

♠(1)] On note $\tan(a)$, $\tan(b)$ et $\tan(c)$ les trois racines de l'équation $2x^3 + 1 = 2x^2 + 2x$ d'inconnue réelle x . Calculez $\tan(a + b + c)$, après avoir prouvé que les trois racines de l'équation sont bien réelles. (3 pt.)

Les différentes parties de ce problème sont assez indépendantes. Mais les notations sont les mêmes tout au long du problème.

I- 1) On pose $c = \cos(\pi/5)$, que l'on va calculer, approximer par des rationnels, puis on verra la qualité d'approximation de c par des rationnels. Exprimez pour tout réel θ les deux réels $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$ comme fonctions de $\cos(\theta)$. (3 pt.) Déduisez que c est solution de l'équation $4x^3 - 3x = -2x^2 + 1$ d'inconnue x . (1 pt.) Trouvez les trois racines de cette équation, puis déterminez la valeur de c . (3 pt.)

II- 1) On définit : $\varphi = x \rightarrow \frac{3x+1}{4x+1}$. Déterminez les variations de φ sur $\mathbb{R}^+$, et calculez $\varphi(c)$. (3 pt.)

II- 2) On définit trois suites : $p_0 = 0, q_0 = 1, p_{n+1} = 3p_n + q_n, q_{n+1} = 4p_n + q_n$ et $u_n = p_n/q_n$. Montrez que p et q sont deux suites à valeurs dans $\mathbb{N}$, strictement croissantes, vérifiant $p_n \cdot q_{n+1} - p_{n+1} \cdot q_n = (-1)^{n+1}$ pour tout n . (3 pt.)

II- 3) Calculez p_n et q_n pour n de 0 à 5. (2 pt.) Déterminez le p.g.c.d. de p_n et q_n pour tout n . (3 pt.) Ajustez μ pour que la suite $(p_n + \mu \cdot q_n)$ soit géométrique, de raison $2 + \sqrt{5}$. (3 pt.)

II- 4) Montrez que la suite u est une suite rationnelle positive vérifiant $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ pour tout n . (3 pt.)

II- 5) Montrez : $u_{2,n} < u_{2,n+2} < c < u_{2,n+3} < u_{2,n+1}$ pour tout n (pensez à utiliser φ pour avancer dans votre récurrence). (3 pt.)

II- 6) Montrez que les suites $(u_{2,n})_n$ et $(u_{2,n+1})_n$ convergent. (2 pt.) Montrez : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2,n+1} - u_{2,n} \leq \frac{1}{(q_{2,n})^2}$. (2 pt.) Déduisez que $(u_{2,n})$ et $(u_{2,n+1})$ ont la même limite, et montrez que cette limite est c . (3 pt.)

II- 7) Montrez : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{2,n} - c| \leq \frac{1}{2 \cdot (q_{2,n})^2}$ ou $|u_{2,n+1} - c| \leq \frac{1}{2 \cdot (q_{2,n})^2}$. (2 pt.)

39 points

III- 1) Soit γ un irrationnel entre 0 et 1. Soit Q un entier naturel non nul. Pour tout n entier de 0 à Q , on note r_n le nombre $[Q \cdot (n \cdot \gamma - [n \cdot \gamma])]$ (les crochets désignent la partie entière). Montrez que chaque r_n est un entier, entre 0 et $Q - 1$. (4 pt.)

Pour a réel, sa partie entière $[a]$ est l'unique entier k vérifiant $k \leq a < k + 1$.

III- 2) Déduisez qu'il existe n et m , entiers distincts entre 0 et Q , vérifiant $r_n = r_m$. (2 pt.)

III- 3) Déduisez alors $|(n - m) \cdot \gamma - [m \cdot \gamma] + [n \cdot \gamma]| \leq 1/Q$. (2 pt.)

III- 4) Déduisez l'existence de deux entiers p et q avec $0 \leq p < q \leq Q$ vérifiant : $|\gamma - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{Q \cdot q} \leq \frac{1}{q^2}$. (3 pt.)

On appelle ceci une approximation de γ d'exposant 2 et d'ordre Q . On peut voir que la suite " $u_n = p_n/q_n$ " est une approximation de c d'exposant 2 et d'ordre q_n . De tous les rationnels de dénominateur plus petit que q_n , c'est p_n/q_n le meilleur rationnel pour approximer c . Les rationnels s'approximent à l'exposant 1 ; les réels dits quadratiques s'approximent à l'ordre 2, comme c'est ici de cas de c . Plus l'ordre est grand, meilleur c'est.

			11 points
MPSI2	Géométrie	2010/11	D.S.1

IV- 1) A et B sont deux points du plan complexe, d'affixes z et z' , avec $z = a + i \cdot \alpha$ et $z' = b + i \cdot \beta$ (avec a, α, b et β réels). On note C le point d'affixe $z + z'$. Montrez que l'aire du parallélogramme ($OACB$) est $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$ et aussi $\Im m(\bar{z} \cdot z')$. (3 pt.)

On rappelle : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$.

IV- 2) Soit Δ la droite d'équation $y = c \cdot x$ (oui, c , c'est toujours le même irrationnel $\cos(\pi/5)$, on est en maths, les notations restent cohérentes de bout en bout en bout...). On se donne un point M de coordonnées (a, α) dans le plan. Déterminez le point de Δ le plus proche de M , et calculez la distance de M à Δ . (3 pt.)

IV- 3) Montrez que la suite de points (P_n) se rapproche de plus en plus de Δ en décroissant quand n s'accroît (on pose : $P_n = (q_n, p_n)$ pour tout n). (4 pt.)

Pour les quatre points, j'attends que vous prouviez que la suite $dist(P_n, \Delta)$ est géométrique, de raison strictement plus petite que 1.

IV- 4) Calculez pour tout n l'aire du triangle $OP_n P_{n+1}$. (1 pt.) Représentez sommairement ce que donne le dessin avec P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 et Δ . (2 pt.)

			10 points
MPSI2	Construction	2010/11	D.S.1

V- 1) Dans le plan, on note I le point $(1, 0)$ et on introduit pour λ réel positif donné le point L de coordonnées $(-\lambda, 0)$. Calculez les coordonnées des points d'intersection de l'axe des ordonnées avec le cercle de rayon $[L, I]$. (2 pt.)

V- 2) Donnez les étapes d'une construction de $\cos(\pi/5)$    la règle et au compas. (2 pt.)

MPSI2 Charlemagne	62 points	Année 2010/11	D.S.1
-------------------	-----------	----------------	-------

Les racines de l'équation $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$.

D.S.1

On a déjà intérêt à mettre tous les termes de l'équation d'un même côté. Pour prouver que les racines de l'équation sont réelles, on va étudier les **variations de ce polynôme** sur $\mathbb{R}$ (en effet, on ne trouve pas de racine évidente, ni d'astuce). On le dérive. On tombe sur $6x^2 - 4x - 2$ qui se factorise en $2(3x + 1)(x - 1)$ (il y a cette fois une racine évidente). La dérivée s'annule et change de signe en $-1/3$ et 1 . La valeur en $-1/3$ du polynôme est $37/27$. La valeur en 1 est -1 . On a donc une racine entre $-1/3$ et 1 (théorème des **valeurs intermédiaires**). On a aussi une racine entre 1 et l'infini (*comportement dicté par le terme dominant*). On a aussi, avec le même type d'argument une racine avant $-1/3$. On tient trois racines réelles. On n'en demande pas plus, on les a toutes, elles sont toutes réelles. On peut les appeler $\tan(a)$, $\tan(b)$ et $\tan(c)$.

À présent, on fait un peu de trigonométrie :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)}$$

$$\tan(a+b+c) \frac{\tan(a+b) + \tan(c)}{1 - \tan(a+b) \cdot \tan(c)} = \frac{\frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)} + \tan(c)}{1 - \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)} \cdot \tan(c)}$$

$$\tan(a+b+c) = \frac{\tan(a) + \tan(b) + \tan(c) - \tan(a) \cdot \tan(b) \cdot \tan(c)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b) - \tan(a) \cdot \tan(c) - \tan(b) \cdot \tan(c)}$$

On exploite ensuite les **relations coefficients racines** dans notre équation, après l'avoir mise sous forme unitaire : $x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$:

$$\tan(a) + \tan(b) + \tan(c) = 1$$

$$\tan(a) \cdot \tan(b) + \tan(a) \cdot \tan(c) + \tan(b) \cdot \tan(c) = -1$$

$$\tan(a) \cdot \tan(b) \cdot \tan(c) = -1/2$$

On effectue le calcul : $\tan(a+b+c) = 3/4$.

$\cos(3\theta)$, $\cos(3\theta)$ et $\cos(\pi/5)$.

D.S.1

Que l'on passe par

$$\cos(3\theta) = \cos(2\theta) \cdot \cos(\theta) - \sin(2\theta) \cdot \sin(\theta) = (2c^2 - 1) \cdot c - 2(1 - c^2) \cdot c \text{ ou par}$$

$$\cos(3\theta) = \Re(e^{3 \cdot i \cdot \theta}) = \Re((c + i \cdot s)^3) = c^3 - 3 \cdot c \cdot s^2 = c^3 - 3(1 - c^2) \cdot c \text{ ou par d'autres chemins, on trouve : } \cos(3\theta) = 4 \cdot \cos^3(\theta) - 3 \cdot \cos(\theta).$$

$$\text{On a aussi bien sûr : } \cos(2\theta) = 2 \cdot \cos^2(\theta) - 1.$$

L'énoncé se lit alors aisément : on doit juste expliquer que l'on a la relation $\cos(3\theta) = -\cos(2\theta)$ quand θ est égal à $\pi/5$. **C'est juste la formule** $\cos(3\pi/5) = \cos(\pi - 2\pi/5)$.

Ensuite, on fait tout passer d'un seul côté, et on détecte une **racine évidente** : -1 . Et je vous la justifie même : $\cos(3\pi) = -\cos(2\pi)$ (et $\cos(\pi)$ vaut -1).

On factorise par $(x + 1)$ et il reste le trinôme du second degré $4x^2 - 2x - 1$ dont les racines sont $(1 + \sqrt{5})/4$ et $(1 - \sqrt{5})/4$.

Notre $\cos(\pi/5)$ vaut donc -1 , $(1 + \sqrt{5})/4$ ou $(1 - \sqrt{5})/4$ (on peut vérifier la somme des racines...). Mais comme c est positif (cosinus d'un réel entre 0 et $\pi/2$), **la seule valeur possible** est $(1 + \sqrt{5})/4$.

$$\varphi = x \longrightarrow \frac{3x+1}{4x+1}$$

D.S.1

L'application φ est définie sur tout $\mathbb{R}^+$, et sa dérivée y est négative, en $x \longrightarrow -1/(4x+1)^2$. On déduit que φ **décroît**, avec limite nulle à l'infini.

On mène un calcul rapide, avec élimination systématique des radicaux au dénominateur, par usage de la quantité conjuguée : $\varphi(c) = c$. On est en présence d'un **point fixe**. Le graphe coupe la première bisectrice...

Les trois suites $(p_n)_n$, $(q_n)_n$ et $(u_n)_n$.

D.S.1

Mine de rien, dans la question sur p et q il y a déjà l'**existence**. Les deux premiers termes sont donnés, les suivants se calculent de proche en proche sans problème de domaine de définition. Par récurrence immédiate sur n , tous les termes des deux suites existent.

Pensez à toujours préciser sur qui porte votre récurrence. Ici, c'est évidemment n , seule variable entière figurant dans la question. Mais imaginez une question sur des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$, et demandez vous sur qui la récurrence peut porter...

Ensuite, on montre aussi, par récurrence sur n que tous les termes sont des entiers naturels. Les deux premiers le sont. Ensuite, si p_n et q_n sont entiers, alors $3.p_n + q_n$ et $4.p_n + q_n$ le sont encore par stabilité de $\mathbb{N}$ par addition et multiplication.

Une fois qu'on a la **positivité** (appartenance à $\mathbb{N}$), on passe à la **croissance, sans récurrence**. La différence $p_{n+1} - p_n$ est égale à $2.p_n + q_n$ et est positive. De même, la différence $q_{n+1} - q_n$ est égale à $4.p_n$ et est positive.

La relation $p.q_{n+1} - p_{n+1}.q_n = (-1)^{n+1}$ se démontre en revanche très bien par **récurrence**. Au début, c'est le simple calcul qui le dit : $p_0.q_1 - p_1.q_0$ vaut $0.1 - 1.1$ et ça, ça fait -1 .

Ensuite, si $p_n.q_{n+1} - p_{n+1}.q_n$ vaut $(-1)^{n+1}$, alors $p_{n+1}.q_{n+2} - p_{n+2}.q_{n+1}$ vaut $(3.p_n + q_n).(4.p_{n+1} + q_{n+1}) - (3.p_{n+1} + q_{n+1}).(4.p_n + q_n)$ qui se simplifie en $p_{n+1}.q_n - p_n.q_{n+1}$. Avec l'hypothèse de récurrence, ceci vaut $-(-1)^{n+1}$ c'est à dire $(-1)^{n+2}$. La récurrence s'achève alors.

n	0	1	2	3	4	5
p_n	0	1	4	17	72	305
q_n	1	1	5	21	89	377

La relation obtenue plus haut s'écrit alors $a.p_n + b.q_n = 1$ avec a et b entiers (valant q_{n+1} ou $-q_{n+1}$ et p_{n+1} ou $-p_{n+1}$ suivant la parité de n). Elle est du type "**formule de Bézout**". Et elle prouve que p_n et q_n sont toujours premiers entre eux.

Il fallait calculer les premiers termes de deux suites pour conjecturer "premiers entre eux". Ensuite, on pouvait aussi mener une récurrence. Si un entier k divise à la fois p_{n+1} et q_{n+1} , il divise leurs combinaisons comme leur différence : p_n . Il divise alors aussi $p_{n+1} - 4.p_n$, et finalement, il divise aussi q_n . Mais par hypothèse de récurrence, il ne peut valoir que 1.

On passe enfin à la suite géométrique.

On note k_n le réel $p_n + \mu \cdot q_n$ sans même connaître μ . On calcule : $c_0 = \mu$ et $c_1 = 1 + \mu$. On veut que la suite soit géométrique et on en a donné la raison ! On veut donc : $1 + \mu = (2 + \sqrt{5}) \cdot \mu$. On résout et on trouve $\mu = (\sqrt{5} - 1)/4$

Mais il reste encore à valider : **la suite est elle bien géométrique** ? On calcule alors k_n et k_{n+1} :

$$k_n = p_n + \mu \cdot q_n \text{ et } k_{n+1} = p_{n+1} + \mu \cdot q_{n+1} = (3 \cdot p_n + q_n) + (4 \cdot p_n + q_n) \cdot \mu$$

On regroupe : $k_{n+1} = (3 + 4 \cdot \mu) \cdot p_n + (1 + \mu) \cdot q_n = (\sqrt{5} + 2) \cdot p_n + (\sqrt{5} + 3) \cdot q_n / 4$. On factorise comme demandé :

$$k_{n+1} = (\sqrt{5} + 2) \cdot (p_n + \frac{\sqrt{5} + 3}{4 \cdot (\sqrt{5} + 2)} \cdot q_n)$$

Par simple usage des quantités conjuguées, on arrive à $k_{n+1} = (\sqrt{5} + 2) \cdot (p_n + (\sqrt{5} - 1) \cdot q_n / 4) = (\sqrt{5} + 2) \cdot k_n$. On reconnaît une suite géométrique, de raison $\sqrt{5} + 2$.

la suite rationnelle (u_n) .

D.S.1

La suite u **existe**-t-elle bien ? Oui, car q est strictement croissante, de premiers terme déjà strictement positif. Aucun de ses termes ne peut donc s'annuler.

Chaque u_n est un **quotient de deux entiers naturels**, c'est un rationnel.

On calcule ensuite pour n donné :

$$u_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{3 \cdot p_n + q_n}{4 \cdot p_n + q_n} = \frac{3 \cdot u_n + 1}{4 \cdot u_n + 1}$$

en divisant au bon moment numérateur et dénominateur par q_n (non nul).

Pour la relation $u_{2,n} < u_{2,n+2} < c < u_{2,n+3} < u_{2,n+1}$, une **récurrence sur n** est la meilleure piste. On vérifie pour les premiers termes : $0 < \frac{4}{5} < \frac{1 + \sqrt{5}}{4} < \frac{17}{21} < 1$. Le calcul ne pose pas de problème, par soustraction. On l'a même sans calcul, si si. On écrit $0 < c < 1$ car on a affaire un cosinus. On applique φ , décroissante sur $\mathbb{R}^+$: $1 > \varphi(c) = c > \varphi(1) = 4/5$. On applique encore une fois φ à la formule obtenue.

Supposons ensuite qu'on a à un rang n : $u_{2,n} < u_{2,n+2} < c < u_{2,n+3} < u_{2,n+1}$.

On applique φ , strictement décroissante : $\varphi(u_{2,n}) > \varphi(u_{2,n+2}) > \varphi(c) > \varphi(u_{2,n+3}) > \varphi(u_{2,n+1})$.

On reconnaît : $u_{2,n+1} > u_{2,n+3} > c > u_{2,n+4} > u_{n+5}$.

On applique à nouveau φ est c'est fini.

Un grand classique des suites oscillantes ou des suites réelles adjacentes, qu'on recroisera.

Convergence des suites.

D.S.1

La suite $(u_{2,n})_n$ est croissante, majorée par c . Elle converge.

On ne sait pas encore si elle converge vers c , pas de précipitation, S.V.P.

La suite $(u_{2,n+1})$ est décroissante, minorée par c , elle converge (vers une limite supérieure ou égale à c).

On ne sait pas encore si elles convergent vers la même limite ; mais on ne va pas leur laisser le choix, et on va se laisser guider par l'énoncé.

On calcule donc, pour n donné dans $\mathbb{N}$:

$u_{2.n+1} - u_{2.n} = \frac{p_{2.n+1}}{q_{2.n+1}} - \frac{p_{2.n}}{q_{2.n}} = \frac{p_{2.n+1} \cdot q_{2.n} - p_{2.n} \cdot q_{2.n+1}}{q_{2.n+1} \cdot q_{2.n}}$. Le numérateur vaut $(-1)^{2.n}$ c'est à dire 1 et le dénominateur se minore par $(q_{2.n})^2$ par croissance de la suite q . Par passage à l'inverse, on a donc une majoration.

Comme la suite q tend vers l'infini, la différence $u_{2.n+1} - u_{2.n}$ tend vers 0 par théorème de l'encadrement (il faut la minorer par 0, mais ça, on l'a déjà).

La suite $(u_{2.n})$ converge ; la suite $(u_{2.n+1})$ converge ; leur différence tend vers 0 : elles convergent donc vers la **même limite**. Cette limite commune sert alors de limite à la suite u .

On connaît des cas où $(u_{2.n})$ et $(u_{2.n+1})$ convergent, sans que (u_p) ne converge. C'est quand les deux sous-suites n'ont pas la même limite. N'oubliez pas cette possibilité, ne vous laissez pas porter par le langage.

On repart ensuite de la relation $u_{p+1} = \varphi(u_p)$ et on fait tendre p vers l'infini (maintenant qu'on sait qu'il y a convergence). On a alors par simple "passage à la limite" : $\lambda = f(\lambda)$ pour leur limite commune λ . Seul c vérifie cette propriété sur $\mathbb{R}^+$. C'est donc lui la limite commune ; comme on se retrouve...

Il ne faut pas essayer de tout traiter en une fois. Et il ne faut pas se focaliser sur une partie de la question sans se demander : que dois je vraiment prouver ?

Bilan : la suite u converge en oscillant vers c . Et tous ses termes sont des rationnels. On va donc à présent étudier la "qualité" de cette convergence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{2.n} - c| \leq \frac{1}{2 \cdot (q_{2.n})^2} \text{ ou } |u_{2.n+1} - c| \leq \frac{1}{2 \cdot (q_{2.n})^2}$$

D.S.1

C'est graphiquement qu'on comprend ce qu'il se passe. Oui, c'est des maths, pas du calcul à la fin du raisonnement d'un devoir de physique, ne confondez pas !

On se donne n . On a un intervalle qui commence en $u_{2.n}$ et se termine en $u_{2.n+1}$. Il contient a . Sa longueur est $1/(q_n)^2$. On le coupe en deux juste au milieu. Le réel c est dans la première ou deuxième moitié. S'il est dans la première, on a $|a - u_{2.n}| \leq \frac{1}{2 \cdot (q_n)^2}$. S'il est dans la seconde moitié, on a $|u_{2.n+1} - a| \leq \frac{1}{2 \cdot (q_n)^2}$. L'une des deux relations est donc vraie (et une seule).

γ et un irrationnel entre 0 et 1, on va l'approximer par un rationnel à l'ordre Q .

D.S.1

La question "chaque r_n est un entier entre 0 et $Q - 1$ " demande une réponse en plusieurs étapes : l'existence, le fait qu'il s'agisse d'entiers et le fait qu'ils soient positifs, plus petits que $Q - 1$.

- Tous les réels ont une partie entière, donc chaque r_n existe.
- Chaque r_n est une partie entière, c'est donc un entier.
- Chaque réel de la forme $n \cdot \gamma - [n \cdot \gamma]$ est positif. Multiplié par Q , il le reste, et sa partie entière reste positive.

Pour x positif, $[x]$ est positive. Sinon, en tant qu'entier non positif, $[x]$ serait plus petite que -1 et on aurait $[x] \leq x < [x] + 1 \leq -1 + 1 = 0$. S'agit il d'un raisonnement par l'absurde, ou par contraposée ?

- Chaque réel $n \cdot \gamma - [n \cdot \gamma]$ de la forme est entre 0 et 1 (soustraire $[x]$ à l'encadrement $[x] \leq x < [x] + 1$). Multiplié par Q , il reste entre 0 et Q . Sa partie entière reste donc entre 0 et Q .

Que dire ensuite de ces entiers entre 0 et Q ? Qu'aucun ne vaut Q . En effet, nos $Q.(n.\gamma - [n.\gamma])$ sont vraiment dans $[0, Q]$. Pour que la partie entière soit égale à Q , il faudrait avoir exactement $n.c - [n.c] = Q$.

Mais on aurait alors : $c = \frac{Q + [n.\gamma]}{n}$ et γ serait rationnel.

On a donc plus d'entiers (il y en a $Q+1$) que de places pour les ranger (il y en a Q). Il faut bien en tasser deux sur la même valeur. C'est ce qu'on appelle le **principe du pigeonnier** ou principe de **Dirichlet**.

Vous l'appellez peut-être *principe des chaussettes*. S'il y a plus de chaussettes que de tiroirs, alors au moins un tiroir contient au moins deux chaussettes. Les anglais l'énoncent avec des pigeons dans des nids. Les mathématiciens l'énoncent en terme d'applications non injectives dès lors que le cardinal du départ est plus élevé que celui d'arrivée. Il nous servira encore d'ailleurs.

Pour deux indices n et m , on a donc $r_n = r_m$. Les deux réels $Q.(n.\gamma - [n.\gamma])$ et $Q.(m.\gamma - [m.\gamma])$ ont la même partie entière. Ils sont tous les deux dans un même intervalle de longueur 1 ; leur différence est inférieure ou égale à 1.

On a à la fois : $r_n \leq Q.(n.c - [n.c]) < r_n + 1$ et $r_n \leq Q.(m.c - [m.c]) < r_n + 1$. On passe à l'opposé sur l'une et on somme alors les deux formules.

On a donc : $|Q.(n.\gamma - [n.\gamma]) - Q.(m.\gamma - [m.\gamma])| \leq 1$. On décide de diviser par Q , puis de nommer q l'entier $n - m$, et p l'entier $[m.\gamma] - [n.\gamma]$ (c'en est bien un). On a alors $|q.\gamma - p| \leq 1/Q$.

On divise par q non nul (n est différent de m), on a $|\gamma - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q.Q}$. Il ne reste plus qu'à dire que $1/Q$ est plus petit que $1/q$ car Q majore q et à conclure par multiplication entre rationnels positifs.

Aire de parallélogramme.

D.S.1

On projette orthogonalement C sur les deux axes, en D et D' . L'aire du rectangle $(ODCD')$ est $(a+b).(\alpha+\beta)$. On enlève ensuite quelques pièces de forme évidente :

- deux rectangles de côtés b et α (aire $2.a.b$)
- deux triangles rectangles de côtés a et α (aire $2.a.\alpha/2$)
- deux triangles rectangles de côtés b et β (aire $2.b.\beta/2$)

On développe et soustrait : $(a.\alpha + a.\beta + b.\alpha + b.\beta) - 2.a.b - a.\alpha - b.\beta = a.\beta - b.\alpha$. On a bien le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$.

Ensuite, on développe le produit $(a - i.\alpha).(b + i.\beta)$ et on n'en garde que la partie réelle $a.b + \alpha.\beta$ et la partie imaginaire $a.\beta - \alpha.b$.

La droite Δ et les points P_n .

D.S.1

On fait bouger un point H le long de Δ avec un seul paramètre : $(x, c.x)$. On mesure le carré de sa distance au point qui nous est donné : $(MH)^2 = (x - a)^2 + (c.x - \alpha)^2$. On la voit comme fonction de x : trinôme du second degré convexe, avec un unique minimum pour x égal à $\frac{a + \alpha.c}{1 + c^2}$. Ce minimum

vaut alors $\frac{(a - c.\alpha)^2}{1 + c^2}$. La distance cherchée est $\boxed{|\alpha - a.c|/\sqrt{1 + c^2}}$

On a minimisé le carré de la distance, c'est comme de minimiser la distance, puisque les quantités en jeu sont positives. D'autre part, on peut considérer que c'est un résultat du cours de Terminale : on reporte les coordonnées du point dans l'équation normalisée de la droite. On a aussi des démonstrations bien plus géométriques, avec mesure de l'aire du triangle PQM où P et Q sont deux points quelconques de la

droite. On en reparlera car le point de vue géométrique est toujours le meilleur ; on est en mathématiques, non ?

On mesure alors la distance de P_n à Δ : $|p_n - c.q_n|/\sqrt{1+c^2}$. On la reformule en $q_n \cdot |u_n - c|/\sqrt{1+c^2}$, en rappelant que le rationnel u_n n'est autre que p_n/q_n . On majore $|u_n - c|$ par $1/(2.q_n^2)$ par un calcul déjà croisé. On majore donc $\text{dist}(P_n, \Delta)$ par K/q_n avec K constante purement numérique. Ce majorant tend vers 0 car la suite $(q_n)_n$ tend vers l'infini. Les points P_n se rapprochent donc de la droite quand n tend vers l'infini.

On doit encore vérifier que la distance décroît avec n . On doit donc comparer $|p_n - c.q_n|$ et $|p_{n+1} - c.q_{n+1}|$.

On ne voit pas le rapport ? Et pourtant !

$$|p_{n+1} - c.q_{n+1}| = |3.p_n + q_n - c.(p_n + q_n)| = |p_n.(3 - 4.c) + q_n.(1 - c)| = (|3 - 4.c| \cdot |p_n| + \frac{1 - c}{3 - 4.c} \cdot |q_n|)$$

Et justement, $\frac{1 - c}{3 - 4.c}$ est égal à c . Mais si ! Regardez de quelle équation vient c ! et faites le produit en croix pour voir.

On a donc : $|p_{n+1} - c.q_{n+1}| = |3 - 4.c| \cdot |p_n - c.q_n|$. Il reste à voir que $|3 - 4.c|$ est strictement plus petit que 1. C'est $\sqrt{5} - 2$.

La suite des distances $(|p_n - c.q_n|/\sqrt{1+c^2})$ est une suite géométrique de raison strictement plus petite que 1. Elle tend bien vers 0 en décroissant.

Sur la droite Δ , il n'y a que O comme point à coordonnées entières, puisque c est irrationnel (afites le bout de raisonnement par l'absurde). Mais on a des points à coordonnées entières de plus en plus proches de cette droite.

On veut aussi établir la décroissance de cette distance. Le facteur $\sqrt{1+c^2}$ au dénominateur n'a aucun rôle à jouer, on peut le mettre de côté. Il nous faut donc étudier que la différence des longueurs.

Construction à la règle et au compas.

D.S.1

On commence par une intersection entre un cercle de diamètre donné et l'axe des ordonnées. On va commencer par la méthode la plus déplorable : le calcul ! Comme si les problèmes de géométrie se ramenaient à des calculs algébriques. La tare qui fait des élèves français des crétins qui mettent tout en équation et croient qu'ils ont alors fait des maths.

Un point $M(x, y)$ est sur le cercle si et seulement si l'angle LMI est droit. Ceci se traduit par l'orthogonalité de deux vecteurs : $\begin{pmatrix} x - \lambda \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix}$. La nullité du produit scalaire donne : $(x - \lambda).(x - 1) + y^2 = 0$, c'est à dire $x^2 + y^2 - (1 + \lambda).x - \lambda = 0$, c'est bien une équation de cercle. On intersecte avec Oy en imposant à x d'être nul. Il nous reste $y^2 = \lambda$. On a deux solutions : $\sqrt{\lambda}$ et $-\sqrt{\lambda}$. Les deux points cherchés sont donc $(0, \sqrt{\lambda})$ et $(0, -\sqrt{\lambda})$ *La méthode cartésienne est assez efficace, je le concède.*

Vous savez donc **construire à la règle et au compas la racine carrée d'un réel donné λ** : positionner trois points à distances respectives λ et 1 sur un axe. Trouver le milieu du grand segment de longueur $1 + \lambda$ obtenu. Tracer le cercle centré en ce milieu et passant par les deux extrémités du segment. Tracer la perpendiculaire passant le point qui s'est appelé O dans notre construction. Les deux segments sur la perpendiculaire ont pour longueur $\sqrt{\lambda}$. Joli et classique.

Plus géométriquement : on note K l'un des deux points d'intersection du demi cercle supérieur avec l'axe des ordonnées (le point dont l'ordonnée nous intéresse). Le triangle LKI est rectangle en K . Le triangle LOK est rectangle en O et le triangle KOI est aussi rectangle en O . Comme ils ont des angles en commun, on déduit qu'ils sont tous "sur le même modèle" (disons qu'il sont semblables, c'est plus propre). On écrit alors des relations de similitude, qui calculent de diverses manières la tangente d'un même angle : $OK/\lambda = 1/OK$ (j'ai utilisé LOK et KOI). On a tout de suite $OK^2 = \lambda$.

Avec cette construction, on sait donc construire $\sqrt{5}$, y ajouter 1 (mettre bout à bout des segments). Il ne reste plus qu'à couper deux fois le segment obtenu en parts égales, ce qui se fait encore à la règle et au compas.

La fin de l'exercice est surtout alors un test sur vos qualités de rédaction, pour raconter une construction, sans vous contenter de balancer le dessin achevé.

Les problèmes de constructions à la règle et au compas sont de grands classiques en mathématiques, sur lesquels je reviendrai peut être si le programme nous en laisse le temps. Sinon, pourquoi pas en T.I.P.E., non ?

J'ai appris quand j'étais élève de Prépas la construction à la règle et au compas du pentagone, en cours de dessin industriel (la matière qui est devenue de manière plus instructive pour vous "sciences de l'ingénieur et industrielles" depuis cette lointaine époque). Vous pouvez la (re)trouver sur internet.

MPSI2 Charlemagne	62 points	Année 2010/11	D.S.1
-------------------	-----------	---------------	--------------

◇(1) Dans le premier devoir, on s'est intéressé aux suites p et q ainsi définies : $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, $p_{n+1} = 3.p_n + q_n$, $q_{n+1} = 4.p_n + q_n$ et $u_n = p_n/q_n$. On pose alors : $V_n = \begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n . Trouver M matrice carrée de taille 2 sur 2 vérifiant $V_{n+1} = M.V_n$ pour tout n . (1 pt.)

◇(2) On note alors D la matrice $\begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{pmatrix}$ et P la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{5}-1 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Vérifiez la relation $M.P = P.D$. (2 pt.) Déduisez l'expression de M^n à l'aide de P , P^{-1} et D^n . (2 pt.)

◇(3) Exprimez enfin p_n et q_n pour tout entier naturel n . (3 pt.)

9 points

VI- 1) Montrez $x.y \leq (x^2 + y^2)/2$ pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$. (1 pt.) Justifiez le calcul suivant, en mettant les symboles $=$, $\leq$ ou $\geq$ aux bons endroits : (4 pt.)

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \dots \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_i.a_j \dots \sum_{\substack{i \leq n \\ j \leq n}} \frac{(a_i)^2 + (a_j)^2}{2} \dots n \times \sum_{k \leq n} (a_k)^2$$

VI- 2) Déduisez : $\left|\sum_{k \leq n} a_k\right| \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k \leq n} (a_k)^2}$

VI- 3) Autre preuve : on définit $f = \left(t \rightarrow \sum_{k=1}^n (t + a_k)^2\right)$. Montrez que f est un polynôme du second degré qui reste de signe constant. (2 pt.) Retrouvez alors l'inégalité de la question précédente. (1 pt.)

Montrez qu'on a $\left|\sum_{k \leq n} a_k\right| = \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k \leq n} (a_k)^2}$ si et seulement si le vecteur $(a_1, \dots, a_n)$ est proportionnel au vecteur $(1, \dots, 1)$. (2 pt.)

VII- 1) On veut maintenant montrer que si on a $\left|\sum_{k \leq n} a_k\right| \geq \sqrt{n-1} \cdot \sqrt{\sum_{k \leq n} (a_k)^2}$ alors les a_k sont tous de même signe. On va le faire par l'absurde. Montrez qu'on peut supposer alors $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_p < 0 \leq a_{p+1} \leq \dots \leq a_n$ pour un certain indice p . (1 pt.) On pose alors $w = a_1 + \dots + a_p$, $y = (a_1)^2 + \dots + (a_p)^2$, $x = a_{p+1} + \dots + a_n$ et $z = (a_{p+1})^2 + \dots + (a_n)^2$. Montrez alors : $w^2 + x^2 \leq p.y + (n-p).z \leq (n-1).(y+z) \leq (w+x)^2$. (3 pt.) Quel est alors le signe de $w.x$? Concluez. (2 pt.)

VIII- 1) $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. En étudiant le signe du trinôme $\sum_{k=1}^n (t.a_k + b_k)^2$, montrez : $\left(\sum_{k=1}^n a_k.b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n (a_k)^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n (b_k)^2\right)$. (2 pt.) Interprétez géométriquement. (2 pt.)

a, b et c sont trois réels, racines du polynôme $X^3 - S.X^2 + D.X - P$. Exprimez S, D et P à l'aide de a, b et c . Calculez $a^2 + b^2 + c^2$ à l'aide de S, D et P . Montrez : $x^3 + y^3 + z^3 = S.(a^2 + b^2 + c^2) - D.S + 3.P$. (4 pt.)

VIII- 2) En étudiant le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$ de (a, b, c) et (b, c, a) , montrez : $D \leq (a^2 + b^2 + c^2)$. (2 pt.)
 Déduisez : $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3.a.b.c$. (1 pt.) Déduisez pour tout triplet (α, β, γ) de réels positifs : :
 $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\alpha.\beta.\gamma}$. (2 pt.)

29 points

MPSI2	Trigonométrie	2010/11	D.S.2
-------	---------------	---------	-------

[♥(1)] Un élève écrit $\cos(3.t) = 3.\cos(t)$, inventant une formule fausse. Quelles sont les valeurs pour lesquelles c'est vrai. (2 pt.)

[♥(2)] Exprimez $\cos(4.x)$ comme polynôme en $\cos(x)$. (2 pt.) Montrez : $\cos(5.x) + \cos(3.t) = 2.\cos(x).\cos(4.x)$. Exprimez $\cos(5.x)$ comme polynôme en $\cos(x)$. (2 pt.)

[♥(3)] Déduisez une expression de $\sin(5.x)$ comme polynôme en $\sin(x)$. (2 pt.) Trouvez une expression de $\sin(5.x)/\sin(x)$ comme polynôme en $\cos(x)$. (2 pt.)

10 points

MPSI2	Loi pour Dora	2010/11	D.S.2
-------	---------------	---------	-------

[♠(2)] Montrez que l'équation $x^2 = 2010.x + 1$ d'inconnue réelle x admet deux racines, qu'on va noter a et b avec $a < b$. Déterminez le signe de a et la partie entière de b . (3 pt.)

[♠(3)] Pour p et q donnés, on pose : $p * q = p.q + [p.b].[q.b]$.
 Montrez que $*$ est une loi interne sur $\mathbb{Z}$, commutative. (2 pt.)

[♠(4)] Pour p, q et r entiers naturels non nuls donnés, on pose : $u = (b.p - [b.p]).(b.q - [b.q])$. Montrez : $0 < u < 1$. (2 pt.) Montrez aussi $(b - 2010).u = b.p.q + b.[b.q].[q.b] - p.[b.q] - q.[b.p] - 2010.[b.p].[b.q]$. (2 pt.)
 Déduisez : $(p * q) * r = p.q.r + r.[p.b].[q.b] + q.[p.b].[r.b] + p.[q.b].[r.b] + 2010.[b.p].[b.q].[r.q]$. (4 pt.) Montrez enfin que la loi $*$ est associative sur $\mathbb{N}$. (2 pt.)

[♠(5)] On suppose que la loi $*$ admet un neutre noté e . Montrez alors : $[b].[b.e] = 1 - e$. (1 pt.)

[♠(6)] Montrez pour tout m positif : $b - \frac{1}{m} \leq \frac{[b.m]}{m} \leq b$. (1 pt.) Déduisez la limite de $[b.m]/m$ quand m tend vers l'infini. (1 pt.) Déduisez : $b.[b.e] = 1 - e$. (1 pt.) Déduisez alors : $[b.e] = 0$ puis $e = 1$. (2 pt.)
 Concluez. (1 pt.)

22 points

MPSI2 Charlemagne	130 points	Année 2010/11	D.S.2
-------------------	------------	---------------	-------

Quelques cosinus.

D.S.2

On fait appel à quatre cosinus et trois cos. L'équation à laquelle nous conduit l'erreur de l'élève est donc : $4.\cos^3(t) - 3.\cos(t) = \cos(t)$. Elle devient $c = c^3$ en posant $c = \cos(t)$. On trouve trois racines pour c (factoriser en $c.(c^2 - 1) = 0$) : $-1, 0$ et 1 .

On a donc trois familles de solutions :

- $(2.k + 1).\pi$ avec k décrivant $\mathbb{Z}$
- $m.\pi + \pi/2$ avec m décrivant $\mathbb{Z}$
- $2.n.\pi$ avec n décrivant $\mathbb{Z}$

On synthétise avec l'ensemble $\left\{p.\frac{\pi}{2} \mid p \in \mathbb{Z}\right\}$

On calcule, en posant $c = \cos(x)$ à présent :

$$\cos(4.x) = 2.(\cos(2.x))^2 - 1 = 2.(2.c^2 - 1)^2 - 1 = 8.c^3 - 8.c^2 + 1$$

On rappelle ensuite une relation : $\cos(p) + \cos(q) = 2.\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

On l'obtient aisément avec $\cos\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}\right) = c.c' - s.s'$ et $\cos\left(\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}\right) = c.c' + s.s'$ que l'on additionne.

Quand on l'applique à $(n+1).x$ et $(n-1).x$ (ici $3.x$ et $5.x$), on arrive sans effort à $\cos((n+1).x) = 2.\cos(x).\cos(n.x) - \cos((n-1).x)$. En particulier : $\cos(5.x) = 2.\cos(x).\cos(4.x) - \cos(3.x)$.

On remplace par les valeurs : $\cos(5.x) = 16.c^5 - 20.c^3 + 5.c$.

Ensuite, il faut passer aux sinus. Facile. Si la formule est vraie pour tout x , elle doit être valable aussi pour $\pi/2 - x$ par exemple ; Cette transformation a l'avantage de transformer les sinus en cosinus et vice versa. Et pour $\cos(5.(\pi/2 - x))$, on trouve :

$$\sin(5.x) = 16.s^5 - 20.s^3 + 5.s$$

On peut ensuite factoriser un sinus $s.(16.s^4 - 20.s^2 + 5)$ il ne nous reste plus qu'à remplacer : $s.(16.(1 - c^2)^2 - 20.(1 - s^2) + 5)$.

Mais j'ai plus efficace (donc vraiment mathématique) :

on dérive la relation (vraie partout) $\cos(5.x) = 16.\cos^5(x) - 20.\cos^3(x) + 5.\cos(x)$. On trouve donc : $-5.\sin(5.x) = -5.16.\cos^4(x).\sin(x) + 60.\cos^2(x).\sin(x) - 5.\sin(x)$

il ne reste qu'à factoriser par $\sin(x)$ et diviser par -5 :

$$\sin(5.x) = \sin(x).(16.\cos^4(x) - 12.\cos^2(x) + 1)$$

Des suites et des matrices.

