$\mathcal{M}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{I}$	2	VENDREDI 16 OCTOBRE

LYCEE CHARLEMAGNE
2020/2021

D.S.2.

♠ 0 ♠ Étudiez les variations de $t \longmapsto \frac{e^t}{t}$ et de $t \longmapsto e^t.t$ sur $]0,\ +\infty[$. 1 pt.

♠ 1 ♠ Donnez pour u et v dans $]0,\ 1]$ le signe de $(v.e^v - u.e^u).\Big(\frac{e^v}{v} - \frac{e^u}{u}\Big)$. 2 pt.

♠ 2 ♠ x, y et z sont trois réels positifs de somme 1 ; montrez :
$\frac{e^x}{e^y} + \frac{e^x}{e^z} + \frac{e^y}{e^x} + \frac{e^y}{e^z} + \frac{e^z}{e^x} + \frac{e^z}{e^y} \leqslant \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}$. 2 pt.

♠ 3 ♠ Déduisez sous les mêmes conditions sur x, y et z :
$ch(x-y) + ch(y-z) + ch(z-x) \leqslant \frac{1}{2}.\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 3\Big)$ après avoir vérifié que le membre de gauche est bien positif quand même !(Mathematical Gazette 2012) 3 pt.

Manant ! Tu ne sais pas communiquer ?

Voici des scripts mystère :

```
def ScoobyDoo(n) :
....F, P = 1, 1
....for k in range(n) :
........F *= k+1
....while F>0 :
........c = F%10
........if c != 0 :
............P *= c
........F = F//10
....return(P)
```

```
def Samy(n) :
....F, P = 1, 1
....for k in range(n) :
........F *= k+1
....while F>0 :
........c = F%10
........if c != 0 :
............P *= c
............return(P)
....F = F//10
```

```
def Vera(n) :
....F, P = 1, 1
....for k in range(n) :
........F *= k+1
....while F>0 :
........c = F%10
........if c != 0 :
............P *= c
........F = F//10
........return(P)
```

Que calculent ils ? Que va donner l'exécution de chacun d'entre eux pour `n` égal `10` puis `25`. 5 pt.
Complétez `ScoobyDoo` avec des commentaires pour qu'il soit recevable par un correcteur de concours. 1 pt.

Que va donner
`\begin{tikzpicture} \draw (0,2) circle (0.5) ; \draw (1,2) circle (0.5) ; \draw (0,1.5) -- (0,0) ; \draw (1,0) -- (1,1.5) ; \draw (0,0) arc (-180 :0 :0.5) ; \end{tikzpicture}` 0 pt.

> Tiens, il y a un mot qui dans cette phrase.
> Philippe GELUCK (Le chat)

♢ 0 ♢ On définit la loi suivante sur l'ensemble à trois éléments :

	a	b	c
a	b	a	c
b	a	b	c
c	c	c	b

La loi est elle interne, dotée d'un neutre, de symétriques, associative ? 2 pt.

Le vigneron veut filtrer son moût.

♢ 1 ♢ Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto Arcsin\Big(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\Big)$. 2 pt.

♢ 2 ♢ Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto Arccos\Big(2.\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\Big)$. 2 pt.

Que de mares coulent dans l'Adour.

♢ 3 ♢ Résolvez le système $\left\{\begin{array}{ccccc} ch(x) & + & ch(y) & = & 3 \\ sh(x) & + & sh(y) & = & 1 \end{array}\right|$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}$. 3 pt.

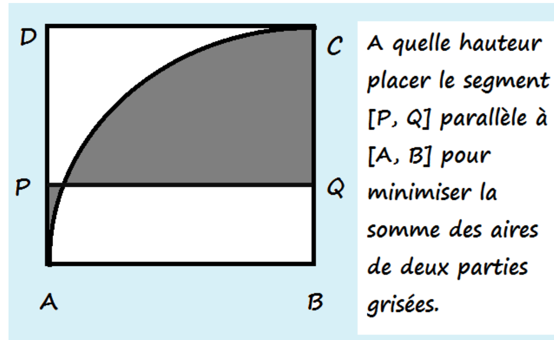
Le prof de musique s'occupe des sax.

♢ 4 ♢ Résolvez $\int_0^x \frac{sh(t).dt}{2+ch(t)} = 4$ d'inconnue réelle x *(résultat final en x moche)*. 4 pt.

Montrez : $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{dt}{1+3.ch(t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.Arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$ *(changement de variable en $x = e^t$).* 4 pt.

Faim et grossesse.

Un carré. Un quart de cercle inscrit dans ce carré.
Un segment parallèle à un côté du carré.
Deux aires grisées.
Il faut placer le segment à la bonne hauteur pour minimiser l'aire grisée.
Des points si vous trouvez. 4 pt.



◇ 5 ◇

E est un ensemble fini. On pose $\mathbb{P} = P(P(E))$ et on définit sur $\mathbb{P}$ la relation $\lesssim$ par $X \lesssim Y$ si et seulement si $\forall B \in Y,\ \exists A \in X,\ B \subset A$.

