2}{1+x^2} \text{ (cette fois, } \sin^2 = \tan^2 \cdot \cos^2 \text{ et } \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2).$$

On imbrique, et notre application est $x \mapsto \frac{-x}{1-x}$.

C'est un morceau d'hyperbole, mais on ne le regarde que sur $[-1, 0]$.

On la dérive une fois : $x \mapsto \frac{-1}{(x-1)^2}$, puis deux : $x \mapsto \frac{2}{(x-1)^3}$

M

P

S

I

2

Factorielle.

I.S.4.

On écrit $\binom{3.n}{n} \cdot \left(\frac{4}{27}\right)^n \cdot \sqrt{n} = \frac{(3.n)!}{(2.n)!} \cdot n! \cdot \frac{4^n}{27^n} \cdot \sqrt{n}$.

On remplace par les équivalents quand n tend vers l'infini :

$$\frac{(3.n)!}{(2.n)!} \cdot n! \cdot \frac{4^n}{27^n} \cdot \sqrt{n} \sim \frac{\frac{(3.n)^{3.n}}{e^{3.n}} \cdot \sqrt{2.n.\pi.3}}{\frac{(2.n)^{2.n}}{e^{2.n}} \cdot \sqrt{2.n.\pi.2} \cdot \frac{n^n}{e^n} \cdot \sqrt{2.n.\pi}} \cdot \frac{4^n}{27^n} \sqrt{n}$$

	numérateur	$n^{3.n}$	$\frac{1}{e^{3.n}}$	$3^{3.n}$	4^n	$\sqrt{2.n.\pi.3} \cdot \sqrt{n}$
On simplifie	dénominateur	$n^{2.n} \cdot n^n$	$\frac{1}{e^{2.n} \cdot e^n}$	27^n	$2^{2.n}$	$\sqrt{2.n.\pi.2} \cdot \sqrt{2.n.\pi}$
	simplification	1	1	1	1	$\sqrt{\frac{3}{4.\pi}}$

Bref, il reste une constante.

Le quotient est équivalent à ce réel, il tend vers ce réel. La limite est $\sqrt{\frac{3}{4.\pi}}$

M

P

S

I

2

Somme d'actangente.

I.S.4.

Pour la somme $\sum_{k=1}^{2020} \text{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right)$ il y a la méthode du physicien.

Comme tout programme de physique, elle commence par `from math import *`¹

Ensuite, on crée un accumulateur dans lequel on va sommer :

```
S = 0
for k in range(2021):
    ...S += atan(1/(2*k+1))
print(tan(S))
```

Le physicien va vérifier que vous avez importé `math` sans quoi `atan` n'a pas de sens

initialisé `S`

donné à `k` le bon `range` finissant à 2020 (donc `range(2021)`)

calculé `1/(2*k+1)` et pas `1/(2*k+1)` (division euclidienne donnant 0)

d'ailleurs `1/(2*k+1)` envoie tout le monde dans les flottants tout de suite

Le matheux va vouloir une formule exacte.

Il va vouloir compacter la somme d'arctangente en généralisant la formule $\tan(\text{Arctan}(a) + \text{Arctan}(b)) = \frac{a+b}{1-a.b}$ à n termes.

1. si vous utilisez juste `import math`, vous devrez faire appel à `math.atan` au lieu de `atan`

	$Atan(1)$	$+Atan\left(\frac{1}{3}\right)$	$+Atan\left(\frac{1}{5}\right)$	$+Atan\left(\frac{1}{7}\right)$	$+Atan\left(\frac{1}{9}\right)$
tan(somme)	1				
		$\frac{1+\frac{1}{3}}{1-1.\frac{1}{3}} = 2$			
			$\frac{2+\frac{1}{5}}{1-2.\frac{1}{5}} = \frac{11}{3}$		
				$\frac{\frac{11}{3}+\frac{1}{7}}{1-\frac{11}{3}.\frac{1}{7}} = 8$	
					$\frac{8+\frac{1}{9}}{1-8.\frac{1}{9}} = 73$

En notant $\frac{p_n}{q_n}$ le rationnel obtenu pour la somme de n termes ($\tan\left(\sum_{k=0}^{n-1} Arctan\left(\frac{1}{2.k+1}\right)\right) = \frac{p_n}{q_n}$), on le cherche au rang suivant :

$$\tan\left(\sum_{k=0}^n Arctan\left(\frac{1}{2.k+1}\right)\right) = \tan\left(Atan\left(\frac{1}{2.n+1}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} Arctan\left(\frac{1}{2.k+1}\right)\right) = \frac{\frac{1}{2.n+1} + \frac{p_n}{q_n}}{1 - \frac{1}{2.n+1} \cdot \frac{p_n}{q_n}} = \frac{q_n + (2.n+1).p_n}{(2.n+1).q_n - p_n}$$

Ceci va nous amener donc à définir deux suites de coefficients :

$p, q = 0, 1$ #on commence avec 0/1

for n in range(2021) :

.... $p, q = (q+(2*n+1)*p), (2*n+1)*q-p$

print(p, q)

Il faudrait même créer un petit module pour simplifier les fractions en route.

$\mathcal{M}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{I}$	2		33 points		I.S.4.
---------------	---------------	---------------	---------------	---	---	-----------	---	--------