D.S.2

On pose $V_n = \begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{pmatrix}$. On a donc :

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} p_{n+1} & p_{n+2} \\ q_{n+1} & q_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.p_n + q_n & 3.p_{n+1} + q_n \\ 4.p_n + q_n & 4.p_{n+1} + q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{pmatrix}$$

On va donc prendre la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ dans le rôle de M .

La vérification de la relation $MP = P.D$ (connue pour une raison que j'ignore) repose sur un rapide calcul, les deux produits donnant $\begin{pmatrix} 2 + \sqrt{5} & -2 + \sqrt{5} \\ 3 + \sqrt{5} & -3 + \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Avec cette relation, on déduit, en multipliant à droite par P^{-1} : $M = P.D.P^{-1}$. On multiplie alors : $M^n = (P.D.P^{-1}).(P.D.P^{-1}).(P.D.P^{-1}) \dots (P.D.P^{-1}) = P.D.(P^{-1}.P).D.(P^{-1}.P).D \dots P).D.P^{-1}$. On voit les $P^{-1}.P$ se simplifier. Il reste $P.D.D \dots D.P^{-1}$. On a donc : $M^n = P.D^n.P^{-1}$. Si la démonstration par raccordements comme ci dessus n'est pas convaincante, le mieux est de faire une récurrence sur n . On l'initialise au rang 0 avec $I_2 = P.I_2.P^{-1}$ ou plus prudemment $M = P.D.P^{-1}$. Pour l'hérédité, on suppose $M^n = P.D^n.P^{-1}$ pour un certain n donné. On multiplie à droite par $P.D.P^{-1}$, on profite de l'associativité : $M^{n+1} = M^n.M = P.D^n.P^{-1}.P.D.P^{-1} = P.D^n.I_2.D.P^{-1} = P.D^{n+1}.P^{-1}$ et la récurrence s'achève.

Par une récurrence rapide, on a : $V_n = M^n.V_0 = P.D^n.P^{-1}.V_0$. On connaît V_0 , on trouve avec une récurrence s'il le faut : $D^n = \begin{pmatrix} (2+\sqrt{5})^n & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{5})^n \end{pmatrix}$ et on trouve P^{-1} en tatonnant. En fait, on pose quatre coefficients dans une matrice Q , on effectue le produit $P.Q$ qu'on égalise à I_2 , on résout quatre petits systèmes, et on trouve : $P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5}+1 & 1 \\ 1-\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}$

On termine : M^n vaut $\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} (2+\sqrt{5})^n \cdot (\sqrt{5}+1) + (2-\sqrt{5})^n \cdot (\sqrt{5}-1) & (2+\sqrt{5})^n - (2-\sqrt{5})^n \\ 4 \cdot (2+\sqrt{5})^n - 4 \cdot (2-\sqrt{5})^n & (2+\sqrt{5})^n \cdot (\sqrt{5}-1) + (2-\sqrt{5})^n \cdot (\sqrt{5}+1) \end{pmatrix}$ et la multiplication par V_0 permet d'isoler p_n et q_n en première colonne : $p_n = \frac{(2+\sqrt{5})^n - (2-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}$ et $q_n = \frac{(\sqrt{5}-1) \cdot (2+\sqrt{5})^n + (\sqrt{5}+1) \cdot (2-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}$.

Ne vous inquiétez pas, les $\sqrt{5}$ s'en vont à la fin, comme les i peuvent s'en aller par addition dans $\mathbb{C}$ de complexes avec leurs conjugués. Au final, p_n et q_n sont toujours entiers.

Comme on est en D.S., avec du temps, vous pouvez prendre le temps de vérifier la validité de vos formules en les vérifiant pour deux valeurs élémentaires de n comme 0 et 1. C'est d'ailleurs ce que je ferai pour vérifier vos formules...

Prochainement dans le cours, je vous apprendrai comment trouver vous même les deux coefficients de la matrice D (car n'importe quelle matrice D ne convient pas forcément) et ce qu'il se cache aussi dans la matrice P .

Une loi un peu tordue, avec un 2010 et la racine d'une équation du second degré.

D.S.2

En soi, 2010 n'a aucun rôle particulier. Vous pouvez le remplacer par n'importe quel entier.

L'équation $x^2 - 2010x - 1 = 0$ d'inconnue x a un discriminant positif, et a donc deux racines réelles. Leur produit vaut -1 , c'est donc que l'une est négative et l'autre positive. C'est à la racine avec le signe moins d'être négative, et à celle avec le signe plus d'être positive. Leur produit vaut -1 , c'est donc qu'en valeur absolue, l'une dépasse 1 et l'autre est entre 0 et 1. Or, entre 0 et 1 le trinôme ne change pas de signe, alors qu'il le fait entre -1 et 1. On a donc : $-1 < a < 0$. Comme leur somme vaut 2010, on a $a = 2010 + |b|$ qui est entre 2010 et 2011. Sa partie entière vaut 2010.

Tout dans le raisonnement, rien dans le calcul bourrin. Quand vous aurez besoin de faire du calcul lourd, je vous préviendrai. Ou alors, c'est beaucoup plus naturellement que vous serez dans une autre matière que les maths.

Quand on se donne p et q entiers, le produit $p.q$ est entiers, de même que le produit $[b.p].[q.b]$ par définition même de la partie entière. La somme $p*q$ redonne donc un entier. La loi $*$ est une loi interne sur $\mathbb{Z}$. Comme on a $p*q = q*p$, elle est commutative.

Supposons donc comme indiqué qu'il y a un neutre e (ça sent le raisonnement par l'absurde). Alors, on a $p.e + [p.b] + [e.b] = p$ pour tout p de $\mathbb{Z}$.

On en déduit par exemple pour p égal à 1 : $1 = e + [b].[e.b]$, ce qui est la relation demandée.

Il y a alors des élèves qui s'insurgent : "en terminale, on m'a toujours dit de ne pas prendre un cas particulier dans une démonstration ! que se passe-t-il ?". Rien ! C'est juste qu'ils n'ont rien écouté ou rien compris. On n'a pas le droit de considérer que si on a traité un cas particulier, on a traité tous les cas. On ne peut donc pas conclure que ce qui est énoncé est vrai pour tout p . Mais ici, p intervient dans le cadre

d'une **hypothèse** et non dans le cadre d'une **conclusion**. On peut donc convoquer quelques valeurs de p comme témoins pour avancer vers la conclusion. La phrase de Terminale, c'est *ne pas prendre de cas particulier d'une variable pour ce qui est la conclusion d'un raisonnement*", mais c'est parfaitement autorisé et même souhaité dans le cas de l'hypothèse d'un raisonnement. Mais comme toujours, vous ne retenez qu'une partie de ce qu'on vous a dit. Remarquez, c'est la base même de la politique et du journalisme qui va avec...

Y a-t-il d'autres cas particuliers utiles pour avancer vers la contradiction et vers la conclusion ? Oui, ce sera de faire tendre p vers l'infini.

Pour p donné, on part de la relation $p - 1 < [p.b] \leq p.b$, qui dit que pour extraire la partie entière, on descend toujours, mais de moins d'une unité. C'est la même que la relation $[x] \leq x < [x] + 1$. On divise par p positif : $b - \frac{1}{p} < \frac{[p.b]}{p} \leq b$. On fait tendre p vers l'infini positif (c'est cohérent avec les hypothèses faites sur p). Les deux termes de l'encadrement tendent vers b . Il s'ensuit que le terme au centre tend aussi vers b .

Attention, ne me dites pas que vous passez à la limite ! Ce serait idiot. En effet, pour passer à la limite, il faut savoir que la limite existe. Or, personne ne vous a dit d'avance que $[b.p]/p$ avait une limite. Quittez le monde idyllique où tout a une limite, et prenez le temps de prouver l'existence avant de dire "et je calcule". Or, le théorème de l'encadrement ou des gendarmes donne justement l'existence de la limite avant sa valeur.

On repart donc de $p = e.p + [p.b].[e.b]$, on divise par p , on a $1 = e + \frac{[p.b]}{p}.[e.b]$ et on fait tendre p vers l'infini. On obtient : $1 = e + b.[e.b]$.

On compare les deux formules : $b.[e.b] = [b].[e.b]$. Comme b n'est pas entier (on a une formule explicite avec des racines), la seule solution est : $[e.b] = 0$.

Mais alors on reporte : $p * e = p.e + [b.p].0 = p.e$ pour tout p . Pour p égal à 1, il reste : $1 = e$. Or, 1 n'est pas neutre. La preuve : on devait avoir $[e.b] = 0$, alors qu'on a $[1.b] = 2010$.

Bref, il n'y a pas de neutre.

On passe à l'associativité sur $\mathbb{N}^*$. On prend donc p, q et r . On va déjà s'attaquer à des informations guidées sur $p * q$.

Chaque $p.b - [p.b]$ est de la forme "un réel moins sa partie entière". On trouve un nombre entre 0 et 1. Le réel u est le produit de deux réels de $[0, 1]$, il reste entre 0 et 1 lui aussi. Comme aucun ne vaut 1, il ne peut valoir 1.

Aucun n'est nul non plus. En effet, ceci nous conduirait à $b.p$ entier, et par division : b rationnel, ce qui n'est pas le cas. Le produit n'est donc pas nul.

On développe : $u = b^2.p.q - b.p.[q.b] - b.q.[b.p] + [b.p].[b.q]$.

On multiplie par $b - 2010$. On croise des $(b - 2010).b$ qu'on peut remplacer par 1. Pourquoi ? Mais parce que b vient de l'équation $b^2 - 2010.b = 1$:

$$(b - 2010).u = 1.b.p.q - p.[b.q] - q.[b.p] + (b - 2010).[b.p].[b.q]$$

On remet dans l'ordre et on a vite gagné ses deux points.

On perd son temps si on se fatigue à traîner b sous forme explicite, avec des racines carrées partout. Il peut être bon de nommer les objets et de juste retenir les propriétés qui les caractérisent.

En revanche, c'est après qu'il faut ruser et saisir la subtilité : ce réel est entre 0 et 1, comme produit de deux réels entre 0 et 1 (on l'a dit pour u et ensuite $b - 2010$ est la partie fractionnaire de b).

Sa partie entière est donc nulle.

On a donc : $0 = [b.p.q + b.[b.q].[b.q]] - p.[b.q] - q.[b.p] - 2010.[b.p].[b.q]$

Mais ensuite, on sait que les entiers sont sans effet dans une partie entière : $[x + n] = [x] + n$ pour x réel et n entier. Et ici, justement, $p.[b.q] + q.[b.p] + 2010.[b.p].[b.q]$ est entier.

On a donc obtenu : $0 = [b.p.q + b.[b.q].[b.q]] - p.[b.q] - q.[b.p] - 2010.[b.p].[b.q]$ c'est à dire $[b.p.q + b.[b.q].[b.q]] = p.[b.q] + q.[b.p] + 2010.[b.p].[b.q]$.

Comme par hasard, $[b.p.q + b.[b.q].[b.q]]$ intervient dans le calcul de $(p * q) * r = (p * q).r + [p * q].[b.r]$. Tout ce qu'il nous faut faire, c'est donc multiplier $p * q$ par r , puis multiplier $[b.p.q + b.[b.q].[b.q]]$ par $[b.r]$ et additionner le tout.

On a donc $p.q.r + r.[p.b].[q.b]$ et $[r.b].(p.[b.q] + q.[b.p] + 2010.[b.p].[b.q])$. On a bien tous les termes attendus.

Quel rapport ensuite avec l'associativité ? Les rôles de p , q et r sont symétriques.

On a calculé $(p * q) * r$ et on veut comparer avec $p * (q * r)$, c'est à dire $(q * r) * p$. On change le nom des variables dans le calcul précédent. p devient q , q devient r et r devient p . La formule ne change pas. On a donc $(p * q) * r = p * (q * r)$ pour tout triplet. La loi est associative.

Mais au fait, finalement, sur quel ensemble est elle associative ? $\mathbb{N}^*$? $\mathbb{N}$? $\mathbb{Z}$? Réfléchissez...

Des inégalités.

D.S.2

On commence par une petite inégalité : $x.y \leq (x^2 + y^2)/2$. On effectue juste une différence : $\frac{x^2 + y^2}{2} - x.y = (x - y)^2$. La différence est positive. L'inégalité est bien dans le sens proposé.

Pour la première inégalité, il semble clair qu'on veut arriver à $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \leq n \cdot \sum_{i=1}^n (a_i)^2$. On va donc enchaîner des $=$ et des $\leq \dots$

Première (in)égalité. On part du carré de la somme des a_k . On ne la développe surtout pas avec des carrés et des double produits. On visualise les choses dans le produit

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

Chaque a_i a la possibilité de rencontrer une fois chaque a_j . On a donc bien la somme de tous les $a_i.a_j$ possibles, avec i plus petit que n et j tout aussi plus petit que n .

Ensuite, comme on a à chaque fois la même somme $\sum_{\substack{i \leq n \\ j \leq n}}$, on se dit qu'on va comparer terme à terme.

N'aurait on pas $a_i.a_j$ plus petit que $((a_i)^2 + (a_j)^2)/2$? Mais si ! C'est l'inégalité démontrée en ouverture.

Mais alors, d'où sort ce n à la fin ?

D'un simple décompte.

Il y a n^2 termes, de la forme $(a_i)^2 + (a_j)^2$. On en a un pour chaque case du tableau à double entrée en i et j . On a donc une ligne qui va de $(a_1)^2 + (a_1)^2$ à $(a_1)^2 + (a_n)^2$ en passant par $(a_1)^2 + (a_2)^2$ et $(a_1)^2 + (a_3)^2$. On a donc bien plus de $(a_1)^2$ que le débutant n'en compte. Il y en a $n + 1$ (en double sur la première case). Et on n'en croise plus sur les autres lignes ?

Mais si ! Partout sur la première colonne. Ce qui nous en fait un total de $(n + 1) + (n - 1)$ c'est à dire $2.n$.

On cherche les $(a_2)^2$? Il y en a un sur chaque ligne en deuxième colonne. Et il y en a plein sur la deuxième ligne. Même total de $2.n$.

On fait de même avec chaque $(a_k)^2$. Il y en a sur la colonne k et sur la ligne k .

Bref, il ne faut pas voir les sigma comme de froids objets qu'on manipule sans réfléchir (on serait loin des sciences avec de tels réflexes). Ce sont des sommes qu'on lit dans des alignements, ou dans des tableaux.

Allez, je sens que certains ont bluffé en disant qu'ils majoraient 1 par n pour me faire plaisir et écrivaient

à tort $\sum_{\substack{i \leq n \\ j \leq n}} (a_i)^2 + (a_j)^2 = \sum_{k=1}^n (a_k)^2$ ou même $2 \cdot \sum_{k=1}^n (a_k)^2$. Sans compter ceux qui se sont perdus parce

que " i c'est pas pareil que k !". Alors je leur offre un tableau pour saisir :

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$\dots$	$j = n$
$i = 1$	$(a_1)^2 + (a_1)^2$	$(a_1)^2 + (a_2)^2$	$(a_1)^2 + (a_3)^2$		$(a_1)^2 + (a_n)^2$
$i = 2$	$(a_2)^2 + (a_1)^2$	$(a_1)^2 + (a_2)^2$	$(a_2)^2 + (a_3)^2$		$(a_2)^2 + (a_n)^2$
$i = 3$	$(a_3)^2 + (a_1)^2$	$(a_3)^2 + (a_2)^2$	$(a_3)^2 + (a_3)^2$		$(a_3)^2 + (a_n)^2$
$\dots$					
$i = n$	$(a_n)^2 + (a_1)^2$	$(a_n)^2 + (a_2)^2$	$(a_n)^2 + (a_3)^2$		$(a_n)^2 + (a_n)^2$

Chaque case (i, j) contient le terme $(a_i)^2 + (a_j)^2$.

On résume : $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 = \sum_{\substack{i \leq n \\ j \leq n}} a_i \cdot a_j \leq \sum_{\substack{i \leq n \\ j \leq n}} \frac{(a_i)^2 + (a_j)^2}{2} = n \times \sum_{k \leq n} (a_k)^2$

On passe à la racine sur l'inégalité obtenue en effaçant les termes du milieu. On n'oublie pas que la racine carrée du carré donne une simple valeur absolue. On a la nouvelle formule : $\left|\sum_{k \leq n} a_k\right| \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k \leq n} (a_k)^2}$

et on devine qu'il n'y aura égalité que si il y a égalité en cours de démonstration, c'est à dire si on ne perd rien en route. Pour ne rien perdre, il faut avoir à chaque fois $a_i \cdot a_j = (a_i^2 + a_j^2)/2$ c'est à dire que chaque a_i soit égal à chaque a_j . Tous les a_k sont égaux.

La même inégalité par un trinôme.

D.S.2

Si on développe chaque carré de $f = \left(t \rightarrow \sum_{k=1}^n (t + a_k)^2\right)$ on trouve $t \rightarrow n \cdot t^2 + 2 \cdot \beta \cdot t + \gamma$ avec

$$\beta = \sum_{k=1}^n a_k \text{ et enfin } \gamma = \sum_{k=1}^n (a_k)^2. \text{ C'est bien un trinôme.}$$

Pourquoi est il de signe constant ? Parce qu'il est toujours positif, comme somme de carrés.

Mais alors que peut on en déduire ? Que le discriminant de ce trinôme du second degré est négatif ou nul.

Et qui est le discriminant de ce trinôme ? $\left(2 \cdot \sum_{k=1}^n a_k\right)^2 - 4 \cdot n \cdot \sum_{k=1}^n (a_k)^2$.

On efface le 4 : $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2$ est plus petit que $n \cdot \sum_{k=1}^n (a_k)^2$. On n'a plus qu'à passer à la racine.

Cette superbe idée de démonstration avec le signe invariant d'un trinôme du second degré est une des inégalités de Cauchy-Schwarz. Moi je trouve ça trop joli ! On fera le coup de "somme de carrés donc trinôme positif donc delta négatif" à d'autres occasions.

Dans quel cas a-t-on égalité ? Quand le discriminant est nul. Mais ceci conduit à l'existence d'une unique racine t_0 . On a alors $\sum_{k=1}^n (t_0 - a_k)^2 = 0$. Pour que la somme de carrés soit nulle, il faut que

chaque terme soit nul : $t_0 = a_k$ pour tout k de 1 à n . Par transitivité, tous les a_k sont égaux. Le vecteur est de la forme $(a_1, a_1, \dots, a_1)$. C'est un multiple de $(1, 1, \dots, 1)$.

Et évidemment, on a la réciproque : si le vecteur est proportionnel à $(1, 1, \dots, 1)$, il y a bien égalité : $(a + a + \dots + a)^2 = n \cdot (a^2 + \dots + a^2)$.

Cas où le rapport est entre $\sqrt{n-1}$ et $\sqrt{n}$.

D.S.2

On suppose donc que les a_k ne sont pas tous le même signe. Il y en a donc des positifs et des négatifs. Si on les trie et les renomme, les sommes ne changent pas. On va donc supposer qu'on les a triés par ordre croissant. Comme il y en a au moins un négatif et au moins un positif, on peut considérer l'indice pour lequel on bascule du négatif au positif. On le note p . Il y a donc p réels négatifs, suivis de $n - p$ réels positifs.

On prend la liste des éléments positifs de la liste. Il y en a $n - p$ et non plus n . Mais on peut lui appliquer le résultat de la question précédente :

$$|a_{p+1} + \dots + a_n|^2 \leq (n - p) \cdot ((a_{p+1})^2 + \dots + (a_n)^2)$$

De même, avec les p éléments négatifs :

$$|a_1 + \dots + a_p|^2 \leq p \cdot ((a_1)^2 + \dots + (a_p)^2)$$

On majore ensuite p et $n - p$ par $n - 1$ car tous deux sont plus petits que n (nombre total de termes) et même que $n - 1$ (car il y a au moins un terme de chaque signe).

On a donc : $w^2 = |a_1 + \dots + a_p|^2 \leq p \cdot ((a_k)^2 + \dots + (a_p)^2) = p \cdot y \leq (n - 1) \cdot y$ et

$$x^2 |a_{p+1} + \dots + a_n|^2 \leq (n - p) \cdot ((a_p)^2 + \dots + (a_n)^2) = (n - p) \cdot z \leq (n - 1) \cdot z$$

On somme : $x^2 + w^2 \leq (n-1).(y+z)$.

Il est temps d'utiliser l'hypothèse (si elle ne sert à rien dans la démonstration, c'est louche) : $(n-1).(y+z) \leq (a_1 + \dots + a_n)^2$.

On enchaîne : $x^2 + w^2 \leq (a_1 + \dots + a_n)^2 = (x+w)^2$.

En comparant les deux membres après développement du carré, il nous reste $2.x.w \geq 0$. Et c'est là qu'on a une contradiction, puisque x est négatif (somme de réels négatifs) et w positif (somme de réels positifs).

Comme on a notre contradiction, ce raisonnement par l'absurde se termine. On ne peut avoir à la fois des réels des deux signes et l'inégalité $(n-1).(y+z) \leq (a_1 + \dots + a_n)^2$.

En termes logiques, ceci donne une implication.

Quand on prouve que α et β est impossible, on peut conclure que " $\text{non}(\alpha)$ ou $\text{non}(\beta)$ " est vrai, et donc que α implique $\text{non}(\beta)$ par exemple. Ou β implique $\text{non}(\alpha)$.

Proposé en 1977 pour les Olympiades de Mathématiques, non retenu.

Une inégalité à interpréter géométriquement.

D.S.2 On

a un trinôme du second degré en t de la forme $A.t^2 + B.t + C$, avec $A = \sum_{k=1}^n (a_k)^2$, $B = 2. \sum_{k=1}^n a_k.b_k$

et $C = \sum_{k=1}^n (b_k)^2$. Ce trinôme reste de signe constant (somme de carrés de réels). Son discriminant est donc négatif. On a donc :

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k.b_k) \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n (a_k)^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n (b_k)^2 \right)$$

Il faut interpréter géométriquement ? Si on note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de composantes $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$, alors on a $\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}| \times |\vec{v}|$. Le premier membre est un produit scalaire, le second est le produit des normes.

Vous allez me dire que c'est normal, puisque le produit scalaire s'écrit "produit des normes fois cosinus de l'angle". Sauf que c'est une chose que vous n'avez guère établi que dans le plan... Et qui vous a dit que ceci restait valable en dimension n ? Qui vous a dit si la notion d'angle était cohérente en dimension n ? Personne jusqu'à présent ! Et c'est a contrario cette inégalité qui légitime l'existence des angles...

Si le polynôme $X^3 - S.X^2 + D.X - P$ a pour racines a, b et c , alors on a $S = a+b+c$, $D = a.b + a.c + b.c$ et $P = a.b.c$ par les formules de Viete. On a aussi $a^2 + b^2 + c^2 = S^2 - 2.D$ c'est connu.

On écrit ensuite que a, b et c sont racines du polynôme, et on somme les trois relations de la forme $a^3 = S.a^2 - D.a + P$. On obtient la formule demandée :

$$x^3 + y^3 + z^3 = S.(a^2 + b^2 + c^2) - D.S + 3.P$$

Ensuite, on prend les deux vecteurs (a, b, c) et (b, c, a) . Ils ont tous deux pour norme $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Et leur produit scalaire donne D . La comparaison "produit scalaire contre produit des normes" donne : $D = a.b + b.c + c.a \leq (a^2 + b^2 + c^2)$ avec cas d'égalité si les deux vecteurs sont colinéaires.

Si les trois réels sont positifs, alors on a $S.(a^2 + b^2 + c^2) - D.S$ qui est positif. On reporte dans l'égalité qui donne $x^3 + y^3 + z^3$ et on a donc $a^3 + b^3 + c^3$ qui est plus grand que $3.a.b.c$.

Quand ensuite on nous donne α, β et γ positifs, on note a, b et c leurs trois racines cubiques. On a alors $\alpha + \beta + \gamma$ qui est plus grand que $3.(\alpha.\beta.\gamma)^{1/3}$. C'est là encore ce qu'on attendait.

On vient de montrer que la moyenne arithmétique dépassait toujours la moyenne dite géométrique.

MPSI2 Charlemagne

130 points

Année 2010/11

D.S.2

IX- 1) Soit u une suite réelle strictement positive. On définit trois suites :

• $c_n = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1}$ (dite **moyenne arithmétique** ou “de Cesaro”),

• $g_n = \sqrt[n+1]{(u_0 \cdot u_1 \dots u_n)}$ (dite **géométrique**) et

• $h_n = \frac{n+1}{\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}}$ (dite **harmonique**).

Il vous sera facile, si vous imaginez que u est la suite de vos notes, de voir dans c_n la moyenne classique de vos $n+1$ premières notes.

Montrez : $h_1 \leq g_1 \leq c_1$. (3 pt.)

IX- 2) Montrez que si u est croissante, alors c l'est aussi. (2 pt.)

IX- 3) En choisissant bien u_0 , u_1 et u_2 , montrez que la croissance de c n'implique pas forcément la croissance de u . (2 pt.)

IX- 4) Montrez que si u est croissante, alors g et h le sont aussi (indication : considérez la moyenne arithmétique de la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$). (2 pt.)

Montrez : $\min(a_0, \dots, a_n) \leq c_n \leq \max(a_0, \dots, a_n)$. (2 pt.)

Montrez aussi $\min(a_0, \dots, a_n) \leq g_n \leq \max(a_0, \dots, a_n)$

et $\min(a_0, \dots, a_n) \leq h_n \leq \max(a_0, \dots, a_n)$ (pensez à appliquer le premier encadrement à $1/u$). (2 pt.)

13 points

X- 1) Soient a et a' deux réels strictement positifs. Montrez : $\sqrt{a \cdot a'} \leq \frac{a + a'}{2}$. (1 pt.)

X- 2) Pour tout entier naturel n , on note P_n la propriété :

$\forall (a_0, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{n+1}, (a_0 \times \dots \times a_n = 1) \Rightarrow ((a_0 + \dots + a_n) \geq n+1)$ Prouvez P_0 et P_1 . (1 pt.)

X- 3) On suppose P_{n-1} vraie à un certain rang n .

Montrez alors $\forall (b_0, \dots, b_{n-1}) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, \sqrt[n]{b_0 \times \dots \times b_{n-1}} \leq \frac{b_0 + \dots + b_{n-1}}{n}$ en choisissant bien les a_k à qui appliquer la propriété P_{n-1} . (3 pt.)

X- 4) On se donne alors $n+1$ réels strictement positifs a_0 à a_n . On suppose $a_0 \times \dots \times a_n = 1$. Montrez qu'il existe deux indices i et j vérifiant $a_i \leq 1$ et $a_j \geq 1$. (1 pt.) Montrez alors : $a_i \cdot a_j + 1 \leq a_i + a_j$. (2 pt.)

Montrez alors $a_i \cdot a_j + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i, k \neq j}} a_k \geq n$ et concluez : $a_0 + \dots + a_n \geq n$. (2 pt.)

X- 5) Dédisez : $g_n \leq a_n$ pour tout n . (1 pt.) Dédisez aussi en appliquant ce résultat à une suite bien choisie : $h_n \leq g_n$. (2 pt.)

13 points

XI- 1) On suppose pour cette partie que la suite a converge vers 0 (oui, c'est peu encourageant si c'est la suite de vos notes).

On en rappelle la quantification : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_n| \leq \varepsilon$.

On se donne ε strictement positif. Montrez pour n plus grand que $N_{\varepsilon/2}$: $0 \leq c_n \leq \frac{(N_{\varepsilon/2} + 1) \cdot c_{N_{\varepsilon/2}}}{n+1} +$

$$\frac{n - N_{\varepsilon/2}}{n+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{(N_{\varepsilon/2} + 1) \cdot c_{N_{\varepsilon/2}}}{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2 \text{ pt.})$$

XI- 2) Explicitez aussi un rang R_ϵ garantissant : $\frac{(N_{\epsilon/2} + 1) \cdot c_{N_{\epsilon/2}}}{n + 1} \leq \frac{\epsilon}{2}$ pour n plus grand que R_ϵ . (2 pt.)
 Déduisez que la suite c converge aussi vers 0. (2 pt.)

XI- 3) Montrez que si la suite a tend vers une limite L (c'est plus optimiste, non ?), alors la suite c tend aussi vers L . (2 pt.)

8 points

XII- 1) n est un entier naturel donné. Montrez : $\sum_{k=0}^n a_k \cdot c_k \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n (a_k)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^n (c_k)^2}$ (vous pourrez faire intervenir $\sum_{k=0}^n (\lambda \cdot a_k + v_k)^2$). (1 pt.)

XII- 2) Montrez aussi pour tout k entier plus grand que 1 :

$$a_k \cdot c_k \geq (k+1) \cdot (c_k)^2 - k \cdot c_{k-1} \cdot c_k \geq (k+1) \cdot (c_k)^2 - k \cdot \frac{(c_{k-1})^2 + (c_k)^2}{2}. \quad (3 \text{ pt.})$$

XII- 3) Déduisez : $\sum_{k=0}^n a_k \cdot c_k \geq \frac{n+2}{2} \cdot (c_n)^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (c_k)^2$. (2 pt.)

XII- 4) Concluez : $\sum_{k=0}^n (c_k)^2 \leq 4 \cdot \sum_{k=0}^n (u_k)^2$ (inégalité de Hardy).

6 points

MPSI2	GÉOMÉTRIE	2010/11	D.S.3
-------	------------------	---------	--------------

Soit ABC un triangle rectangle en C . On note $AB = c$, $BC = a$ et $AC = b$. Le cercle inscrit au triangle (cercle tangent aux trois côtés à la fois) a pour rayon R et pour centre I . Montrez que l'aire de triangle est $R \cdot (a+b+c)/2$. (2 pt.) Déduisez : $R = a \cdot b / (a+b+c)$. (2 pt.) Montrez aussi : $c = (a-R) + (b-R)$. (3 pt.) Quelle relation trouvez vous en éliminant R ? (1 pt.)

Montrez que le rayon du cercle inscrit d'un triangle pythagoricien est entier (triangle pythagoricien : triangle rectangle à côtés entiers) (on pourra montrer $a+b = (a+b)^2 = c \pmod{2}$). (2 pt.)

10 points

MPSI2	MATRICES	2010/11	D.S.3
-------	-----------------	---------	--------------

Juste pour le plaisir, on pose : $M = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Calculez sa trace, son déterminant. Donnez une matrice diagonale D de même trace et de même déterminant. (2 pt.) Trouvez P inversible vérifiant $M \cdot P = P \cdot D$. (2 pt.) Calculez D^n pour tout entier naturel n . (1 pt.) Calculez la trace de M^{30} . Avec combien de chiffres s'écrit ce nombre? (3 pt.)

8 points

MPSI2	COURS	2010/11	D.S.3
-------	--------------	---------	--------------

[♥(4)] Calculez $\text{Arctan}(1/7) + 2 \cdot \text{Arctan}(1/3)$. (3 pt.)

[♥(5)] Si je veux pouvoir écrire $\sin(\theta) \simeq \theta - \theta^3/6$ à 10^{-3} près, sur quel intervalle dois-je rester ? (3 pt.)

MPSI2 Charlemagne	194 points	Année 2010/11	D.S.3
-------------------	------------	---------------	--------------

Des triangles pythagoriciens.

D.S.3

On découpe le grand triangle en trois triangles : ABI , AIC et IBC . Chacun a pour aire "base fois hauteur sur 2" avec pour base un des trois côtés du grand triangle et pour hauteur le rayon R du cercle inscrit (on "pose" les triangles sur le côté AB , BC ou CA . L'aire vaut donc bien $\text{perimetre} \cdot R/2$.

Mais l'aire vaut aussi $a \cdot b/2$ en voyant dans le triangle un demi-rectangle.

On égalise : $R = a \cdot b / (a + b + c)$ (c'est homogène).

Mais on peut aussi donner un nom aux points de contact des côtés avec le cercle inscrit (ces points sont des points de tangence par définition même du cercle inscrit). On les note A' , B' et C' en prenant la lettre du sommet opposé (par exemple, A' est sur le côté BC de longueur c).

On mesure : $c = AB = AC' + C'B$.

Mais on a aussi $AC' = AB'$ car ces deux segments sont tangentes commune au cercle inscrit, issues de C .

Le centre I est l'intersection commune des trois bissectrices intérieures. Le point I est par construction à égale distance R des côtés.

Mais on a aussi $AB' = AC - B'C$. Or, $IA'CB'$ est un quadrilatère ayant trois angles droits (en C car le grand triangle est rectangle, en B' et A' car le cercle est tangent aux côtés). C'est un rectangle. Deux de ses côtés voisins sont égaux (à R). C'est donc un carré. On a alors nécessairement $B'C = A'C = R$. On reporte : $c = AB = AC' + C'B = AB' + BA' = (a - R) + (b - R)$.

On isole : $R = \frac{a + b - c}{2}$

En égalant les deux formules trouvées pour R , on a donc : $\frac{(a + b) - c}{2} = \frac{a \cdot b}{(a + b) + c}$. On effectue un produit en croix : $(a + b)^2 - c^2 = 2 \cdot a \cdot b$. On développe, on simplifie : $a^2 + b^2 = c^2$. On vient de retrouver le **théorème de Pythagore**.

C'est en cherchant la question "le rayon du cercle inscrit d'un triangle pythagoricien est aussi entier" que je suis tombé sur cette démonstration du théorème de Pythagore, que je n'avais jamais croisée auparavant. J'en suis encore surpris.

On veut enfin montrer que si les trois côtés du triangle sont entiers, alors le rayon du cercle inscrit est entier. On regarde la formule $R = (a + b - c)/2$. Elle est presque satisfaisante. Simplement, il y traîne un facteur 2 au dénominateur. On pourrait avoir un "demi entier" (ceux qui ne l'ont pas vu et auront conclu directement ne pourront avoir aucun point à la question).

Il faut en fait prouver que $a + b - c$ est un entier pair.

Et c'est là qu'on utilise l'indication avec des congruences modulo 2. Une différence d'entiers est en effet divisible par 2 si et seulement si ces deux entiers sont congrus modulo 2.

On prend $a + b$. Il est congru à $(a + b)^2$ modulo 2.

Pour tout entier naturel n , on a $n^2 = n \bmod 2$. C'est classique. Si n est pair, on l'écrit $2 \cdot k$ et on a $n^2 = 4 \cdot k$. Les deux sont pairs, leur différence est un multiple de 2. Si n est impair, on écrit $n = 2 \cdot p + 1$ et on calcule : $n^2 = 4 \cdot (p^2 + p) + 1$; la différence est un multiple de 2. On a étudié tous les cas. On pouvait aussi calculer la différence $n^2 - n = n \cdot (n - 1)$: un des deux facteurs est pair.

On développe : $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b = a^2 + b^2 \bmod 2$.

Comme le triangle est rectangle, on a aussi $a^2 + b^2 = c^2 \bmod 2$. Mais le lemme précédent dit aussi : $c^2 = c \bmod 2$. Par transitivité : $a + b = c \bmod 2$. Le rationnel $(a + b - c)$ est un entier pair.

Les plus masochistes auront retenu des formules en $a = u^2 - v^2$, $b = 2 \cdot u \cdot v$ et $c = u^2 + v^2$ et reporté dans $(a + b - c)/2$.

On a donc $(a + b - c)/2$ qui est un entier. C'est bon !

Les puissances de $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

D.S.3

Cette matrice a pour trace 5 et pour déterminant -24 . Les matrices diagonales de même trace et même déterminant ont pour coefficients diagonaux les racines de l'équation $\lambda^2 - 5\lambda - 24 = 0$ (somme et produit des deux réels connus). On trouve deux racines : 8 et -3 . On a donc deux matrices possibles :

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

On pose a priori des coefficients pour P et on résout $M.P = P.D$ en coupant en deux systèmes. On fait un choix arbitraire quand on croise un système dégénéré comme $\begin{cases} 2.\alpha + 6.\gamma = 8.\alpha \\ 5.\alpha + 3.\gamma = 8.\gamma \end{cases}$ qui conduit à $\alpha = \gamma$ et c'est tout.

Pour le choix $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, on peut choisir $P = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ d'inverse $\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (on échange les deux termes diagonaux, on change le signe des deux autres, et on divise par le déterminant, et surtout, on vérifie...).

Par récurrence sur n , on a immédiatement : $D^n = \begin{pmatrix} 8^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$ et par une autre récurrence (ou un télescopage multiplicatif) : $M^n = P.D^n.P^{-1}$.

On peut calculer $M^n = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 5.8^n + 6.(-3)^n & 6.8^n - 6.(-3)^n \\ 5.8^n - 5.(-3)^n & 6.8^n + 5.(-3)^n \end{pmatrix}$ (vérifié pour les deux premières valeurs de n).

La trace de M^{30} vaut alors $8^{30} + (-3)^{30}$

On avait cette valeur sans même effectuer $M^n = P.D^n.P^{-1}$. On écrit simplement $Tr(M^n) = Tr(P.D^n.P^{-1}) = Tr(P.(D^n.P^{-1})) = Tr((D^n.P^{-1}).P) = Tr(D^n) = (\lambda_1)^n + (\lambda_2)^n$ avec des notations compréhensibles et avec la propriété $Tr(A.B) = Tr(B.A)$.

On se dit que 3^{30} n'a pas d'effet sur le nombre de chiffres de notre trace et n'agit que sur des chiffres "lointains". On se focalise donc sur 8^{10} . Ensuite, on le fait "à la louche" : 2^{10} est de l'ordre de 10^3 . On peut donc remplacer 8^{30} par 2^{90} et donc par $(10^3)^9$. On aura donc environ 10^{27} ce qui fait **28 chiffres**.

Et Maple le confirme. Ou même un appel au logarithme de base 10.

Inégalité $h_1 \leq g_1 \leq c_1$.

D.S.3

On a juste deux réels a_0 et a_1 . On calcule des différences :

$$c_2 - g_2 = \frac{a_0 + a_1 - 2.\sqrt{a_0.a_1}}{2} = \frac{(\sqrt{a_0} - \sqrt{a_1})^2}{2} \geq 0$$

$$g_2 - h_2 = \sqrt{a.b} - \frac{2.a.b}{a+b} = \frac{\sqrt{a.b}}{a+b} \cdot (a+b-2.\sqrt{a.b}). \text{ La grande parenthèse est positive, on vient de le voir.}$$

Le coup de $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ est un classique, à bien connaître. Et à savoir utiliser quand il faut. On va généraliser à $n+1$ termes, mais ce sera plus délicat.

La croissance de (c_n) .

D.S.3

On suppose donc que la suite u croît, et on doit établir la croissance de c . Pour ce faire, il ne faut pas taper sur les hypothèses. Il faut les garder en mémoire : $u_{k+1} \geq u_k$, et avoir un objectif : $c_{n+1} \geq c_n$. On calcule donc pour un n donné :

$$c_{n+1} - c_n = \frac{a_0 + \dots + a_{n+1}}{n+2} - \frac{a_0 + \dots + a_n}{n+1} = \frac{(n+1)(a_0 + \dots + a_{n+1}) - (n+2)(a_0 + \dots + a_n)}{(n+2)(n+1)}$$

$$c_{n+1} - c_n = \frac{(n+1)a_{n+1} - a_0 - a_1 - \dots - a_n}{(n+1)(n+2)} = \frac{(a_{n+1} - a_0) + (a_{n+1} - a_1 + \dots + (a_{n+1} - a_n))}{(n+1)(n+2)}$$

Au numérateur, chacune des $n+1$ différences est positive (la suite u croît). Le dénominateur est aussi positif. La différence $c_{n+1} - c_n$ est positive, pour tout n . C'est ce qu'on voulait.

Réciproque ?

D.S.3

On veut montrer qu'on peut construire u pas forcément croissante, telle que c soit croissante. Attention, la négation de croissante, ce n'est pas décroissante, c'est "pas toujours croissante". Imaginez la suite de vos notes : (10, 5, 15, 12, ...). Allez vous la qualifier de "non croissante donc décroissante" ? Non ! Vous ne le faites pas dans la vie. Alors pourquoi le faites vous face à une copie ? Parce qu'on vous a appris à ne pas réfléchir en sciences ?

On se pose donc la question : quelles notes pour que la moyenne soit croissante ? Une première note. Une deuxième note plus grande que la deuxième : la moyenne croît. Une troisième note supérieure non pas forcément à la note précédente, mais supérieure à votre moyenne actuelle. C'est ça qui permet de continuer à progresser.