♣ 0 ♣ Pour cette question : $E = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$. Donnez le cardinal de $\mathbb{P}$. Comparez (en justifiant) pour $\lesssim$ les deux parties suivantes :
$X = \big\{\{a,b,c\},\ \{d,e\}\big\}$ et $Y = \big\{\{a,b,c\},\ \{a,b\},\ \{d,e\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{e\}\big\}$. 3 pt.

♣ 1 ♣ On revient au cas général. Montrez que le relation $\lesssim$ est réflexive, transitive. Est-ce une relation d'ordre ? 3 pt.

♣ 2 ♣ Pour cette question : $E = \{a,\ b,\ c\}$.
Combien chacune des quatre équations suivantes a-t-elle de solutions : $X \lesssim \emptyset$, $X \lesssim \{\emptyset\}$, $\emptyset \lesssim X$, $\{\emptyset\} \lesssim X$. 4 pt.
Combien pouvez vous trouver X vérifiant $\big\{\{a,\ b,\ c\},\ \{b\}\big\} \lesssim X \lesssim \big\{\{a,b\},\ \{b,c\},\ \{c\}\big\}$. 3 pt.

On va chercher les applications f de $]0,\ +\infty[$ dans lui même, bornées sur $[1,\ +\infty[$ vérifiant $\forall(x,y) \in]0,\ +\infty[^2,\ f(x.f(y)) = y.f(x)$ (propriété $*$).
$\sim$0) On prend a et b vérifiant $f(a) = f(b)$. Montrez : $a.f(1) = b.f(1)$. Déduisez que f est injective. 2 pt.
$\sim$1) Comparez $f(f(1))$ et $f(1)$. Déduisez $f(1) = 1$. 1 pt.
$\sim$2) Montrez pour tout x de $]0,\ +\infty[$: $f(f(x)) = x$. 1 pt.
$\sim$3) Montrez : $f(a.b) = f(a).f(b)$ pour tout couple $(a,\ b)$ (pensez à poser $b = f(c)$ en justifiant l'existence de c). 1 pt.
$\sim$4) On pose $F = \{x \in]0,\ +\infty[\ |\ f(x) = x\}$. Montrez que F est non vide. 1 pt.
$\sim$5) Montrez que si x est dans F alors $x.f(x)$ est dans F. 1 pt.
$\sim$6) Montrez que F est stable par multiplication et par division. 2 pt.
$\sim$7) Montrez que pour tout x de F, la suite (x^n) est dans F. Déduisez que les éléments de F sont plus petits que 1. 2 pt.
$\sim$8) Montrez : $F = \{1\}$, et trouvez toutes les applications solutions de notre problème. 2 pt.

Rappel : notation préfixée : `A += 5` signifie `A=A+5`.
`a//b` est le quotient euclidien de a par b. Et `a%b` est le reste de la division euclidienne de `a` par `b`.
Si vous en avez besoin, voici (dans le désordre) quelques nombres :
2^{25}, 25^{25}, $26!$, 26^{25}, 25^{26}, 5^{25}, $25!$: 2220446049250313080847263336181640625,
15511210043330985984000000, 33554432, 88817841970012523233890533447265625, 67108864,
298023223876953125, 403291461126605635584000000, 236773830007967588876795164938469376

$\mathcal{M}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{I}$	2	CORRECTION

LYCEE CHARLEMAGNE 2020/2021

D.S.2.

Un système.

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 — D.S.2.

On veut résoudre $\left\{\begin{array}{ccccc} ch(x) & + & ch(y) & = & 3 \\ sh(x) & + & sh(y) & = & 1 \end{array}\right|$ d'inconnues x et y.

Ceci équivaut à $\left\{\begin{array}{ccccc} e^x+e^{-x} & + & e^y+e^{-y} & = & 6 \\ e^x-e^{-x} & + & e^y-e^{-y} & = & 2 \end{array}\right|$.

Quitte à sommer et soustraire : $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2.e^x & & + & 2.e^y & & = & 8 \\ & 2.e^{-x} & + & & 2.e^{-y} & = & 4 \end{array}\right|$.

Posons $a=e^x$ et $b=e^y$: $\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 4 \\ \frac{1}{a} & + & \frac{1}{b} & = & 2 \end{array}\right|$.

En réduisant $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{a.b}$: $\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 4 \\ \frac{4}{a.b} & & & = & 2 \end{array}\right|$.

On connait la somme et le produit : a et b sont les racines de $X^2-4.X+2$.

On trouve $a=2+\sqrt{2}$ et $b=2-\sqrt{2}$ (et vice versa). Elles sont positives, bon pour des exponentielles.

On peut conclure : $\boxed{S_{x,y}=\Big\{\big(\ln(2+\sqrt{2}),\ln(2-\sqrt{2})\big),\ \big(\ln(2+\sqrt{2}),\ln(2-\sqrt{2})\big)\Big\}}$

Une loi.

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 — D.S.2.

La loi de tableau

	a	b	c
a	b	a	c
b	a	b	c
c	c	c	b

est interne, puisque les éléments obtenus, valent a, b et c.

Elle est commutative, ce qui nous évite de dire dans quel sens lire le tableau.
L'élément b est neutre (des deux côtés).
Chaque élément a un symétrique :
Elle n'est pas associative, sinon, ce serait une loi de groupe. Et le fait qu'un même élément soit présent deux fois sur une ligne suffit à nous convaincre que ce n'est pas le cas.

On va donc chercher un contre-exemple.

Testons une formule ne contenant pas b puisque b est le neutre !

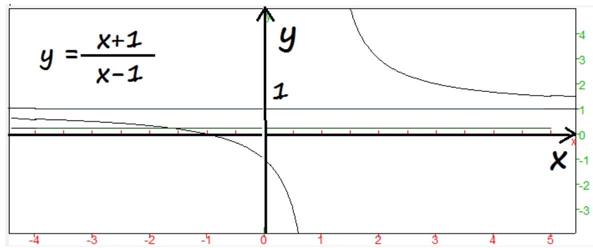
$\boxed{(a*c)*c=c*c=b \text{ et } a*(c*c)=a*b=a}$ Et voilà

Des domaines de définition.

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 — D.S.2.

Pour l'existence de $Arcsin\Big(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\Big)$, plusieurs exigences successives
* x différent de 1 pour le dénominateur
* x hors de $[-1,\ 1[$ pour la racine carrée (tableau de signes)
* et il faut que $\dfrac{x+1}{x-1}$ soit plus petit que 1 (et donc entre 0 et 1).

On résout $1-\dfrac{x+1}{x-1}\geqslant 0$ avec la condition « $x-1$ et $x+1$ sont de même signe ».



On trouve $\boxed{D_f =]-\infty,\ -1]}$

Quand x tend vers l'infini, $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ tend vers 1 mais en décroissant ; il reste plus grand que 1 et ce n'est pas bon.

Pour $x \longmapsto Arccos\Big(2.\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\Big)$, on persiste à demander que $x+1$ et $x-1$ soient de même signe : $]-\infty,\ -1]$ ou $[1,\ +\infty[$.
Ensuite, $\dfrac{x+1}{x-1}$ doit rester entre 0 et $\dfrac{1}{4}$.
Sur $[1,\ +\infty[$ c'est toujours raté, puisque $\dfrac{x+1}{x-1}$ dépasse 1.
Sur $]-,\infty,\ -1]$, il faut s'arrêter en $-\dfrac{5}{3}$ (équation du premier degré $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = \dfrac{1}{2}$: $\boxed{D_f = \Big[-\frac{5}{3},\ -1\Big]}$

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 Deux intégrales. **D.S.2.**

L'équation $\displaystyle\int_0^x \frac{sh(t).dt}{2+ch(t)} = 4$ a bien un sens pour tout x. Mais elle ne va avoir qu'une solution. En identifiant une forme en $\dfrac{u'}{u}$ on intègre en $t \longmapsto \ln(2+ch(t))$. L'équation devient $\boxed{\ln(2+ch(x)) = 4-\ln(3)}$
On trouve $ch(x) = \dfrac{e^4}{3} - 2$ (on a simplifié $e^{4-\ln(3)}$ en $\dfrac{e^4}{3}$).

Mais on n'a pas fini, on cherche x. On cherche en fait e^x vérifiant $\dfrac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} = \dfrac{e^4}{3} - 2$.
On pose $X = e^x$ et $Y = e^{-x}$. On a alors $X + Y = \dfrac{2.e^4}{3} - 4$ et $X.Y = 1$.
X et Y sont les deux racines de $T^2 - \Big(\dfrac{2.e^4}{3} - 4\Big).T + 1$.
On calcule le discriminant et on trouve deux X possibles (inverse l'un de l'autre) : $\Big(\dfrac{e^4}{3}-2\Big) + \sqrt{\Big(\dfrac{e^4}{3}-2\Big)^2 - 1}$ et $\Big(\dfrac{e^4}{3}-2\Big) - \sqrt{\Big(\dfrac{e^4}{3}-2\Big)^2 - 1}$.
Les deux valeurs de x (opposées l'une de l'autre) sont

$$\boxed{\ln\Big(\Big(\frac{e^4}{3}-2\Big) + \sqrt{\Big(\frac{e^4}{3}-2\Big)^2-1}\Big) \text{ et } \ln\Big(\Big(\frac{e^4}{3}-2\Big) - \sqrt{\Big(\frac{e^4}{3}-2\Big)^2-1}\Big)}$$

$\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{dt}{1+3.ch(t)}$ existe et s'écrit $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{dt}{1+\dfrac{3.e^t+3.e^{-t}}{2}}$ et même $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{2.dt}{3.e^t+3.e^{-t}+2}$.

Comme suggéré, posons $x = e^t$ et donc $t = \ln(x)$. On différentiel : $dt = \dfrac{dx}{x}$ (sachant que si t s'annule, x ne s'annule pas).
L'intégrale devient $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x.\Big(3.x+2+3.\dfrac{1}{x}\Big)}$ et même $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{3.x^2+2.x+3}$.
On canonise en $\dfrac{1}{3}.\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\Big(x+\frac{1}{3}\Big)^2+\frac{8}{9}}$ et même $\dfrac{3}{8}.\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\Big(\frac{3.x+1}{2.\sqrt{2}}\Big)^2+1}$ *(qui est le carré de qui ?)*.
On intègre en Arctangente, avec compensation du facteur $\dfrac{3}{2.\sqrt{2}}$ qui sort justement à la dérivation :

$$\boxed{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}.Arctan\Big(\frac{3.x+1}{2.\sqrt{2}}\Big)\right]_1^2}$$

Le $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est celui qu'on attend. Il reste $Arctan\Big(\frac{7}{2.\sqrt{2}}\Big) - Arctan\Big(\frac{4}{2.\sqrt{2}}\Big)$.