On propose donc naturellement des choses comme $u_0 = 5$ (on commence très moyen), $u_1 = 15$ (ah, ça monte ! moyenne : 10). On continue avec des notes entre 10 et 15. La moyenne va augmenter. On propose donc par exemple : $u_2 = 13$. Et ensuite, que des 13 tiens !

n	0	1	2	3	...	n
u_n	5	15	13	13	...	13
c_n	5	10	11	11,5	...	$(13.n + 7)/n$

On a la croissance de c et la suite u n'est pas (tout le temps) croissante.

Croissance de (g_n) .

D.S.3

On suit le conseil. La suite $(u_n)_n$ croît. Par composition avec le logarithme, la suite $(\ln(u_n))_n$ croît aussi. Sa moyenne de Cesaro croît aussi : $\left(\frac{\ln(a_0) + \ln(a_1) + \dots + \ln(a_n)}{n+1}\right)$ croît. C'est $\left(\frac{\ln(a_0 \dots a_n)}{n+1}\right)$. On a donc la croissance de $(\ln(g_n))$. Et par composition avec l'exponentielle, la suite (g_n) croît.

La moyenne géométrique est en fait une simple moyenne arithmétique sur les logarithmes. Et la moyenne harmonique, c'est une moyenne arithmétique sur les inverses : $\frac{1}{h_n} = \frac{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n+1}$. Tout résultat établi sur c doit pouvoir passer à g et à h . Ah oui, un petit détail : l'implication " (a_n) croissante implique (c_n) croissante" n'a pas besoin de la positivité de la suite a . On peut donc bien l'appliquer à $(\ln(a_n))$ dont le signe est inconnu.

Croissance de (h_n) .

D.S.3

On suppose la suite u strictement croissante. La suite $1/u$ est donc décroissante. On colle un signe moins : $-1/u$ croît. On applique notre premier résultat : sa moyenne de Cesaro C croît. On passe à l'inverse, on a la décroissance, puis on colle un signe moins : la suite $\frac{1}{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$ croît aussi.

Encadrement en Min et Max.

D.S.3

On se fixe n , on prend la liste de a_0 à a_n . On en extrait le plus petit terme noté Min_n et le plus grand terme, noté Max_n . On a donc $Min_n \leq a_k \leq Max_n$ pour tout k de 0 à n . On somme de 0 à n , on divise par $n+1$ strictement positif et c'est fini.

On refait le même raisonnement, après un petit passage au logarithme (application croissante) : pour tout k de 0 à n : $\ln(Min_n) \leq \ln(a_k) \leq \ln(Max_n)$, on somme de 0 à n , on divise par $n+1$, on reconnaît $\ln(Min_n) \leq \ln\left(\sqrt[n+1]{a_0 \dots a_n}\right) \leq \ln(Max_n)$, il ne reste plus qu'à passer à l'exponentielle,

strictement croissante.

Enfin, on refait le même raisonnement par passage aux inverses strictement positifs : $\frac{1}{Max_n} \leq \frac{1}{a_k} \leq \frac{1}{Min_n}$, jusqu'à $Min_n \leq h_n \leq Max_n$.

Initialisation de la propriété P .

D.S.3

Trop facile pour P_0 : si on a $a_0 = 1$ alors a_0 est supérieur ou égal à 1.

Pour P_1 ça va vite aussi, avec $a_0.a_1 = 1$ qui doit impliquer $a_0 + a_1$ plus grand que 2. C'est l'application directe de $\frac{a_0 + a_1}{2} \geq \sqrt{a_0.a_1}$. Et cette inégalité a déjà été prouvée plus haut.

On suppose donc P_{n-1} vraie. On va prouver P_n .

D.S.3

On prend n éléments strictement positifs de b_0 à b_{n-1} . Il faut inventer des a_k de produit 1 auxquels appliquer la propriété P_{n-1} pour aboutir à l'inégalité demandée. On va prendre n réels positifs de produit égal à 1 ? Qui ? On divise les b_k par leur moyenne mahmonique. Je vais donc poser $\mu = \sqrt[n]{b_0 \dots b_{n-1}}$ et ensuite $a_k = b_k/\mu$ pour tout k de 0 à $n-1$.

On a alors $a_0 \dots a_{n-1} = \frac{b_0 \dots b_{n-1}}{\mu \dots \mu} = \frac{\mu^n}{\mu^n} = 1$, on peut lui appliquer la propriété P_n puisque'on l'a supposée vraie. On a donc $a_0 + \dots + a_{n-1} \geq n$. On fait passer le μ de l'autre côté : $a_0 + \dots + a_{n-1} \geq n.\mu$. On divise par n : la moyenne arithmétique majore la moyenne géométrique.

On pourra de la même manière passer de P_n à $c_n \geq g_n$ dans une page ou deux.

On suppose donc qu'on a un produit de $n+1$ termes positifs dont le produit vaut 1. Si tous les termes sont strictement plus petits que 1, le produit ne peut pas valoir 1. Il y a donc au moins un terme supérieur ou égal à 1 (contraposée de $(\forall k, 0 < a_k < 1) \Rightarrow a_0 \dots a_k < 1$ ou preuve par l'absurde).

De même, si tous les a_k étaient plus grands que 1, le produit dépasserait 1. Il y a donc au moins un des a_k qui est plus petit que 1. Et bien sûr, les deux indices i et j sont distincts.

On nous demande une inégalité ? On calcule une différence :

$a_i + a_j - 1 - a_i.a_j = (a_j - 1).(1 - a_i)$ Les deux facteurs sont positifs, leur produit l'est aussi. On a donc : $a_i + a_j \geq 1 + a_i.a_j$.

Toute l'astuce consiste ensuite à appliquer la propriété P_{n-1} à la bonne famille de réels positifs : on prend les a_k pour k différente de i et j (ça en fait $n+1-2$), et l'unique élément $a_i.a_j$ (fusion des deux autres). Le produit de ces n réels vaut 1, puisqu'on retrouve tous les indices de 0 à n . La propriété P_{n-1} donne alors : $(a_i.a_j) + (a_0 + \dots + a_n) \geq n$ la parenthèse étant faite de tous les indices sauf i et j . On ajoute alors 1 de chaque côté : $1 + (a_i.a_j) + (a_0 + \dots + a_n) \geq n+1$.

On poursuit la majoration en comparant $1 + a_i.a_j$ et $a_i + a_j$: $a_i + a_j + (a_0 + \dots + a_n) \geq n+1$. La somme du premier membre, c'est la brave somme de tous les a_k de 0 à n .

On vient donc, en utilisant P_{n-1} , de démontrer P_n . On appelle ça l'hérédité de la récurrence...

On a donc établi la propriété P_n pour tout indice n , par récurrence sur n .

Ensuite, on rappelle qu'on sait passer de P_n à $\frac{b_0 + \dots + b_n}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{b_0 \dots b_n}$ en posant $a_k = b_k/\mu$ où μ est la moyenne géométrique.

Passage à la moyenne harmonique.

D.S.3

Pour toute suite strictement positive, on a *moyenne arithmétique* $\geq$ *moyenne géométrique*.

En particulier, pour la suite $1/a_n$, on peut écrire

$$\frac{\frac{1}{a_0} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\frac{1}{a_0} \dots \frac{1}{a_n}}.$$

Il ne nous reste plus qu'à passer aux inverses (positifs).

Bilan : harmonique $\leq$ géométrique $\leq$ arithmétique.

Convergence de la moyenne de Cesaro.

D.S.3

Il me semble normal que si vos notes tendent vers 0, votre moyenne tende aussi vers 0, même si au début vous avez eu de bonnes notes. Ou de mauvaises.

On se donne donc c_n et on coupe son numérateur au rang $N_{\epsilon/2}$:

$$c_n = \frac{(a_0 + \dots + a_N) + (a_{N+1} + \dots + a_n)}{n+1}$$
 en écrivant N à la place de $N_{\epsilon/2}$. Or, tous les termes à partir du rang $N+1$ sont plus petits que $\epsilon/2$. On peut donc majorer :

$$c_n \leq \frac{(a_0 + \dots + a_N) + (n-N).\epsilon}{n+1}$$

On remplace ensuite $a_0 + \dots + a_N$ par son nom : $a_N.(N+1)$.

Comme on ne sait pas trop si n est “*beaucoup plus grand*” que N , on majore sommairement $n-N$ par

$$n, \text{ ce qui donne la majoration } c_n \leq \frac{(N_{\epsilon/2}+1).c_{N_{\epsilon/2}}}{n+1} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Quant à la minoration par 0, c’est juste qu’on a supposé que la suite (a_n) était positive.

Si toutefois elle a un signe indéterminé, il suffit d’écrire

$$0 \leq \frac{|a_0 + \dots + a_n|}{n+1} \leq \frac{|a_0| + \dots + |a_n|}{n+1} \text{ et de poursuivre avec le même type de majorations.}$$

On regarde ensuite la majoration demandée : $\frac{(N_{\epsilon/2}+1).c_{N_{\epsilon/2}}}{n+1} \leq \frac{\epsilon}{2}$. Elle est juste de la forme

$\frac{A}{n+1} \leq \frac{\epsilon}{2}$, avec A un peu lourd à écrire. Mais comme $A/(n+1)$ tend vers 0 quand n tend vers l’infini, ça ne pose pas de problème. On peut même (on doit même) expliciter ce rang R en résolvant

l’inéquation $n+1$ plus grand que $\frac{2.(N+1).c_N}{\epsilon}$. Le rang est donc :

$$\left\lceil \frac{2.(N_{\epsilon/2}+1).c_{N_{\epsilon/2}}}{\epsilon} \right\rceil \text{ et on n’a pas de quoi être plus fier de le connaître.}$$

Quoi qu’il en soit, pour n à la fois plus grand que $N_{\epsilon/2}$ et que R_ϵ , on a une majoration finale en $2.\epsilon/2$.

On a donc obtenu : $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists P_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq P_\epsilon \Rightarrow 0 \leq c_n \leq \epsilon$ (avec donc $P_\epsilon = \max(N_{\epsilon/2}, R_\epsilon)$). C’est bien la quantification de “ c_n tend vers 0 quand n tend vers l’infini”.

Bilan confirmé : si la suite de vos notes tend vers 0, votre moyenne tend aussi vers 0 (et R est là pour dire que plus le temps passe, plus le souvenir des notes du début s’estompe face à l’avalanche de notes proches de 0).

On passe au cas où la suite converge vers une limite L plus optimiste. Il suffit alors de dire que $a_n - L$ converge vers 0. On lui applique le résultat précédent : sa moyenne arithmétique (de Cesaro) tend aussi vers 0. Mais qui est cette moyenne ?

C’est $\left(\frac{a_0 - L + a_1 - L + \dots + a_n - L}{n+1} \right)$, qu’on convertit en $\left(\frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n+1} - L \right)$.

Le fait que cette différence tende vers 0 traduit le fait que $\left(\frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n+1} \right)$ tende vers L .

L’inégalité de Cauchy-Schwarz.

D.S.3

C’est encore cadeau ! La somme de carrés de réels $\sum_{k=0}^n (\lambda.a_k + c_k)^2$ est toujours positive. Si on développe

les carrés et distribue, elle est du type $a.\lambda^2 + b.\lambda + c$ avec a, b et c explicites. Comme elle reste de signe constant, c’est que le trinôme du second degré n’a pas de racine réelle, son discriminant est négatif ou nul. On le calcule, on simplifie par 4 et on a l’inégalité demandée.

Deux inégalités, avec $(k+1).(c_k)^2 - k.c_{k-1}.c_k$ au milieu.

D.S.3

On regarde justement ce terme un peu compliqué $(k+1).(c_k)^2 - k.c_{k-1}.c_k$ pour comprendre d'où il vient.

On le factorise en $c_k.((k+1).c_k - k.c_{k-1})$. Mais justement, $(k+1).c_k = a_0 + \dots + a_{k+1}$ ($k+1$ termes) et $k.c_{k-1} = a_0 + \dots + a_{k-1}$ (k termes) par définition même. Il reste donc : $(k+1).c_k - k.c_{k-1} = a_k$. La majoration $a_k.c_k \geq (k+1).(c_k)^2 - k.c_{k-1}.c_k$ est donc en fait une **égalité** (on a multiplié par u_k)...

On regarde ensuite $(k+1).(c_k)^2 - k.c_{k-1}.c_k \geq (k+1).(c_k)^2 - k.\frac{(c_{k-1})^2 + (c_k)^2}{2}$ et on comprend que c'est directement la formule $a.b \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ venant encore de l'idée $(a-b)^2 \geq 0$ avec un petit renversement dû à un signe moins. On va bien voir ensuite à quoi va servir cette formule alambiquée.

Une inégalité et une somme : $\sum_{k=0}^n a_k.c_k \geq \dots$

D.S.3

On prend les inégalités de la question précédente pour k de 1 à n et on les somme :

$$\begin{array}{rclcl} a_0.v_0 & = & 1.(c_0)^2 & & \\ a_1.v_1 & \geq & 2.(c_1)^2 & -1. & ((c_0)^2 + (c_1)^2)/2 \\ a_2.v_2 & \geq & 3.(c_2)^2 & -2. & ((c_1)^2 + (c_2)^2)/2 \\ a_3.v_3 & \geq & 4.(c_3)^2 & -3. & ((c_2)^2 + (c_3)^2)/2 \\ a_4.v_4 & \geq & 5.(c_4)^2 & -4. & ((c_3)^2 + (c_4)^2)/2 \\ \dots & \geq & \dots & \dots & \dots \\ a_n.v_n & \geq & (n+1).(c_n)^2 & -n. & ((c_{n-1})^2 + (c_n)^2)/2 \end{array}$$

Le premier membre donne bien $\sum_{k=0}^n a_k.c_k$. Dans le second membre, que reste-t-il ?

Il y a $(c_0)^2/2$, il y a $(c_1)^2/2$, il y a $(c_2)^2/2$ et ainsi de suite.

Quel est le coefficient de $(c_k)^2$? Avec signe plus : $k+1$ et avec signe moins : $(k/2)$ et $(k+1)/2$ sur la ligne suivante.

Bref, il reste $k.(c_k)^2/2$ comme mentionné dans la somme.

Le terme $(c_n)^2$ se traite à part car il n'a pas ses deux coefficients en signe moins. On a juste $n+1$ avec signe plus et $n/2$ avec signe moins. Et on trouve le terme $\frac{n+2}{2}.(c_n)^2$

C'est bien gentil d'avoir trouvé ce terme, mais finalement, on va le laisser tomber, en le minorant par 0. On a alors des inégalités à mettre bout à bout :

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} (c_k)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} (a_k)^2} \geq \sum_{k=0}^n a_k.c_k \geq \frac{n+2}{2}.(c_n)^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (c_k)^2 \geq \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (c_k)^2}{2}$$

On élimine le terme du milieu et on simplifie par $\sum_{k=0}^{n-1} (a_k)^2$ qui est positif et ne change donc pas le

sens des inégalités. Il reste précisément l'inégalité de Hardy : $\sqrt{\sum_{k=0}^n (c_k)^2} \leq 2 \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^n (u_k)^2}$. Oui, on s'est

permis de simplifier par quantité positive $\sum_{k=0}^{n-1} (a_k)^2$ sans se demander "et si elle est nulle". Mais sa nullité entraînerait celle de tous les a_k (somme de carrés de réels) et donc de tous les c_k , et l'inégalité de Hardy devient alors $0 \leq 4.0$, connu depuis longtemps.

Deux questions de cours et de trigonométrie.

D.S.3

Pour ce qui est de la somme de deux arctangentes, on va estimer la tangente de cette quantité pour

en tirer des informations :

$$\tan(2 \cdot \text{Arctan}(1/3)) = \frac{2 \cdot \tan(\text{Arctan}(1/3))}{1 - \tan^2(\text{Arctan}(1/3))} = \frac{2/3}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{et } \tan(2 \cdot \text{Arctan}(1/3) + \text{Arctan}(1/7)) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7}} = \frac{\frac{21+4}{28}}{\frac{28-3}{28}} = \frac{25}{25} = 1$$

Trop fort ! Une tangente égale à 1. C'est donc $\frac{\pi}{4}$. A moins qu'il ne s'agisse de $3\pi/4$ ou tout autre nombre congru à $\pi/4$ modulo π .

Il reste une ambiguïté à lever. En encadrant :

$$0 \leq \text{Arctan}(1/3) \leq \text{Arctan}(1/\sqrt{3}) = \pi/6 \text{ et } 0 \leq \text{Arctan}(1/7) \leq \text{Arctan}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$$

Notre réel somme est entre 0 et $\pi/2$ et a pour tangente 1, il est définitivement démasqué, c'est $\pi/4$.

On sent ensuite qu'on travaille avec la formule de Taylor pour le sinus, autour de 0 à un ordre comme 3 ou même 4. On l'écrit :

$$\sin(0 + \theta) = \sin(0) + \theta \cdot \sin'(0) + \frac{\theta^2}{2} \cdot \sin''(0) + \frac{\theta^3}{6} \cdot \sin^{(3)}(0) + \frac{\theta^4}{24} \cdot \sin^{(4)}(0) + \text{reste}$$

$$\text{avec } \text{reste} = \frac{\theta^5}{4!} \cdot \int_{t=0}^1 (1-t)^4 \cdot \sin^{(5)}(t \cdot \theta) \cdot dt$$

Comme les dérivées successives en 0 valent 0, 1, 0, -1 et 0, le terme polynomial de Taylor vaut $\theta - \frac{\theta^3}{6}$.

Il reste à demander que le reste soit plus petit que 10^{-3} .

On majore ce terme en valeur absolue par $\frac{|\theta|^5}{4!} \cdot \int_{t=0}^1 (1-t)^4 \cdot dt$ (deux étapes : intégrale de la valeur absolue et valeurs absolue de l'intégrale, puis majoration de la valeur absolue du cosinus par 1). On demande donc : $|\theta|^5 \leq 5! \cdot 10^{-3}$. On arrondit sommairement : $|\theta|^5 \leq 10^{-1}$. Tout ne va pas si mal tant que θ reste entre -0,7 et 0,7. En radians. En degrés, cela donne 40 degrés. Pas si mal, non ?

◇(4) Montrez avec des sigmas propres et pas des points de suspension que $A.B$ et $B.A$ ont la même trace, pour A et B deux matrices carrées de même format n . Montrez par un contre-exemple qu'on n'a pas forcément $Tr(A.B.C) = Tr(A.C.B)$ pour A , B et C matrices carrées de taille 2. (4 pt.)
 On se donne quatre matrices A_1 , A_2 , A_3 et A_4 . Combien l'ensemble $\{A_i.A_j.A_k.A_l/\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}\}$ peut-il avoir d'éléments? Combien l'ensemble $\{Tr(A_i.A_j.A_k.A_l)/\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}\}$ peut-il avoir d'éléments? (4 pt.)

♣(1) On considère la suite u définie par " u_0, u_1, u_2 et u_3 donnés, et $u_{n+3} = 4.u_{n+2} + 11.u_{n+1} - 30.u_n$ pour tout n ". On pose alors $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Trouvez la matrice M vérifiant $U_{n+1} = M.U_n$ pour tout n . (1 pt.) Calculez sa trace et la trace de son carré. (2 pt.)

♣(2) Exprimez u_n à l'aide de u_{n+1} , u_{n+2} et u_{n+3} . Trouvez M' vérifiant $U_{n+1} = M'.U_n$ pour tout n . (2 pt.) Trouvez l'inverse de M . Calculez sa trace. (2 pt.)

♣(3) Deux matrices A et B sont dites semblables si il existe au moins une matrice inversible P vérifiant $A = P.B.P^{-1}$. Montrez que si deux matrices A et B sont semblables, alors elles ont la même trace, le même déterminant. (1 pt.) Montrez aussi $Tr(A^2) = Tr(B^2)$. (1 pt.) Montrez aussi si A est inversible, et semblable à B : B est aussi inversible, avec B^{-1} semblable à A^{-1} et $Tr(A^{-1}) = Tr(B^{-1})$. (2 pt.)

♣(4) On suppose que M est semblable à une matrice diagonale D de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'' \end{pmatrix}$, calculez alors $\lambda + \lambda' + \lambda''$, $(\lambda)^2 + (\lambda')^2 + (\lambda'')^2$, et $(1/\lambda) + (1/\lambda') + (1/\lambda'')$. (2 pt.) Qui est le polynôme de racines λ , λ' et λ'' ? (2 pt.)

♣(5) Trouvez alors P inversible vérifiant $M.P = P.D$ (vous pourrez imposer à P une première ligne avec que des 1). (2 pt.) Vérifiez que P est inversible en calculant juste son déterminant (la règle de calcul des déterminants de taille 3 est $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - a' \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + a'' \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$ développement par rappprt à une colonne avec alternance des signes). (1 pt.)

♣(6) Inversez P (pour inverser une matrice de taille 3 faite de trois colonnes C_1, C_2 et C_3 : première ligne : les coefficients de $C_2 \wedge C_3$, deuxième ligne : les coefficients de $C_3 \wedge C_1$, troisième ligne : les coefficients de $C_1 \wedge C_2$ et on divise bien sûr par le déterminant, puis on prend la peine de vérifier). (2 pt.)

♣(7) Calculez alors u_n pour tout n en fonction de n , u_0 , u_1 et u_2 . (2 pt.)

32 points

Pour tout entier naturel n , on pose : $A_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2 \cdot (n-k)^2}$. Calculez A_1 , A_2 et A_3 . (2 pt.) Décom-

posez $\frac{1}{x.(x-n)}$ en éléments simples. (1 pt.) Déduisez : $A_n = \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p^2} + \frac{4}{n^3} \cdot \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$. (3 pt.) Montrez :

$\sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} \leq 1 + \sum_{p=2}^n \frac{1}{p.(p-1)} \leq 2$. (2 pt.) Montrez $2.\ln(n) \leq n$. Concluez : $A_n \leq \frac{8}{n^2}$. (3 pt.)

11 points

MPSI2

(IN)ÉGALITÉS

2010/11

D.S.4

XIII- 1) Pour tout entier naturel non nul k , on pose : $\alpha_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ et $a_k = k.\alpha_k$. Montrez :

$\prod_{k=1}^n a_k = (n+1)^n$ pour tout entier naturel n non nul. (2 pt.) On veut ensuite étudier la convergence de la suite (α_k) . L'élève A prétend que α_k tend vers l'infini quand k tend vers l'infini, car c'est une suite géométrique de raison plus grande que 1. L'élève B prétend que α_k tend vers 1 quand k tend vers l'infini car $1 + \frac{1}{k}$ tend vers 1. L'élève C dit que α_k tend vers e^1 car son logarithme est un taux d'accroissement classique. Un seul de ces élèves a raison, lequel ? Indiquez l'erreur de chacun des autres. (3 pt.)

XIII- 2) Montrez même : $\alpha_k \leq e$ pour tout k dans $\mathbb{N}$ (indication : passez au logarithme et écrivez une formule de Taylor à l'ordre 2 pour le logarithme). (2 pt.)

XIV- 1) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Pour tout n , on pose : $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$,

$g_n = \sqrt[n]{u_1.u_2 \dots u_n}$ et $s_n = \frac{1}{n.(n+1)} \sum_{k=1}^n k.u_k$. On rappelle le résultat déjà croisé dans un autre devoir : $g_n \leq U_n/n$ pour tout n (comparaison des moyennes (arithmétique et géométrique)).

Montrez : $g_n \leq e.s_n$ pour tout n (appliquez la comparaison des moyennes à la suite $(u_n.a_n)$). (2 pt.)

XIV- 2) On suppose que la suite (U_n) est majorée. Montrez qu'elle converge. (1 pt.) On note L sa

limite, et on note alors $R_n = L - U_n$ et $\rho_n = \sum_{k=0}^{n-1} R_k$. Qui est $\sum_{k=1}^n (R_k - R_{k-1}).k$ (n dans $\mathbb{N}^*$) ? (2 pt.)

XIV- 2) Déduisez pour tout $\mathbb{N}$: $\sum_{n=1}^N s_n = \sum_{n=1}^N \frac{\rho_n - n.R_n}{n.(n+1)} = \sum_{n=1}^N \rho_n \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^N \frac{R_n}{n+1}$. (4 pt.)

XIV- 3) Déduisez : $\sum_{n=1}^N s_n = \rho_1 - \frac{\rho_N}{N+1} - \frac{R_N}{N+1}$. (4 pt.)

XIV- 4) Déduisez que $\sum_{n=1}^N s_n$ converge vers L quand N tend vers $+\infty$. (4 pt.)

- 1) Déduisez que $\sum_{n=1}^N g_n$ converge quand N tend vers $+\infty$ et que sa limite est inférieure ou égale à $e.L$. (3 pt.)

Résumé : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_1 + 2.u_2 + 3.u_3 + \dots + n.u_n}{n.(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{u_1.u_2 \dots u_n} \leq e. \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

27 points

$\overline{\heartsuit(6)}$ Donnez moi T_7 , septième polynôme de Tchebitchev et ses racines. 4 pt.

MPSI2 Charlemagne

268 points

Année 2010/11

D.S.4

"Commutativité" de la trace.

D.S.4

On prend donc deux matrices A et B de termes généraux a_i^k et b_k^j , carrées de taille n sur n . Le terme général de $A.B$ est c_i^j , égal à $\sum_{k=1}^n a_i^k . b_k^j$. Ses termes diagonaux sont donc les $\sum_{k=1}^n a_i^k . b_k^i$. Sa trace est la somme $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i^k . b_k^i$.

Le terme général de $B.A$ est $\sum_{p=1}^n b_i^p . a_p^j$, et la trace est $\sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^n b_q^p . a_p^q$.

Par un simple changement de nom des variables muettes i et k en q et p , on trouve l'égalité des traces.

On trouve sans efforts un **contre-exemple** pour l'affirmation trop rapide sur les permutations à trois termes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ par exemple (je mets des 0 pour me simplifier le calcul, je ne prends pas la matrice I_2 qui disparaîtrait, et j'évite les matrices qui se ressemblent trop et risquent de commuter naturellement).

J'ai ici $A.B.C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de trace 1

et $A.C.B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de trace 3.

(si vous avez le même contre-exemple que moi, j'aurai des doutes...)

Ensuite, il faut juste comprendre l'énoncé. On a quatre matrices, et donc quatre indices. On est forcé de les prendre tous, car on demande que $\{i, j, k, l\}$ soit exactement l'ensemble à quatre éléments de 1 à 4. On effectue en fait les 4! permutations légitimes sur un ensemble à 4 éléments. On a par exemple $A_1.A_2.A_3.A_4$, $A_1.A_2.A_4.A_3$, $A_3.A_1.A_2.A_4$, et ainsi de suite. Total : 24.

Que se passe-t-il quand on passe à la trace ? Plusieurs matrices ont la même trace. Avec quatre lettres différentes plutôt que des indices, c'est plus facile à voir :

$Tr(A.B.C.D) = Tr(D.(A.B.C)) = Tr((C.D).(A.B)) = Tr((B.C.D).A)$ (trois saute-moutons possibles, sans que le mouton sauteur ne se retrouve entre deux de ses camarades)

On regroupe donc les *vingt-quatre* matrices par groupes de *quatre* ; on va avoir *six* groupes qui a priori vont donner des traces toutes différentes :

La somme $A_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2.(n-k)^2}$.

D.S.4

Pour n égal à 1, on trouve $A_1 = \sum_{k=1}^0 \frac{1}{1^2.(n-k)^2}$, on a du mal à dire ce qu'est cette somme vide. On va dire qu'elle vaut 0.

Pour n égal à 2, c'est plus clair : $A_2 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k^2.(2-k)^2} = \frac{1}{1^2.(2-1)^2} = 1$.

Pour n égal à 3, c'est enfin : $\sum_{k=1}^2 \frac{1}{k^2.(3-k)^2} = \frac{1}{1^2.(3-1)^2} + \frac{1}{2^2.(3-2)^2} = \frac{1}{2}$.

On décompose en éléments simples : $\frac{1}{x.(x-n)} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{x-n} - \frac{1}{x} \right)$. On remplace x par k et on élève au carré. On sort le $\frac{1}{n^2}$, et on a trois sommes :

- la somme $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$ qu'on garde telle quelle,
- la somme $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n-k)^2}$ qu'on réindexe et qu'on garde en $\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p^2}$,
- et enfin la somme $2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k.(n-k)}$.

On décompose à nouveau cette dernière en éléments simples. Le $\frac{2}{n^2}$ s'accumule avec le $\frac{1}{n}$, et on a deux sommes : $\frac{2}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ et $\frac{2}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k}$. On réindexe cette dernière à son tour (poser encore $p = (n-k)$).

Les deux termes sont alors égaux, et on a un total de $\frac{4}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

On part ensuite de $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}$ où on majore terme à terme et décompose en éléments simples : $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p.(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$ (on ne fait pas cette majoration pour p égal à 1 pour une raison simple à comprendre). On calcule ensuite la somme $1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Elle est télescopique et il ne reste que $1 - \frac{1}{n-1}$. On majore même cette somme télescopique par 1.

On attaque le lemme : $2 \cdot \ln(n) \leq n$. On crée une fonction réelle de variable réelle $x \rightarrow 2 \cdot \ln(x) - x$ dont la dérivée s'annule et change de signe en 2. Le maximum vaut $2 \cdot \ln(2) - 2$ et il est négatif.

Quel rapport ensuite avec notre majoration ultime? On a déjà $A_n \leq \frac{1}{n^2} \cdot 2 + \frac{2}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$. On fait intervenir un logarithme en effectuant une classique comparaison entre somme et intégrale $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq 1 + \int_1^{n-2} \frac{dt}{t} = 1 + \ln(n-2) \leq 1 + \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2}$

On reporte dans la grande majoration, et on a deux termes qui s'additionnent : $4/n^2$ et $4/n^2$.

Suite récurrente $u_{n+3} = 4.u_{n+2} + 11.u_{n+1} - 30.u_n$.

D.S.4

La matrice d'itération est simple à trouver : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & 11 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$; sa trace vaut

4. Son carré est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -30 & 11 & 4 \\ -120 & 14 & 27 \end{pmatrix}$ de trace 38 (oui, on n'avait pas besoin de calculer tous les termes de cette matrice).

On extrait aussi de la formule $u_{n+3} = 4.u_{n+2} + 11.u_{n+1} - 30.u_n$: $u_n = (11.u_{n+1} + 4.u_{n+2} - u_{n+3})/30$

qui permet d'écrire $U_n = \begin{pmatrix} 11/30 & 4/30 & -1/30 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot U_{n+1}$. On a une matrice qui permet de renverser

la formule $U_{n+1} = M \cdot U_n$ en $M' \cdot U_{n+1} = U_n$. Ne serait ce pas M^{-1} ? Le mieux pour s'en convaincre est d'effectuer le produit des deux (dans les deux sens) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & 11 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11/30 & 4/30 & -1/30 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/30 & 4/30 & -1/30 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & 11 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est donc bien la matrice M^{-1} et sa trace vaut $11/30$.

Histoire de matrices semblables.

D.S.4

On suppose donc qu'on a $A = P.B.P^{-1}$. On a donc : $Tr(A) = Tr(P.B.P^{-1}) = Tr(P^{-1}.P.B) = Tr(B)$, mais aussi $\det(A) = \det(P) \cdot \det(B) \cdot \det(P)^{-1}$ de par les propriétés bien connus (mais admises) du déterminant. Il reste ensuite par commutativité dans $\mathbb{R}$: $\det(A) = \det(P) \cdot \det(B) \cdot \det(P^{-1}) = \det^{-1}(P) \cdot \det(P) \cdot \det(B) = \det(B)$.

Mais on a aussi $A^2 = P.B.P^{-1}.P.B.P^{-1} = P.B^2.P^{-1}$. Il s'ensuit que A^2 et B^2 sont semblables et ont la même trace toutes les deux.

On poursuit : $A^{-1} = (P.B.P^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}.B^{-1}.P^{-1} = P.B^{-1}.P^{-1}$. Les matrices inverses A^{-1} et B^{-1} sont semblables (via P elles aussi). On a donc $Tr(A^{-1}) = Tr(B^{-1})$ (on sent le phénomène qui va avoir lieu pour toutes les puissances).

Avec les informations précédentes, si on suppose M semblable à une matrice diagonale D , en

écrivant alors $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ et en constatant : $D^2 = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3)^2 \end{pmatrix}$ puis $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 \end{pmatrix}$, les relations sur les traces et déterminants donnent :

- $Tr(M) = Tr(D) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4$,
- $Tr(M^2) = Tr(D^2) = (\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2 + (\lambda_3)^2 = 36$,
- $Tr(M^{-1}) = Tr(D^{-1}) = 1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 + 1/\lambda_3 = 11/30$,
- $\det(M) = \det(D) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = -30$.

Les formules de Viète (et leurs conséquences en "somme des carrés" et "somme des inverses") nous donnent alors les coefficients du polynôme $(X - \lambda_1) \cdot (X - \lambda_2) \cdot (X - \lambda_3)$: c'est $X^3 - 4.X^2 - 11.X + 30$.

On accède au 11 de deux façons : par la somme des inverses égale à $(\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 + \lambda_2 \cdot \lambda_3) / (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3)$

ou par $(\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_3)^2 = \dots$ J'ai posé trop de questions finalement...

Ce polynôme a pour racine évidente 2 ; on le factorise en $(X - 2) \cdot (X^2 - 2.X + 15)$ et on trouve les autres racines : -3 et 5 (à moins qu'on ne les trouve tout aussi évidentes).

On a donc les diverses matrices D possibles. Il y en a six, et on en choisit une : $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

On résout ensuite $M.P = P.D$ d'inconnue matricielle P et on trouve $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \\ 9 & 4 & 25 \end{pmatrix}$ sans

gros effort calculatoire. On développe par rapport à la première colonne : le déterminant de P est $1.(2.25 - 4.5) + 3.(1.25 - 4.1) + 9.(1.5 - 2.1)$ ce qui donne 120 (même si vous n'avez pas pris les colonnes dans le même ordre, vous devez obtenir le même déterminant, au signe près éventuellement).

On utilise la règle indiquée pour inverser la matrice P et on trouve $P^{-1} = \frac{1}{120} \cdot \begin{pmatrix} 30 & -21 & 3 \\ 120 & 16 & -8 \\ -30 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

On utilise ensuite la relation $M = P.D.P^{-1}$ qui, par itération donne $M^n = P.D^n.P^{-1}$ avec D^n qu'on ne présente même plus. Le calcul final de $P.D^n.P^{-1}.U_0$ donne en première ligne :

$$u_n = \frac{(30.u_0 - 21.u_1 + 3.u_2).(-3)^n + (120.u_0 + 16.u_1 - 8.u_2).2^n + (-30.u_0 + 5.u_1 + 5.u_2).5^n}{120}$$

et on encadre le résultat qui le mérite bien.

Cela dit, on retrouve comme attendu une simple combinaison de trois suites géométriques de raisons 2, -3 et 5.

La suite $((1 + \frac{1}{k})^k)$.

D.S.4

Tous les termes de cette suite existent. Leur logarithme aussi, et il vaut $k \cdot \ln(1 + \frac{1}{k})$. On l'identifie

en $\frac{\ln(1 + \frac{1}{k}) - \ln(1)}{\frac{1}{k}}$ qui est un taux d'accroissement du logarithme entre 1 et $1 + 1/k$. Ce taux

d'accroissement tend vers la dérivée du logarithme en 1, c'est à dire vers 1/1. On remonte : $(1 + \frac{1}{k})^k$ tend vers e^1 quand k tend vers $+\infty$. L'élève C a donc raison. Et par conséquent les autres ont tort.

L'erreur de l'élève A : la suite n'est pas géométrique, car ce qui lui servirait de raison $1 + \frac{1}{k}$ change à chaque étape. Or, une suite géométrique, c'est (r^k) avec k variable mais k fixe.

L'erreur de l'élève B : l'exposant bouge, on n'a donc pas un terme de limite 1 à une puissance fixe. On a la forme indéterminée en (tend vers 1) à une puissance qui tend vers l'infini. Le passage au logarithme convainc que c'est bien une forme indéterminée.

Bilan célèbre, donc : $(1 + 1/k)^k$ tend vers e .

On écrit comme proposé une formule de Taylor à l'ordre 2:

$$\ln(1+h) = 0 + 1.h + \frac{h^2}{2!} \cdot \int_0^1 (1-t) \cdot \frac{-1}{(1+t.h)^2} . dt$$

l'intégrale est négative. On a donc $\ln(1+h) \leq h$ classiquement aussi (inégalité de convexité visible géométriquement). On déduit pour h égal à $1/k$ positif : $\ln(\alpha_k) \leq 1$ puis $\alpha_k \leq e$.

On écrit ensuite : $a_k = k \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$. Le produit des a_k est alors un "produit télescopique" :

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n = \frac{2^1}{1^0} \cdot \frac{3^2}{2^1} \cdot \frac{4^3}{3^2} \dots \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}. \text{ Il n'en reste que le dernier numérateur (et un dénominateur égal à 1) : } \prod_{k=1}^n a_k = (n+1)^n.$$

On écrit la comparaison des moyennes $\sqrt[n]{v_1 \cdot v_2 \dots v_n} \leq \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n}$ mais on l'applique à $v_k = a_k \cdot u_k$ comme demandé :

le premier membre donne deux produits en fait : $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} \times \sqrt[n]{u_1 \cdot u_2 \dots u_n}$ est plus petit que

$$\frac{a_1.u_1 + a_2.u_2 + \dots + a_n.u_n}{n}.$$

Le premier membre donne $\sqrt[n]{(n+1)^n} . g_n$ par définition de g_n et par le calcul précédent. On fera passer $\sqrt[n]{(n+1)^n}$ de l'autre côté, sous la forme de $n+1$ au dénominateur. Ensuite, du côté majorant, on a la moyenne $\frac{a_1.u_1 + a_2.u_2 + \dots + a_n.u_n}{n}$. On l'écrit $\frac{1.\alpha_1.u_1 + 2.\alpha_2.u_2 + \dots + n.\alpha_n.u_n}{n}$. On y majore chaque α_k par e (par positivité des $k.u_k$, le sens des inégalités ne change pas). On a donc : $(n+1).g_n \leq \frac{\sum_{k=1}^n k.u_k}{n}$ comme demandé.

La suite (U_n) , la suite (R_n) et encore quelques autres formules.

D.S.4

La suite (U_n) est croissante. En effet, $U_{n+1} - U_n$ vaut u_{n+1} qui est positif pour tout n de $\mathbb{N}$. Puisque l'énoncé nous invite à la supposer croissante, elle est croissante majorée, et converge donc, vers son plus petit majorant.

La même formule sur $U_{n+1} - U_n$ mais avec un signe moins et des L qui se simplifient donne $R_{k+1} - R_k = -u_{k+1}$ et au rang $k-1$ elle donne $R_{k-1} - R_k = u_k$. Multipliée par k et sommée de 1 à n elle donne $\sum_{k=1}^n k.(R_{k-1} - R_k) = \sum_{k=1}^n k.u_k = n.(n+1).s_n$.

Mais on sent presque le télescopage avec ça.

On sépare en deux sommes ce premier membre : $\sum_{k=1}^n k.R_{k-1} - \sum_{k=1}^n k.R_k$.

On décale les indices : $n.(n+1).s_n = \sum_{p=0}^{n-1} (p+1).R_p - \sum_{k=1}^n k.R_k$

Il y a une belle simplification, et il reste $\left(\sum_{p=1}^{n-1} R_p\right) - n.R_n$. La somme s'appelle ρ_n .

Au fait, j'ai oublié de préciser qu'il fallait poser $R_0 = L$, ayant affaire à une somme vide donc nulle dans U_0 . Et on calcule aussi $\rho_1 = R_0 = L$.

On divise donc par $n.(n+1)$ et on somme de 1 à N . La somme des s_n de 1 à N est donc

$$\sum_{n=1}^N s_n = S_N = \sum_{n=1}^N \frac{\rho_n - n.R_n}{n.(n+1)} \text{ (c'est moi qui viens de décider de l'appeler } S_N).$$

On sépare en deux sommes. Dans la seconde, les n se simplifient, et il reste la somme des $R_n/(n+1)$. Dans la première, on décompose $\frac{1}{n.(n+1)}$ en éléments simples et on a la somme de-

$$\text{mandée } \sum_{n=1}^N \rho_n \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^N \frac{R_n}{n+1}.$$

On sent qu'il va falloir travailler sur ces sommes en séparant

$$: \sum_{n=1}^N \rho_n \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^N \frac{\rho_n}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{\rho_n}{n+1} = \sum_{n=1}^N \frac{\rho_n}{n} - \sum_{p=2}^{N+1} \frac{\rho_{p-1}}{p}$$

Il reste un $\rho_1/1$ qu'on met de côté. Il y a un $\rho_N/(N+1)$. Et il y a une somme prête à télescoper : $\sum_{p=2}^{N+1} \frac{\rho_p - \rho_{p-1}}{p}$.

Cette somme télescopable est $\sum_{p=2}^{N+1} \frac{R_{p-1}}{p}$.

N'avait on pas aussi $\sum_{n=1}^N \frac{R_n}{n+1}$ mais avec un signe moins ?

Que reste-t-il de ces sommes ? Trois termes justement : $S_N = \rho_1 - \frac{\rho_N}{N+1} - \frac{R_N}{N+1}$.

Qui est ρ_1 ? C'est un seul terme : R_0 . Et R_0 c'est $L - 0$.

On va essayer de "faire sauter" les autres termes.

Déjà, R_N tend vers 0 quand N tend vers l'infini, puisque l'on a $R_N = L - U_N$ avec U_N qui tend vers L .

Ensuite, $\rho_N/(N+1)$, c'est $\frac{R_0 + R_1 + \dots + R_N}{N+1}$. La moyenne arithmétique de la suite $(R_0, R_1, \dots, R_N)$

! Or, cette suite R tend vers 0. Sa moyenne tend aussi vers 0 (résultat naturellement compréhensible, prouvé dans le D.S.3.).

Il ne reste donc bien, après passage à la limite, que L .

Joli, non ? En passant à l'infini dans ces sommes finies (c'est de la triche !) :

$$\sum_{n=1}^{n \rightarrow +\infty} \frac{u_1 + 2.u_2 + \dots + n.u_n}{n.(n+1)} \text{ est la même somme que } \sum_{k=1}^{k \rightarrow +\infty} u_k.$$

La suite $\left(\sum_{k=1}^n g_n\right)$ est majorée par la suite $(e.S_n)$. Chacune des deux est croissante (on passe du rang n au rang $n+1$ en ajoutant un terme positif à la somme).

La suite $(e.S_n)$ converge vers sa borne supérieure, elle est majorée par sa limite $e.L$. Par transitivité, la suite $\left(\sum_{k=1}^n g_n\right)$ est donc croissante, majorée (par $e.L$). Elle converge donc, vers son plus petit majorant. Et ledit plus petit majorant est plus petit que le majorant $e.L$. On obtient ce qu'on appelle alors inégalité de Carleman.

En soi, le résultat n'est pas important, mais il fait appel à tant de jolies manipulations et majorations/formules intermédiaires, avec en plus son intervention de e que je trouve intéressant ce petit problème. Restera à voir ce qu'il en restera dans vos copies.

Une question de cours ?

Allez, le septième polynôme de Tchebitchev a pour racines les $\cos\left(\frac{\pi}{14} + \frac{k.\pi}{7}\right)$ avec k de 0 à 6.

MPSI2 Charlemagne	268 points	Année 2010/11	D.S.4
-------------------	------------	---------------	--------------

- 1) On définit les coefficients trinomiaux $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ par $(1 + X + X^2)^n = \sum_{k=0}^{2.n} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} . X^k$ et on appelle coefficient central le coefficient $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\}$, que l'on note a_n . Calculez a_n pour n de 0 à 5. Prouvez que les coefficients trinomiaux sont tous entiers. (4 pt.)

- 2) Prouvez : $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{r=*}^{[k/2]} \frac{n!}{(n+r-k)!.(k-2.r)! . r!}$ pour tout couple (n, k) avec $k \leq 2.n$, en précisant la valeur de $*$, borne de début de la sommation. (3 pt.)

- 3) Calculez : $\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} . \binom{n}{d-k} . (-1)^k$ suivant la valeur de d modulo 3 pour tout couple (n, d) (indication : $(1 + X + X^2).(1 - X)$). (3 pt.) (rassurez vous, cette formule ne servira pas dans la suite du problème)

- 4) Calculez $\sum_{k=0}^{2.n} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ et $\sum_{k=0}^{2.n} (-1)^k . \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$. (2 pt.)

- 1) Montrez pour tout couple (n, k) : $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2.n - k \end{smallmatrix} \right\}$. On pose alors $b_n = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\}$. (2 pt.)

- 2) Montrez alors : $a_{n+1} = 2.b_n + a_n$ pour tout n . (3 pt.)

- 3) Montrez : $(n+1).b_n = n.(2.a_{n-1} + b_{n-1})$ pour tout n (indication : dérivez). (3 pt.)

- 4) Déduisez : $(n+1).a_{n+1} = (2.n+1).a_n + 3.n.a_{n-1}$ pour tout n . (2 pt.) Calculez a_6 . (1 pt.) Ecrivez une procédure Maple qui calcule a_n quand on lui donne n . (3 pt.)

30 points

- 1) Simplifiez pour θ réel $\frac{1 + e^{i.\theta} + e^{2.i.\theta}}{e^{i.\theta}}$ et déduisez $(1 + 2.\cos(\theta))^n = \sum_{k=-n}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n+k \end{smallmatrix} \right\} . e^{i.k.\theta}$ pour tout couple (n, θ) de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$. (2 pt.)

- 2) Déduisez : $a_n = \frac{1}{\pi} . \int_0^\pi (1 + 2.\cos(\theta))^n . d\theta$. (2 pt.)

- 3) En intégrant par parties $\pi.(a_{n+1} - a_n)$ retrouvez la relation $(n+1).a_{n+1} = (2.n+1).a_n + 3.n.a_{n-1}$. (vous pourrez être conduit à remplacer $4.\sin^2(t)$ par $3 + (1 - 2.\cos(t)).(1 + 2.\cos(t))$ à l'une des étapes, après l'intégration par parties) (3 pt.)

7 points

- 1) Pour tout entier N , on pose : $f_N = x \longrightarrow \sum_{k=0}^N a_k . x^k$. Montrez alors pour x dans $] -1/3, 1/3[$ que, quand N tend vers $+\infty$, $f_N(x)$ converge vers $\frac{1}{\pi} . \int_0^\pi \frac{1}{1 - x.(1 + 2.\cos(\theta))} . d\theta$ que l'on note $\varphi(x)$. (3 pt.)

- 2) Changez de variable en $t = \tan(\theta/2)$ dans l'intégrale $\varphi(x)$. (2 pt.)

- 3) Déduisez : $\varphi = x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-2x-3x^2}}$ et vérifiez le domaine de définition. (3 pt.)
- 1) Dérivez φ et trouvez les deux fonctions polynômes u et v de degré inférieur à 2 vérifiant $u.\varphi' = v.\varphi$. (2 pt.)
- 2) Dérivez n fois la relation trouvée et précisez la relation de récurrence vérifiée par la suite $(\varphi^{(n)}(0)/n!)$. (3 pt.)

13 points		
MPSI2	MATRICES	2010/11
D.S.5		

Pour tout entier naturel n donné, on pose : $r = e^{2.i.\pi/n}$ et on définit la matrice A de taille n sur n , de terme général $a_p^q = r^{(p-1).(q-1)}$ (p indice de ligne et q indice de colonne).

- ♠(7) Pour n égal à 2, déterminez r , A , calculez $Tr(A)$, A^2 et A^4 et $\det(A)$. (3 pt.)
- ♠(8) Pour n égal à 3, déterminez r , A , calculez $Tr(A)$, A^2 et A^4 et $\det(A)$. (3 pt.)
- ♠(9) Pour n égal à 4, déterminez r , A , calculez $Tr(A)$, A^2 et A^4 et déduisez la valeur de $|\det(A)|$. (4 pt.) Calculez $\det(A)$. (1 pt.)
- ♠(10) Pour n égal à 6, exprimez r et A à l'aide de j , calculez $Tr(A)$, A^2 et A^4 et déduisez la valeur de $|\det(A)|$. (4 pt.)
- ♠(11) À ce stade, vous devez émettre une conjecture sur la forme de A^2 et de A^4 pour n quelconque. Démontrez la (mais vous avez déjà un point si vous écrivez proprement une formule pour le terme général de A^2). (4 pt.)
- ♠(12) Trouvez la valeur de $|\det(A)|$ pour n quelconque. (2 pt.)
- ♠(13) Calculez les sommes $\sum_{1 \leq p < q \leq n} (p+q)$ et $\sum_{1 \leq p < q \leq n} (p+q-2)$ (déjà, un demi point si vous dites combien il y a de termes dans chaque somme). (4 pt.)
- ♠(14) Calculez l'argument de $r^q - r^p$, pour p et q entiers vérifiant $1 \leq p < q \leq n$. (2 pt.)
- ♠(15) Déduisez qu'une mesure de l'argument du déterminant de A est $\frac{\pi.(n-1).(3n-2)}{4}$. (3 pt.)
- ♠(16) Calculez $\det(A)$ pour n égal à 9. (2 pt.)

32 points		
MPSI2	EXERCICE	2010/11
D.S.5		

- ♣(8) Décomposez en produit de cycles de supports disjoints, calculez la signature et élevez à la puissance 241 : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 12 & 11 & 2 & 6 & 1 & 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$. (4 pt.) Résolvez l'équation $\sigma^n(1) = 12$ d'inconnue n entière. (2 pt.) Résolvez l'équation $\sigma^n(3) = 7$ d'inconnue entière n . (2 pt.) (σ^n c'est $\sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma$ n fois).

8 points		
MPSI2 Charlemagne	354 points	Année 2010/11
D.S.5		

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

D.S.5

Oui, la matrice de la case ci dessus est bien la matrice de terme général $(-1)^{(p-1).(q-1)}$ avec p et q qui peuvent valoir 1 ou 2. Sa trace vaut 0, son déterminant vaut -2 . Son carré est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et A^4 est égale à $4.I_2$.

On passe à la taille 3.

La trace vaut $1 + 2.j$, c'est à dire $i.\sqrt{3}$. Le carré de cette matrice vaut $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et sa puissance quatrième est $9.I_3$. Le déterminant de A^4 est 9^3 . Or, $\det(A^4) = (\det(A))^4$. On a donc $\det(A)$ qui a pour module $3^{3/2}$ ou encore $3.\sqrt{3}$.
Le calcul direct donne d'ailleurs $\det(A) = 3.(j^2 - j) = -3.\sqrt{3}.i$.

Cas de la dimension 4.

D.S.5

Cette fois, r vaut i et la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$. Sa trace est $2 + 2.i$. Son carré est

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ On élève encore au carré : } 16.I_4. \text{ On passe au déterminant : } (\det(A))^4 = \det(A^4) =$$

16^4 . Le déterminant de A a pour module 16, et on ignore pour l'instant son argument.

En identifiant un **déterminant de VanDerMonde** (famille ordonnées $[i^0, i^1, i^2, i^3] = [1, i, -1, -i]$), on sait qu'il vaut $\prod_{0 \leq p < q \leq 3} (i^q - i^p)$. Il reste à calculer donc son argument (*modulo* 2π). L'argument d'un

produit est la somme des arguments. On a donc la somme des arguments des six termes suivants : $(i - 1)$, $(-1 - 1)$, $(-i - 1)$, $(-1 - i)$, $(-i - i)$ et $(-i + 1)$.

On trouve $3.\frac{\pi}{4} + \pi - 3.\frac{\pi}{4} - 3.\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ ce qui donne $-\pi/2$.

Le déterminant vaut donc $-16.i$.

Cas de la dimension 6.

D.S.5

Le complexe r vaut alors $\exp(i.\pi/3)$ que l'on écrit $-j^2$.

La matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j^2 & j & -1 & j^2 & -j \\ 1 & j & j^2 & 1 & j & j^2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j^2 & j & 1 & j^2 & j \\ 1 & -j & j^2 & -1 & -j & -j^2 \end{pmatrix}$. Elle a pour trace 0. Bon, ça c'est bon.

On l'élève au carré. On trouve $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On élève encore au carré : $A^4 = 36.I_6$. Son déter-

minant vaut 36^6 . On passe à la racine quatrième (*le signe est perdu*) : $\det(A)$ a pour module 6^3 . On verra son argument plus tard.

Le cas général.

D.S.5

La conjecture sur le carré de la matrice de taille n nous conduit à un n en haut et une sorte d'antidiagonale de n . On propose donc α_p^q vaut n si $p = q = 1$, n aussi si $p + q = n + 2$ et 0 sinon.

La forme générale du coefficient de A^2 est $\sum_{k=1}^n a_p^k \cdot a_k^q = \sum_{k=1}^n r^{(p-1) \cdot (k-1) + (k-1) \cdot (q-1)}$. On arrange en

$\sum_{k=1}^n (r^{(p+q-2)})^{k-1}$. Une suite de raison $r^{(p+q-2)}$, de premier terme 1 et de terme à venir $(r^{(p+q-2)})^n$ c'est

dire $(r^n)^{(p+q-2)}$. Or, r est une des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, donc r^n vaut 1 et l'exposant $(p + q - 2)$

n'y peut plus rien. On a donc $\sum_{k=1}^n (r^{(p+q-2)})^{k-1} = \frac{1 - 1}{1 - r^{p+q-2}} = 0$.

Le terme général de notre matrice A^2 vaut 0. Sauf quand la raison vaut 1 (*le cas à part dans le cas de la série géométrique*). Et ce cas, c'est quand $p + q - 2$ est nul (*cas $p = q = 1$ par positivité*) ou $p + q - 2$ est un multiple de n (*cas de la sorte d'anti-diagonale*). Dans ce cas, la somme de la série géométrique vaut n (nombre de termes).

On passe à la **puissance quatrième**, en multipliant cette matrice par elle même. On met de côté les n qui nous feront un beau n^2 à la fin. On montre donc que le carré de la matrice avec ses n termes égaux à 1 et ses $n^2 - n$ termes égaux à 0 est l'unité.

On a donc : $A^4 = n^2 \cdot I_n$. On passe au déterminant : $(\det(A))^4 = \det(A^4) = n^{2 \cdot n}$, puis à la racine quatrième : $\det(A)$ a pour module $n^{n/2}$ c'est à dire aussi $\sqrt{n^n}$.

Plus précisément même, ce que la puissance quatrième nous a laissé perdre, c'est un i , un -1 ou un $-i$ (ce qui explique le $\pi \cdot (n-1) \cdot (2n-2)/4$ de la suite de l'énoncé.

La somme $\sum_{1 \leq p < q \leq n} (p + q)$ et celle en $p + q - 2$.

D.S.5

On a la somme des $p + q$ pour p et q dans une moitié de tableau : $1 \leq p < q \leq n$. Par exemple pour

. 1 + 2 1 + 3 1 + 4 1 + 5

. . 2 + 3 2 + 4 2 + 5

n égal à 5, qu'a-t-on ? La somme suivante : . . 3 + 4 3 + 5 On trouve quatre fois chaque

. . 4 + 5

. . . .

entier de 1 à 5, et cette somme vaut donc $4 \cdot (5 \cdot 6) / 2 = 60$.

La formule générale serait $(n-1) \cdot n \cdot (n+1) / 2$.

Mais il faut le prouver.

On voit que p et q ont des rôles symétriques. On aurait pu prendre la somme $\sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}} (p + q)$, lui ôter les

termes diagonaux : $\sum_{1 \leq p \leq n} (2 \cdot p) = n \cdot (n+1)$ et n'en garder que la moitié.

Mais la somme $\sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}} (p + q)$ se sépare en deux : $\sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}} p$ et $\sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}} q$. Par symétrie des rôles, on a deux

fois le même terme : $\sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}} p \cdot 1$. On le sépare par indépendance en $\left(\sum_{1 \leq p \leq n} p \right) \cdot \left(\sum_{1 \leq q \leq n} 1 \right)$ et ce produit

de deux sommes vaut $\frac{n \cdot (n+1)}{2} \times n$,

On fait le bilan : $\frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \times n - 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)$. Parfait, c'est $(n^2 - 1) \cdot n / 2$. On pouvait y arriver

par d'autres chemins.

On pouvait par exemple fixer p et calculer pour chaque p la somme $\sum_{q=p+1}^n (p+q) = \sum_{k=2.p+1}^{n+p} k = (n-p) \cdot \frac{(2.p+1) + (n+p)}{2}$ (nombre de termes fois moyenne des extrêmes), et sommer ensuite sur p de 1 à $n-1$.

On a ensuite une variante de cette somme, avec $\sum_{1 \leq p < q \leq n} (p+q-2)$. C'est la même, à qui l'on a soustrait $\sum_{1 \leq p < q \leq n} 2$, somme faite de $n(n-1)/2$ termes tous égaux à 2. Elle vaut $n \cdot (n-1)$ et la somme définitive vaut donc $n \cdot (n-1)^2/2$.

L'argument de $r^q - r^p$ et celui de $\det(A)$.

D.S.5

Quel rapport ensuite avec l'argument du déterminant de A ? On approche. Mais il nous reste un lemme avec l'argument de $r^q - r^p$.

On développe ce complexe sous forme module et argument? Surtout pas, on n'est pas en Terminale, on réfléchit avant de calculer. On peut reprendre l'idée qu'on utilise souvent avec $1 + e^{i \cdot t}$ (si en tout cas on connaît son cours) : $r^q - r^p = r^{(p+q)/2} \cdot (r^{(q-p)/2} - r^{(p-q)/2})$. On a alors un complexe de module 1 et d'argument $(p+q) \cdot \text{Arg}(r)/2$ et un imaginaire pur qui n'est autre que $2i \cdot \sin((q-p) \cdot \text{Arg}(r)/2)$.

Le premier complexe a donc pour argument $(p+q)/n$ et le second a pour argument $\pi/2$ (on est dans une zone favorable avec la condition $1 \leq p < q \leq n$, le sinus est positif).

La bonne réponse est donc : $\frac{\pi}{2} + \frac{(p+q) \cdot \pi}{n}$, excusez du peu.

Il ne nous reste plus qu'à trouver l'argument du déterminant de A . On identifie encore dans A une **matrice de VanDerMonde**, faite en colonne des puissances successives des éléments de la liste suivante : $[1, r, r^2, \dots, r^{n-1}]$. La formule du cours nous dit : $\det(A) = \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\alpha_q - \alpha_p)$ avec $\alpha_k = r^{k-1}$ si

on respecte les indices.

On connaît déjà le module de ce complexe, c'est $n^{n/2}$. Il nous manque son argument. Et c'est la somme des arguments de tous les termes du produit.

On va donc calculer une belle grande somme de $n \cdot (n-1)/2$ termes.

Et ces termes valent $\frac{\pi}{2} + \frac{q+p-2}{n} \cdot \pi$. La somme des $\pi/2$ donne $n \cdot (n-1) \cdot \pi/4$ et l'autre somme a fait l'objet de la question précédente.

On effectue la somme et on a justement $\frac{(n-1) \cdot (3n-2) \cdot \pi}{4}$.

On note qu'on a un multiple de $\pi/4$, ce qui nous donne des complexes de la forme d , $i \cdot d$, $-d$ ou $-i \cdot d$ avec d réel positif.

Déterminant de A dans le cas $n=9$.

D.S.5

Quand n vaut 9, on connaît le module et l'argument de du déterminant de A : $9^{9/2}$ et $\frac{(9-1) \cdot (3 \cdot 9 - 2) \cdot \pi}{4}$. On a donc 3^9 et $50 \cdot \pi$ (le déterminant de taille 9 est un réel positif). La réponse est donc 3^9 et on n'effectue pas le calcul, sauf si on veut un ordre de grandeur de la réponse. Et il vaudrait mieux en vouloir un si on a le réflexe scientifique : 19683.

Les coefficients trinomiaux.

D.S.5

Pour les premières valeurs, on développe $(1 + X + X^2)^n$ pour les petites valeurs de n , soit par double

usage de la formule du binôme, soit par la formule du multinôme.

Par exemple, pour n égal à 4, je calculerais d'abord $(1 + X + X^2)^2 = (1 + X^2 + X^4 + 2.X + 2.X^2 + 2.X^3)$ et j'effectuerais mentalement le produit $(1 + 2.X + 3.X^2 + 2.X^3 + X^4).(1 + 2.X + 3.X^2 + 2.X^3 + X^4)$ à la recherche du terme en X^4 . Le coefficient a_4 vaut $1 + 2.2 + 3.3 + 2.2 + 1$ c'est à dire 19.

Pour n égal à 0, on développe $(1 + X + X^2)^0 = 1$ et le coefficient de X^0 est 1.

On tire un bilan :

n	0	1	2	3	4	5
a_n	1	1	3	7	19	51

Et comme on sait lire un énoncé, on vérifie avec la formule qu'on va démontrer : $(3 + 1).a_{3+1} = (2.3 + 1).a_3 + 3.3.a_2$ par exemple.

Pourquoi sont ils entiers ? Parce que quand on développe $(1 + X + X^2)^n$, tous les coefficients sont entiers. Même celui du milieu.

Pour ceux qui auront poussé le masochisme jusqu'au vice :

$$(1 + X + X^2)^5 = 1 + 5.X + 15.X^2 + 30.X^3 + 45.X^4 + 51.X^5 + 45.X^6 + 30.X^7 + 15.X^8 + 5.X^9 + X^{10}$$

Si on développe $(1 + X + X^2)^n$ par la **formule du multinôme**, on trouve $\sum_{p+q+r=n} \frac{n!}{p!.q!.r!} . 1^p . X^q . X^{2.r}$

et on ne garde que les termes dont l'exposant vaut k fixé à l'avance. On arrive à la condition $q + 2.r = k$ (k entre 0 et $2.n$). On peut donc garder cette sommation sous une condition. On peut aussi dire que l'on fait bouger r comme on peut entre 0 et $[k/2]$. On complète pour avoir la valeur de q , c'est $k - 2.r$.

Et on a la valeur de p : c'est $n - r - (k - 2.r)$. On arrive au coefficient $\sum_{0 \leq r \leq [k/2]} \frac{n!}{(n + r - k)! . (k - 2.r)! . r!}$.

Par cohérence de la formule, il faut que $n + r - k$ soit positif. Ceci nous conduit à ne sommer que de $Max(0, k - n)$ qui vaut 0 ou $k - n$ suivant que k est dans la première ou seconde moitié de $\{0, 1, \dots, 2.n\}$.

On peut aussi développer $((1 + X) + X^2)^n$ par la formule du binôme en somme : $\sum_{i \leq n} \frac{n!}{(n - i)! . i!} (1 +$

$X)^{n-i} . X^{2.i}$ qui se développent à leur tour en $\sum_{i \leq n} \left(\sum_{j \leq n-i} \frac{(n - i)!}{j! . (n - i - j)!} X^j \right) \frac{n!}{(n - i)! . i!} . X^{2.i}$. On fu-

sionne en une unique somme, on simplifie les $(n - i)!$ et on regarde à quel exposant on retrouve X . Il ne reste plus qu'à changer le nom des variables muettes si besoin est. Et si on a le temps, on vérifie quand même aussi la cohérence de la formule pour de faibles valeurs de n ou des valeurs de k comme 0 et $2.n$.

Des trinomiaux et des binomiaux.

D.S.5

Le point de départ : $(1 + X + X^2).(1 - X)$ est égal à $(1 - X^3)$. On élève à la puissance n de chaque côté et on développe par la formule du trinôme et la formule du bibinôme :

$$\left(\sum_{k=0}^{2.n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} . X^k \right) . \left(\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-X)^p \right) = \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} (-X^3)^q$$

On multiplie les deux premières sommes, à variables indépendantes. On a des $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} . (-1)^p . \binom{n}{p} . X^{k+p}$ et des $\binom{n}{q} (-1)^q . X^{3.q}$. On ne garde que les termes de la grande somme qui donnent du X^d , c'est à dire $\sum_{k=0}^d \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} . (-1)^{d-k} . binomialnd - k$ et on dit qu'on trouve le coefficient de X^d , c'est à dire 0 si d n'est pas un multiple de 3 et $\binom{n}{d} (-1)^d$ si d est un multiple de 3.

$$\sum_k^{2,n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

D.S.5

La somme de tous les trinomiaux d'une ligne ! C'est cadeau, là ! C'est en fait le développement de $(1 + 1 + 1^2)^n$ par la formule du trinôme en $\sum_{k=0}^{2,n} \binom{n}{k} . 1^k$. On trouve donc tout simplement 3^n .

Qui s'est lancé ici dans une récurrence, ne sentant pas d'où pouvait venir la formule ?

Pour l'autre, avec alternance de signes, on a pris $X = -1$ et on a donc $\sum_{k=0}^{2,n} \binom{n}{k} . 1^k = (-1)^n$.

La symétrie en ligne des coefficients trinomial.

D.S.5

On doit prouver $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ 2.n-k \end{matrix} \right\}$, ce qui semble bien être une symétrie sur la $n^{ième}$ ligne du triangle de Papascal. C'est en effet $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2.n \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}$, $\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ 2.n-1 \end{matrix} \right\}$ et autres joyeusetés, jusqu'à $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\}$ qui n'apporte rien.

Pour le prouver avec rigueur : on développe $(1 + X + X^2)^n$ par la formule du trinôme en $\sum_{k=0}^{2,n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} . X^k$ et

on développe $X^{2,n} . \left(1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2} \right)^n$. On trouve cette fois $X^{2,n} . \sum_{p=0}^{2,n} \left\{ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\} . X^{-p}$. On entre le $X^{2,n}$ dans la somme, on identifie le coefficient du terme en X^k (pour $2.n - p = k$) et on a l'égalité demandée.

Relation $a_{n+1} = 2.b_n + a_n$.

D.S.5

Attention. C'est ce qu'on peut appeler bien sûr une relation de récurrence. Dans le sens qu'elle permet d'avancer d'un indice. Mais elle ne se démontre pas par récurrence. En effet, si vous essayez de le faire, vous devez, lors de l'hérédité prendre pour hypothèse une égalité au rang n où interviennent déjà a_n et a_{n+1} et essayer d'arriver à une formule de rang $n + 1$ avec a_{n+1} et a_{n+2} . Ça fait trop de rangs en même temps. C'est donc une formule qu'on prouve directement.

On se laisse porter par l'allure de la formule :

On cherche a_{n+1} , le coefficient de X^{n+1} dans $(1 + X + X^2)^{n+1}$ c'est à dire dans $(1 + X + X^2)^n . (1 + X + X^2)$. Ce produit s'écrit $\left(\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} X^k \right) . (1 + X + X^2)$. On a du X^n avec $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} X^{n+1} . 1$, $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} X^n . X$ et $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} X^{n-1} . X^2$. Les trois coefficients en jeu s'appellent b_n , a_n et b_n (symétrie de la lecture en ligne).

Trois points, c'est cadeau ! Non, c'est pour vérifier que vous avez la bonne approche des questions.

L'autre formule de récurrence $(n + 1) . b_n = n . (2 . a_{n-1} + b_{n-1})$.

D.S.5

On nous convie à dérivons. Alors dérivons la relation $(1 + X + X^2)^n = \sum_{k=0}^{2,n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} . X^k$, elle donne :

$$n . (1 + 2.X) . (1 + X + X^2)^{n-1} = \sum_{k=1}^{2,n} k . \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} . X^{k-1}.$$

On remplace : $n . (1 + 2.X) \sum_{p=0}^{2,n-2} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ p \end{matrix} \right\} X^p = \sum_{k=0}^{2,n} k . \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} . X^{k-1}$. On ne garde que le terme en X^n de chaque côté. D'un côté : $n . \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ n \end{matrix} \right\} + 2.n . \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ n-1 \end{matrix} \right\}$ (c'est à dire $n.b_{n-1} + 2.n.a_{n-1}$) et de l'autre

$(n+1) \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ n+1 \end{matrix} \right\}$ (c'est à dire $(n+1) \cdot b_n$).

Une autre relation à déduire, avec a_{n-1} , a_n et a_{n+1} .

D.S.5

On élimine b_{n-1} et b_n dans la formule $(n+1) \cdot b_n = n \cdot (2 \cdot a_{n-1} + b_{n-1})$ en remplaçant b_n par $(a_{n+1} - a_n)/2$ et b_{n-1} par $(a_n - a_{n-1})/2$ grâce à la formule précédente :

$$(n+1) \cdot \frac{a_{n+1} - a_n}{2} = n \cdot \left(2 \cdot a_{n-1} + \frac{a_n - a_{n-1}}{2} \right)$$

et on a bien $(n+1) \cdot a_{n+1} = 3 \cdot n \cdot a_{n-1} + (2 \cdot n + 1) \cdot a_n$.

L'essentiel était de bien lire le verbe : "déduire".

On calcule alors : $6 \cdot a_6 = 3 \cdot 5 \cdot a_4 + (2 \cdot 5 + 1) \cdot a_5 = 141$.

(on en profite pour vérifier qu'on avait bien $5 \cdot a_5 = 3 \cdot 4 \cdot a_3 + (2 \cdot 4 + 1) \cdot a_4$ et sinon, on rectifie!)

Une procédure Maple.

D.S.5

trinomial := proc(n); option remember

if n < 2 then 1 else (3*(n-1)*trinomial(n-2)+(2*n-1)*trinomial(n-1))/n fi; end;

Oui, c'est tout ! Et là, en quelques fragments de secondes, on a la liste des vingt premiers a_n .

Une approche par $\frac{1+e^{i \cdot t}+e^{2 \cdot i \cdot t}}{e^{i \cdot t}}$.

D.S.5

Le point de départ : $\frac{1+e^{i \cdot t}+e^{2 \cdot i \cdot t}}{e^{i \cdot t}} = e^{-i \cdot t} + 1 + e^{i \cdot t} = 1 + 2 \cdot \cos(t)$. On élève à la puissance n de chaque côté. Le premier membre donne un numérateur en $(1+x+x^2)^n$ si on pose $x = e^{i \cdot t}$. On le développe en $\sum_{p=0}^{2 \cdot n} \left\{ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\} e^{i \cdot p \cdot t}$. Le dénominateur le transforme en $\sum_{p=0}^{2 \cdot n} \left\{ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\} e^{i \cdot (p-n) \cdot t}$. Il ne reste plus qu'à le réindexer en $k = p - n$.

Il nous reste bien $\sum_{k=-n}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ n+k \end{matrix} \right\} e^{i \cdot k \cdot t}$. On notera que le terme $k = 0$ est à part, tandis que les autres se regroupent deux à deux en cosinus.

Et c'est là que c'est joli ! On intègre par rapport à t de chaque côté, de 0 à π . Le terme central $k = 0$ intègre une constante, et il donne $\pi \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\}$. Les autres termes intègrent des cosinus : $\int_0^\pi \cos(k \cdot t) \cdot \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \cdot dt$ donne des sinus qui s'en vont en 0 et en π . Et ces termes s'effacent. Il ne reste bien que $\pi \cdot a_n$.
Ne me dites pas que vous n'arrivez pas à suivre ce corrigé parce que j'ai appelé la variable t à la place de θ !

La relation de récurrence en partant de $a_{n+1} - a_n$.

D.S.5

On prend donc la différence de ces deux intégrales. On trouve sous le signe somme $(1 + 2 \cdot \cos(t))^{n+1} - (1 + 2 \cdot \cos(t))^n$. On factorise en $(1 + 2 \cdot \cos(t))^n \cdot (1 + 2 \cdot \cos(t) - 1) = 2 \cdot c \cdot (1 + 2 \cdot c)^n$, avec nos notations allégées.

S'il s'agit d'intégrer par parties, on remonte le cosinus en sinus, nul en 0 et π (ça c'est pour le terme crochet) et en $(1 + 2 \cdot c)^n$ qui se dérive en $-2 \cdot n \cdot s \cdot (1 + 2 \cdot c)^{n-1}$.

On a donc : $\pi \cdot (a_{n+1} - a_n) = \left[2 \cdot \sin(t) \cdot (1 + 2 \cdot \cos(t))^n \right]_0^\pi + \int_0^\pi 4 \cdot n \cdot \sin^2(t) \cdot (1 + 2 \cdot \cos(t))^{n-1} \cdot dt$, on remplace ensuite $4 \cdot \sin^2(t)$ par $3 + (1 - 2 \cdot \cos(t)) \cdot (1 + 2 \cdot \cos(t))$ comme proposé. On sépare par linéarité. On a $\int_0^\pi 3 \cdot (1 + 2 \cdot \cos(t))^{n-1} \cdot dt$ (c'est $3 \cdot a_{n-1}$) et $\int_0^\pi (1 - 2 \cdot \cos(t)) \cdot (1 + 2 \cdot \cos(t))^n \cdot dt$. On re-sépare ce terme en $\pi \cdot a_n$ et $-\int_0^\pi 2 \cdot \cos(t) \cdot (1 + 2 \cdot \cos(t))^n \cdot dt$ qu'on a déjà croisé et qui n'est autre que $-(a_{n+1} - a_n)$.

On se demande si on est sur la bonne piste ? Si on fait le bilan, on a obtenu :

$\pi.(a_{n+1} - a_n) = 0 + 3.\pi.a_{n-1} + n.(\pi.a_n - (a_{n+1} - a_n))$. Et quand on efface π et regroupe suivant l'indice, on re-trouve $a_{n+1} = \frac{(2.n+1).a_n + 3.n.a_{n-1}}{n+1}$.

L'application $x \longrightarrow \sum_{n=0}^N a_n.x^n$.

D.S.5

Dans cette définition, on remplace chaque a_n par sa valeur en tant qu'intégrale. On transforme la somme d'intégrales en intégrale de la somme (linéarité) : $f_N(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{t=0}^{t=\pi} x^n.(1+2.\cos(t))^n.dt$. Le terme dans l'intégrale est une **série géométrique** de premier terme 1, de raison $x.(1+2.\cos(t))$ et de terme à venir $x^{N+1}.(1+2.\cos(t))^{N+1}$. La raison ne peut pas valoir 1 (x est majoré en valeur absolue par 1/3 et $1+2.\cos(t)$ reste entre -3 et 3).

On a donc : $f_N(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{t=0}^{\pi} \frac{1 - (x.(1+2.\cos(t)))^{N+1}}{1 - x.(1+2.\cos(t))}.dt$. La ressemblance avec le terme $\varphi(x)$ de l'énoncé est flagrante.

Quitte à séparer par linéarité, on a $f_N(x) = \varphi(x) - x^{N+1} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\cos^{N+1}(t)}{1 - x.(1+2.\cos(t))}.dt$.

Tout ce qu'il nous reste à faire, c'est prouver que $x^{N+1} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\cos^{N+1}(t)}{1 - x.(1+2.\cos(t))}.dt$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini (x est fixé, seul N peut varier).

Le terme en x^{N+1} est une suite géométrique de raison plus petite que 1, il tend vers 0 sans faire de difficulté. Et on peut majorer l'intégrale par $\int_0^{\pi} \frac{dt}{1 - x.(1+2.\cos(t))}.dt$ qui a une valeur numérique donnée, indépendante de N .

La différence entre $f_N(x)$ et $\varphi(x)$ tend vers 0, c'est que $f_N(x)$ tend vers $\varphi(x)$.

Un changement de variable dans $\int_0^{\pi} \frac{dt}{1 - x.(1+2.\cos(t))}.dt$

D.S.5

Décidément, on teste toutes vos connaissances en un seul sujet.

Pour la lisibilité, on revient donc comme dans l'énoncé à une variable θ (plus longue à taper pour moi).

On part de $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{1}{1 - x.(1+2.\cos(\theta))}.d\theta$ et on remplace les trois occurrences de θ : bornes, fonction et élément différentiel.

- Pour ce qui est des bornes : t va alors de 0 à l'infini. Il paraît que ça ne doit pas vous troubler.
- Pour ce qui est de la fonction sous le signe somme : on remplace le cosinus par $(1-t^2)/(1+t^2)$ et on multiplie numérateur et dénominateur par $1+t^2$ pour être tranquille.
- Pour ce qui est de l'élément différentiel, $d\theta$ devient $\frac{2.dt}{1+t^2}$.

On a au final $\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{t=0}^{t \mapsto +\infty} \frac{dt}{1 - 3.x + (1+x).t^2}$. On a ça, et les points que ça rapporte.

Intégration de $\int_{t=0}^{t \mapsto +\infty} \frac{dt}{1 - 3.x + (1+x).t^2}$

D.S.5

On laisse de côté les $2/\pi$ pour l'instant.

Encore de l'application du cours. On doit chercher une forme en $\frac{1}{1+u^2}$ pour intégrer en arctangente.

On sort $1-3.x$: $\int_{t=0}^{t \mapsto +\infty} \frac{dt}{1 - 3.x + (1+x).t^2} = \frac{1}{1-3.x} \cdot \int_{t=0}^{+\infty} \frac{dt}{1 + \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-3.x}}.t\right)^2}$ et on intègre en arc-

tangente, en compensant les quantités purement numériques qui peuvent survenir : $\sqrt{(1+x)/(1-3.x)}$.

On a donc finalement $\left[\frac{1}{\sqrt{(1+x).(1-3.x)}} . \text{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-3.x}} . t \right) \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty}$. L'arctangente est nulle en 0 et sa limite à l'infini donne $\pi/2$ qui compense le $2/\pi$. Comme promis : $\varphi(x) = ((1-x).(1-3.x))^{-1/2}$ pour tout x de $] -1/3, 1/3[$.

Une équation différentielle pour φ .

D.S.5

On dérive cette puissance $-1/2$. Le $-1/2$ tombe, l'exposant devient $-3/2$. Et on a la dérivée de la quantité sous la racine : $\varphi' = x \rightarrow \frac{2+6.x}{2.(1-2.x-3.x^2)^{3/2}}$.

On multiplie par $1-2.x-3.x^2$ et on retrouve la puissance $-1/2$ du dénominateur. On a donc tout simplement : $(1-2.x-3.x^2).\varphi'(x) = (1+3.x).\varphi(x)$.

Comme cette relation est valable en tout point, on peut la dériver, et pas qu'une fois!

Combien de fois? Disons n fois, puisque la **formule de Leibniz** nous permet de le faire. Vraiment, un problème de synthèse.

Les dérivées de u et v sont vite nulles. Dès la troisième dérivation. Les seuls coefficients binomiaux utiles sont donc 1, n et $n.(n-1)/2$: $(1+3.x).\varphi^{(n)}(x) + n.3.\varphi^{(n-1)}(x) + 0 =$

$$= (1-2.x-3.x^2).\varphi^{(n+1)}(x) + n.(-2-6.x).\varphi^{(n)}(x) + \frac{n.(n-1)}{2}.(-6).\varphi^{(n-1)}(x) + 0$$

On applique en $x=0$ et il reste $\varphi^{(n+1)}(0) - 2.n.\varphi^{(n)}(0) - 3.n.(n-1).\varphi^{(n-1)}(0) = \varphi^{(n)}(0) + n.3.\varphi^{(n-1)}(0)$.

On décide de renommer les choses : $(n+1)!. \alpha_{n+1} - 2.n.n!. \alpha_n - 3.n.(n-1).(n-1)!. \alpha_{n-1} = n!. \alpha_n + n.3.(n-1)!. \alpha_{n-1}$.

On simplifie par $n!$: $(n+1).\alpha_{n+1} - 2.n.\alpha_n - 3.(n-1).\alpha_{n-1} = \alpha_n + 3.\alpha_{n-1}$ et on regroupe d'un même côté. On dirait que c'est magique, revoilà notre relation $(n+1).\alpha_{n+1} = (2.n+1).\alpha_n + 3.n.\alpha_{n-1}$.

On peut donc, juste en écrivant le développement limité en 0 de φ retrouver les a_n . Ce sont les coefficients de la partie de Taylor.

Une permutation.

D.S.5

On a $\sigma = \overrightarrow{(1 \ 3 \ 5 \ 12 \ 9)} \circ \overrightarrow{(2 \ 4 \ 7)} \circ \overrightarrow{(6 \ 11 \ 10 \ 8)}$.

La signature vaut $(-1)^{5-1}.(-1)^{3-1}.(-1)^{4-1}$ ce qui fait -1 . σ^{60} vaut Id , donc σ^{241} n'est autre que σ elle-même. C'est pour n égal à 3 que 1 retombe sur 12 et les solutions sont les n de la forme $3+5.p$ avec p entier. Et, on aura beau faire, les cycles étant indépendants, on n'aura jamais $\sigma^n(3) = 7$.

MPST2 Charlemagne

354 points

Année 2010/11

D.S.5

♠(17) On note T_n le $n^{ième}$ polynôme de Tchebitchev de première espèce, caractérisé par $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ pour tout θ .

Montrez que T'_n/n n'est autre que S_n caractérisé par $\sin(n.\theta) = \sin(\theta).S_n(\cos(\theta))$. (2 pt.) Simplifiez $n^2.(T_n)^2 + (1 - X^2).(T'_n)^2$. (2 pt.) Sachant que T_n a pour terme dominant $2^{n-1}.X^n$, donnez les coefficients de X^{10} et X^9 dans T_{11} , décomposés en produit de facteurs premiers. (4 pt.)

♥(7) Quelle est la signature de la permutation qui passe de "avoir fauché dans la caisse" à "avoir Choquet..." ? (0 pt.)