Il ne ressemble pas à $Arctan\Big(\frac{\sqrt{2}}{6}\Big)$? Patience !

Cet arctangente est entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et a pour tangente $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Et la différence $Arctan\Big(\frac{7}{2.\sqrt{2}}\Big) - Arctan\Big(\frac{4}{2.\sqrt{2}}\Big)$ est aussi entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (le plus grand est le premier ; la différence est positive, et on ne dépassera pas le premier).

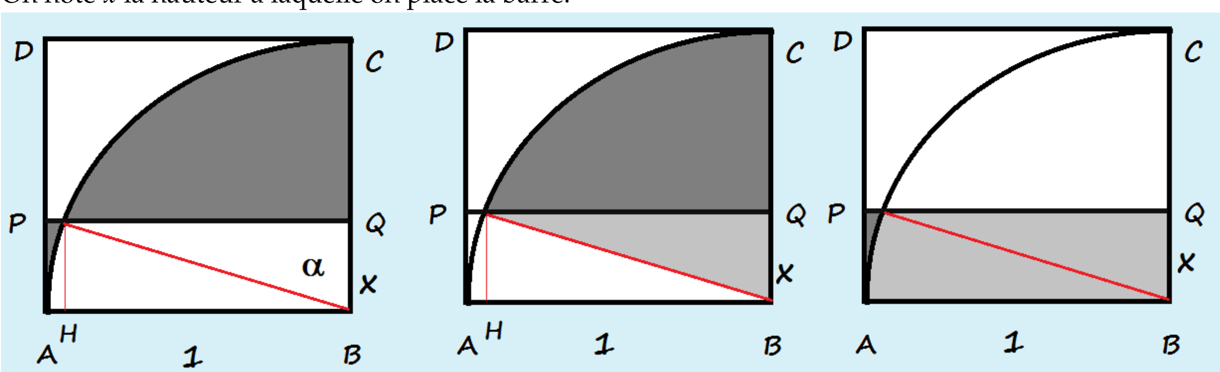
Calculons sa tangente : $\tan\Big(Arctan\Big(\frac{7}{2.\sqrt{2}}\Big) - Arctan\Big(\frac{4}{2.\sqrt{2}}\Big)\Big) = \dfrac{\frac{7}{2.\sqrt{2}} - \frac{4}{2.\sqrt{2}}}{1+\frac{7}{2.\sqrt{2}}.\frac{4}{2.\sqrt{2}}} = \frac{3}{2.\sqrt{2}}.\frac{1}{1+\frac{28}{8}}$.

Les deux réels sont dans un intervalle d'injectivité de la tangente et ont la même tangente. Ils sont égaux.

Attention, la formule $Arctan(a) - Arctan(b) = Arctan\Big(\frac{a-b}{1+a.b}\Big)$ *n'est valable que modulo pi a priori.*

$\mathcal{M}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{I}$	2	Puzzle géométrique.	D.S.2.

On considère que le carré et le disque ont le même rayon égal à 1 pour définir finalement la longueur de référence.
On note x la hauteur à laquelle on place la barre.



On dispose alors d'un angle α et de son complémentaire $\frac{\pi}{2} - \alpha$.
La trigonométrie de base nous dit $x = BQ = \cos(\alpha)$ et $BH = \sin(\alpha) = \sqrt{1-x^2}$.

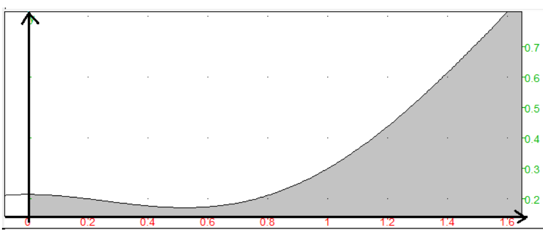
On découpe alors par exemple une portion de disque CBP d'aire $\frac{\alpha}{2}$ (le secteur est proportionnel à l'angle au centre e pour $\alpha = 2.\pi$ il doit donner $\pi.R^2$ avec ici $R = 1$).
On lui soustrait l'aire du triangle rectangle BQP et on a l'aire du morceau supérieur : $\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin(\alpha).\cos(\alpha)}{2}$.

On dispose ensuite d'un rectangle $ABPQ$ d'aire $\cos(\alpha)$. (c'est le côté x). Enlevons un quartier d'angle au centre $\dfrac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}$ et un triangle d'aire $\frac{\sin(\alpha).\cos(\alpha)}{2}$, et on récupère l'aire de la partie grisée « en bas ».

On somme les deux : $\boxed{Aire\ grise = \alpha + \cos(\alpha) - \frac{\sin(2.\alpha)}{2} - \frac{\pi}{4}}$

On vérifie pour α égal à $\frac{\pi}{2}$: un quart de disque d'aire $\frac{\pi}{4}$.
pour α égal à 0 : le complémentaire de ce quart de disque ; d'aire $1 - \frac{\pi}{4}$.

On dérive pour minimise cette application : $\dfrac{dA}{d\alpha}=1-\sin(\alpha)-\cos(2.\alpha)$.
Comment résoudre ? En exprimant tout à l'aide d seul sinus ($\cos(2.\alpha)=1-2.\sin^2(\alpha)$).



Annuler la dérivée nous amène à résoudre $2.\sin^2(\alpha)-\sin(\alpha)=0$.
$\sin(\alpha)=0$ nous place aux bornes de l'intervalle, pas au minimum mais un maximum (signe de la dérivée seconde, ou passage de la dérivée du positif ou négatif).
C'est donc en $\dfrac{\pi}{6}$ que le minimum est atteint.

$\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{12}}$

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 **Inégalité.** **D.S.2.**

On pose $f=t\longmapsto\dfrac{e^t}{t}$ et $g=t\longmapsto e^t.t$ et on dérive : $f'=t\longmapsto\dfrac{t-1}{t^2}.e^t$ et $g'=t\longmapsto(t+1).e^t$.

t	$]0,\ 1]$	1	$[1,\ +\infty[$
$f(t)$	$\searrow$		$\nearrow$
g(t)	$\nearrow$		$\nearrow$

On se donne u et v entre 0 et 1.
La quantité $(v.e^u-u.e^v).\Big(\dfrac{e^v}{v}-\dfrac{e^u}{u}\Big)$ n'est autre que $(f(v)-f(u)).(g(v)-g(u))$.
Et on est sur un intervalle où f est décroissante et g croissante.

	f décroît	g croit	produit
$u\leqslant v$	$f(v)-f(u)\leqslant 0$	$g(v)-g(u)\geqslant 0$	négatif
$u\geqslant v$	$f(v)-f(u)\geqslant 0$	$g(v)-g(u)\leqslant 0$	négatif

Dans tous les cas, $\boxed{\text{le produit } (f(v)-f(u)).(g(v)-g(u)) \text{ est négatif}}$

On développe $(v.e^v-u.e^u).\Big(\dfrac{e^v}{v}-\dfrac{e^u}{u}\Big)=e^{2.v}+e^{2.u}-e^{u+v}.\Big(\dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u}\Big)$ est toujours négatif.
Oui, c'est seulement maintenant qu'il fallait développer, et non pas avant.
L'erreur des élèves est de se lancer dans des calculs (« je développe et advienne que pourra ») au lieu de se demander le rapport qu'il peut y avoir avec la question précédente (« f et g sont monotones »).

On divise tout par e^{u+v} (positif) $\dfrac{e^{2.v}+e^{2.u}}{e^{u+v}}-\Big(\dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u}\Big)\leqslant 0$.
On simplifie : $e^{u-v}+e^{v-u}-\Big(\dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u}\Big)\leqslant 0$ ou si vous préférez : $\dfrac{e^u}{e^v}+\dfrac{e^v}{e^u}\leqslant\dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u}$.
Mais attention, ce n'est valable que pour u et v plus petits que 1.

Mais on nous parle de trois réels positifs de somme 1.
Ils sont donc tous plus petits que 1.

On peut donc les placer dans les rôles de u et v : $\begin{array}{llll} \frac{e^x}{e^y} & +\frac{e^y}{e^x} & \leqslant & \frac{x}{y} & +\frac{y}{x} \\ \frac{e^y}{e^z} & +\frac{e^z}{e^y} & \leqslant & \frac{y}{z} & +\frac{z}{y} \\ \frac{e^z}{e^x} & +\frac{e^x}{e^z} & \leqslant & \frac{z}{x} & +\frac{x}{z} \end{array}$

Si vous ne vérifiez pas que les trois réels sont plus petits que 1, vous avez perdu.
En effet, vous n'avez pas prouvé à la question précédente $e^{u-v}+e^{v-u}-\Big(\dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u}\Big)\leqslant 0$
mais $\forall(u,v)\in]0,\ 1]^2,\ e^{u-v}+e^{v-u}-\Big(\dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u}\Big)\leqslant 0$
Et ça fait une sacrée différence. Toute l'essence des maths (les variables>les formules).

On somme, mais on remplace aussi des $\dfrac{e^a}{e^b}+\dfrac{e^b}{e^a}$ par $2.ch(a-b)$ puisque ce sont tout autant des quotients

d'exponentielles que des exponentielles de différences.
En sommant, on a donc $2.ch(x-y)+2.ch(y-z)+2.ch(z-x) \leqslant \frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}$.

On écrit le majorant avec nos réflexes de relations coefficients racines $(x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3$ (le -3 c'est à cause des $\frac{x}{x}$).
On a donc $2.ch(x-y)+2.ch(y-z)+2.ch(z-x) \leqslant (x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3$.
Et comme on nous dit que $x+y+z$ vaut 1, on trouve bien $2.ch(x-y)+2.ch(y-z)+2.ch(z-x) \leqslant \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-3\right)$.
Et ça ne nous sert strictement à rien.
Sinon, chaque cosinus hyperbolique est plus grand que 1, la somme des trois est évidemment positive !