◇(5) On rappelle la quantification de u est une suite de Cauchy : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists K_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (Min(p, q) \geq K_\varepsilon) \Rightarrow (|u_p - u_q| \leq \varepsilon)$. Soit u une suite de Cauchy. On suppose que $(u_{3.n})$ converge vers λ (quantifiez). (1 pt.) Montrez que (u_n) converge. (3 pt.)

11 points

Objectif : démontrer qu'une matrice est semblable à sa transposée. On le fera "à la main" en dimension 2, et en passant par la décomposition de Frobenius en dimension 3 (généralisable aux dimensions plus grande). On rappelle la définition de "A et B sont semblables" : il existe au moins une matrice inversible P vérifiant $A = P.B.P^{-1}$. On rappelle que si A a pour terme général a_i^k , sa transposée a pour terme général $\alpha_i^k = a_k^i$. Une matrice est dite symétrique si elle est égale à sa transposée. Vous pourrez utiliser la formule ${}^t(M.N) = {}^t N.{}^t M$ (qui vous rapportera un point ou deux si en plus vous la redémontrez dans un moment où vous n'avez rien de mieux à faire).

- 1) Montrez que toute matrice de taille inférieure ou égale à 2 est semblable à sa transposée. (3 pt.)
- 2) Soit A une matrice carrée de taille n . On suppose que pour tout vecteur colonne U de taille n la famille $(U, A.U)$ est liée. Montrez qu'alors la matrice A est de la forme $\lambda.I_n$ (on pourra prendre pour U les vecteurs E_i de la base canonique, puis les vecteurs $E_i + E_j$). (3 pt.) Déduez que A est semblable à sa transposée. (1 pt.)
- 3) Sinon, voici une démonstration : toute matrice a la même trace et le même déterminant que sa transposée ; deux matrices semblables ont même trace et même déterminant ; toute matrice est donc semblable à sa transposée. Qu'en pensez vous, que pouvez vous donner comme argument ? (2 pt.)

9 points

- 1) Pour toute matrice carrée A de taille n , on appelle χ_A son polynôme caractéristique : $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda.I_n)$. Montrez que χ_A est un polynôme de degré n et donnez son terme dominant. (3 pt.)
- 2) Retrouvez les trois coefficients de χ_A quand A est une matrice carrée de taille 2. (1 pt.)
- 3) Identifiez trois des quatre coefficients de χ_A quand A est une matrice carrée de taille 3 et reconstruisez le dernier à l'aide de $Tr(A)$ et $Tr(A^2)$. (3 pt.) Comparez le aussi avec $Tr(Com(A))$, puis avec

$\det(\vec{i}, f(\vec{j}), f(\vec{k})) + \det(f(\vec{i}), \vec{j}, f(\vec{k})) + \dots$ où f est l'application $U \longrightarrow A.U$ et où $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ désignent les trois vecteurs de la base canonique $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. (2 pt.)

- 4) Montrez que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique (matrices carrées de même taille n). (3 pt.)

- 5) Déterminez le polynôme caractéristique d'une matrice de Frobenius de taille $n + 1$ définie de

la sorte $Frob(a_0, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \end{pmatrix}$ (par exemple $Frob(a, b, c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \end{pmatrix}$ et

$Frob(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & -d \end{pmatrix}$). (3 pt.) Au passage, donnez moi une formule pour le terme général

de $Frob(a_0, \dots, a_n)$. (1 pt.)

			16 points
MPSI2	Frobenius	2010/11	d.s.6

On se donne a, b, c et d quatre complexes. On note F la matrice $Frob(a, b, c, d)$ et S la matrice $\begin{pmatrix} b & c & d & 1 \\ c & d & 1 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez la matrice $F.S$ et vérifiez qu'elle est symétrique. (2 pt.) Montrez alors : toute

matrice de Frobenius est semblable à sa transposée (pour la taille n , vous me donnerez la matrice S et son déterminant). (4 pt.)

			6 points
MPSI2	Cas général	2010/11	d.s.6

- 1) Soit A une matrice carrée de taille 3. Montrez que pour tout vecteur U la famille $(U, A.U, A^2.U, A^3.U)$ est liée. (1 pt.) On suppose qu'il existe au moins un vecteur U tel que la famille $(U, A.U, A^2.U)$ soit libre. On note alors P la matrice carrée dont les trois colonnes sont $U, A.U$ et $A^2.U$. Montrez alors $A.P = P.F$ où F est une matrice de Frobenius (surtout, ne soyez pas "bas de plafond", ne redescendez pas au niveau des coefficients, travaillez avec des colonnes entières). (3 pt.) Déduisez que A est semblable à sa transposée et que l'on peut exiger que la matrice de passage soit symétrique. (3 pt.)

Il nous manque le cas : quel que soit V la famille $(V, A.V, A^2.V)$ est liée et il existe un vecteur U tel que $(U, A.U)$ est libre. C'est celui ci qu'on attaque à présent.

MPSI2 Charlemagne	403 points	Année 2010/11	d.s.6
-------------------	------------	---------------	-------

Polynômes de Tchebitchev.

d.s.6

On part de la relation $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ valable justement pour tout θ et on la dérive (sans le $\forall\theta$, ce n'est pas faisable) : $-\sin(\theta).T'_n(\cos(\theta)) = -n.\sin(n.\theta)$. On la divise par $-n$ et on reconnaît la caractérisation du polynôme S_n . On a égalité $T'_n(x)/n = S_n(x)$ pour tous les x de la forme $\cos(\theta)$ avec $\sin(\theta)$ non nul, c'est à dire pour tous les x de $] -1, 1[$. On utilise alors un **lemme d'identification : deux polynômes qui coïncident sur un intervalle ouvert sont nécessairement égaux** (leur différence est un polynôme ayant une infinité de racines). On a donc bien $T'_n/n = S_n$ (pour certains, c'est du cours...).

On part ensuite de la relation $\cos^2(n.\theta) + \sin^2(n.\theta) = 1$ et on remplace. On multiplie ensuite par n^2 pour ne pas avoir de dénominateur : $n^2.(T_n(\cos(\theta)))^2 + (1 - \cos^2(\theta)).(S_n(\cos(\theta)))^2 = n^2$. On a égalité pour tout $\cos(\theta)$ de $[-1, 1]$, on a donc égalité pour tout x de $\mathbb{R}$ et même égalité dans le domaine des polynômes.

Oubliez de citer le lemme d'identification, vous perdrez alors un point à chaque fois... Oui, c'est finalement plus facile de perdre des points que de les gagner.

Le polynôme T_{11} est donc de la forme $2^{10}.X^{11} - a.X^9 + b.X^7 - c.X^5 + d.X^3 - e.X$ pour des raisons de parité bien connues. **Le coefficient de X^{10} est donc nul.** Ensuite, on avance grâce à l'équation différentielle :

$$121.(2^{10}.X^{11} - a.X^9 + \dots)^2 + (1 - X^2).(11.2^{10}.X^{10} - 9.a.X^8 + \dots)^2 = 121$$

L'identification du coefficient de X^{22} ne nous dit rien de plus que $0 = 0$. C'est en revanche l'identification du coefficient en X^{20} qui va nous renseigner : $121.(-2.a.2^{10})$ dans le premier terme et $(11.2^{10})^2 + 2.9.a.11.2^{10}$ dans le second terme. Et bien sûr : 0 dans la somme (qui est tenue de valoir 121 tout court, sans le moindre X). On résout l'équation du premier degré $(2.9.11.2^{10} - 2.121.2^{10}).a = (11.2^{10})^2$ et on trouve $a = 11.2^8$ directement sous forme factorisée... Et sous forme développée : 2816 si sous y tenez (et vous y tenez si vous y êtes arrivés par d'autres méthodes plus lourdes).

Histoire de suites.

d.s.6

On quantifie la convergence de la suite :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists R_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq R_\varepsilon \Rightarrow |u_{3.n} - \lambda| \leq \varepsilon$ qui devient une hypothèse.

On quantifie l'objectif :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq R_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \lambda| \leq \varepsilon$

Il n'est nul besoin de distinguer des cas suivant la valeur de n modulo 3. On se contente de se dire que pour n assez grand, u_n est égal à $u_{3.n}$ à ε près par hypothèse de Cauchy tandis que $u_{3.n}$ est égal à λ aussi à ε près par hypothèse de convergence. On va donc prendre $\varepsilon/2$ pour être sûr de notre coup et n plus grand à la fois que $R_{\varepsilon/2}$ et $K_{\varepsilon/2}$.

On propose donc pour ε donné : $N_\varepsilon = \max(R_{\varepsilon/2}, K_{\varepsilon/2})$ Il est alors évident que $3.n$ est aussi plus grand que $K_{\varepsilon/2}$ et on a donc $|u_n - u_{3.n}| \leq \varepsilon/2$ (merci Cauchy) et $|u_{3.n} - \lambda| \leq \varepsilon/2$. Il nous reste juste à écrire

$|u_n - \lambda| = |u_n - u_{3.n} + u_{3.n} - \lambda| \leq |u_n - u_{3.n}| + |u_{3.n} - \lambda| \leq 2.\varepsilon/2 = \varepsilon$ et l'histoire se termine bien.

Toute matrice est semblable à sa transposée, cas triviaux.

d.s.6

Toute matrice de taille 1 est égale à sa transposée, elle lui est donc semblable avec P égale à (1) si on veut faire du zèle. Et je n'ose même pas parler de la matrice de taille 0.

On prend ensuite une matrice de taille 2 en toute généralité $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on cherche P inversible sous la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ vérifiant $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ (à traiter par conditions surtout suffisantes, ce que vous ne percevez hélas pas). Ce système dégénère très vite en système équivalent n'ayant plus que deux équations : $\beta = \gamma$ et $c.\alpha + (d-a).\beta - b.\delta = 0$.

Comme on cherche juste une solution, on peut fixer $\delta = 0$ puis $\beta = c$ et $\alpha = a - d$. On tient une matrice, on la vérifie :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-d & c \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-d & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ valable pour } c \text{ non nul (déterminant)}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & d-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & d-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ valable pour } b \text{ non nul (déterminant)}$$

Et pour b et c nuls, que fait on ? La matrice est diagonale, semblable à sa transposée car déjà égale.

La difficulté de cette question ? Purement théorique. On cherche une matrice P et pas toutes les matrices P , on peut donc faire des choix sans imaginer qu'on va se faire engueuler comme du poisson pourri.

On prend à présent une matrice de taille n ayant quand même une petite particularité : pour tout U , la famille $(U, A.U)$ est liée (c'est à dire "les deux vecteurs sont colinéaires"). Mais alors, pour U égal à E_1 premier vecteur de la base canonique de composantes $(1, 0, \dots, 0)$, on obtient que la première colonne

de A est proportionnelle à ce vecteur. C'est donc que la première colonne est de la forme $\begin{pmatrix} a_1^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Le

même raisonnement sur la deuxième colonne avec $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ conduit à une deuxième colonne de la forme

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Et ainsi de suite, jusqu'à la dernière colonne.

A ce stade, la matrice est diagonale, et donc semblable à sa transposée.

Mais on peut aller encore plus loin. Avec le vecteur $E_1 + E_2$ (en colonne : $(1, 1, 0, 0, \dots, 0)$). Son image est ${}^t(a_1^1, a_2^2, 0, 0, \dots, 0)$ Et elle doit être proportionnelle à ${}^t(1, 1, 0, 0, \dots, 0)$. On n'a donc plus le choix non plus, a_1^1 est égal à a_2^2 . On fait de même avec $E_2 + E_3$ et ainsi de suite. Tous les termes diagonaux sont égaux. La matrice est de la forme $\lambda.I_n$ avec λ réel.

La fausse preuve.

d.s.6

Posons $S =$ "être semblable à", $D =$ "avoir même trace et même déterminant". On sait donc : $(M \ S \ {}^tM) \Rightarrow (M \ D \ {}^tM)$, et c'est tout. On n'a nulle part de résultat qui dise qu'avec même trace et même déterminant deux matrices sont forcément semblables.

On a même des contre-exemples : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont même trace et même déterminant. Mais elles ne sont pas semblables (puisque $P.O.P^{-1}$ ne donne que O).

A mieux, ce qu'on peut dire, c'est que l'on n'a pas de contre-argument par la trace ou le déterminant...

Le polynôme caractéristique.

d.s.6

On le définit donc comme
$$\begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 - \lambda & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 - \lambda & \dots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix}$$
. Si on développe ce déterminant par la

grosse formule, on a une somme de produit de termes qui sont des a_i^j et des $a_k^k - \lambda$, c'est à dire des monômes en λ de degré 1. Chaque produit est au maximum de degré n et leur somme est de degré n . Mieux encore, un seul terme de la grosse formule est de degré n , c'est $(a_1^1 - \lambda) \dots (a_n^n - \lambda)$ obtenu pour σ égale à l'identité. Le polynôme est donc de degré n et son terme dominant est $(-\lambda)^n$ qui dépend de la parité de n .

Dans le cas d'une matrice de taille 2, on développe $\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix}$ et on trouve $\lambda^2 - (a+d).\lambda + (a.d - b.c)$. Les coefficients sont **la trace et le déterminant**. Il ne faut peut être pas être surpris.

Pour une matrice de taille 3 on trouve $-\lambda^3 + Tr(A).\lambda^2 - D.\lambda + \det(A)$ (pour ce qui est du terme constant, pas de gros effort, c'est directement ce qu'il reste pour λ égal à 0).

Et qui est ce nouveau venu que j'ai noté D ? C'est $a_1^1.a_2^2 - a_1^2.a_2^1 + a_2^2.a_3^3 - a_2^3.a_3^2 + a_1^1.a_3^3 - a_1^3.a_3^1$. Si on calcule les termes diagonaux de A^2 on reconnaît alors très vite $\boxed{Tr(A^2) - Tr(A)^2}$ en surveillant bien la place des parenthèses.

Et il est vrai que c'est aussi la somme des trois petits déterminants de taille 2 $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^3 \\ a_3^1 & a_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$ qu'on trouve sur la diagonale de la comatrice, sans le moindre signe moins (*diagonale oblige*). C'est bien la trace de la comatrice.

Mais on a aussi $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & 1 \end{vmatrix} = \det(f(\vec{i}), f(\vec{j}), \vec{k})$. Et il en va de même pour les deux autres déterminants...

Bref, une question de pur calcul. Du moins au niveau Sup.

On prend deux matrices semblables. Elles ont même trace et même déterminant. En taille 2 ceci suffit à leur garantir le même polynôme caractéristique. De même en taille 3 sachant que si A et B sont semblables, alors A^2 et B^2 sont semblables, ce qui leur donne la même trace. Mais en taille n ?

Simple, on part de $A = P.B.P^{-1}$ et on soustrait $\lambda.I_n$ de chaque côté. On a alors $A - \lambda.I_n = P.B.P^{-1} - \lambda.I_n = P.B.P^{-1} - \lambda.P.I_n.P^{-1} = P.(B - \lambda.I_n).P^{-1}$. On reconnaît que $A - \lambda.I_n$ et $B - \lambda.I_n$ sont semblables. Elles ont donc le même déterminant. Et ce déterminant, c'est le polynôme caractéristique.

On calcule les premiers déterminants de Frobénius (bon réflexe) :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -a \\ 1 & -b - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + b.\lambda + a \text{ et } \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -a \\ 1 & -\lambda & -b \\ 0 & 1 & -c - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - c.\lambda^2 - b.\lambda - a$$

$$\text{puis } \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -a \\ 1 & -\lambda & 0 & -b \\ 0 & 1 & -\lambda & -c \\ 0 & 0 & 1 & -d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + d.\lambda^3 + c.\lambda^2 + b.\lambda + a.$$

Le bon élève émet très vite une conjecture :

pour $F = Frob(a_0, \dots, a_n)$ ($n+1$ termes), **on a** $\chi_F(\lambda) = (-1)^{n+1}.(\lambda^{n+1} + a_n.\lambda^n + \dots + a_1.\lambda + a_0)$. Ensuite, si il redevient mauvais, il tente de la démontrer par récurrence sur n (*le réflexe d'âne : je vois un entier n , je pense récurrence*).

Le bon élève (*continuons avec lui*) pense plutôt **combinaisons**, en ayant la forme attendue en ligne de mire.

On remplace la ligne L_1 par $L_1 + \lambda.L_2 + \lambda^2.L_3 + \dots + \lambda^n.L_n$. Les coefficients s'en vont tous un par un, par des $\lambda^k.(-\lambda) + \lambda^{k+1}$. Il ne reste que le coefficient en ligne 1 colonne $n+1$, qui vaut alors $-a_0 - \lambda.a_1 - \lambda^2.a_2 - \dots - \lambda^n.(a_n + \lambda)$. On développe par rapport à la première ligne. Il ne reste que ce

coefficient, avec pour cofacteur le déterminant d'une matrice triangulaire de la forme $\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$

(ce déterminant vaut 1) et une pondération en $(-1)^{n+1+1}$ qui nous donne notre bon signe à la fin.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -a \\ 1 & -\lambda & 0 & -b \\ 0 & 1 & -\lambda & -c \\ 0 & 0 & 1 & -d-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & S \\ 1 & -\lambda & 0 & -b \\ 0 & 1 & -\lambda & -c \\ 0 & 0 & 1 & -d-\lambda \end{vmatrix} = -S \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -S \text{ avec } S = \lambda^4 + d.\lambda^3 + c.\lambda^2 + b.\lambda + a.$$

Remarque : les matrices de Frobenius sont donc bien pratiques pour construire une matrice dont le polynôme caractéristique est imposé à l'avance. Pensez y, ça sert deux ou trois fois en Spé ou aux concours, ça.

A part ça, pour un point, le terme général de la matrice $Frob(a_0, \dots, a_n)$ (de taille $n+1$) :

$$\begin{cases} -a_{i-1} & \text{si } k = n+1 \\ 1 & \text{si } i = k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ en optant pour l'indexation de lecture facile } \alpha_i^k \text{ avec } i \text{ indice de ligne et } k \text{ indice de colonne.}$$

Rendre une matrice de Frobenius semblable à sa transposée.

d.s.6

On effectue le produit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & -d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & c & d & 1 \\ c & d & 1 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 1 \\ 0 & d & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on constate que le pro-

duit est symétrique (on le constate, on ne peut rien faire d'autre, comment justifier son point ?).

On a donc : $F.S = {}^t(F.S) = {}^t S \cdot {}^t F = S \cdot {}^t F$ car S est symétrique (et parce qu'on a prouvé que la transposée du produit est bien le produit des transposées, mais en ordre inverse).

Or, S est inversible (en réordonnant les colonnes, on a une matrice triangulaire dont le déterminant vaut le produit des termes diagonaux : 1). On a une écriture de la forme $A.P = P.B$ avec P inversible, sauf qu'elles s'appellent F , S et ${}^t F$ mais ça n'y change rien. On a donc bien deux matrices semblables : F et sa transposée. Je n'y peux rien, je trouve ça un peu magique sans comprendre ce qu'il s'est passé...

En taille n , on prend pour matrice S la matrice de terme général $s_i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j = n+1 \\ a_{i+j-1} & \text{si } i+j \leq n \\ 0 & \text{si } i+j > n+1 \end{cases}$. On

la rend triangulaire en échangeant les colonnes deux à deux par $n/2$ opérations du type $C_i \leftrightarrow C_{n+1-i}$ (ou $(n-1)/2$ opérations si n est impair). Le déterminant vaut alors 1. C'est donc que le déterminant de C vaut $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$ et est bien non nul.

La matrice $F.V$ obtenue est symétrique, de terme général $\begin{cases} -a_0 & \text{si } i=j=1 \\ 0 & \text{si } i=1 \text{ ou } j=1 \\ 1 & \text{si } i+j = n+2 \\ 0 & \text{si } i+j > n+1 \\ a_{i+j-2} & \text{si } i+j < n+1 \text{ et } \min(i,j) \neq 1 \end{cases}$ le

ou de la deuxième ligne étant un ou exclusif (appliquer les formules du produit comme une brute, c'est possible, et ça rapporte des points).

On a donc $F.V = {}^t(F.V) = {}^t V \cdot {}^t F = V \cdot {}^t F$. On a notre relation de similitude entre matrices : ${}^t F = V^{-1} \cdot F \cdot V$.

Cas général pour les matrices de taille 3.

d.s.6

On prend un vecteur U et on regarde une famille de quatre vecteurs : $(U, A.U, A^2.U, A^3.U)$ (les formats sont compatibles, on peut calculer ces produits). On a quatre vecteurs... dans $\mathbb{R}^3$, la famille est liée. Il n'y a pas à chercher d'argument compliqué, c'est de l'algèbre linéaire ! On ne fait plus de gros calculs, on réfléchit. Oui, je sais, il y a si peu de jours où c'est ce qu'on vous demande... Vivement une semaine où il n'y aura que des lundis, des vendredis et des samedis.

En revanche, une famille de trois vecteurs a le droit d'être libre dans $\mathbb{R}^3$. Mais alors elle devient carrément une base. Sous l'hypothèse " $(U, A.U, A^2.U)$ libre", on a donc " $(U, A.U, A^2.U)$ base de $\mathbb{R}^3$ ". Et le vecteur $A^3.U$ se décomposera donc sur cette base d'une façon unique : $A^3.U = a.U + b.A.U + c.A^2.U$. On effectue donc le produit $A.P$ avec P formée des trois colonnes $U, A.U$ et $A^2.U$. On obtient, "en faisant tomber les colonnes sur les lignes" la matrice faite des trois colonnes $A.U, A^2.U$ et $a.U + b.A.U + c.A^2.U$.

Quand on effectue le produit $P.F$, que fait F ? Elle commence par décaler les colonnes,

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & r & -\alpha.p - \beta.q - \gamma.r \\ q' & r' & -\alpha.p' - \beta.q' - \gamma.r' \\ q'' & r'' & -\alpha.p'' - \beta.q'' - \gamma.r'' \end{pmatrix}$$

Il suffit donc de prendre pour F la matrice de Frobénius $Frob(-a, -b, -c)$ où a, b et c sont les composantes de la décomposition de $A^3.U$ sur la base P (ou plutôt $(U, A.U, A^2.U)$).

La matrice P est inversible (changement de base), et on peut donc écrire $A = P.F.P^{-1}$. La matrice A est semblable à une matrice de Frobénius.

Mais comme la matrice de Frobénius est semblable à sa transposée, on semble pouvoir conclure.

On écrit les formules $A = P.F.P^{-1}$ et $F = S.^tF.S^{-1}$. On transpose la dernière : $^tF = ^tS^{-1}.F.^tS = S^{-1}.F.S$ (S est symétrique, remercions la) et on inverse la première : $F = P^{-1}.A.P$. Ah oui, on la transpose aussi : $^tA = ^tP^{-1}.^tF.^tP$.

On n'a plus qu'à reporter les unes dans les autres :

$$^tA = ^tP^{-1}.(S^{-1}.F.S).^tP = ^tP^{-1}.(S^{-1}.(P^{-1}.A.P).S).^tP$$

et à agencer les parenthèses par associativité :

$$^tA = (^tP^{-1}.S^{-1}.P^{-1}).A.(P.S.^tP).$$

Il ne nous reste qu'à vérifier que la matrice $(^tP^{-1}.S^{-1}.P^{-1})$ est bien l'inverse de $(P.S.^tP)$. Il suffit pour cela d'effectuer leur produit. Il donne la matrice I_3 . On a donc bien détecté deux matrices semblables : A et sa transposée (je sais, j'aurais pu utiliser "être semblable à" est une relation d'équivalence).

Ah oui, un petit doute : l'inverse de la transposée, c'est la transposée de l'inverse ? Il me semble avoir utilisé ça sans le dire. Mais si vous partez de $P.P^{-1} = I_n = P^{-1}.P$ et que vous transposez, vous obtenez $^t(P^{-1}).^tP = I_3 = ^tP.^t(P^{-1})$ qui prouve bien que la transposée de l'inverse $^t(P^{-1})$ est bien l'inverse de la transposée $(^tP)^{-1}$. C'est ce qui explique qu'on note $^tP.^{-1}$ sans donner d'ordre de priorité aux deux opérations.

◇(5) Soient A, B et C trois points du plan non alignés. Que pouvez vous dire de la famille $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Soit un point M du plan.

On pose alors $\vec{u} = \text{Aire}(M, B, C) \cdot \overrightarrow{MA} + \text{Aire}(A, M, C) \cdot \overrightarrow{MB} + \text{Aire}(A, B, M) \cdot \overrightarrow{MC}$.

Calculez $\det(\vec{u}, \overrightarrow{MA})$, $\det(\vec{u}, \overrightarrow{MB})$ et $\det(\vec{u}, \overrightarrow{MC})$. (2 pt.)

Calculez $\det(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ et $\det(\vec{u}, \overrightarrow{AC})$. (2 pt.) Que pouvez vous déduire pour le vecteur $\vec{u}$? (2 pt.)

◇(6) Déduisez : $\overrightarrow{OM} = \frac{\text{Aire}(M, B, C) \cdot \overrightarrow{OA} + \text{Aire}(A, M, C) \cdot \overrightarrow{OB} + \text{Aire}(A, B, M) \cdot \overrightarrow{OC}}{\text{Aire}(A, B, C)}$. (2 pt.)

◇(7) Rappelez pourquoi les bisectrices intérieures du triangle (A, B, C) se coupent en un unique point, appelé centre du cercle inscrit (et noté I). (3 pt.) Montrez $\text{Aire}(A, B, I) = R \cdot AB/2$ où R est ... (1 pt.) Déterminez les coordonnées de I pour $A(1, 4)$, $B(2, 7)$ et $C(5, 5)$. (2 pt.)

◇(8) Un point mobile M_t décrit l'ellipse d'équation paramétrique $\begin{cases} x_t = a \cdot \cos(t) \\ y_t = b \cdot \sin(t) \end{cases}$ avec $0 < b < a$. On pose alors $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (foyers). Montrez alors $MF = a - c \cdot \cos(t)$ et vérifiez que $MF + MF'$ est constante. (3 pt.)

◇(9) Déterminez les coordonnées de I_t centre du cercle inscrit de (F, M_t, F') en fonction de t . Quelle courbe décrit ce centre du cercle inscrit? (3 pt.)

♣(9) Sans aucun rapport. Montrez que $ch(t)$ et $sh(t)$ sont tous deux rationnels si et seulement si e^t est rationnelle. (2 pt.) Déduisez qu'il y a une infinité de réels tels que leur sinus hyperbolique et leur cosinus hyperbolique soient rationnels, et donnez leur liste. (1 pt.) Retrouvez qu'il y a une infinité de points (x, y) sur le cercle unité dont les deux coordonnées sont rationnelles (vous pourrez utiliser la transformation $(X, Y) \rightarrow (1/X, Y/X)$). (2 pt.)

32 points

- 1) Le retour des matrices de VanDerMonde des racines de l'unité. On note r le complexe $\exp(2i\pi/7)$. On note V la matrice carrée de taille 7 de terme général $r^{(k-1) \cdot (n-1)}$ (k est l'indice de colonne et n l'indice de ligne). Exprimez sa trace comme polynôme en r de degré plus petit que 7. (1 pt.)

- 2) Calculez V^2 et V^4 (expliquez le calcul, même si vous l'avez déjà croisé dans un autre devoir), et rappelez la valeur de $|\det(V)|$. (4 pt.) Calculez $\det(V^2)$. (1 pt.) Déterminez V^3 et l'inverse V^{-1} de la matrice V . (3 pt.)

- 1) Soit M une matrice carrée de taille 7. On appelle vecteur propre de M tout vecteur non nul U tel que $M \cdot U$ soit colinéaire à U . Montrez que si U est vecteur propre de M alors il est aussi vecteur propre de M^2 et de M^4 . (2 pt.) A-t-on la réciproque? (je vous invite par exemple à montrer que E_1 est vecteur propre de V^2) (1 pt.)

- 2) Pour tout complexe λ , on note $E_{M, \lambda}$ l'ensemble des vecteurs U de $\mathbb{C}^7$ vérifiant $M \cdot U = \lambda \cdot U$. Montrez que $E_{M, \lambda}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{C}^7, +, \cdot)$. (2 pt.) Montrez qu'il est de dimension strictement positive si et seulement si $\det(M - \lambda \cdot I_7)$ est nul. (3 pt.) On dit que λ est une valeur propre

de M s'il existe au moins un vecteur non nul U vérifiant $M.U = \lambda.U$. Déterminez $E_{M,\lambda} \cap E_{M,\mu}$ pour λ différent de μ . (2 pt.)

19 points

- 1) Montrez que $E_1, E_2 + E_7, E_3 + E_6$ et $E_4 + E_5$ (notés dans l'ordre U_1, U_2, U_3 et U_4) sont dans $E_{(V^2),7}$. (2 pt.) Montrez que $E_2 - E_7, E_3 - E_6$ et $E_4 - E_5$ (notés dans l'ordre U_5, U_6 et U_7) sont dans $E_{(V^2),-7}$. (1 pt.) L'élève Elham Indroite (Edith Jeuljur) dit qu'on peut alors conclure $\dim(E_{(V^2),7}) = 4$ et $\dim(E_{(V^2),-7}) = 3$. A-t-elle raison? (1 pt.) S'il manque des étapes à son raisonnement, rajoutez les.

Sinon, calculez $\int_0^{25.\pi/3} |\cos(t)|.dt$. (2 pt.)

- 2) Exprimez E_1 jusqu'à E_7 à l'aide de U_1 à U_7 . (2 pt.) Montrez que $(U_1, U_2, \dots, U_7)$ est une base de C^7 (qu'on notera B) et donnez la matrice de passage de la base canonique à cette base (notée P). (2 pt.) Calculez P^{-1} . (2 pt.)

12 points

- 1) J'ai calculé pour vous $P^{-1}.V^2.P$ et j'ai trouvé une matrice diagonale. Si je vous dis juste que ses termes diagonaux sont dans l'ordre : des 7 puis des -7, vous ne devez pas être surpris. Mais combien de chaque? Trouvez la réponse en vous aidant de la trace et du déterminant voyons! (2 pt.)

- 2) Question subsidiaire. On peut trouver aussi une matrice inversible Q telle que $Q^{-1}.V.Q$ soit diagonale (je le sais, et il suffit de coller en colonnes des vecteurs propres de V formant une base de C^7). Je vous demande de trouver les termes diagonaux. (3 pt.) Retrouvez alors la valeur de la trace de V mais sous forme numérique cette fois. (2 pt.)

7 points

MPSI2	ANALYSE	2010/11	d.s.7
-------	----------------	---------	--------------

On note (E) l'équation différentielle à peu près linéaire $y''_t + |y_t| = 1$ avec condition initiale $y_0 = 2$ et $y'_0 = 0$. Résolvez (E) sur l'intervalle I défini comme étant l'intervalle le plus grand possible, contenant 0, sur lequel la solution cherchée (notée φ) reste positive. (pour un point, définissez moi proprement I en langage mathématique : $I = \{t \in \mathbb{R} \dots\}$). Calculez $\varphi(\pi/2)$, $\varphi(\pi)$. (3 pt.)

On note (F) l'équation différentielle à peu près linéaire $y''_t + |y_t| = 1$ avec condition initiale $y_0 = 3$ et $y'_0 = 1$ (solution notée ψ). Calculez $\psi(\pi/2)$, $\psi(\pi)$. (6 pt.)

9 points

MPSI2 Charlemagne	475 points	Année 2010/11	d.s.7
-------------------	------------	---------------	--------------

Géométrie. Un certain vecteur $\vec{u}$, et des barycentres.

d.s.7

La famille $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est formée de deux vecteurs indépendants, et est de bon cardinal dans le plan pour être une base.

On développe $\det(\vec{u}, \vec{MA})$ par bilinéarité du déterminant. On a trois termes :

$Aire(M, B, C) \cdot \det(\vec{MA}, \vec{MA})$, $Aire(A, M, C) \cdot \det(\vec{MB}, \vec{MA})$, et $Aire(M, B, C) \cdot \det(\vec{MA}, \vec{MC})$.

Mais le premier est nul par antisymétrie du déterminant. Le second donne le produit de deux aires : $Aire(A, M, C) \cdot 2 \cdot Aire(A, B, M)$ et le troisième donne aussi le produit de deux aires : $Aire(A, B, M) \cdot 2 \cdot Aire(M, A, C)$ (le déterminant, c'est l'aire algébrique du parallélogramme, double de l'aire du triangle). Les deux termes s'additionnent ? Non ! Au contraire ! Ils se simplifient, car les orientations sont renversées.

Résultat : **la somme des trois termes est nulle.**

On fait de même pour $\det(\vec{u}, \vec{MB})$ et $\det(\vec{u}, \vec{MC})$ même si la troisième n'est pas demandée.

Par la **relation de Chasles** et la **bilinéarité**, on développe ensuite :

$\det(\vec{u}, \vec{AB}) = \det(\vec{u}, \vec{MB}) - \det(\vec{u}, \vec{MA}) = 0 - 0 = 0$ (le réel).

On interprète : $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{AB}$.

Mais on peut faire de même avec $\det(\vec{u}, \vec{AC})$ et trouver aussi 0.

On en déduit que $\vec{u}$ est aussi colinéaire à $\vec{AC}$. Le voilà colinéaire à deux vecteurs qui eux ne le sont pas. **La seule solution est que $\vec{u}$ soit le vecteur nul.**

Avec la **relation de Chasles** encore, on écrit :

$$Aire(M, B, C) \cdot (\vec{OM} - \vec{OA}) + Aire(A, M, C) \cdot (\vec{OM} - \vec{OB}) + Aire(A, B, M) \cdot (\vec{OM} - \vec{OC}) = \vec{0}$$

On développe, on fait passer les trois termes en $\vec{OM}$ d'un même côté. Ils s'y regroupent avec coefficient "somme des trois aires". Par assemblage, cette aire n'est autre que l'aire totale du triangle (A, B, C) . Elle est non nulle (triangle non plat). On divise par cette aire, et on a donc isolé :

$$\vec{OM} = \frac{Aire(M, B, C) \cdot \vec{OA} + Aire(A, M, C) \cdot \vec{OB} + Aire(A, B, M) \cdot \vec{OC}}{Aire(A, B, C)}$$

On reconnaît ici un **barycentre**.

Tout point du plan est barycentre de A , B et C , avec pour pondérations les aires des trois triangles (aires algébriques si on autorise le point M à évoluer hors du triangle).

Si le point est sur une des droites, comme par exemple (A, B) , le coefficient suivant le dernier point est nul.

Dans le cas de l'espace, il faut quatre points, et les coefficients barycentriques sont les volumes des tétraèdres.

Triangle et centre du cercle inscrit.

d.s.7

On

passé à un cas particulier.

On se place donc dans le triangle (A, B, C) . On prend la bissectrice intérieure en A . C'est l'ensemble des points M vérifiant $\text{dist}(M, (A, B)) = \text{dist}(M, (A, C))$.

On prend aussi la bissectrice intérieure en B . C'est cette fois l'ensemble des points M vérifiant $\text{dist}(M, (B, A)) = \text{dist}(M, (B, C))$.

Ces deux bisectrices se coupent donc en un point I vérifiant $\text{dist}(I, (A, C)) = \text{dist}(I, (B, A)) = \text{dist}(I, (B, C))$. L'égalité obtenue par transitivité nous assure que I est aussi sur la bisectrice intérieure issue de C .

Les trois bisectrices sont donc concourantes en un unique point.

De plus, ce point est à égale distance des trois droites.

Si on trace donc le cercle de centre I et de rayon $\text{dist}(I, (A, B))$, il est tangent à (A, B) , mais aussi à (A, C) et à (B, C) . C'est ce qui sert de définition au centre du cercle inscrit. A ne pas confondre avec le centre du cercle circonscrit (ou plutôt "cercle circonscrivant").

On prend la formule qui le définit comme barycentre des aires :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\text{Aire}(I, B, C) \cdot \overrightarrow{OA} + \text{Aire}(A, I, C) \cdot \overrightarrow{OB} + \text{Aire}(A, B, I) \cdot \overrightarrow{OC}}{\text{Aire}(A, B, C)}$$

et on y remplace les aires par des produits "**base fois hauteur sur 2**". Mais en regardant les triangles "sous le bon angle", la base de (A, B, M) est AB et sa hauteur est R . On a donc après simplification du quotient par R (non nul) :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC}}{a + b + c}$$

C'est la formule qui nous donne donc le centre du cercle inscrit comme barycentre des trois sommets, pondéré par les longueurs des trois côtés.

Pour le triangle qui est donné comme cas particulier, il suffit de calculer les trois longueurs de côtés : $AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ et $CA = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$. Rien ne "tombe juste". Le centre du cercle inscrit a donc pour coordonnées $\frac{\sqrt{13} + 2 \cdot \sqrt{17} + 5 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{13} + \sqrt{17} + \sqrt{10}}$ et $\frac{4 \cdot \sqrt{13} + 7 \cdot \sqrt{17} + 5 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{13} + \sqrt{17} + \sqrt{10}}$

J'espère que vous n'avez pas essayé d'aborder cet exercice par une autre méthode.

Cas d'une ellipse.

d.s.7

On mesure les distances : $MF^2 = (c - a \cdot \cos(t))^2 + b^2 \cdot \sin^2(t)$.

On développe : $MF^2 = c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(t) + a^2 \cdot \cos^2(t) + b^2 \cdot \sin^2(t)$.

On remplace : $MF^2 = c^2 + a^2 \cdot \cos^2(t) - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(t) + (a^2 - c^2) \cdot \sin^2(t)$ (car on ne veut pas de b dans la réponse finale).

On regroupe : $MF^2 = c^2 \cdot (1 - \sin^2(t)) + a^2 \cdot (\cos^2(t) + \sin^2(t)) - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(t)$.

On simplifie : $MF^2 = c^2 \cdot \cos^2(t) + a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(t)$.

On identifie remarquablement : $MF^2 = (a - c \cdot \cos(t))^2$.

On passe aux racines : $MF = a - c \cdot \cos(t)$ (car déjà c est plus petit que a , donc $a \cdot \cos(t)$ est plus petit que a).

On fait de même avec F' . On a juste un signe qui change. On trouve : $MF' = a + c \cdot \cos(t)$.

On note qu'en sommant, les $c \cdot \cos(t)$ s'effacent et on retrouve la formule normalement connue : $MF + MF' = 2a$ (somme des deux longueurs aux foyers constante). C'est ce qui sert à ce qu'on appelle la construction de l'ellipse par la **méthode du jardinier**. Et aussi à la propriété acoustique ou optique des foyers.

Dernier point : le centre du cercle inscrit a des coordonnées qu'on calcule avec la formule $\overrightarrow{OI} = \frac{FF' \cdot \overrightarrow{OM}_t + M_t F' \cdot \overrightarrow{OF} + M_t F' \cdot \overrightarrow{OF'}}{MF + MF' + FF'}$

On trouve : $X_t = \frac{2 \cdot c \cdot a \cdot \cos(t) + (a - c \cdot \cos(t)) \cdot c - (a + c \cdot \cos(t)) \cdot c}{2 \cdot a + 2 \cdot c} = c \cdot \cos(t)$ et $Y_t = \frac{2 \cdot c \cdot b \cdot \sin(t) + 0 + 0}{2 \cdot a + 2 \cdot c} =$

$\frac{b.c}{a+c} \cdot \sin(t)$. Finalement, on note que I_t décrit une ellipse de même centre et de mêmes axes (mais pas de mêmes sommets évidemment) que M_t .

Sinus et cosinus hyperboliques rationnels.

d.s.7

On demande une équivalence. Commençons par un premier sens.

- Si e^t est rationnel, de la forme p/q , alors e^{-t} l'est aussi (c'est q/p) de même que leur demi-somme et leur demi-différence (stabilités de $\mathbb{Q}$ par addition et soustraction). Les sinus et cosinus hyperboliques de t sont alors rationnels tous deux ensemble.

- Réciproquement, si $ch(t)$ et $sh(t)$ sont rationnels, alors leur somme l'est (groupe additif des rationnels) et c'est justement e^t .

On a la liste des t dont les deux lignes trigonométriques sont rationnelles : les $\ln(p/q)$ avec p et q entiers strictement positifs.

On note qu'on a alors $ch(t) = \frac{p^2 + q^2}{2.p.q}$ et $sh(t) = \frac{p^2 - q^2}{2.p.q}$.

Comment en vient on alors aux triplets pythagoriciens ? Les couples hyperboliques $(ch(t), sh(t))$ sont tous sur l'hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$ et par un argument de continuité, ils en parcourent toute la branche à abscisse positive.

Qu'est ce qui fait passer de l'hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$ au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$? La transformation $x = 1/X$ et $y = Y/X$.