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 Python. D.S.2.

```
def ScoobyDoo(n) :
....#prend un entier et retourne un entier
....F, P = 1, 1 #initialisation de deux accumulateurs multiplicatifs
....for k in range(n) : #calcul de la factorielle
........F *= k+1 #attention au décalage
....#on a à ce stade F = n !
....while F>0 : #tant qu'il reste des chiffres
........c = F%10 #on prend le dernier chiffre
........if c != 0 : #s'il est non nul
............P *= c #on multiplie l'accumulateur
........F = F//10 #on efface le dernier chiffre
....return(P)
```

Pour n donné, Scooby calcule $n!$ et le stocke dans F (mais il va le détruire).
Par exemple pour n égal à 10, F a pris les valeurs successives

k	0	1	2	3	4	...	8	9
F	1	2	6	24	120	...	362880	3628800

On s'attaque à cet entier F.
Tant qu'il est non nul, on prend son chiffre des unités qu'on met dans c (c=F%10) puis ensuite on effacera le dernier chiffre par la division (F=F//10).
Si le chiffre c est non nul, on l'utilise dans l'accumulateur multiplicatif P. Sinon, on n'en fait rien.
On va donc calculer le produit des chiffres non nuls de $n!$.

F	3628800	362880	36288	3628	362	36	3	0
$c = F\%10$	0	0	8	8	2	6	3	
$c! = 0$	False	False	True	True	True	True	True	
P	1	1	8	64	128	768	2304	
$F//10$	362880	36288	3628	362	36	3	0	

On fait de même avec 25.
L'entier 25 est dans la liste, c'est un multiple de 10, et il est plus petit que 26!.
$25! = 15511210043330985984000000$
Et le produit des chiffres non nuls donne $1\times5\times5\times1\times1\times2\times1\times4\times3\times3\times3\times9\times8\times5\times9\times8\times4$ qu'on peut garder sous cette forme.
Si on y tient : 559872000.

Et les autres procédures aux return mal placés ?

```
def Samy(n) :
....F, P = 1, 1
....for k in range(n) :
........F *= k+1
....while F>0 :
........c = F%10
........if c != 0 :
............P *= c
............return(P)
....F = F//10
```

```
def Vera(n) :
....F, P = 1, 1
....for k in range(n) :
........F *= k+1
....while F>0 :
........c = F%10
........if c != 0 :
............P *= c
........F = F//10
........return(P)
```

Avec Samy, on calcule aussi $n!$, mais on sort dès qu'on croise le `return`, c'est à dire avant d'avoir totalement épuisé `F`.
Dès qu'on a croisé un `c` non nul, on multiplie et on sort.
Samy donne le premier chiffre non nul de $n!$ en partant de la fin.

Avec Vera, c'est même dès la première division de F par 10. On retourne toujours 1 (valeur de P non modifiée, sauf si on avait pris n égal à 2, 3 ou 4, auquel cas le chiffre des unités n'est pas un 0.

n	1	2	3	4	5	6	10	25
Scooby	1	2	6	8	2	14	2304	559 872 000
Samy	1	2	6	4	2	2	8	4
Vera	1	2	6	4	1	1	1	1

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 **Equation fonctionnelle.** D.S.2.

On va utiliser l'hypothèse $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2,\ f(x.f(y)) = y.f(x)$, y compris pour des x et des y particuliers.
On part de $f(a) = f(b)$. On prend $x = 1$ et $y = a$ dans la formule : $f(1.f(a)) = a.f(1)$
On prend $x = 1$ et $y = b$ dans la formule : $f(1.f(b)) = b.f(1)$
Mais l'hypothèse $f(a) = f(b)$ donne même $f(f(a)) = f(f(b))$.
Par transitivité : $a.f(1) = f(f(a)) = f(f(b)) = b.f(1)$.

Comme $f(1)$ est non nul (f est à valeurs dans $]0, +\infty[$), on simplifie : $a = b$.

On est parti de $f(a) = f(b)$ et on a trouvé $a = b$. C'est l'injectivité de f.

On prend ensuite $x = y = 1$ (que faire d'autre) : $f(1.f(1)) = 1.f(1)$.
On a donc $f(f(1)) = f(1)$. Les deux réels 1 et $f(1)$ ont la même image.
Par injectivité de f : $f(1) = 1$. On tient un point fixe de f.

On repart de $f(x.f(y)) = y.f(x)$ avec $x = 1$ (et donc $f(x) = 1$) : $f(1.f(y)) = y.f(1) = y$.
On a obtenu pour tout y : $f(f(y)) = y$. La variable est muette, on peut l'appeler x, c'est pareil.

On se donne a et b. On note c un antécédent de b.
Mais, qui dit qu'il y en a ? Mais si ! Posez $c = f(b)$, vous avez alors $f(c) = f(f(b)) = b$!

On écrit alors $f(a.b) = f(a.f(c))$ et on utilise la formule : $f(a.b) = f(a.f(c)) = c.f(a)$.
On revient à b : $f(a.b) = f(b).f(a)$.
Facile, mais si on ne dit pas pourquoi on peut poser $b = f(c)$ pour un c convenable, on n'a rien fait !

F est l'ensemble des points fixes de F.. Il contient au moins 1.