Vérifiez : $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{X}\right)^2 + \left(\frac{Y}{X}\right)^2 = \frac{1 + Y^2}{X^2} = \frac{X^2}{X^2} = 1$

Et cette application expédie bien les points de $\mathbb{Q}^2$ sur des points de $\mathbb{Q}^2$ (toujours les mêmes stabilités à invoquer).

La transformation réciproque $(x, y) \rightarrow (1/x, y/x)$ transforme aussi les couples rationnels en couples rationnels. Il y a donc bien équivalence.

On engendre donc les points doublement rationnels sur le demi-cercle "abscisse positive" par la formule $x = \frac{2.p.q}{p^2 + q^2}$ et $y = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$. La multiplication donne les triplets de la forme $(2.p.q, p^2 - q^2, p^2 + q^2)$ connus depuis longtemps.

Algèbre.

d.s.7

Les termes diagonaux sont $\rho^{(k^2)}$ pour k de 0 à 6, ce qui donne $r^0 + r^1 + r^4 + r^9 + r^{16} + r^{25} + r^{36}$. On simplifie modulo 7 les exposants, puisque r est racine septième de l'unité : $1 + 2.r + 2.r^2 + 2.r^4$.

Pour le calcul de V^2 .

Quand la colonne 1 tombe sur la ligne 1, on a une belle somme de sept fois le réel 1×1 , ce qui donne 7.

Quand une colonne tombe sur sa ligne "de conjugués", on a sept fois le 1 d'où un 7 dans V^2 . C'est par exemple le cas avec la colonne 2 sur la ligne 7.

Quand la colonne k tombe sur la ligne n , on a la somme des $r^{(k-1).(j-1) + (n-1).(j-1)}$ pour j de 1 à 7.

7. On l'écrit $\sum_{j=1}^7 (r(n+k-2))^{j-1}$. C'est la somme d'une série géométrique du type $\sum_{j=1}^7 R^{j-1}$. Elle se

remplace par $\frac{R - R^8}{1 - R}$ avec R différent de 1. Mais R est même une racine septième de l'unité, donc

$R^8 - R$ se simplifie, et la somme est nulle.

On trouve la matrice 7×7 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule son déterminant. On remet les colonnes dans l'ordre avant tout. Pour ce faire, on opère trois permutations simples : échange de C_2 avec C_7 , de C_3 avec C_6 et enfin de C_4 avec C_5 . La matrice devient alors $7.I_7$ de déterminant 7^7 (n'oubliez pas la multiplinéarité). Le déterminant de V^2 vaut donc -7^7 .

On élève alors rapidement V^2 au carré pour récupérer $V^4 = 49.I_7$. On passe au déterminant : $\det(V^4) = 49^7$. On en tire : $(\det(V))^4 = 49^7$ et on remonte en $|\det(V)| = 7^{7/2}$. On se souvient ensuite qu'il reste du travail pour effacer ce module et trouver l'argument de $\det(V)$.

Pour ce qui est de V^3 , on l'a en en multipliant V par V^2 (à droite ou à gauche), ce qui a pour effet de mélanger l'ordre des colonnes, simplement.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & r^6 \\ 1 & r^2 & r^4 & r^6 & r & r^3 & r^5 \\ 1 & r^3 & r^6 & r^2 & r^5 & r & r^4 \\ 1 & r^4 & r & r^5 & r^2 & r^6 & r^3 \\ 1 & r^5 & r^3 & r & r^6 & r^4 & r^2 \\ 1 & r^6 & r^5 & r^4 & r^3 & r^2 & r \end{pmatrix} \cdot 7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r^6 & r^5 & r^4 & r^3 & r^2 & r \\ 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & r^6 \\ 1 & r^2 & r^4 & r^6 & r & r^3 & r^5 \\ 1 & r^3 & r^6 & r^2 & r^5 & r & r^4 \\ 1 & r^4 & r & r^5 & r^2 & r^6 & r^3 \\ 1 & r^5 & r^3 & r & r^6 & r^4 & r^2 \end{pmatrix}$$

Et V^{-1} ? Soyez juste intelligents (mais est ce trop vous demander ?). On a $V^4 = 49.I_7$. On factorise : $V.(V^3/49) = I_7$. Ceci permet d'identifier l'inverse de V qui n'est autre que $V^3/49$. (qui a eu la crédulité de penser que je demandais ici de calculer quarante neuf déterminants de taille 6 ?)

Vecteurs propres d'une matrice.

d.s.7

On suppose qu'un vecteur non nul U est vecteur propre d'une matrice M . Le produit $M.U$ est donc de la forme $\lambda.U$ avec λ complexe.

On remultiplie par M (les formats sont compatibles) :

$$M^2.U = M.(M.U) = M.(\lambda.U) = \lambda.M.U = \lambda.\lambda.U = \lambda^2.U.$$

Bien sûr le facteur de colinéarité (qu'on va appeler "valeur propre" plus loin) n'est pas le même que pour M mais il existe. C'est tout ce qu'on demande.

On fait le même calcul pour M^4 et on trouve $M^4.U = \lambda^4.U$. On aurait pu le faire avec n'importe quelle puissance $M^n.U = \lambda^n.U$.

On n'a pas de réciproque. Pour la matrice V et le vecteur canonique E_1 (premier vecteur de base, avec un 1 suivi de six 0), on a bien $V^2.E_1 = 7.E_1$. En revanche $V.E_1$ est égal à $E_1 + E_2 + \dots + E_7$ qui n'est pas colinéaire à E_1 (sauf si $7 = 1$, maintenant, je sais éviter les pièges). Un vecteur propre de V^2 ne se remonte pas forcément en vecteur propre de V .

On note donc $E_{M,\lambda}$ l'ensemble des vecteurs vérifiant $M.U = \lambda.U$. Ce sont tous les vecteurs propres de même valeur propre λ (ainsi que le vecteur nul). C'est bien une partie de $\mathbb{C}^7$, par construction même. Supposons qu'on y prennent deux vecteurs U et V . On prend aussi deux réels α et β . On traduit l'hypothèse et on la garde dans un coin de notre esprit. On calcule ensuite :

$$M.(\alpha.U + \beta.V) = M.\alpha.U + M.\beta.V = \alpha.(M.U) + \beta.(M.V) = \alpha.\lambda.U + \beta.\lambda.V = \lambda.(\alpha.U + \beta.V)$$

On y reconnaît que le vecteur $\alpha.U + \beta.V$ est resté dans notre ensemble. Je n'oublie pas ensuite la présence du neutre : le vecteur nul. On le note O et on calcule : $M.O = O = 0.O$ (vous distinguez bien le vecteur et le complexe ?).

Pour détecter l'existence de vecteurs non nuls dans $E_{M,\lambda}$, on se demande s'il existe U non nul vérifiant $M.U = \lambda.U$. En effet, cette équation équivaut à $M.U - \lambda.U = O$ (toujours le vecteur nul).

On ne peut pas factoriser U en $(M - \lambda).U = O$ puisque M est une matrice et λ un complexe. On ne peut pas non plus simplifier par un possible U^{-1} car on ne peut inverser que les matrices carrées et pas les vecteurs (ici, je vais sabrer les copies des élèves qui finiront profs de physique), ni utiliser le lemme d'identification qui a besoin d'un $\forall$ et non d'un $\exists$.

Alors, on fait quoi ?

On factorise en $(A - \lambda.I_7).U = O$ (là, c'est correct sur les formats).

On en déduit que le déterminant de $A - \lambda.I_7$ est non nul (sinon, en multipliant par $(A - \lambda.I_7)^{-1}$ on arriverait à $U = O$).

Réciproquement, si le déterminant est nul, alors la matrice est dégénérée et il existe au moins un vecteur non nul : U vérifiant $(M - \lambda.I_7).U = O$.

Quand le déterminant d'une matrice carrée M' est nul, alors il y a une combinaison des colonnes qui donne 0 (famille liée). Il suffit de prendre alors pour composantes du vecteur U les coefficients de la combinaison.

On a bien équivalence, et donc le célèbre polynôme caractéristique $\det(M - \lambda.I_n)$ est le polynôme qui permet de détecter les valeurs propres d'une matrice. Ceci explique pourquoi on s'y intéresse si souvent.

On cherche l'intersection de deux sous-espaces propres. On résout donc le système simultané $M.U = \lambda.U$ et $M.U = \mu.U$. Il conduit déjà à $\lambda.U = \mu.U$. Comme λ est différent de μ , la seule possibilité est que U soit le vecteur nul.

Ensuite, on regarde la réciproque : le vecteur nul est dans les deux sous-espaces à la fois.

On peut conclure : $E_{M,\lambda} \cap E_{M,\mu} = \{O\}$ (ensemble réduit au seul vecteur nul) pour λ différent de μ . Au fait, qui a répondu "ensemble vide" ? Qui a oublié de mettre des accolades qui font de cette intersection un ensemble ?

Les vecteurs propres de V^2 .

d.s.7

On a juste à calculer : $V^2.E_1 = E_1$. C'est bon.

On poursuit : $V^2.E_2 = E_7$ et $V^2.E_7 = E_2$. On somme : $V^2.(E_1 + E_7) = E_7 + E_1$ et on soustrait : $V^2.(E_2 - E_7) = E_7 - E_2$.

On fait de même avec le couple $V^2.E_3 = E_6$ et $V^2.E_6 = E_3$.

On termine avec $V^2.E_4 = E_5$ et $V^2.E_5 = E_4$.

Les vecteurs U_1 à U_4 sont dans $E_{V^2,7}$. Leurs combinaisons aussi. On a donc $\text{Vect}(U_1, U_2, U_3, U_4)$ qui est inclus dans $E_{V^2,7}$. Mais on ne peut pas déduire qu'il y a égalité... A priori, l'élève a tort.

De même, on peut juste écrire $\text{Vect}(U_5, U_6, U_7) \subset E_{V^2,-7}$.

Alors quoi ? Il n'y a pas égalité ? Si !

Mais il faut compléter le raisonnement.

Il ne fallait donc pas calculer l'intégrale. Si toutefois vous l'avez fait, je vous offre la réponse pour que vous ne l'ayez pas calculée pour rien : $\int_0^{25\pi/3} |\cos(t)|.dt = 16 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. L'argument est graphique comme souvent avec les intégrales. On a en effet une intégrale de 0 à 8π qui donne 8 fois la même intégrale sur une arche entière d'aire 2. Il reste ensuite une intégrale qui coïncide avec $\int_0^{\pi/3} |\cos(t)|.dt$ et vaut $\sqrt{3}/2$.

Bon, l'élève nul en logique sera passé à côté de la question, on le savait.

L'élève laborieux en maths mais courageux aura résolu l'équation $V^2.U = U$. Elle conduit à des vecteurs de la forme ${}^t(a, b, c, d, d, c, b)$ (le t en l'air, c'est pour transposer et remettre le vecteur en colonne). On sépare en $a.U_1 + b.U_2 + c.U_3 + d.U_4$ et trouve que les vecteurs de $E_{V^2,7}$ sont dans $\text{Vect}(U_1, \dots, U_4)$ (on a ainsi prouvé le sens d'inclusion qui manquait).

On fait ensuite le même raisonnement pour prouver que les vecteurs vérifiant $V^2.U = -7.U$ sont de la forme ${}^t(0, b, c, d, -d, -c, -b)$ et sont donc dans $\text{Vect}(U_5, U_6, U_7)$.

On déduit alors qu'il y a bien égalité. L'élève avait raison, mais il manquait cette partie des équivalences (bref, l'élève tout ce qu'il y a de plus classique, qui doit même briller un peu en physique).

Mais cette preuve laisse un goût amer à l'élève matheux. Elle est trop laborieuse, basée sur une résolution menée explicitement. C'est lourd. Or, on est vendredi, et pas mercredi. Il doit y avoir moyen de faire plus esthétique (la différence est là, les physiciens se moquent de l'esthétique du raisonnement de maths, les matheux veulent une preuve la plus jolie/courte possible).

On montre que les deux familles $(U_1, \dots, U_4)$ et (U_5, U_6, U_7) sont libres (facile : elles sont extraites de la grande famille $(U_1, \dots, U_7)$ qui est une base). Les deux sous-espaces $\text{Vect}(U_1, \dots, U_4)$ et $\text{Vect}(U_5, U_6, U_7)$ sont donc de dimensions respectives 4 et 3. S'il n'y avait pas égalité des espaces comme affirmé par l'élève, on aurait donc $\dim(E_{V^2,7}) + \dim(E_{V^2,-7}) > 7$. Or, on a aussi $\dim(E_{V^2,7} \cap E_{V^2,-7}) = 0$ (intersection réduite au seul vecteur nul). La formule des dimensions (dite "formule de Grassmann") donnerait alors $\dim(E_{V^2,7} \oplus E_{V^2,-7}) > 7$. Alors même que dans $\mathbb{C}^7$ il ne peut y avoir que des sous-espaces de dimension inférieure ou égale à 7. Ainsi se termine alors ce petit raisonnement par l'absurde.

C'est un raisonnement de pure algèbre. On a remplacé les calculs laborieux (pléonasme ?) par un emboîtement rapide d'arguments élémentaires. Et on a obtenu des informations en plus. Si vous aimez ça, j'ai gagné !

Diagonalisation de V^2 .

d.s.7

On commence par reconstruire les vecteurs de la base canonique :

- $E_1 = U_1$ (facile!)
- $E_2 = (U_2 + U_5)/2$ et $E_7 = (U_2 - U_5)/2$
- $E_3 = (U_3 + U_6)/2$ et $E_6 = (U_3 - U_6)/2$
- $E_4 = (U_4 + U_7)/2$ et $E_5 = (U_4 - U_7)/2$

Mais alors, comme tout vecteur de $\mathbb{C}^7$ est combinaison linéaire de E_1 à E_7 , il s'ensuit par transitivité que tout vecteur de $\mathbb{C}^7$ est combinaison linéaire de U_1 à U_7 . La famille des U_k est donc **génératrice** de $\mathbb{C}^7$.

Comme elle a le bon cardinal, c'est une **base**. Le tout sans calculer le moindre déterminant, sans résoudre le moindre système. Mais oui, je vous le dis, en algèbre linéaire, on réfléchit avant de calculer. C'est pourquoi j'appellerai cette partie des mathématiques "euqisyhp" pour une raison que vous comprendrez, non ?

Les deux matrices de passage ? On exprime les U_i à l'aide des E_j et vice versa. Et elles sont inverse l'une de l'autre !

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vous pouvez vérifier, elles sont bien inverses l'une de l'autre.

Le calcul de $P^{-1}.V^2.P$ serait en effet un peu long et stérile (et surtout court-circuitable en voyant ces multiplications par P et P^{-1} comme un changement de base). Ce qu'on peut dire tout de suite, c'est que les deux matrices V^2 et D vont être semblables et avoir la même trace et le même déterminant, c'est à dire dans l'ordre 7 et $7^7.(-1)^3$.

Comment ai je trouvé le déterminant de V^2 ? Déjà en sortant le 7^7 par multilinéarité, puis en réordonnant les colonnes. Ou en relisant ce que j'ai déjà calculé.

Mais si il y a sur la diagonale d fois le 7 et $(7-d)$ fois le (-7) alors, la trace vaut $(2.d-7).7$ et le déterminant vaut $(-1)^{7-d}.7^7$.

d vaut donc 4 et la matrice diagonale est donc $Diag([7, 7, 7, 7, -7, -7, -7])$.

Si vous devinez que les quatre 7 viennent de $E_{V^2,7}$ avec sa base $(U_1, \dots, U_4)$ et que les trois -7 viennent de $E_{V^2,-7}$ avec sa base (U_5, U_6, U_7) , vous avez tout compris.

Diagonalisation de V .

d.s.7

On admet donc qu'il existe Q telle que $Q^{-1}.V.Q$ soit diagonale.

Qui en seront les termes diagonaux? Les valeurs propres de V . Par élévation au carré, on doit trouver les valeurs propres de V^2 , c'est à dire 7 et -7 . Il ne peut donc s'agir que de $\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}$, $i.\sqrt{7}$ et $-i.\sqrt{7}$. Mais par un argument de dimensions (traité un peu à la va-vite, admettons), les deux premières vont donner $E_{V^2,7}$. Il ne faut donc pas que leur "dimension" dépasse 4. On l'équilibre avec : double pour $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.

Pareillement, la somme des dimensions pour $i.\sqrt{7}$ et $-i.\sqrt{7}$ ne peut pas dépasser 3 (c'est le retour de "si U est vecteur propre de V alors il est aussi vecteur propre de V^2 ").

Il serait logique que la matrice diagonale soit $Diag([\sqrt{7}, \sqrt{7}, -\sqrt{7}, -\sqrt{7}, i.\sqrt{7}, i.\sqrt{7}, -i.\sqrt{7}])$ (on peut envisager de conclure avec $i.\sqrt{7}$, $-i.\sqrt{7}$, $-i.\sqrt{7}$], mais le signe de la partie imaginaire de la trace semble plus positive que négative).

Les deux matrices semblables (V et la matrice diagonale) ont la même trace. La trace de V vaut donc $i.\sqrt{7}$. On peut alors en déduire des choses sur r et trouver la forme de $\cos(2.\pi/7)$.

L'équation différentielle étrange avec sa valeur absolue : $y'' + |y| = 1$.

d.s.7

On note donc $I = \{t \in \mathbb{R} \mid \forall u \in [0, t], \varphi(u) \geq 0\}$. Cet intervalle contient bien 0 puisque $\varphi(0)$ vaut 2 qui est positif. Par un argument de continuité, la solution reste positive sur un intervalle non réduit à 0 (écrire la définition de la continuité en 0 et prendre alors ϵ égal à 1 par exemple). Sur cet intervalle, la valeur absolue s'efface, la solution reste continue, deux fois dérivable et est soumise à la condition $y'' + y = 1$.

On résout cette équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants et à second membre simple. Une solution particulière est la fonction constante égale à 1. Les solutions de l'équation à second membre identiquement nul sont des combinaisons de $t \rightarrow e^{i.t}$ et $t \rightarrow e^{-i.t}$ puisque le spectre est $\{i, -i\}$. Si on les ramène sur $\mathbb{R}$ elles sont combinaisons de sinus et cosinus. On cherche donc, sur I , une solution de la forme $A.\cos(t) + B.\sin(t) + 1$. Les conditions initiales donnent $A = 1$ et $B = 0$.

La solution sur I est donc de la forme $t \rightarrow 1 + \cos(t)$. Mais finalement, elle reste positive sur tout $\mathbb{R}$. L'intervalle I est donc égal à $\mathbb{R}$ et c'est notre solution. En $\pi/2$ elle vaut 1 et en π elle vaut 0.

Et pour l'autre équation, on commence de la même façon, avec la même définition de I et le même spectre. On n'a plus la même condition initiale. On trouve cette fois : $A = 2$ et $B = 0$. On représente graphiquement $t \rightarrow 2.\cos(t) + 1$ et on constate un petit changement. En $2.\pi/3$ cette fonction s'annule et change de signe. On ne peut donc pas la garder. L'intervalle I est donc égal à $[-2.\pi/2, 2.\pi/3]$. On a donc $\psi(\pi/2) = 1$, c'est déjà ça.

Mais ensuite? Que se passe-t-il en $2.\pi/3$? On a $\psi(2.\pi/3) = 0$ et $\psi'(2.\pi/3) = -\sqrt{3}$. Graphiquement, on constate que la solution non seulement s'annule mais aussi change de signe. On doit donc résoudre maintenant $y'' - y = 1$ sur un intervalle J sur lequel la solution reste négative.

Les solutions homogènes sont en $\alpha.e^t + \beta.e^{-t}$ et une solution particulière est -1 . On ajuste alors α et β dans $\alpha.e^t + \beta.e^{-t} - 1$ par la condition initiale en $2.\pi/3$.

Oui, la condition initiale est en $2.\pi/3$ et non plus en 0. Si vous prenez la condition en 0, c'est que vous n'avez rien compris tant en mathématiques qu'en physique. Vous êtes un auto-mate qui fait des calculs sans réfléchir? Ce genre d'objet coûte quelques dizaines d'euros, c'est tout, et c'est loin du salaire d'un ingénieur. On ne vous embauchera donc pas si un ordinateur simpliste fait le travail à votre place.

On résout donc : $\begin{cases} a.e^{2.\pi/3} + b.e^{-2.\pi/3} - 1 = 0 \\ a.e^{2.\pi/3} - b.e^{-2.\pi/3} = -\sqrt{3} \end{cases}$ et on trouve $a = (1 - \sqrt{3}).e^{-2.\pi/3}/2$ et $b = (1 + \sqrt{3}).e^{2.\pi/3}/2$.

On trouve donc : $\psi(t) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.e^{t-2.\pi/3} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.e^{2.\pi/3-t} - 1$. On peut regrouper en $ch(t - 2.\pi/3) - \sqrt{3}.sh(t - 2.\pi/3) - 1$.

La solution obtenue peut être étudiée sur un intervalle $[2.\pi/3, \dots[$ le plus grand possible, tant qu'elle reste négative. Et justement, on trouve que cette application décroît sur $[2.\pi/3, +\infty[$. Elle y reste négative définitivement. Et donc ψ est de cette forme exponentielle sur tout cet intervalle jusqu'à $+\infty$.

La valeur de ψ en π est alors $\psi(t) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.e^{\pi/3} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.e^{-\pi/3} - 1$.

MPSI2 Charlemagne

475 points

Année 2010/11

d.s.7

♠(18) Une matrice carrée A de taille p est dite idempotente si il existe au moins un entier naturel non nul n vérifiant $A^n = I_p$. Le plus petit de ces exposants s'appelle alors "indice d'idempotence de la matrice A ". Déterminez la matrice idempotente d'indice 1. Montrez qu'une matrice de taille 2 différent de $-I_2$ est idempotente d'indice 2 si et seulement si sa trace est nulle et son déterminant vaut -1 . (3 pt.)

♠(19) Calculez $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$. Donnez une matrice réelle idempotente d'indice n (n entier naturel donné) pour p égal à 2 puis pour p strictement plus grand que 2. (3 pt.)

♠(20) Deux élèves se posent la question "le produit de deux matrices idempotentes de taille p est il une matrice idempotente?" Le premier écrit $(A.B)^n = A^n.B^n = I_p.I_p = I_p$. Le second indique : "tu t'es trompé, il faut prendre le *p.p.c.m.* des exposants". Qui a raison? (4 pt.)

♠(21) Montrez pour toute matrice carrée M de taille 2 : $M^2 + \det(M).I_2 = \text{Tr}(M).M$. (théorème de Cayley-Hamilton en dimension 2). (1 pt.)

♠(22) Soit A une matrice de taille 2 à coefficients entiers, idempotente (indice n). Montrez que son déterminant vaut -1 ou 1 . (1 pt.)

Soit λ une solution (dans $\mathbb{C}$ s'il le faut) de l'équation $X^2 - \text{Tr}(A).X + \det(A) = 0$ (équation caractéristique de A). Montrez que l'équation $A.U = \lambda.U$ (d'inconnue U , vecteur complexe de taille 2 non nul) admet au moins une solution. (2 pt.) Calculez alors $A^n.U$. (2 pt.) Déduisez que $|\lambda|$ vaut 1. (1 pt.)

♠(23) Montrez que $\text{Tr}(A)$ est entre -2 et 2 . (2 pt.)

♠(24) On suppose qu'au moins une des deux racines de l'équation caractéristique de A est réelle. Montrez alors qu'il n'y a que trois spectres possibles (le spectre, c'est l'ensemble des solutions de l'équation caractéristique) (2 pt.) Montrez alors $A = I_2$ ou $A = -I_2$ ou $A^2 = I_2$. (4 pt.)

♠(25) On suppose qu'au moins une racine de l'équation caractéristique de A est non réelle. Montrez alors $\det(A) = 1$ et $\text{Tr}(A) \in -1, 0, 1$ (donnez un exemple de matrice A dans chacun des trois cas). (3 pt.)

♠(26) Déduisez : $\forall A \in M_2(\mathbb{Z}), (\exists n \in \mathbb{N}^*, A^n = I_2) \Rightarrow (A^{12} = I_2)$. (2 pt.)

◇(10) Donnez une suite récurrente homographique (c'est-à-dire de la forme $u_{n+1} = (a.u_n + b)/(c.u_n + d)$) périodique de période exactement égale à 7. (3 pt.)

33 points

On rappelle la définition des intégrales de Wallis : $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t).dt$ et on définit celles de Sillaw :

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{1/n}(t).dt \text{ (ne cherchez pas, c'est juste Wallis à l'envers).}$$

- 1) Retrouvez la relation $(n+1).W_{n+1} = n.W_{n-1}$ (intégrez par parties). (1 pt.) Retrouvez la forme de $W_{2.n}$ sous forme de produit, puis sous forme factorielle (avec des $(2.n)!$, des $n!$, des 2^n et même un

- π). (2 pt.)
- 2) Démontrez que le produit $(n+1).W_n.W_{n+1}$ est constant (et si vous le faites par récurrence sur n , sortez tout de suite je ne veux plus vous voir). (1 pt.)
- 3) Montrez que la suite W est décroissante (étudiez le signe de la différence $W_{n+1} - W_n$). (1 pt.)
- 4) En partant de l'encadrement $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$ que vous multipliez par W_n , montrez que W_n est équivalent à $\sqrt{\frac{\pi}{2.n}}$ quand n tend vers $+\infty$. (2 pt.)

7 points

- 1) Montrez que la suite (S_n) est croissante majorée. (2 pt.)
- 2) Montrez : $S_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}.J_n$ avec $J_n = \int_0^{\pi/2} t.\cos(t).\sin^{(1-n)/n}(t).dt$. (2 pt.)
- 3) On définit $f = t \rightarrow t.\cos(t)/\sin(t)$ sur $]0, \pi/2]$. Prolongez f par continuité en 0. Est elle alors dérivable en 0? Représentez graphiquement f sur $[0, \pi/2]$. f est elle bornée sur $[0, \pi/2]$? (4 pt.)
- 4) Déduisez que S_n converge vers $\pi/2$. (2 pt.)
- 1) On définit $K = \int_0^{\pi/2} f(t).dt$. Montrez : $0 \leq K - J_n \leq \frac{\pi}{2} - S_n$. (2 pt.)
- 2) Exprimez alors à l'aide de K la limite de $\left(\frac{2}{\pi}.S_n\right)^n$ quand n tend vers l'infini. (4 pt.)
- 3) Montrez (en intégrant par parties et en changeant de variable) :
- $$K = - \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)).dt = - \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x)).dx$$
- sans vous poser des questions sur l'existence de ces intégrales (oui, la fonction sous le signe somme explose à l'une des bornes pour chacune mais chacune existe). (3 pt.)
- 4) Montrez alors $2.K = - \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2.\theta)/2).d\theta$ puis $2.K = \frac{\pi.\ln(2)}{2} + K$. (4 pt.)
- 5) Calculez finalement K et la limite de $\left(\frac{2}{\pi}.\int_0^{\pi/2} \sqrt[n]{\sin(t)}.dt\right)^n$ quand n tend vers l'infini. (3 pt.)

MPSI2

COURS

2010/11

D.S.8.

[♥(8)] Formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre n pour une application f entre a et $a+h$. (2 pt.)

[♥(9)] Formulation logarithmique de l'argument sinus hyperbolique. Dérivée de l'argument sinus hyperbolique. (2 pt.)

30 points

MPSI2 Charlemagne

545 points

Année 2010/11

D.S.8.

Idempotence.

D.S.8.

La seule matrice idempotente d'indice 1 est I_p par définition même.

La matrice $-I_2$ est idempotente d'indice 2.

On prend une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $-a^2 - b.c$ égal à -1 . On élève au carré et on utilise la relation $\det(A) = -1$, on aboutit à $A^2 = I_2$.

Réciproquement, on part d'une matrice A vérifiant $A^2 = I_2$ et $A \neq I_2 \neq -A$. On passe au déterminant, on déduit que $\det(A)$ vaut 1 ou -1 (bon début). On donne un nom aux quatre coefficients $\begin{pmatrix} a^2 + b.c & b.(a+d) \\ c.(a+d) & d^2 + b.c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On discute quelques cas.

- Il y a le cas $a+d = 0$: la trace est nulle. En remplaçant a^2 par $-a.d$, on a $b.c - a.d = 1$: le déterminant vaut -1 . C'est ce qu'on voulait.

- Il y a le cas où on ne veut pas forcément que $a+d$ soit nul. Il force alors à avoir $b = c = 0$ (la matrice est diagonale). On reporte dans les informations diagonales : $a^2 = d^2 = 1$. On a quatre cas : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On élimine les deux cas extrêmes $A = I_2$ et $A = -I_2$. Et finalement, on aboutit à des matrices qui ont quand même une trace nulle et un déterminant -1 . On a prouvé l'équivalence demandée.

En notant R_α la matrice $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, le calcul direct donne $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$. En itérant : $(R_\alpha)^n = R_{n.\alpha}$. La matrice $R_{2.\pi/n}$ est alors un bon exemple de matrice idempotente d'ordre n exactement.

Quand on veut travailler en dimension 3 ou 4 par exemple, on prend $\begin{pmatrix} \cos(2.\pi/n) & -\sin(2.\pi/n) & 0 \\ \sin(2.\pi/n) & \cos(2.\pi/n) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} \cos(2.\pi/n) & -\sin(2.\pi/n) & 0 & 0 \\ \sin(2.\pi/n) & \cos(2.\pi/n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on généralise en dimension encore plus grande.

Le produit de deux matrices idempotentes.

D.S.8.

Le premier élève commet déjà une grosse bêtise : il suppose que les deux matrices qu'on se donne ont le même indice de nilpotence. Il écrit deux fois la même hypothèse en ne tenant pas compte de la quantification.

Mais le second commet aussi une erreur. Il suppose $A^p = I_n$ pour un indice p et $B^q = I_n$ pour un indice q . Lui, il quantifie proprement les hypothèses. Mais ensuite, il commet une grosse boulette : $(A.B)^k$ ne donne pas $A^k.B^k$, sauf si A et B sont permutables.

Les deux élèves ont tort.

Du moins, on sent qu'on va pouvoir dire que les deux ont tort.

Mais peut être qu'il leur manque juste un argument perdu en route. Et si finalement les matrices idempotentes étaient obligées de commuter entre elles ? Le seul argument recevable de la part d'un mathématicien digne de ce nom est le contre-exemple. On sait juste ici que leurs raisonnements ne sont pas valables.

Alles, deux matrices idempotentes : $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ (indice 3, vérifiez ou lisez la suite sur les matrices

idempotentes à coefficients entiers) et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (indice 2, là c'est facile). Leur produit est $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ qui ne sera jamais idempotente. Comment puis je le savoir? Ai-je calculé toutes ses puissances? Puis-je garantir que à la puissance 234237 elle ne donnera pas I_2 ? Oui. Ses coefficients sont strictement positifs. Ceux de ses puissances le resteront et ne pourront jamais donner I_2 qui a quand même deux coefficients nuls.

Voilà. C'était un vrai contre-exemple.

Matrices idempotentes de taille 2 à coefficients entiers.

D.S.8.

La vérification de la formule $A^2 - \text{Tr}(A).A + \det(A).I_2 = 0_2$ (matrice nulle) se fait en écrivant les quatre coefficients et en respectant bien les règles de calcul. En dimension plus grande, il y aura un résultat du même type avec le polynôme caractéristique et des coefficients longs à calculer : toute matrice carrée est "racine" de son polynôme caractéristique!

Une matrice idempotente A vérifie $A^p = I_n$. On passe au déterminant et on applique la règle "le déterminant du produit est égal au produit des déterminants". Il nous reste $\det(A)^p = 1$. Comme les coefficients de la matrice sont entiers, le déterminant est entier donc réel, et ne peut valoir que -1 ou 1 .

On veut ensuite résoudre l'équation $\begin{cases} a.x + b.y = \lambda.x \\ c.x + d.y = \lambda.y \end{cases}$ avec λ racine du polynôme caractéristique. Ce système est équivalent au système $\begin{cases} (a-\lambda).x + b.y = 0 \\ c.x + (d-\lambda).y = 0 \end{cases}$ dont le déterminant est justement nul (c'est $(a-\lambda).(d-\lambda) - b.c$). Les deux équations sont proportionnelles, on se donne la valeur qu'on veut pour x et on trouve celle de y . Le vecteur de composantes b et $\lambda - a$ est une excellente solution.

On a donc un vecteur U non nul (et même tout une droite de tels vecteurs) vérifiant $A.U = \lambda.U$. On multiplie à gauche par A (formats compatibles) : $A.A.U = A.\lambda.U = \lambda.A.U = \lambda.\lambda.U = \lambda^2.U$. En itérant l'idée, on a $\lambda^n.U = A^n.U$.

Comme on a posé $A^n = I_2$, il nous reste au bon moment : $I_2.U = \lambda^n.U$. Comme c'est une égalité entre vecteurs, et comme le vecteur U est non nul, il a au moins une composante non nulle. En se mettant au niveau de cette composante, il nous reste : $\lambda^n = 1$.

Le complexe λ est forcément une racine de l'unité.

Les valeurs propres des matrices idempotentes sont nécessairement **des** racines de l'unité. J'ai bien dit "des racines" et pas **les** racines.

Au fait, qu'est ce qui m'interdit de passer de $A.U = \lambda.U$ à U égale λ ? Le simple fait que j'aie un cerveau. Simplement l'absence de quantification du type $\forall U$ fait que ce n'est valable que pour un U (et ses multiples), localement.

Cas des racines réelles.

D.S.8.

Si les deux valeurs propres sont réelles, elles ne peuvent valoir que -1 ou 1 (réels de module 1). Mais comme ce sont les racines du polynôme caractéristique, c'est donc que celui ci ne peut pas avoir d'autre racine (il lui est impossible, en tant que polynôme à coefficients entiers donc réels d'avoir une racine réelle et une racine non réelle).

Il y a donc trois polynômes possibles : $X^2 - 1$, $X^2 - 2.X + 1$ et $X^2 + 2.X + 1$.

Mais on a montré que la matrice est annulée par son polynôme caractéristique (c'est la relation $A^2 - \text{Tr}(A).A + \det(A).I_2 = 0_2$). On a donc trois cas à étudier.

- Premier cas : $A^2 = I_2$. Sans effort on arrive à $A^{12} = I_2$.

• Deuxième cas : $A^2 - 2.A + I_2 = 0_2$. On factorise et on trouve $(A - I_2)^2 = 0_2$. On déduit alors $A - I_2 = 0_2$. Qui déduit ça ? Le mauvais élève. Celui qui prétend voir de l'intégrité dans l'ensemble des matrices. Celui qui manipule les objets formellement, sans réfléchir. Celui qui n'a pas sa place en Sup (ou alors "au premier rang et qui pose alors des questions pour remonter son retard" et pas "celui qui compte sur les matières non scientifiques ou sur ma mansuétude pour le passage en Spé").

Alors quoi ? On fait quoi de ce $A^2 = 2.A - I_2$? On le remultiplie par A et on trouve :

$$A^3 = (2.A - I_2).A = 2.A^2 - A = 2.(2.A - I_2) - A = 3.A - 2.I_2$$

puis $A^4 = (3.A - 2.I_2).A = 3.A^2 - 2.A = 3.(2.A - I_2) - 2.A = 4.A - 3.I_2$ et ainsi de suite.

Par une récurrence sur p que je ne ferai pas ici, on trouve $A^p = p.A - (p-1).I_2$ (mais vous, vous la faites).

On sort alors l'hypothèse de nilpotence : $A^n = I_2$ pour un certain n . On égalise alors : $n.A - (n-1).I_2 = I_2$. Et on simplifie : $A = I_2$.

Finalement, l'élève qui a écrit trop tôt $A = I_2$ avait raison. Mais il avait sauté les trois quarts de la preuve, ce qui ne peut pas être accepté.

• Il reste le cas $A^2 + 2.A + I_2 = 0_2$. De la même manière, on trouve $A^p = -p.A + (p-1).I_2$ pour p pair et $A^p = p.A - (p-1).I_2$ pour p impair. On égalise encore avec $A^n = I_2$ ou même avec $A^{2.n} = I_2$ pour que la formule soit facilement utilisable. On trouve alors $A = -I_2$ comme on pouvait l'espérer.

On tire un bilan : dans nos différents cas, on a : $A^2 = I_2$, $A = I_2$ ou $A = -I_2$ (mais ce ne fut pas si facile à obtenir sans bluff, d'où le nombre de points à la question).

On élève ces résultats à la puissance convenable : A^{12} est égale à I_2 .

Cas des racines non réelles.

D.S.8.

Le polynôme caractéristique est à coefficients réels, on calcule ses racines avec son discriminant. Comme il n'y a pas de racine réelle, c'est que son discriminant est négatif, et les deux racines sont complexes conjuguées. Et ce sont des complexes de module 1 comme vu auparavant.

Il s'agit donc de deux complexes de la forme $\cos \alpha + i \sin \alpha$ et $\cos \alpha - i \sin \alpha$. Mais la somme des deux valeurs propres est la trace, et leur produit est le déterminant (équation $\lambda^2 - \text{Tr}(A).\lambda + \det(A)$).

On aboutit donc à $\text{Tr}(A) = 2.\cos(\alpha)$ et $\det(A) = 1$.

Or, la trace est entière (qui a fini par oublier l'hypothèse "matrice à coefficients entiers" ?). On n'a donc pas tellement de choix : un entier entre -2 et 2 .

Seulement voilà, les valeurs -2 et 2 conduisent aux racines réelles déjà traitées -1 et 1 .

Il ne reste donc que -1 , 0 et 1 .

On donne des exemples ? On les construit en tentant sa chance, et on vérifie qu'elles sont bien nilpotentes :

- trace -1 et déterminant 1 : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ d'indice 3
- trace 0 et déterminant 1 : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'indice 4
- trace 1 et déterminant 1 : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'indice 6.

On veut aboutir au final à $A^{12} = I_2$. On y va un peu sèchement au cas par cas.

• trace -1 et déterminant 1 : $A^2 + A + I_2 = 0$ par la relation de Cayley-Hamilton. On multiplie par A et on remplace :

$$0_2 = A^3 + A^2 + A = A^3 - I_2. \text{ On déduit que } A \text{ est donc nilpotente d'indice 3.}$$

• trace 0 et déterminant 1 : on a cette fois $A^2 + I_2 = 0_2$ par théorème de Cayley-Hamilton. On déduit que A^4 est égale à I_2 .

• trace 1 et déterminant 1 : on part encore de $A^2 - A + I_2 = 0$. On isole $A^2 = A - I_2$, on multiplie : $A^3 = A^2 - A$, et on trouve $A^3 = -I^2$. On élève à nouveau au carré : $A^6 = I_2$.

C'est un peu normal tout ça. Les valeurs propres sont des racines de l'unité conjuguées dont la somme est entière. On tombe sur i avec $-i$ ou sur des couples en (j, j^2) ou $(-j, -j^2)$. La diagonalisation (c'est $M.P = P.D$) conduit à D matrice de diagonale $e^{2i.\pi/3}, e^{-2i.\pi/3}$ (ou $\pi/6$ ou $\pi/4$) et à des rotations d'angles simples. On a donc bien l'idempotence, mais avec des indices peu élevés.

	trace	déterminant	spectre	indice
	0	-1	$\{-1, -1\}$	$A = -I_2$
	2	1	$\{1, 1\}$	$A = I_2$
On dresse un bilan plus poussé, avec tous les cas obtenus	-2	1	$\{-1, -1\}$	$A = -I_2$
	-1	1	$\{j, j^2\}$	$A^3 = I_2$
	0	1	$\{i, -i\}$	$A^4 = I_2$
	1	1	$\{-j, -j^2\}$	$A^6 = I_2$

On s'offre même si il le faut un côté visuel avec les valeurs propres sur le cercle trigonométrique.

On n'oublie pas qu'on avait supposé $A^n = I_2$ (A est idempotente) pour un certain indice n . Mais finalement, ce dont on est sûr, c'est qu'il est impossible avec des coefficients entiers d'obtenir un n trop grand. Et en fait, on peut même synthétiser en $A^{12} = I_2$ en prenant le plus petit exposant commun à toutes nos possibilités...

Bref, il n'y a pas tant que ça de modèles de matrices idempotentes à coefficients entiers. En tout cas, leur indice d'idempotence ne peut dépasser 12. Ni valoir 5. Ni 7.

Une suite récurrente homographique périodique ?

D.S.8.

Si on n'a pas oublié qu'il y a un lien entre composition des homographies et multiplication matricielle, on cherche donc une matrice idempotente d'indice 7. Une matrice de rotation fait le travail demandé.

On propose donc sans effort : $x \longrightarrow \frac{\cos(2.\pi/7).x - \sin(2.\pi/7)}{\sin(2.\pi/7).x + \cos(2.\pi/7)}$.