On veut montrer : $f(a) = a$ avec $a = x.f(x)$.
On calcule $f(a) = f(x.f(x)) = x.f(x)$ (prendre $y = x$ dans la formule).
On a bien obtenu $f(a) = a$!

On prend a et b dans F : $f(a) = a$ et $F(b) = b$.
On pose $\alpha = a.b$ et $\beta = \dfrac{a}{b}$ (existence et appartenance à $]0, +\infty[$ assurées).

On calcule $f(\alpha) = f(a.b) = f(a.f(b))$ puisque $f(b) = b$.
Par la formule $f(\alpha) = f(a.b) = f(a.f(b)) = b.f(a)$.
Par appartenance de a à F : $f(\alpha) = b.a = \alpha$.C'est bon pour la multiplication.

Par division : $f(\beta) = f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{1}{b}.f(a)\right) = a.f\left(\frac{1}{b}\right)$. Et alors ?
On a quand même $b.f\left(\frac{1}{b}\right) = f\left(\frac{1}{b}.f(b)\right)$ par la relation applique à b et $\frac{1}{b}$.
b étant un point fixe : $b.f\left(\frac{1}{b}\right) = f\left(\frac{1}{b}.b\right) = f(1) = 1$.
On a donc $f\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{b}$.

On reporte : $f(\beta) = a.f\left(\frac{1}{b}\right) = a.\frac{1}{b} = \beta$. C'est un point fixe.

Si x est dans F, par stabilité multiplicative, $x.x$ est dans F, puis $x.x.x$ et par récurrence sur n, tous les x^nsont dans F.

Mais si x est plus grand que 1, les x^n forment une suite géométrique qui diverge vers $+\infty$ et n'est pas bornée.
Et chaque x^n vérifie $f(x^n) = x^n$.
On a une suite d'images d'éléments de $[1, +\infty[$ qui n'est pas bornée. Ceci contredit « f est bornée sur $[1, +\infty[$ ».
Par l'absurde, aucun x de F n'est strictement plus grand que 1.

Variante on prend x dans F supérieur ou égal à 1.
Chaque x^n est dans $[1, +\infty[$, intervalle sur lequel F est bornée (disons par 0 et A). On a donc $\forall n,\ f(x^n) \leqslant A$.
Comme ce sont des points fixes : $\forall n,\ x^n \leqslant A$. On passe à la racine $\forall n,\ 1 \leqslant x \leqslant A^{1/n}$.
On fait tendre n vers l'infini : par encadrement, la suite constante x tend vers 1. x ne peut valoir que 1.

Mais peut il y avoir des x plus petits que 1 dans F ?
Si on en a un, alors par stabilité « quotient », $\frac{1}{x}$ est aussi dans F.
Mais $\frac{1}{x}$ est supérieur ou égal à 1.
Il ne peut donc valoir que 1 : $x = 1$ au final.

Le seul point fixe de f est 1.

On prend x quelconque. Le réel $x.f(x)$ est alors point fixe de f.
En effet, $f(x.f(x)) = x.f(x)$ (prend $y = x$).
Mais le seul point fixe de f est 1.
On a donc $x.f(x) = 1$ pour tout x .

L'unique solution possible est $f(x) = \frac{1}{x}$ pour tout x.

On vérifie que $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est bien solution.
Elle va de $]0, +\infty[$ dans lui même
Elle est bornée sur $[1, +\infty[$.
Et on a toujours $f(x.f(y)) = \dfrac{1}{x.\frac{1}{y}} = y.\frac{1}{x} = y.f(x)$.

L'unique solution à notre problème est $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{x}}$

Quand E est de cardinal n, $P(E)$ est de cardinal 2^n et $P(P(E))$ est de cardinal $2^{(2^n)}$.

$Card(E)$	0	1	2	3
$Card(P(E))$	1	2	4	8
$Card(P(P(E)))$	2	4	16	256

Et c'est vite l'horreur.

Ayant posé $X = \{\{a,b,c\},\ \{d,e\}\}$ et $Y = \{\{a,b,c\},\ \{a,b\},\ \{d,e\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{e\}\}$ on a à la fois $X \lesssim Y$ et $Y \lesssim X$.
Il faut dans un premier temps montrer que toute partie de l'ensemble Y est incluse dans une partie de X au moins :

la partie de Y	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{d,e\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{e\}$
est incluse dans	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{d,e\}$	$\{a,b,c\}$	$\{d,e\}$	$\{d,e\}$

Ceci règle un sens, passons à l'autre :

la partie de X	$\{a,b,c\}$	$\{d,e\}$
est incluse dans	$\{a,b,c\}$	$\{d,e\}$

Ceci nous servira plus loin pour dire que la relation n'est pas antisymétrique : on peut avoir à la fois « $X \lesssim Y$ et $Y \lesssim X$ » sans pour autant avoir $Y = X$.

Cette relation est réflexive.
On se donne une partie de parties X et on vérifie $X \lesssim X$: $\forall B \in X,\ \exists A \in X,\ B \subset A$.
Pour B donnée appartenant à X, il suffit de prendre $A = B$ (appartenant effectivement à X).

Elle est transitive. On se donne deux gros ensembles de parties de parties X, Y et Z.
On suppose $X \lesssim Y$ et $Y \lesssim Z$.
On veut montrer $X \lesssim Z$, c'est à dire $\forall C \in Z,\ \exists A \in X,\ Z \subset X$.
Ça se prouve même sans avoir compris la définition. On se donne C appartenant à Z.
Alors, par « $Y \lesssim Z$ », on sait qu'il existe B appartenant à Y vérifiant $C \subset B$.
Mais pour ce B, on sait qu'il existe A (appartenant à X) vérifiant $B \subset A$.
Par transitivité, il existe donc ce A vérifiant

Et comme on l'a dit, c'est raté pour antisymétrie.
Ce ne sera pas une relation d'ordre (R.A.T.).
Ni d'équivalence d'ailleurs.

Pour cette question : $E = \{a,\ b,\ c\}$. Il y a 8 parties

$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$
$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b\}$

Et on peut créer 2^8 ensembles de parties comme $\{\{a,b\},\ \{a,c],\ \{a\},\ \emptyset\}$ ou même $\{\emptyset\}$ (on a juste pioché dans la première case) à ne pas confondre avec $\emptyset$ (là, on n'a rien pris).
$X \lesssim \emptyset$ se lit : $\forall B \in \emptyset,\ \exists A \in X,\ B \subset A$
Comme il n'y a aucun B à tester, c'est toujours vrai.
Toutes les parties de parties X conviennent, il y a 2^8 solutions.

$X \lesssim \{\emptyset\}$ se lit $\forall B \in \{\emptyset\},\ \exists A \in X,\ B \subset A$.
Mais qui est le seul B qu'on puisse prendre dans $\{\emptyset\}$? C'est $B = \emptyset$. C'est donc juste pour lui qu'on doit vérifier si il existe A dans X vérifiant $\emptyset \subset A$.
Mais ça, c'est toujours vrai, pour toute partie A (singleton, paire, ensemble vide).
C'est donc toujours vrai... dès lors qu'il y a quand même au moins une partie dans X.
On peut accepter $X = \{\{a\},\ \{a,b\}\}$ ou même $X = \{\{a\},\ \emptyset\}$ ou même $X = \{\{a\},\ \emptyset\}$.
Mais pas $X = \emptyset$ (car alors X n'existe pas).
Il y a donc une solution de moins : $S = P(P(E)) - \{\emptyset\}$.

$\emptyset \lesssim X$ se lit : $\forall B \in X,\ \exists A \in \emptyset,\ B \subset A$.
Mais il n'y a pas de A dans $\emptyset$! C'est donc impossible dès que vous avez une partie B.
Seule façon de s'en sortir : X est telle qu'il n'y ait aucun B dedans : $X = \emptyset$.
C'est peu, mais c'est une solution.

$\{\emptyset\} \lesssim X$ se lit $\forall B \in X,\ \exists A \in \{\emptyset\},\ B \subset A$
Mais le seul A possible dans $\{\emptyset\}$ est $A = \emptyset$. Peut on avoir $B \subset \emptyset$?

Oui, mais seulement pour $B = \emptyset$.
Le seul B possible dans X est l'ensemble vide.
On a une solution : $X = \{\emptyset\}$.
Et la solution $X = \emptyset$ pour laquelle il n'y a pas de B (et donc la question ne se pose pas de trouver A).

Bilan :

Équation	$X \lesssim \emptyset$	$X \lesssim \{\emptyset\}$	$\emptyset \lesssim X$	$\{\emptyset\} \lesssim X$
Nombre de solutions	2^8	$2^8 - 1$	1	2
Solutions	$X \subset P(E)$	$X \subset P(E)$ mais $X \neq \emptyset$	$X = \emptyset$	$X = \emptyset$ et $X = \{\emptyset\}$

Combien pouvez vous trouver X vérifiant $\big\{\{a,\ b,\ c\},\ \{b\}\big\} \lesssim X \lesssim \big\{\{a,b\},\ \{b,c\},\ \{c\}\big\}$.
La condition $\big\{\{a,\ b,\ c\},\ \{b\}\big\} \lesssim X$ dit que tout élément B de x (partie de E) doit être inclus dans $\{a,\ b,\ c\}$ ou dans $\{b\}$.
Mais tous les éléments de X sont inclus dans $\{a,\ b,\ c\}$. Aucune condition de ce côté.

De l'autre côté, on veut que $\{a,b\}$, $\{b,c\}$ et $\{c\}$ soient inclus dans des éléments de X.
Plusieurs cas.
Si $\{a,b,c\}$ est un des éléments de X, c'est gagné. Et on choisit les autres éléments au hasard parmi les 7 autres parties disponibles. On a 2^7 solutions.

Si $\{a,b,c\}$ n'est pas un des éléments de E, il faut que $\{a,b]$ en soit un, de même que $\{b,c\}$. Une fois que vous avez $\{b,c\}$, plus de problème si vous prenez $B = \{c\}$, il sera inclus dans $\{b,c\}$.
Vous devez donc prendre $X = \{\{a,b\},\ \{b,c\},\ldots\}$ et dans les trois petits points, vous mettez ou non d'autres parties.
Des autres parties choisies dans la liste $[\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,c\}]$. D'où 2^5 solutions.