Intégrales de Wallis.

D.S.8.

L'existence ne pose pas de problème, par continuité. Ensuite, on calcule une différence : $W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t).(\sin(t) - 1).dt$. La fonction sous le signe somme est négative, les bornes sont dans le bon sens, la différence est négative, la suite W décroît.

On intègre W_{n+1} par parties en dérivant $\sin^n$ et en intégrant le sinus qu'il reste. Le terme crochet est nul en 0 (présence de $\sin^n$) et en $\pi/2$ (terme en cosinus). Il reste donc : $W_{n+1} = 0 + \int_0^{\pi/2} n.\sin^{n-1}(t).\cos^2(t).dt$. On remplace $\cos^2$ par $1 - \sin^2$ et on sépare par linéarité : $W_{n+1} = n.(W_{n-1} - W_{n+1})$. On n'a plus qu'à isoler le terme en W_{n+1} d'un seul côté et à diviser pour obtenir la formule demandée.

Cette formule de récurrence avance de 2 en 2 et permet donc juste de calculer $W_{2.n}$ à l'aide de W_0 ou $W_{2.n+1}$ à l'aide de W_1 . Ici, on prend $W_{2.n}$ qui va donc contenir W_0 et le produit des $\frac{2.k-1}{2.k}$ par

télescopage multiplicatif. On a donc : $W_{2.n} = \frac{\prod_{k=1}^n (2.k-1)}{2.k} \frac{\pi}{2}$. On insère le produit des $2.k$ en haut aussi pour reconstruire une belle factorielle : $(2.n)!$. En bas, on a le carré de $\prod_{k=1}^n (2.k)$ qui vaut $2^n.n!$.

On termine donc : $W_{2.n} = \frac{(2.n)!}{2^{2.n+1} \cdot (n!)^2} \cdot \pi$. Un classique !

On repart de $n.W_{n-1} = (n+1).W_{n+1}$ et on multiplie de chaque côté par W_n . En posant alors $a_k = (k+1).W_k.W_{k+1}$ pour tout k , on reconnaît : $a_{n-1} = a_n$. Ceci donne sans la moindre récurrence : “la suite (a_n) est constante égale à a_0 ”.

Or, a_0 vaut $\pi/2$ (calcul de W_0 et W_1). On a donc $(n+1).W_n.W_{n+1} = \pi/2$ pour tout n .

On repart de $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$ pour tout n et on multiplie par W_n . On a alors $(W_n)^2$ entre $a_n/(n+1)$ et a_{n-1}/n . On multiplie par n et on encadre donc $n.(W_n)^2$ par $n.a_0/(n+1)$ et a_0 . On fait tendre n vers l’infini. Les deux encadrants tendent vers la même valeur : a_0 . Le théorème de l’encadrement donne la convergence de $n.(W_n)^2$ vers $\pi/2$.

C’est la définition même de $n.(W_n)^2$ est équivalent à $\pi/2$, puis de “ $(W_n)^2$ est équivalent à $\frac{\pi}{2.n}$ ” (oui, un équivalent, pas une limite, il y a du n des deux côtés), et même, en passant aux racines : W_n est équivalent à $\sqrt{\frac{\pi}{2.n}}$. Du classique à connaître, de même que le fait que les équivalents passent aux racines, produits, quotients, mais pas aux différences...

Intégrales de Sillaw (oui, c’est Wallis à l’envers, ne cherchez plus...).

D.S.8.

L’existence ne pose pas de problème, l’application intégrée est continue sur le segment.

On calcule la différence $S_{n+1} - S_n$ et on trouve l’intégrale de $\sin^{1/(n+1)}(t) \cdot (1 - \sin^{1/n \cdot (n+1)}(t))$ (distribuez, faites la somme des exposants). Même si l’exposant du second sinus est plus petit que 1, la différence dans la parenthèse est positive, la différence des intégrales est positive. La suite S croît.

La majoration fait juste appel à la majoration du sinus par 1 : S_n est entre 0 et $\pi/2$.

En tant que suite réelle croissante majorée, S converge. Mais je me garderai bien d’affirmer tout de suite que sa limite vaille $\pi/2$.

Des S_n aux J_n . L’application f .

D.S.8.

La présence de deux termes et du signe moins fait penser à une intégration par parties. Et la présence du t fait penser à “j’intègre 1 et je dérive le reste”. On intègre donc 1 et on dérive $\sin^{1/n}$. On trouve un crochet égal à $\left[t \cdot \sin^{1/n}(t) \right]_{t=0}^{t=\pi/2}$ qui vaut justement $\pi/2$. Et le terme de complément est exactement ce qu’il y a dans J_n .

Il y a peut être un problème d’existence pour J_n quand on voit que le sinus a une puissance négative. Mais on prend le temps de faire intervenir l’application f de l’énoncé. Elle est définie entre 0 et $\pi/2$ mais pas en 0. Toutefois, en 0, $\sin(t)/t$ tend vers 1 (limite d’un taux d’accroissement du sinus, indétermination usuelle), et $f(t)$ tend donc vers 1/1.

f ainsi prolongée est donc continue sur un segment, elle est bornée. On peut même dresser un tableau de variations en dérivant f . Le numérateur de $f'(t)$ est en $\cos(t) \cdot \sin(t) - t$. On l’écrit $(\sin(2.t) - 2.t)/2$ et l’inégalité de concavité $\sin(t) \leq t$ appliquée à $2.t$ donne sa négativité. f' est négative, f décroît. C’est compatible avec $f(0) = 1$ et $f(\pi/2) = 0$.

Pour sa dérivabilité en 0, on calcule l’éventuelle limite des taux d’accroissement :

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{\frac{t \cdot \cos(t)}{\sin(t)} - 1}{t} = \frac{t \cdot \cos(t) - \sin(t)}{t \cdot \sin(t)}.$$

Le dénominateur est équivalent à t^2 et le numérateur nécessite un développement limité : $t \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right) - \left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \right)$. Il est équivalent à un terme en t^3 . La différence est équivalente à $k.t^3$ avec k à préciser. Le quotient est équivalent à un terme en t et tend vers 0 quand t tend vers 0. La limite des taux d'accroissement en 0 est nulle, on a une tangente horizontale.

Pour ce qui est des manipulations sur les formes indéterminées avec les équivalents et les développements limités, il y a deux possibilités pour vous. Ou bien vous en avez le "sens physique" dans tous les sens nobles du terme, et tout se passe très bien. Ou alors vous en avez une approche du niveau "pas décollé de la Terminable" et vous passez votre temps à demander "mais qu'est ce que j'ai le droit de faire?", qui n'est pas la bonne question. C'est avec ce type de question qu'on réussit son bac, mais ce n'est pas avec ce type d'approche qu'on comprend ce qu'il se passe. Il y a des termes infiniment petits de divers ordres, il faut les voir batailler, se simplifier, dévoiler ce qu'il reste derrière.

Ah au fait, le tableau de variations est ce qu'on attend de vous pour la représentation graphique. Le tableau de valeurs est en revanche une foutaise dont je me passe allègrement. Le premier donne à voir le graphe. Le second remplace les mathématiques par un annuaire téléphonique. C'est nul !

On ré-écrit le bilan de notre intégration par parties : $S_n = \frac{\pi}{2} - \frac{J_n}{n}$. On écrit ensuite : $J_n = \int_0^{\pi/2} f(t) \cdot \sin^{1/n}(t) \cdot dt$. Grâce à notre représentation de f , on sait que cette intégrale est positive, majorée par $\pi/2$ (longueur de l'intervalle fois majorant du produit de fonctions). Par encadrement, J_n/n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Par différence, S_n converge vers $\pi/2$.

On s'en serait douté. Les sinus élevés à des puissances de plus en plus proches de 0 ont tendance à se confondre avec la fonction constante égale à 1. Mais peut on passer à la limite sur des fonctions dans une intégrale ? L'intégrale de la limite est elle la limite des intégrales ? Dans un premier temps, on répond "oui", puis on commence à se poser des questions de matheux, et le temps passe très vite.

L'intégrale K comme limite de J_n .

D.S.8.

On ne se pose pas de questions sur l'existence de K , intégrale d'application continue, et on effectue la différence qu'on met sous la forme d'une seule intégrale par linéarité :

$K - J_n$ est l'intégrale $\int_0^{\pi/2} f(t) \cdot (1 - \sin^{1/n}(t)) \cdot dt$. Or, la différence $1 - \sin^{1/n}$ est positive (le sinus est entre 0 et 1). De plus, f est positive, et les bornes sont dans le bon sens. Résultat : la différence est positive.

Mais mieux encore : f est majorée par 1 (on le sait depuis qu'on en a tracé le graphe). On multiplie par la quantité positive $(1 - \sin^{1/n})$ et on intègre. On trouve $K - J_n$ plus petit que $\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^{1/n}(t)) \cdot dt$ et dans cette différence, on reconnaît $\pi/2 - S_n$.

Or, on a prouvé que S_n converge vers $\pi/2$. Il reste donc que par encadrement, $K - J_n$ tend vers 0.

Je trouve ça très fort : J_n sert à montrer la convergence de S_n vers $\pi/2$ et ensuite, la convergence de S_n vers $\pi/2$ sert à faire converger J_n . C'est beau, l'entraide...

Convergence de $\left(\frac{2}{\pi} \cdot S_n \right)^n$.

D.S.8.

On a une belle forme indéterminée du type 1^∞ . Le nouveau modèle qu'on n'ose pas croiser en Terminale, tant il semble naturel pour les élèves que ça fasse 1. Et pourtant, dès qu'on regarde le logarithm,

les choses se compliquent. Ici, on a $n \cdot \ln(2 \cdot S_n / \pi)$ et on a donc une forme indéterminée.

On remplace S_n par $\pi/2 - J_n/n$ comme trouvé lors d'une intégration par parties, et nous voilà avec $n \cdot \ln\left(1 - \frac{2}{n \cdot \pi} \cdot J_n\right)$. Le logarithme tend vers $\ln(1)$ et la forme avoue son indétermination.

On écrit alors sous forme d'un taux d'accroissement :

$$\frac{\ln\left(1 - \frac{2 \cdot J_n}{n \cdot \pi}\right) - \ln(1)}{\frac{1}{n}} = -\frac{2 \cdot J_n}{\pi} \cdot \frac{\ln\left(1 - \frac{2 \cdot J_n}{n \cdot \pi}\right) - \ln(1)}{-\frac{2 \cdot J_n}{n \cdot \pi}}$$

Le taux d'accroissement tend vers la dérivée en 1 du logarithme : 1. Quant à J_n il tend vers K . De la sorte, la forme indéterminée tend vers $-2 \cdot K / \pi$.

L'effacement de l'exponentielle par continuité donne la convergence de la suite de l'annoncé vers $e^{-2 \cdot K / \pi}$.

On passe à l'estimation de K .

Calcul de K .

D.S.8.

On doit trouver des sinus dans un logarithme ? Précisément, quand on dérive le logarithme du sinus, on trouve la cotangente qui est dans K . On intègre par parties $\int_0^{\pi/2} t \cdot \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \cdot dt$ en dérivant le t et

en remontant en logarithme le quotient. On a un terme $\left[t \cdot \ln(\sin(t))\right]_{t \rightarrow 0}^{t=\pi/2}$. En $\pi/2$, le sinus vaut 1 et son logarithme vaut 0. En 0, la forme indéterminée $t \cdot \ln(\sin(t))$ pose problème. On la formule en $\frac{t}{\sin(t)} \cdot \sin(t) \cdot \ln(\sin(t))$. On a deux formes indéterminées classiques : le $\sin(t)/t$ a pour limite 1 et le $u \cdot \ln(u)$ a pour limite 0. Le produit a pour limite 0. Bref, le terme rectangle a disparu.

Et il reste le terme intégrale : K est égale à $-\int_0^{\pi/2} 1 \cdot \ln(\sin(t)) \cdot dt$. Comme demandé.

Et comme indiqué, il y a un problème en 0 à cause de $\ln(\sin(t))$ qui "explose". Mais elle n'explose pas trop vite. Par exemple $\ln(t)$ s'intègre en $t \cdot \ln(t) - t$ et cette primitive a une limite en 0. C'est ainsi qu'on peut écrire

$$\int_0^1 \ln(t) \cdot dt = \left[t \cdot \ln(t) - t\right]_{t \rightarrow 0}^{t=1} = -1.$$

On effectue ensuite un changement de variable. Le sinus doit partir au profit d'un cosinus ! C'est des échanges en $\pi/2 - t$, ça !

On part de $\int_{t \rightarrow 0}^{t=\pi/2} \ln(\sin(t)) \cdot dt$ et on change de variable en $x = \pi/2 - t$. On change les bornes (de $\pi/2$ à 0), l'élément intégré (de $\ln(\sin(t))$ à $\ln(\cos(x))$) et l'élément différentiel (de dt à $-dx$). Le signe moins qui vient ici est effacé par la remise des bornes dans le bon sens, et on arrive à

$$\int_{x=0} x \mapsto \pi/2 \ln(\cos(x)) \cdot dx.$$

On somme les deux formules ? Après tout, dans les deux cas, on a une variable qui va de 0 à $\pi/2$. Certes, sur l'une elle s'appelle x et sur l'autre elle s'appelle t . Et alors ? C'est juste un nom qui sert à calculer l'intégrale. Une intégrale est une aire et pas une formule avec des x et des t .

$$\text{On somme donc : } 2 \cdot K = \int_{u=0}^{\pi/2} \ln(\sin(u)) \cdot du + \int_{u=0}^{\pi/2} \ln(\cos(u)) \cdot du = \int_{u=0}^{\pi/2} \ln(\sin(u) \cdot \cos(u)) \cdot du$$

C'est l'intégrale de $\ln(\sin(2 \cdot u)/2)$ avec un soupçon de trigonométrie.

Avec la propriété du logarithme, on peut séparer en intégrale de $\ln(\sin(2 \cdot u))$ (signe cohérent sur $[0, \pi/2]$) et de $-\ln(2)$.

On a donc : $2 \cdot K = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2 \cdot u)) \cdot du - \frac{\ln(2) \cdot \pi}{2}$ (intégrale d'une fonction constante, c'est l'aire d'un rectangle, n'allez pas me chercher des primitives, vous êtes là pour prouver votre intelligence...).

On change de variable dans $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2u)).du$? On y pose $\theta = 2u$. Les bornes deviennent 0 et π , l'élément différentiel devient $d\theta/2$ et enfin la fonction intégrée devient $\ln(\sin(\theta))$.

On y est presque : $2.K = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} \ln(\sin(\theta)).d\theta - \frac{\pi \cdot \ln(2)}{2}$.

Et l'exercice ne va pas tarder à se terminer. On coupe cette nouvelle intégrale en deux parts égales : de 0 à $\pi/2$ puis de $\pi/2$ à π .

Du progrès : $2.K = \frac{1}{2} \cdot \left(K + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\theta)).d\theta \right) - \frac{\pi \cdot \ln(2)}{2}$

Mais que fait le sinus de $\pi/2$ à π ? La même chose que de 0 à $\pi/2$ mais en sens inverse. C'est dire que l'intégrale doit être la même que celle de 0 à $\pi/2$ c'est à dire K . On fait encore (encore et encore) un changement de variable en posant $\beta = \pi - \theta$. Les bornes retombent en 0 et $\pi/2$. L'élément différentiel remet le signe qui est sorti à cause du renversement des bornes. Bref, on arrive vite à $2.K = \frac{1}{2} \cdot (K + K) - \frac{\pi \cdot \ln(2)}{2}$.

Superbe ! Tout ne se simplifie pas ! Il reste un K . On a donc : $K = -\frac{\pi \cdot \ln(2)}{2} = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)).dt$
C'est un classique, à connaître aussi en fin de Spé quand approchent les concours.

Pour ce qui est de $\left(\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt[n]{\sin(t)}.dt \right)^n$ on lui trouve pour limite 1/2 une fois qu'on a perdu les $\pi/2$ avec les $2/\pi$ et qu'on est passé à l'exponentielle.

MPSI2 Charlemagne

545 points

Année 2010/11

D.S.8.

Lycée Charlemagne

Vendredi février

Année 2010/11

D.S.9.

MPSI2

EXERCICES

2010/11

D.S.9.

♠(27) Calculez la somme des puissances dixièmes de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ d'inconnue x .

◇(11) Soit f donnée, on pose : $a_n = f(\sqrt{n+1}) - f(\sqrt{n})$ pour tout n et on note A la série associée à a ($A_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k$). Etudiez la convergence de a et A dans les cas suivants : $f = t \rightarrow \cos(\pi.t)$, $f = ch$ et enfin $f = t \rightarrow (t+1)^\alpha$ (avec α valant $1/2$, puis -1).

♣(10) Exercice avec des taches. Du café a caché des coefficients de ma matrice de taille 3 :

$$M = \begin{pmatrix} 41 & -20 & \star \\ 6 & -2 & \circ \\ 20 & \bullet & -37 \end{pmatrix}$$
. Je sais juste qu'elle est diagonalisable (il existe P inversible et D diagonale vérifiant $M.P = P.D$), et je connais trois traces : $Tr(M^2) = 14$ et $Tr(M^{-1}) = 5/6$. Calculez $Tr(M^{10})$. Calculez le coefficients qui manquent.

MPSI2 Charlemagne

545 points

Année 2010/11

D.S.9.

La matrice $\begin{pmatrix} 41 & -20 & -76 \\ 6 & -2 & -12 \\ 20 & -10 & -37 \end{pmatrix}$.

D.S.9.

C'est avant tout un exercice pour gens intelligents. Des mathématiques, pas du gros calcul de bourrin. Ceux qui foncent dans des calculs de c.. vont perdre leur temps. Ceux qui réfléchissent d'abord vont aller loin.

On a un indice : $M = P.D.P^{-1}$ avec D diagonalisable. Classiquement, on déduit $Tr(M) = Tr(P.D.P^{-1}) = Tr(P^{-1}.P.D) = Tr(D)$ par la propriété de la trace ($Tr(A.B) = Tr(B.A)$). Mais on a aussi $M^n = P.D^n.P^{-1}$ par récurrence sur n (ou même pour des raisons plus profondes qu'on comprendra bientôt bien mieux). Les matrices M^n et D^n sont semblables et ont donc la même trace. Y compris pour n égal à -1 (on a en effet $M^{-1} = (P^{-1})^{-1}.D^{-1}.P^{-1} = P.D^{-1}.P^{-1}$).

On connaît donc la trace de D , de D^2 et de D^{-1} . Mais on a très vite aussi $D = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3)^{-1} \end{pmatrix}$

en notant tout naturellement λ_k les trois valeurs propres.

On a donc trois informations sur les λ_k : leur somme, la somme de leurs carrés et la somme de leurs inverses. On note $X^3 - s.X^2 + d.X - p$ le polynôme $(X - \lambda_1).(X - \lambda_2).(X - \lambda_3)$. On a donc : $s = 2$ (trace de D), $s^2 - 2.d = 14$ (somme des carrés des racines) et $\frac{d}{p} = \frac{5}{6}$ (somme des inverses). On trouve donc ce polynôme, c'est $X^3 - 2.X - 5.X + 6$.

Il a une racine évidente, c'est 1. On le factorise en $(X - 1).(X^2 - X - 6)$ puis en $(X - 1).(X + 2).(X - 3)$. On tient les trois termes diagonaux de D .

On déduit alors $D^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{pmatrix}$. On passe à la trace pour D^{10} et pour la matrice semblable M^{10} : $Tr(M^{10}) = 2^{10} + 3^{10} + 1$. Si on fait l'effort inutile de faire le calcul, on trouve 60.074.

On passe ensuite à l'autre phase avec les coefficients qui manquent. C'est dans cet ordre que je propose de traiter l'exercice.

On note a , b et c les trois coefficients qui manquent : $M = \begin{pmatrix} 41 & -20 & a \\ 6 & -2 & b \\ 20 & c & -37 \end{pmatrix}$, c'est plus pratique que

des étoiles sous une tache.

Les trois termes diagonaux de M^2 sont déjà assez laids : $20.a + 1561$, $b.c - 116$ et $b.c + 20.a + 1369$. On trouve donc : $20.a + b.c = -1400$ (pas emballant).

Des suites en $f(\sqrt{n+1}) - f(\sqrt{n})$.

D.S.9.

Une remarque idiote déjà : les sommes des séries $\sum_{k=0}^{k=n} a_k$ sont télescopiques et donnent $f(\sqrt{n+1}) - f(0)$.

Il devient aisé de tester pour elles la convergence. Le réel $f(0)$ est une constante numérique qui n'a aucune influence dans l'existence de limite.

- Pour le cosinus hyperbolique : divergence vers $+\infty$.
- Pour l'arctangente : convergence vers $\pi/2$.
- Pour la cosinus, divergence, pas du tout de limite. En effet, la suite $(\cos(\pi.2.k) - 1)_k$ de valeur 0 et de limite 1 est extraite de notre suite dans le cas $n = 4.k^2 - 1$ avec k entier. Dans le même temps, la suite

$(\cos(\pi.(2.k+1)) - 1)_k$ de valeur 0 et de limite 1 est extraite de notre suite dans le cas $n = 4.k^2 + 4.k$ avec k entier. On a deux sous-suites n'ayant pas la même limite, la suite $(\cos(\pi.\sqrt{n+1}) - 1)_n$ ne peut pas converger.

- Pour la puissance -1 , on a convergence, vers 1.
- Pour la puissance $1/2$, on a divergence vers $+\infty$.

Passons à ce qui nous motive un peu plus, les différences en $f(\sqrt{n+1}) - f(\sqrt{n})$, en commençant par les cas simples.

- Pour l'arctange, on a convergence vers $\pi/2 - \pi/2$ c'est à dire vers 0.
- Pour $t \longrightarrow 1/t$, c'est rapide aussi, on a convergence vers $0 - 0$, qu'on note aussi 0.
- Pour la racine carrée on a une indétermination qu'on lève avec la quantité conjuguée : $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Toute cette chose tend vers 0, on la remercie (la fonction racine tend vers l'infini, mais ses accroissements tendent vers 0).
- Pour le cosinus, il faut faire un peu de trigonométrie : $\cos(p) - \cos(q)$ se transforme en $2.\sin\left(\frac{q-p}{2}\right).\sin\left(\frac{q+p}{2}\right)$.

[♥(10)] Montrez que $x \rightarrow \int_0^x \frac{dt}{1+t+2.t^4}$ est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. (3 pt.)
Donnez son sens de variations et son signe sur $\mathbb{R}$. (2 pt.)

[♥(11)] On suppose qu'on a une norme N dans le plan telle que $\vec{i}$ et $\vec{i} + \vec{j}$ aient pour normes respectives $\sqrt{2}$ et 1 et pour produit scalaire 1. Calculez alors

- une mesure de l'angle qui les sépare,
- la norme de $\vec{j}$,
- une mesure de l'angle entre $\vec{i}$ et $\vec{j}$. (4 pt.)

Déterminez deux vecteurs formant une base orthonormée pour cette norme. (3 pt.)

[♣(11)] Soit σ un cycle $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et Π la permutation $\tau_{a,b}$. Décomposez $\Pi \circ \sigma$ en produit de cycles de supports disjoints, en distinguant les cas (suivant que a et b sont membres des α_i). (5 pt.)

17 points

[♠(28)] u_0 est donné strictement positif. On définit la suite u par $u_{n+1} = 2.u_n + 2.\sqrt{u_n.(1+u_n)}$. vérifiez son existence. Etudiez ses variations, sa convergence. (2 pt.)

[♠(29)] On note f l'application $x \rightarrow \frac{1}{x.\sqrt{1+x}}$ et φ l'application $x \rightarrow 2.x + 2.\sqrt{x.(1+x)}$. Montrez $2.\varphi'(t).f(\varphi(t)) = f(t)$ pour tout t de $\mathbb{R}^{+*}$. (3 pt.)

[♠(30)] Effectuez le changement de variable $t = \varphi(u)$ dans l'intégrale $\int_a^b f(t).dt$ (a et b donnés). (2 pt.)

[♠(31)] Déduisez $\int_{u_n}^{+\infty} f(x).dx = 2. \int_{u_{n+1}}^{+\infty} f(x).dx$ pour tout n de $\mathbb{N}$. (2 pt.)

[♠(32)] Exprimez alors $\int_{u_n}^{+\infty} f(t).dt$ à l'aide de $\int_{u_0}^{+\infty} f(t).dt$. Calculez cette dernière intégrale en effectuant le changement de variable $t = \sqrt{1+x}$. (3 pt.)

[♠(33)] Calculez $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t.\sqrt{t}}$, notée $g(x)$. (1 pt.)

[♠(34)] Montrez $0 \leq \frac{1}{t.\sqrt{t}} - f(t) \leq \frac{1}{2.t^2.\sqrt{t}}$ pour tout t de $]0, +\infty[$. Déduisez : $0 \leq g(x) - \int_x^{+\infty} f(t).dt \leq \frac{1}{3.x^{3/2}}$ pour tout x strictement positif. (2 pt.) Trouvez A et α tels que $\int_x^{+\infty} f(t).dt$ soit équivalent à $A.x^\alpha$ quand x tend vers $+\infty$. (2 pt.)

[♠(35)] Donnez un équivalent de u_n de la forme $B.\beta^n$ quand n tend vers $+\infty$. (2 pt.)

Source : oral des C.C.P.

19 points

On s'intéresse à la question de savoir si une matrice admet des racines carrées, cubiques ou autres. C'est à dire que A est une matrice carrée donnée, et k un entier naturel non nul donné ; on cherche B de même format que A vérifiant $B^k = A$. On va travailler avec des matrices à coefficients réels.

Les différentes parties sont très indépendantes.

- 1) Calculer $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^n$ et $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}^n$. 3 pt.
- 2) Montrez que si B est une racine k^{ieme} de la matrice A , alors $A.B$ est égal à $B.A$. 2 pt. Montrez que si D est une matrice diagonale à coefficients diagonaux tous distincts, ses racines k^{iemes} sont aussi diagonales. 3 pt.
- 3) Montrez qu'une matrice peut avoir une infinité de racines carrées. 1 pt.
- 4) Montrez que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de racines carrées. 3 pt.
- 5) Montrez que si A admet des racines k^{iemes} , alors toute matrice semblable à A (de la forme $P^{-1}.A.P$) admet des racines k^{iemes} . 2 pt.

- 1) Soit A une matrice réelle symétrique de taille 2. Montrez que son spectre est réel. 2 pt.
- 2) Montrez que A est diagonalisable et qu'on peut choisir P du type "matrice de rotation". 2 pt.
- 3) Montrez que A admet des racines k^{iemes} pour tout k impair. 2 pt. Montrez que A admet des racines k^{iemes} pour k pair si et seulement si son déterminant est positif. 2 pt.

- 1) On note E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et Δ est l'application dérivation. Déterminez son noyau noté $Ker(\Delta)$ (le noyau d'une application linéaire φ de E dans F , espaces vectoriels, est $Ker(\varphi) = \{\vec{u} \in E | \varphi(\vec{u}) = \vec{0}\}$). 1 pt.
- 2) On suppose que Δ admet une racine k^{ieme} notée δ . Montrez qu'alors $Ker(\delta)$ est inclus dans $Ker(\Delta)$. 2 pt.
- 3) Quelles sont les valeurs possibles pour la dimension de $Ker(\delta)$? 1 pt.
- 4) Montrez que si $Ker(\delta)$ est de dimension 0, alors δ est injectif, et Δ aussi; concluez dans ce cas. 3 pt.
- 5) Montrez que si $Ker(\delta)$ est de dimension 1 alors il est égal à $Ker(\Delta)$ et déduisez $Ker(\Delta \circ \Delta) = Ker(\Delta)$; concluez aussi dans ce cas. Que peut on dire des racines de la dérivation? 4 pt.

- 1) Montrez que les applications $(\cos^3, \cos^2 \cdot \sin, \cos \cdot \sin^2, \sin^3)$ forment une famille libre, notée B . 3 pt.
- 2) On note S l'espace vectoriel engendré; quelle est sa dimension? 1 pt. Montrez que la dérivation (notée Δ) est une application linéaire de S dans S . 2 pt.
- 3) On prend l'application $f = a \cdot \cos^3 + b \cdot \cos^2 \cdot \sin + c \cdot \cos \cdot \sin^2 + d \cdot \sin^3$ (composantes (a, b, c, d) sur la base B). Exprimez les composantes de sa dérivée f' sur la base B . 1 pt. Trouvez la matrice M qui permet de passer des quatre composantes de f aux quatre composantes de f' : $X' = M.X$. 2 pt. Calculez son déterminant, sa trace et son polynôme caractéristique (c'est $det(M - \lambda.I_4)$). 2 pt.
- 4) Montrez que $\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6} + 3\sqrt{2} & \sqrt{6} + \sqrt{2} & \sqrt{2} - \sqrt{6} & -\sqrt{6} + 3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} & 3\sqrt{6} + \sqrt{2} & 3\sqrt{6} - \sqrt{2} & -3\sqrt{6} + 3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{6} + 3\sqrt{2} & -3\sqrt{6} + \sqrt{2} & 3\sqrt{6} + \sqrt{2} & 3\sqrt{6} + 3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} - 3\sqrt{2} & -\sqrt{6} + \sqrt{2} & -\sqrt{2} - \sqrt{6} & \sqrt{6} + 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est une racine carrée de M et calculez son déterminant (il y aurait donc, sur cet espace S une racine carrée de la dérivation). 3 pt.

			47 points
MPSI2 Charlemagne	628 points	Année 2010/11	D.S.10

Une application lipschitzienne.

D.S.10

Déjà, est ce que l'application "intégrale fonction de la borne supérieure" $x \rightarrow \int_0^x \frac{dt}{1+t+2.t^4}$ (notée F) est bien définie partout ? On intègre de 0 à x une application qui pourrait poser un problème d'explosion... Le dénominateur peut il s'annuler sur $[0, x]$?

On étudie le polynôme $t \rightarrow 1+t+2.t^4$ de dérivée $t \rightarrow 1+8.t^3$ (qui s'annule en $-1/2$). Son minimum vaut alors $5/8$. Ce polynôme ne s'annule jamais, il reste strictement positif.

Pour tout x , l'application $t \rightarrow \frac{1}{1+t+2.t^4}$ est continue sur $[0, x]$, donc intégrable. $F(x)$ existe pour tout x (phrase débile : "existe pour tout t ", puisque t est variable muette).

F est croissante. On le montre au marteau pilon avec le signe de sa dérivée $x \rightarrow \frac{1}{1+x+2.x^4}$: positive. Proprement, on le montre avec le calcul du signe de $F(y) - F(x)$ pour y plus grand que x . Justement $F(y) - F(x)$ est égal à $\int_x^y \frac{dt}{1+t+2.t^4}$, positif comme intégrale d'une application positive sur un intervalle pris dans le sens croissant.

F est nulle en 0, et croissante. Elle est donc négative avant 0, puis positive après 0. C'est normal, on intègre une application positive sur un intervalle pris dans le sens décroissant ou croissant.

Passons au caractère lipschitzien. Au bull-dozer là encore : l'application F est dérivable et sa dérivée est bornée par 0 et $8/5$, or le théorème des accroissements finis permet de passer de "dérivée bornée" à "lipschitzienne".

Plus efficace : on encadre $\frac{1}{1+t+2.t^4}$ par 0 et $5/8$. Ceci permet d'encadrer la différence $F(y) - F(x)$ par $5.|y-x|/8$ et son opposé (suivant le sens de l'intervalle). On identifie une application lipschitzienne de rapport $5/8$.

F admet deux asymptotes horizontales à l'infini, dont je n'irai pas chercher la valeur car je n'ai aucune envie de calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t+2.t^4}$.

La composée d'une transposition et d'un cycle.

D.S.10

On doit bien distinguer quelques cas, suivant que a et b (éléments de la transposition Π) font ou non partie des α_k .

• Ni a ni b n'est un des α_k . On a alors deux cycles de supports disjoints. La décomposition est faite : $\Pi \circ \sigma = \overrightarrow{(a, b)} \circ \overrightarrow{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$.

• a est dans le cycle σ et b ne l'est pas. Comme on peut commencer la lecture d'un cycle par l'élément que l'on veut, on va supposer que a est le premier élément α_1 . On suit alors à la trace les éléments par $\Pi \circ \sigma$. Par exemple, on a $\Pi(\sigma(a)) = \Pi(\alpha_2) = \alpha_2$, $\Pi(\sigma(\alpha_2)) = \Pi(\alpha_3) = \alpha_3$, $\Pi(\sigma(\alpha_{n-1})) = \Pi(\alpha_n) = \alpha_n$, $\Pi(\sigma(\alpha_n)) = \Pi(a) = b$, $\Pi(\sigma(b)) = \Pi(b) = a$. Les autres éléments de notre ensemble ne sont pas concernés : $\Pi \circ \sigma = \overrightarrow{(a, b)} \circ \overrightarrow{(a, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} = \overrightarrow{(a, \alpha_2, \dots, \alpha_n, b)}$. On a incorporé b dans le cycle qui a grandi d'une unité.

• b est dans le cycle mais pas a . Par symétrie des rôles de a et b , on déduit que a vient s'insérer dans le cycle, juste à côté de b .

- a et b sont deux éléments contigus du cycle. Leurs rôles sont symétriques, et comme on peut entamer le cycle par le bout qu'on veut, on écrit $\Pi \circ \sigma = \overrightarrow{(a, b)} \circ \overrightarrow{(a, b, \alpha_3, \dots, \alpha_n)} = \overrightarrow{(b, \alpha_3, \dots, \alpha_n)}$ en suivant la trace des éléments. L'élément a "sort du cycle".

- a et b sont deux éléments non contigus du cycle. Cette fois, toujours avec la même méthode, en suivant à la trace les éléments, on voit le cycle se couper en deux cycles : $\Pi \circ \sigma = \overrightarrow{(a, b)} \circ \overrightarrow{(a, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, b, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)} = \overrightarrow{(a, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})} \circ \overrightarrow{(b, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)}$.

On peut aussi faire les raisonnements sur des cycles représentés encore plus visuellement. Ce qu'il faut, c'est faire des raisonnements, pas des calculs. Ah bon ? Je ne savais pas avant de venir.

Une norme sur $\mathbb{R}^2$.

D.S.10

Oui, on ne prend pas la norme usuelle. On va la noter N et on notera ϕ le produit scalaire associé. Pour ce qui est de l'angle, on le note α et on a $\cos(\alpha) = \frac{\phi(\vec{i}, \vec{i} + \vec{j})}{N(\vec{i}) \cdot N(\vec{i} + \vec{j})} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}}$. On identifie un angle de $\pi/4$ (ou son opposé, faute d'orientation).

Ensuite, on isole $N(\vec{j})^2 = \phi(\vec{j}, \vec{j}) = \phi((\vec{i} + \vec{j}) - \vec{i}, (\vec{i} + \vec{j}) - \vec{i}) = N(\vec{i} + \vec{j})^2 + N(\vec{i})^2 - 2 \cdot \phi(\vec{i} + \vec{j}, \vec{i})$. Il reste $N(\vec{j})^2 = 1 + 2 - 2 = 1$.

On poursuit : $\phi(\vec{i}, \vec{j}) = \phi(\vec{i}, \vec{i} + \vec{j}) - \phi(\vec{i}, \vec{i}) = -1$. On effectue le quotient : $\cos(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. L'angle est $3\pi/4$.

Pour qui en aura besoin : la norme de $x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ vaut $\sqrt{2x^2 + y^2 - 2xy}$. Pourquoi pas !

On cherche maintenant une **base orthonormée**. On peut prendre comme premier vecteur $\vec{j}$ car il a le bon goût d'être de norme 1. On cherche ensuite un vecteur qui lui soit orthogonal pour ce produit scalaire.

On exige donc $\phi(\vec{j}, a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}) = 0$. On obtient $-a + b = 0$. Le vecteur $\vec{i} + \vec{j}$ est orthogonal à $\vec{j}$ pour ce produit scalaire. Et il est normé. On peut donc garder la base $(\vec{j}, \vec{i} + \vec{j})$ (c'est bien une base, car il s'agit de deux vecteurs non colinéaires dans le plan).

Si on prend pour premier vecteur $\vec{i}$, la recherche de vecteur orthogonal conduit à $\vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$ et ses multiples. Comme ensuite on veut un vecteur normé, il suffit de diviser par la norme de ce dernier (mais oui, tiens ! c'est logique). On tombera alors sur $(\frac{\vec{i}}{\sqrt{2}}, \frac{\vec{i} + 2 \cdot \vec{j}}{\sqrt{2}})$.

La suite $u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 2 \cdot \sqrt{u_n \cdot (1 + u_n)}$.

D.S.10

On ne cherche même pas les intervalles stables. On voit tout de suite que si le premier terme de la suite est positif, les suivants le sont aussi (*réurrence sur n*). Mais alors, pour tout n , on a $u_{n+1} \geq 2 \cdot u_n \geq u_n$. La suite est croissante. Si elle convergeait, sa limite serait un réel strictement positif vérifiant $L = 2 \cdot L + 2 \cdot \sqrt{L \cdot (1 + L)}$, ce qui n'existe pas. Elle n'a donc pas le choix, elle fuit vers $+\infty$. D'ailleurs, la minoration $u_{n+1} \geq 2 \cdot u_n$ conduit à $u_n \geq 2^n \cdot u_0$ et fait **diverger cette suite vers $+\infty$** .

Pour la relation liant $\varphi'(t)$, $f(t)$ et $f(\varphi(t))$, on commence par dériver φ . On trouve (sur $]0, +\infty[$) :

$$\varphi'(t) = 2 + \frac{1 + 2t}{\sqrt{t \cdot (1 + t)}} = \frac{2 \cdot \sqrt{t \cdot (1 + t)} + (1 + t) + t}{\sqrt{t \cdot (1 + t)}} = \frac{(\sqrt{t} + \sqrt{1 + t})^2}{\sqrt{t \cdot (1 + t)}} \quad (\text{il faut la flairer un peu l'identité remarquable au numérateur, mais ça ne me semble pas le bout du monde...})$$

On exploite la même idée pour $1 + \varphi(t)$ qui est égal à $1 + 2t + 2 \cdot \sqrt{t \cdot (1 + t)}$ et est donc le carré suivant : $(\sqrt{t} + \sqrt{1 + t})^2$. Sa racine est donc $\sqrt{t} + \sqrt{1 + t}$ (tout est positif).

On simplifie donc : $f(\varphi(t)) = \frac{1}{\varphi(t) \cdot \sqrt{1+\varphi(t)}} = \frac{1}{\varphi(t) \cdot (\sqrt{t} + \sqrt{1+t})}$.

On multiplie par $\varphi'(t)$ et il reste $\varphi'(t) \cdot f(\varphi(t)) = \frac{1}{\varphi(t)} \cdot \frac{\sqrt{1+t} + \sqrt{t}}{\sqrt{t} \cdot (1+t)}$.

On efface les racines du numérateur par la quantité conjuguée (*on ne pense jamais assez à elle...*) :

$$\varphi'(t) \cdot f(\varphi(t)) = \frac{1+t-t}{\varphi(t)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t}-\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t} \cdot (1+t)}.$$

Il ne nous reste plus qu'à voir que $\varphi(t) \cdot (\sqrt{1+t} - \sqrt{t})$ donne $\sqrt{t}$. On repart donc avec $\varphi(t) \cdot (\sqrt{1+t} - \sqrt{t}) = (2t + 2\sqrt{t} \cdot (1+t)) \cdot (\sqrt{1+t} - \sqrt{t})$. On sort un 2, on développe. Les $t \cdot \sqrt{1+t}$ se simplifient. Il reste aussi $-t \cdot \sqrt{t}$ et $\sqrt{t} \cdot (1+t)$. Et il reste ce qu'on demandait.

On a deux bornes a et b fixées. On effectue un changement de variable par un difféomorphisme

$\int_a^b f(t) \cdot dt$ en $t = \varphi(x)$. On change :

- les bornes : $\int_{t=a}^{t=b} f(t) \cdot dt = \int_{x=\varphi^{-1}(a)}^{x=\varphi^{-1}(b)} \dots$
- la variable : $\int_{t=a}^{t=b} f(t) \cdot dt = \int_{x=\varphi^{-1}(a)}^{x=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x)) \dots$
- l'élément différentiel : $\int_{t=a}^{t=b} f(t) \cdot dt = \int_{x=\varphi^{-1}(a)}^{x=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x)) \varphi'(x) \cdot dx$

On reconnaît le résultat de la question précédente : $\int_{t=a}^{t=b} f(t) \cdot dt = \int_{x=\varphi^{-1}(a)}^{x=\varphi^{-1}(b)} \frac{f(x)}{2} \cdot dx$. Le résultat a l'air surprenant. La fonction semble rester la même, à un facteur 2 près, et au changement de bornes près.

On prend pour bornes $a = \varphi(u_n)$ et on fait tendre b vers l'infini. $\varphi^{-1}(a)$ donne justement u_n . Et $\varphi^{-1}(b)$ tend aussi vers l'infini. Il nous reste $\int_{t=\varphi(u_n)}^{t \rightarrow +\infty} f(t) \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_{u=u_n}^{u \rightarrow +\infty} f(u) \cdot du$. C'est la formule demandée, en profitant du fait que les variables soient muettes.

En répétant par **récurrence sur** n ce résultat, il nous reste : $\int_{u_n}^{+\infty} f(t) \cdot dt = \frac{1}{2^n} \cdot \int_{u_0}^{+\infty} f(t) \cdot dt$

On calcule $\int_a^b \frac{dt}{t \cdot \sqrt{1+t}}$ par changement de variable $u = \sqrt{1+t}$ (C_1 difféomorphisme). On isole : $t = u^2 - 1$ donc $dt = 2u \cdot du$. On change :

- les bornes : $\int_{t=a}^{t=b} \frac{dt}{t \cdot \sqrt{1+t}} = \int_{u=\sqrt{1+a}}^{u=\sqrt{1+b}} \dots$
- la fonction intégrée : $\int_{t=a}^{t=b} \frac{dt}{t \cdot \sqrt{1+t}} = \int_{u=\sqrt{1+a}}^{u=\sqrt{1+b}} \frac{\dots}{(u^2-1) \cdot u}$
- l'élément différentiel : $\int_{t=a}^{t=b} \frac{dt}{t \cdot \sqrt{1+t}} = \int_{u=\sqrt{1+a}}^{u=\sqrt{1+b}} \frac{2u \cdot du}{(u^2-1) \cdot u}$

On décompose en éléments simples : $\frac{2}{u^2-1} = \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+1}$, puis on intègre. On a des logarithmes :

$$\ln \left(\frac{u-1}{u+1} \right).$$

On garde la valeur en $a = u_0$ et on voit tendre vers 1 le quotient quand b tend vers $+\infty$ et son logarithme tend vers 0.

Il reste : $\int_{u_0}^{+\infty} \frac{dt}{t.\sqrt{1+t}} = \ln\left(\frac{\sqrt{1+u_0}+1}{\sqrt{1+u_0}-1}\right)$.

On calcule aussi $\int_a^b \frac{dt}{t.\sqrt{t}} = \left[-2.t^{-1/2}\right]_{t=a}^{t=b}$ et on fait tendre b vers l'infini : $\int_{t=x}^{t \rightarrow +\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Pour $\frac{1}{t.\sqrt{t}} - f(t)$, on réduit au dénominateur commun, et on a $\frac{\sqrt{t+1}-t}{t.\sqrt{t}.\sqrt{t+1}}$. Le signe est alors facilement lisible. Mais on continue avec la quantité conjuguée (*oui, encore!*). On a alors $\frac{1}{t.\sqrt{t}} - f(t) = \frac{1}{t.\sqrt{t}.\sqrt{1+t}.\sqrt{t}.\sqrt{1+t}} = \frac{1}{t^2.\sqrt{1+t}}$. Il ne nous reste plus qu'à minorer chaque $\sqrt{1+t}$ par $\sqrt{t}$ et à tenir compte du fait qu'ils soient tous au dénominateur.

On prend l'inégalité $0 \leq \frac{1}{t.\sqrt{t}} - f(t) \leq \frac{1}{2.t^2.\sqrt{t}}$ valable pour tout t , on l'intègre de x à b (intervalle pris dans le sens croissant). On fait tendre b vers $+\infty$. On obtient, tous calculs faits : $0 \leq \frac{2}{\sqrt{x}} - \int_x^{+\infty} f(t).dt \leq \frac{1}{3.x.\sqrt{x}}$.

On divise par $2/\sqrt{x}$. Le majorant tend vers 0, et le théorème de l'encadrement donne une limite nulle à $1 - \frac{\int_x^{+\infty} f(t).dt}{2/\sqrt{x}}$. Le quotient de l'intégrale et de la racine tend vers 1. On reconnaît la définition de l'équivalent. $\int_x^{+\infty} f(t).dt$ est équivalent à $\frac{2}{\sqrt{x}}$ quand x tend vers l'infini. A vaut 2 et α vaut $-1/2$.

On avait prouvé : $\int_{t=u_n}^{t \rightarrow +\infty} f(t).dt = 2^{-n} \cdot \int_{t=u_0}^{t \rightarrow +\infty} f(t).dt$. Comme seul n peut bouger, on ne peut utiliser notre équivalent que dans le premier membre $2/\sqrt{u_n}$ est équivalent à $2^n \cdot \int_{t=u_0}^{t \rightarrow +\infty} f(t).dt$. On passe aux carrés (*compatible avec les équivalents*), puis à l'inverse (*valable aussi*) : il reste u_n équivalent à $4^{n+1}.B$ avec B égal à l'inverse du carré de l'intégrale $\int_{u_0}^{+\infty} f(t).dt$.

On peut conclure : β vaut 4 et B vaut $4/\left(\ln\left(\frac{\sqrt{1+u_0}-1}{\sqrt{1+u_0}+1}\right)\right)$ dans la formule u_n équivalent à $B.b^n$.

Racines k^{iemes} de matrices.

D.S.10

On montre rapidement par récurrence sur n , en utilisant la relation $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos(k.\alpha) & -\sin(k.\alpha) \\ \sin(k.\alpha) & \cos(k.\alpha) \end{pmatrix}$.

Ceci nous permet de trouver une racine k^{ieme} à la matrice unité, avec $\begin{pmatrix} \cos(2.\pi/k) & -\sin(2.\pi/k) \\ \sin(2.\pi/k) & \cos(2.\pi/k) \end{pmatrix}$.

On a aussi $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}^2 = I_2$ et donc $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}^k$ est égale à $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ ou I_2 suivant que l'exposant est impair ou pair.

En faisant varier α , on a une infinité de racines d'ordre 2 pour la matrice I_2 (géométriquement, ce sont des symétries par rapport à des axes).

Soit B vérifiant $B^k = A$. On a alors $A.B = B^k.B = B^{k+1}$ et $B.A = B.B^k = B^{k+1}$. Il y a bien égalité (*condition nécessaire*).

On suppose que D (matrice diagonale) admet une racine k^{ieme} qu'on note B . On a alors $D.B = B.D$, et on exploite cette relation. On note d_1 à d_n les coefficients diagonaux de D et b_i^j les coefficients de B . Les coefficients de $D.B$ sont les $b_i^j.d_i$ (chaque ligne est multipliée par le d_i de sa ligne). On

le prouve avec la formule $\sum_{k=1}^n d_i^k . b_k^j$ ou en regardant

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n^1 & b_n^2 & \dots & b_n^n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} d_1.b_1^1 & d_1.b_1^2 & \dots & d_1.b_1^n \\ d_2.b_2^1 & d_2.b_2^2 & \dots & d_2.b_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n.b_n^1 & d_n.b_n^2 & \dots & d_n.b_n^n \end{pmatrix}.$$

De manière similaire, on montre que le terme général de $B.D$ est $b_i^j.d_j$ (poser aussi le produit avec les colonnes et les lignes...).

L'égalité des deux matrices donne la condition nécessaire $d_i.b_i^j = b_i^j.d_j$ pour tout couple d'indices. Mais pour i différent de j , on suppose d_i différent de d_j (matrice diagonale à coefficients distincts). On déduit alors $b_i^j = 0$ pour i différent de j . Les coefficients hors de la diagonale de B sont nécessairement nuls. Attention, on ne sait pas encore si on a vraiment trouvé des racines à la matrice D , mais au moins, on sait qu'on doit les chercher tout aussi diagonales..

Mais on comprend que par exemple pour la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ on pourra prendre pour racine cu-

bique $\begin{pmatrix} \sqrt[3]{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{c} \end{pmatrix}$. Et pour ses racines carrées, on pourra jouer sur trois choix de signes.

On passe à la matrice N (comme nilpotente...) qui s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On sait déjà que ses racines doivent commuter avec elles. On regarde ce que donne la condition nécessaire $M.N = N.M$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; la racine est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Mais ce n'est pas tout, il faut que son carré soit la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Et là, on trouve $a^2 = 0$ et $a.b = 1$, ce qui est incompatible. La matrice nilpotente N ne peut pas avoir de racines carrée.

On prend ensuite une matrice A qui admet une racine k^{ieme} qu'on note B . On traduit : $B^k = A$. On prend ensuite $P^{-1}.A.P$, semblable à A . On lui trouve sans effort (mais par transfert de structure) une racine k^{ieme} : $P^{-1}.B.P$. On vérifie en effet par concaténation classique : $(P^{-1}.B.P)^k = P^{-1}.B.P.P^{-1}.B.P \dots P^{-1}.B.P = P^{-1}.B^k.P = P^{-1}.A.P$.

On prend une matrice réelle symétrique $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. On sait que ses valeurs propres (son spectre) sont données par une équation dont la somme et le produit des racines sont connus : la trace et le déterminant. On considère donc le polynôme $X^2 - Tr(S).X + det(S)$. Son discriminant vaut $(a+c)^2 - 4.(a.c - b^2)$. On l'arrange en $(a-d)^2 + 4.b^2$.

Ce discriminant est réel strictement positif. Les valeurs propres $\frac{a+c \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4.b^2}}{2}$ et son espèce de conjugué. Rappelons au passage que les matrices réelles peuvent avoir un spectre qui ne l'est pas.

On cherche ensuite à diagonaliser avec P de la forme "rotation" $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$. La traduction $M.P = P.D$ donne un système simple pour le sinus et le cosinus inconnus.

Lycée Charlemagne

Vendredi 18 mars

Année 2010/11

D.S.11

MPSI2

POLYNÔMES

2010/11

D.S.11

[◇(12)] Montrez que si P est un polynôme de degré n dont les n racines sont réelles, alors les racines de P' , P'' et ainsi de suite sont aussi réelles. (4 pt.)

[◇(13)] A-t-on la réciproque “racines de P' réelles implique racines de P réelles”? (1 pt.)

[◇(14)] Montrez que si P est un polynôme complexe de degré 2 de racines d'affixes u et v alors la racine de P' est sur le segment $[u, v]$. (1 pt.)

[◇(15)] Soit P un polynôme complexe de degré 3, de racines distinctes α , β et γ . Montrez que P'/P admet pour décomposition en éléments simples $\frac{1}{X-\alpha} + \frac{1}{X-\beta} + \frac{1}{X-\gamma}$. (2 pt.)

[◇(16)] On note u et v les deux racines de P' . Montrez alors $\frac{u-\alpha}{|u-\alpha|^2} + \frac{u-\beta}{|u-\beta|^2} + \frac{u-\gamma}{|u-\gamma|^2}$. Exprimez alors u comme barycentre de α , β et γ . Déduisez que le point d'affixe u est dans le triangle dont les sommets ont pour affixes α , β et γ . (3 pt.)

MPSI2

COMPOSITIONS

2010/11

11 points

D.S.11

[♠(36)] Soit f une application de classe C_∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note alors : $g = x \rightarrow f(\ln(x))$. Montrez que g est aussi C_∞ et calculez g' , g'' et $g^{(3)}$. (3 pt.)

Montrez l'existence de familles de coefficients entiers B_n^k (ne dépendant pas de f) vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $g^{(n)}(t) = \frac{1}{t^n} \sum_{k=0}^{n-1} B_n^k \cdot f^{(n-k)}(\ln(t))$. (3 pt.)

Calculez B_n^k pour $0 \leq k \leq n \leq 4$. (1 pt.)

Calculez B_n^0 pour tout n . (2 pt.)

[♠(37)] Montrez, pour tout λ dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}$: $\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1) = B_n^0 \lambda^n + B_n^1 \lambda^{n-1} + \dots + B_n^{n-1} \lambda$ après avoir écrit proprement cette formule sans ses points de suspension (*indication* : $f = x \rightarrow e^{\lambda \cdot x}$). (3 pt.)

[♠(38)] Retrouvez la valeur de B_n^0 pour tout n , ainsi que B_n^{n-1} . (2 pt.)

Calculez $\sum_{k=0}^{n-1} B_n^k$ pour tout n . (1 pt.)

Calculez $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot B_n^k$. (1 pt.)

[♠(39)] On définit $\varphi = \exp \circ f$. Montrez que φ est de classe C_∞ et montrez :

$$\varphi^{(3)}(a) = e^{f(a)} \cdot \sum_{i+2, j+3, k=3}^6 \frac{6}{1^i \cdot i! \cdot 2^j \cdot j! \cdot 6^k \cdot k!} (f'(a))^i \cdot (f''(a))^j \cdot (f^{(3)}(a))^k,$$

$$\text{puis } \varphi^{(4)}(a) = e^{f(a)} \cdot \sum_{i+2, j+3, k+4, l=4}^{24} \frac{24}{1^i \cdot i! \cdot 2^j \cdot j! \cdot 6^k \cdot k! \cdot 24^l \cdot l!} (f'(a))^i \cdot (f''(a))^j \cdot (f^{(3)}(a))^k \cdot (f^{(4)}(a))^l \quad (3 \text{ pt.})$$

[♠(40)] Donnez la formule pour $\varphi''(a)$, la formule pour $\varphi^{(n)}(a)$ et démontrez les. (4 pt.)

23 points

MPSI2	ENCORE WALLIS	2010/11	D.S.11
♣(12) Montrez pour tout t de $] -1, 1[$: $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1-t.\cos(\theta)} = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} . \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right) = \frac{\text{Arcsin}(t)}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{\pi}{2.\sqrt{1-t^2}}$ <i>(indications : du classique pour la première égalité, et on pourra poser $t = \cos(\alpha)$ pour la seconde).</i>			
♣(13) Donnez le développement limité de $t \rightarrow \frac{1}{1-t.\cos(\theta)}$ quand t tend vers 0 à l'ordre $2.n$ pour θ fixé.			
♣(14) Donnez le développement limité d'ordre $2.n$ quand t tend vers 0 de $t \rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1-t.\cos(\theta)}$ (on pourra noter W_k la k^{ieme} intégrale de Wallis : $W_k = \int_0^{\pi/2} \cos^k(t).dt$).			
♣(15) Donnez le développement limité d'ordre n quand t tend vers 0 de $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ (en faisant encore intervenir les intégrales de Wallis).			
♣(16) On pose : $f = t \rightarrow (\text{Arcsin}(t))^2$. Donnez le développement limité d'ordre n quand t tend vers 0 de f' et de f. On pourra utiliser : $W_{n+1} = \frac{n}{n+1}.W_{n-1}$ et $W_{2.n} = \frac{(2.n)!. \pi}{2^{2.n+1}.(n!)^2}$ et $W_{2.n+1} = \frac{2^{2.n}.(n!)^2}{(2.n+1)!}$, depuis le temps qu'on les croise, celles là !			
Montrez que f est solution de l'équation différentielle $(1-t^2).y''_t - t.y'_t = 2$ pour tout t de $] -1, 1[$. Dérivez n fois cette relation. Trouvez la relation de récurrence entre les coefficients $f^{(k)}(0)$. Retrouvez le développement limité de f en 0 à l'ordre $2.n$.			
MPSI2 Charlemagne	680 points	Année 2010/11	D.S.11

L'application f et l'application $g = t \longrightarrow f(\ln(t))$.

D.S.11

Le théorème du cours sur la composition des applications de classe C_∞ garantit que g est de classe C_∞ et admet donc des dérivées et développements limités de tous ordres. On dérive simplement les composées et les produits :

$$g(t) = f(\ln(t)), \quad g'(t) = \frac{1}{t} \cdot f'(\ln(t)), \quad g''(t) = \frac{1}{t^2} \cdot f''(\ln(t)) - \frac{1}{t^2} \cdot f'(\ln(t)) \quad \text{et enfin : } \frac{1}{t^3} \cdot f^{(3)}(\ln(t)) - \frac{3}{t^3} \cdot f''(\ln(t)) + \frac{2}{t^3} \cdot f'(\ln(t)).$$

On sent venir la généralisation. **Par récurrence sur n .** On va prouver donc de proche en proche l'existence des listes de coefficients $[B_n^0, B_n^1, \dots, B_n^{n-1}]$ vérifiant $g^{(n)}(t) = \frac{1}{t} \cdot (B_n^0 \cdot f^{(n)}(\ln(t)) + B_n^1 \cdot f^{(n-1)}(\ln(t)) + \dots + B_n^{n-1} \cdot f'(\ln(t)))$ (il n'y a plus de $f(\ln(t))$ dès la première dérivation). L'initialisation a été faite ci dessus, avec les premières listes de coefficients :

n	k=0	k=1	k=2	k=3
1	1			
2	1	-1		
3	1	-3	2	

Supposons qu'à l'ordre n (*entier naturel donné*), on a :

$$g^{(n)} = t \longrightarrow \frac{1}{t^n} \cdot B_n^0 \cdot f^{(n)}(\ln(t)) + \frac{1}{t^n} \cdot B_n^1 \cdot f^{(n-1)}(\ln(t)) + \dots + \frac{1}{t^n} \cdot B_n^{n-1} \cdot f'(\ln(t)) \text{ sur tout }]0, +\infty[.$$

On dérive. Chaque terme en donne deux suivant qu'on dérive le $t \longrightarrow t^{-n}$ qui est devant, ou la composée $t \longrightarrow \ln(t) \longrightarrow f^{(k)}(\ln(t))$.

Bref, la dérivée de $t \longrightarrow \frac{1}{t^n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} B_n^k \cdot f^{(n-k)}(\ln(t))$ donne

$$t \longrightarrow \frac{-n}{t^{n+1}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} B_n^k \cdot f^{(n-k)}(\ln(t)) + \frac{1}{t^n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{t} \cdot B_n^k \cdot f^{(n-k+1)}(\ln(t)).$$

Remarque : si vous persistez à dériver $t \longrightarrow \frac{1}{t^n}$ en passant par $t \longrightarrow -\frac{n \cdot t^{n-1}}{(t^n)^2}$, je ne peux plus rien pour vous. C'est que vous avez décidé de ne jamais progresser. En gros, vous cherchez à chaque station Vélib si il y a enfin un vélo que vous trouvez normal, c'est à dire avec deux roues derrière, les pédales devant, un bac pour mettre du sable, et le portrait de Oui-Oui ou Dora sur le guidon.

On sort le $1/t$ de la deuxième somme, on lui fait rejoindre le $1/t^n$ devant. On réindexe la première

somme en $\frac{-n}{t^{n+1}} \cdot \sum_{p=1}^n B_n^{p-1} f^{(n+1-p)}(\ln(t))$. On fusionne les deux sommes, en prenant garde aux termes

extrêmes : $g^{(n+1)} = t \longrightarrow \frac{1}{t^{n+1}} \sum_{k=0}^n (\dots) \cdot f^{(n+1-k)}(\ln(t))$ avec dans la petite parenthèse $B_n^k - n \cdot B_n^{k-1}$ si

k est entre 1 et $n-1$, B_n^0 si k vaut 0 et $-n \cdot B_n^{n-1}$ si k vaut n .

On appelle B_{n+1}^k ces nouveaux coefficients, et on a obtenu la formule au rang suivant.

Il manque quand même un détail à ne pas oublier (*et combien l'oublie faute de bien lire l'énoncé*) : **les nouveaux coefficients obtenus sont encore des entiers naturels...** Eh oui, même si c'est évident et si ça tient en une ligne (*"récurrence sur n "*), il faut le vérifier...

On peut en profiter pour calculer la nouvelle ligne :

n	k=0	k=1	k=2	k=3
4	1	-6	11	-6

$11 \cdot f''(\ln(t)) - 6 \cdot f'(\ln(t))$.

qui se traduit par $g^{(4)} = t \longrightarrow \frac{1}{t^4} (f^{(4)}(\ln(t)) - 6 \cdot f^{(3)}(\ln(t)) +$

On ne cherche pas pour l'instant de formule explicite pour les B_n^k . La question "prouver leur existence" est déjà suffisante en soi. Mais prouver l'existence d'une suite sans en donner les valeurs est parfois source d'angoisse pour les élèves qui justement ne sauront pas dépasser le niveau "cours de mathématiques pour le brevet des collèges" (ceux et celles qui sont en Sup par erreur).

La formule récursive donnée plus haut pour les termes extrêmes de la somme donne quand même $B_n^0 = 1$ pour tout n et $B_n^{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$.

Pour les autres termes, rien ne semble évident. Mais justement, il y a d'autres questions pour les trouver.

Comme les coefficients de cette formule ne dépendent pas de la fonction choisie, on va prendre pour f des cas particuliers et en tirer la leçon.

On prend donc comme suggéré : $f = x \longrightarrow e^{\lambda \cdot x}$. Pourquoi? Parce que g est facile à calculer, de même que ses dérivées successives, et celles de f aussi. On a en effet : $f^{(n-k)} = x \longrightarrow \lambda^{n-k} \cdot e^{\lambda \cdot x}$ pour tout k . Et $g = x \longrightarrow x^\lambda$ se dérive en $x \longrightarrow \lambda \cdot x^{\lambda-1}$, puis $x \longrightarrow \lambda \cdot (\lambda-1) \cdot x^{\lambda-2}$ jusqu'à $x \longrightarrow \lambda \cdot (\lambda-1) \dots (\lambda-n+1) \cdot x^{\lambda-n}$ (récurrence?).

On trouve donc pour tout x : $\lambda \cdot (\lambda-1) \dots (\lambda-n+1) \cdot x^{\lambda-n} = \frac{1}{x^n} \sum_{k=0}^{n-1} B_n^k \cdot \lambda^{n-k} \cdot e^{\lambda \cdot \ln(x)}$.

Comme suggéré, on particularise en $x = 1$ ou on simplifie par $x^{\lambda-n}$ et il reste ce qui s'écrit proprement $\prod_{p=0}^{n-1} (\lambda-p) = \sum_{k=0}^{n-1} B_n^k \cdot \lambda^{n-k}$ et malproprement $\lambda \cdot (\lambda-1) \dots (\lambda-n+1) = B_n^0 \cdot \lambda^n + B_n^1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + B_n^{n-1} \cdot \lambda$.

Comme cette formule de rang n est vraie pour tout λ , on a une égalité entre polynômes en λ qui nous permet d'identifier :

- coefficient dominant : $1 = B_n^0$
- coefficient en λ : $(-1)^n \cdot (n-1)! = B_n^{n-1}$
- somme des coefficients (valeur en 1) : $0 = B_n^0 + B_n^1 + \dots + B_n^{n-1}$
- la somme alternée des coefficients est donnée par la valeur en -1 .

Quitte à passer à la valeur absolue, en prenant la peine de justifier que chaque B_n^k est du signe de $(-1)^k$ (récurrence sur n avec la formule $B_n^k - n \cdot B_n^{k-1} = B_{n+1}^k$ dans laquelle k reste libre), on voit que la somme

$\sum_{k=0}^{n-1} |B_n^k|$ vaut $n!$.

Qui veut la cinquième ligne? Je développe $\lambda \cdot (\lambda-1) \cdot (\lambda-2) \cdot (\lambda-3) \cdot (\lambda-4)$.

On a alors

n	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4
5	1	-10	35	-50	24

Et pour B_n^1 ? C'est, au signe près, la somme des racines. Comme au rang n , les racines sont les entiers de 0 à $n-1$, on a $B_n^1 = \frac{n \cdot (1-n)}{2}$

L'application $\exp \circ f$.

D.S.11

Cette fois, on travaille avec $\varphi = t \longrightarrow e^{f(t)}$. Elle est C_∞ comme composée d'applications qui le sont. La preuve, on peut la dériver une, deux, trois fois ou même quatre. A chaque fois, les choses empirent. On dérive ce qui est déjà tombé, et il tombe encore des f' par dérivation de l'exponentielle : e^f puis $f' \cdot e^f$ puis $f'' \cdot e^f + (f')^2 \cdot e^f$ puis $(f^{(3)} \cdot e^f + f'' \cdot f' \cdot e^f) + (2 \cdot f' \cdot f'' \cdot e^f + (f')^3 \cdot e^f)$ regroupé en $(f^{(3)} + 3 \cdot f' \cdot f'' + (f')^3) \cdot e^f$ et enfin $(f^{(4)} + 3 \cdot (f'')^2 + 3 \cdot f' \cdot f^{(3)} + 3 \cdot (f')^2 \cdot f'') \cdot e^f + (f^{(3)} + 3 \cdot f' \cdot f'' + (f')^3) \cdot f' \cdot e^f$ (tout en sachant que la notation e^f est abusive et devrait être remplacée par $\exp \circ f$ au vrai étage des fonctions).

Est-ce que ces formules coïncident avec celles qu'il faut prouver, telles que

$$\varphi^{(3)}(a) = e^{f(a)} \cdot \sum_{i+2j+3k=3} \frac{6}{1^i \cdot i! \cdot 2^j \cdot j! \cdot 6^k \cdot k!} (f'(a))^i \cdot (f''(a))^j \cdot (f^{(3)}(a))^k ?$$

Je propose de regarder cette condition sur les trois indices de somme pondérée égale à 3 (ce qui laisse peu de possibilités) :

i	j	k	$\frac{6}{i! \cdot 1^i \cdot j! \cdot 2^j \cdot k! \cdot 6^k}$	$(f')^i \cdot (f'')^j \cdot (f^{(3)})^k$
0	0	1	$\frac{6}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6^1} = 1$	$1 \cdot 1 \cdot f^{(3)}$
1	1	0	$\frac{6}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2^1 \cdot 1 \cdot 1} = 3$	$f' \cdot f'' \cdot 1$
3	0	0	$\frac{6}{3! \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 1$	$(f')^3 \cdot 1 \cdot 1$

Pour l'ordre 4, on compte plus vite :

i	j	k	l	$\frac{24}{i! \cdot j! \cdot k! \cdot l! \cdot 1^i \cdot 2^j \cdot 6^k \cdot 24^l}$	$(f')^i \cdot (f'')^j \cdot (f^{(3)})^k \cdot (f^{(5)})^l$
4	0	0	0	$\frac{24}{4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 1$	$(f')^4$
2	1	0	0	$\frac{24}{4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 1$	$(f')^2 \cdot f''$
1	0	1	0	$\frac{24}{4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 1$	$f' \cdot f^{(3)}$
0	2	0	0	$\frac{24}{4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 1$	$f'' \cdot f''$
0	0	0	1	$\frac{24}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 24 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 1$	$f^{(4)}$

On retrouve les termes déjà calculés. Cette formule doit être la bonne, mais il faut le prouver.

Par récurrence? Oh non! On n'est plus en Terminale. Et tant pis pour les élèves qui sont arrivés avec trois théorèmes, quatre formules et deux cent cinquante exercices qui se ressemblent...

Alors quoi? Quelle idée? **Le calcul de $\varphi(a+h)$ par développement limité, et l'identification avec la formule de Taylor Young.**

On part de $e^{f(a+h)} = e^{f(a)+h \cdot f'(a)+h^2 \cdot f''(a)/2+\dots+h^n \cdot f^{(n)}(a)/n!+o(h^n)}$ et on sépare :

$$e^{f(a+h)} = e^{f(a)} \cdot e^{(h \cdot f'(a))} \cdot e^{(h^2 \cdot f''(a)/2)} \dots e^{(h^n \cdot f^{(n)}(a)/n!)} \cdot e^{o(h^n)}$$

On écrit le développement limité de chacun :

$$\varphi(a+h) = e^{f(a)} \cdot \sum_{k_1=0}^n \frac{(f'(a) \cdot h)^{k_1}}{1^{k_1} \cdot k_1!} \cdot \sum_{k_2=0}^n \frac{(f''(a) \cdot h^2)^{k_2}}{2^{k_2} \cdot k_2!} \cdot \sum_{k_3=0}^n \frac{(f^{(3)}(a) \cdot h^3)^{k_3}}{6^{k_3} \cdot k_3!} \dots \sum_{k_n=0}^n \frac{(f^{(n)}(a) \cdot h)^{k_n}}{n!^{k_n} \cdot k_n!} + o(x^n)$$

On développe tout très formellement et on a une somme de sommes :

$$e^{f(a)} \cdot \sum_{k_1 \leq n, k_2 \leq n, \dots, k_n \leq n} \frac{(f'(a))^{k_1}}{1^{k_1} \cdot k_1!} \cdot \frac{(f''(a))^{k_2}}{2^{k_2} \cdot k_2!} \cdot \frac{(f^{(3)}(a))^{k_3}}{6^{k_3} \cdot k_3!} \dots \frac{(f^{(n)}(a))^{k_n}}{n!^{k_n} \cdot k_n!} h^{k_1+2 \cdot k_2+\dots+n \cdot k_n} + o(h^n)$$

On regarde le terme en h^n dans cette formule, et on l'identifie avec le $\varphi^{(n)}(a)/n!$ de la formule de Taylor-Young et on identifie par unicité du développement limité.

On a donc $\varphi^{(n)}(a) = n! \cdot e^{f(a)} \cdot \sum_{k_1+2 \cdot k_2+\dots+n \cdot k_n=n} \frac{\prod_{i=1}^n (f^{(i)}(a))^{k_i}}{\prod_{i=1}^n i!^{k_i} \cdot k_i!}$. Et tout ça, sans récurrence! Evidem-

ment !

La récurrence était une fausse piste, parce que n intervenait à trop d'endroits dans la formule. Et parce que dans bien des cas, le réflexe de Terminale "entier n implique récurrence" est débile.

Racines de polynômes.

D.S.11

On prend P polynôme de degré n de racines réelles a_1 à a_n (triées dans l'ordre croissant puisque l'on

a une liste finie). On le factorise sous la forme $K. \prod_{k=1}^n (X - a_k)$.

On applique le **théorème de Rolle** sur chacun des intervalles ouverts $]a_k, a_{k+1}[$. Le polynôme est dérivable et prend la même valeur (*nulle*) aux deux extrémités de l'intervalle, on déduit que P' s'annule au moins une fois sur l'intervalle ouvert. Il y a $n - 1$ intervalles, deux à deux disjoints (*ouverts*). On tient $n - 1$ racines pour P' . Or, P' est de degré $n - 1$. On a donc toutes ses racines. Toutes les racines de P' sont réelles.

On recommence avec P' dont toutes les racines sont réelles. Et ainsi de suite.

C'est bon, on n'a rien oublié ?

Si! P est il une fonction réelle de variable réelle? Tout dépend de la valeur de K quand on factorise. Après tout, le polynôme $(1+i).(X-1).(X+2)$ a toutes ses racines réelles, mais n'est pas réel. Toutefois, il suffit d'appliquer le théorème de Rolle en cascade à $(X-1).(X+2)$. On passe donc par "polynôme complexe dont toutes les racines sont réelles" à "polynôme proportionnel au polynôme réel factorisé dont les racines sont toutes réelles".

Mais il y a un autre piège. Si P a des racines doubles. Peut on par exemple appliquer le résultat au polynôme $(X-a)^2.(X-b).(X-c)$. On détecte pour P' deux racines α et β dans $]a, b[$ et $]b, c[$, plus la racine a qui revient. Il faut donc expliquer que dans le cas des racines doubles ou plus, le théorème de Rolle en cascade s'applique toujours...

On n'a pas de réciproque. Si les $n - 1$ racines de P' sont réelles, on contrôle les variations de P mais pas ses racines.

Le plus simple des contre-exemples est le polynôme de degré 2 $X^2 + b.X + c$. Sa dérivée est de degré 1 et admet donc à coup sûr une racine réelle $-b/2$. Mais pour P il y a une discussions qui conduit dans bien des cas à l'absence de racines réelles.

De même, si un polynôme $P = X^3 + a.X^2 + b.X + c$ est de degré 3 avec deux racines réelles pour P' , on sait que P est d'abord croissant, puis décroissant et croissant. Mais il peut n'avoir qu'une racine réelle. Et deux racines complexes conjuguées.

On prend maintenant P complexe de racines u et v . Il se met de la forme $K.(X-u).(X-v)$. La racine de sa dérivée est $(u+v)/2$, qui est au milieu du segment $[u, v]$. Un petit dessin est le bienvenu ici.

On reprend avec P de la forme $K.(X-\alpha).(X-\beta).(X-\gamma)$. On le dérive en $K.(X-\beta).(X-\gamma) + K.(X-\alpha).(X-\gamma) + K.(X-\alpha).(X-\beta)$ et on divise par $K.(X-\alpha).(X-\beta).(X-\gamma)$. On a la somme des trois quotients élémentaires qui sont justement trois éléments simples.

On peut aussi dériver $\ln(P) = \ln(K) + \ln(X-\alpha) + \ln(X-\beta) + \ln(X-\gamma)$ si on travaille de manière purement formelle... mais ça n'a aucun sens. Ce serait donc la preuve utilisée dans un cours de physique. Et ce n'est pas une insulte...

On suppose que u est racine de P' . On a donc $P'(u)/P(u) = 0$ puisque u n'est pas racine de P (on a supposé "racines distinctes", il n'y a donc pas de racine double).

On déduit : $\frac{1}{u-\alpha} + \frac{1}{u-\beta} + \frac{1}{u-\gamma} = 0$. On fait appel aux quantités conjuguées :

$\frac{\overline{u-\alpha}}{|u-\alpha|^2} + \frac{\overline{u-\beta}}{|u-\beta|^2} + \frac{\overline{u-\gamma}}{|u-\gamma|^2} = 0$. On passe au conjugué, sachant que les $|u-\alpha|^2$ et autres aux dénominateurs sont réels et passent au travers des conjuguaisons. Il reste la formule demandée :

$$\frac{u-\alpha}{|u-\alpha|^2} + \frac{u-\beta}{|u-\beta|^2} + \frac{u-\gamma}{|u-\gamma|^2}.$$

Que faire ensuite? On extrait u tout seul d'un côté, et on divise :

$$u = \frac{\frac{\alpha}{|u-\alpha|^2} + \frac{\beta}{|u-\beta|^2} + \frac{\gamma}{|u-\gamma|^2}}{\frac{1}{|u-\alpha|^2} + \frac{1}{|u-\beta|^2} + \frac{1}{|u-\gamma|^2}}. \text{ On reconnaît un barycentre de } \alpha, \beta \text{ et } \gamma \text{ avec des coefficients } 1/|u-\alpha|^2, 1/|u-\beta|^2 \text{ et } 1/|u-\gamma|^2.$$

Les trois coefficients barycentriques sont positifs. Le point d'affixe u est dans le triangle. Il en est de même pour v .

Ce résultat est valable pour des polynômes de degré plus élevé. Et à chaque fois que je le pose, je me demande lesquelles des étapes intermédiaires je dois baliser. Je ne saurais le dire exactement : passage aux conjugués, coefficients barycentriques positifs ?

Intégrales de Wallis et Arcsinus.

D.S.11

L'intégrale $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1-t \cdot \cos(\theta)}$ ne pose pas de problème d'existence, puisque la fonction sous le signe somme existe sur tout le segment d'intégration et est continue. Le résultat sera même une fonction positive de t . Je vais tout de suite m'insurger contre les phrases idiotes que je croiserai dans lesquelles on me dira que l'intégrale existe pour tout θ . C'est encore une fois n'avoir rien compris aux variables, donc aux mathématiques, donc aux sciences, donc à la vie. L'intégrale est une fonction de t et de lui seul. Si vous voyez un θ dans les formules, ce n'est qu'une variable muette qui sert le temps du calcul de l'intégrale, mais qu'on peut remplacer par n'importe quelle autre nom. Au contraire, t est là et il reste une fois qu'on a fini d'intégrer. Se tromper dans le calcul sera une erreur pardonnable, puisque imputable juste à la partie mécanique de votre cerveau. Se tromper dans les variables est impardonnable, puisque imputable à votre incapacité à raisonner sur des variables, des concepts, des individus.

Pour prouver l'égalité entre l'intégrale et le membre du milieu (non, H.T., il n'y a aucun sous-entendu là dessous), je ne vois pas de raccourci possible du type "dériver de chaque côté", car l'intégrale n'est pas du type "fonction de la borne supérieure", mais "intégrale à paramètre" et déborde de notre programme. On effectue ce que préconise le cours : un changement de variable. C'est $\tau = \tan(\theta/2)$. On fait les trois manipulations :

- bornes : $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1-t \cdot \cos(\theta)} = \int_{\tau=0}^{\tau=1} \dots$
- fonction intégrée $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1-t \cdot \cos(\theta)} = \int_{\tau=0}^{\tau=1} \frac{\dots}{1-t \cdot \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}}$
- élément différentiel $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1-t \cdot \cos(\theta)} = \int_{\tau=0}^{\tau=1} \frac{2 \cdot d\tau}{(1+\tau^2) \cdot \left(1-t \cdot \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\right)}$

On en arrive vite à $\frac{2}{1-t} \cdot \int_{\tau=0}^{\tau=1} \frac{d\tau}{1 + \left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \tau\right)^2}$. On intègre en Arctangente. Mais il faut com-

penser la variable $\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ qui vient en trop. Bref, on aboutit à ce qui est demandé au milieu :

$$\frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right).$$

Ensuite, on pose comme proposé : $t = \cos(\alpha)$ ou même pour gagner en précision $\alpha = \text{Arccos}(t)$. La

quantité $\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ devient $\sqrt{\frac{2.\cos^2(\alpha/2)}{2.\sin^2(\alpha/2)}}$. La tangente de $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ n'est pas loin. C'est même elle, et $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ est dans le bon intervalle.

Il nous reste $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1-t.\cos(\theta)} = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\text{Arccos}(t)}{2} \right)$.

Et on voulait arriver à $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \left(\text{Arcsin}(t) + \frac{\pi}{4} \right)$. Et c'est la relation $\text{Arcsin} + \text{Arccos} = \pi/2$ qui sauve tout !

On a sans le faire exprès décomposé en somme d'une fonction impaire et d'une fonction paire...

On utilise ensuite, à θ fixé, le développement limité de $\frac{1}{1-u}$ avec u égal à $t.\cos(\theta)$ (vérification : u tend vers 0 quand t tend vers 0) :

$$\frac{1}{1-t.\cos(\theta)} = \sum_{k=0}^{2.n} t.\cos^k(\theta) + o(t^{2.n}) \text{ quand } t \text{ tend vers } 0.$$

On somme ensuite pour tous les θ de 0 à $\pi/2$ (les $o(t^n)$ fusionnent ils bien en un seul $o(t^{2.n})$?) :

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \frac{d\theta}{1-t.\cos(\theta)} = \sum_{k=0}^{2.n} \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \cos^k(\theta).d\theta \right) . t^k + o(t^{2.n}) \text{ par linéarité de l'intégrale.}$$

Bref : $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \frac{d\theta}{1-t.\cos(\theta)} = \sum_{k=0}^{2.n} W_k . t^k + o(t^{2.n})$ quand t tend vers 0 (n est fixé, θ a disparu, et t est la variable de limite nulle).

Le développement de $(1+x)^a$ avec x qui tend vers 0 et a fixé est dans le cours. Les coefficients sont ceux de Newton : $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)/k!$. Dans le cas de l'exposant $-1/2$ ils sont agréables et donnent des produits d'entiers impairs qu'on retransforme en quotient de factorielles : $1.3.5\dots(2.k-1) = \frac{(2.k)!}{2^k.k!}$.

Il ne reste plus qu'à y substituer la variable $x = t^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{2.n} W_{2.k} . t^{2.k} + o(t^{2.n}) \text{ quand } t \text{ tend vers } 0.$$

Quand on prend $f(t) = \text{Arcsin}(t)^2$ il n'y a aucun problème d'existence tant que t reste entre -1 et 1 et le théorème de Taylor Young garantit l'existence d'un développement limité en 0. Pour sa dérivée d'ailleurs, pas de problème non plus. On trouve $f'(t) = \frac{2.\text{Arcsin}(t)}{\sqrt{1-t^2}}$. Et on assemble les morceaux :

- $2. \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1-t.\cos(\theta)} = f'(t) + \frac{\pi}{\sqrt{1-t^2}}$
- $2. \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1-t.\cos(\theta)} = \sum_{k=0}^{2.n} 2.W_k . t^k + o(t^{2.n})$ quand t tend vers 0
- $\frac{\pi}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=0}^n W_{2.k} . t^{2.k} + o(t^{2.n})$ quand t tend vers 0.

Il reste : $f'(t) = 2. \sum_{k=0}^{n-1} W_{2.k+1} . t^{2.k+1} + o(t^{2.n})$.

On intègre sans même avoir de "constante d'intégration" à récupérer :

$$f(t) = (\text{Arcsin}(t))^2 = 2. \sum_{k=0}^{n-1} \frac{W_{2.k+1}}{2.k+2} . t^{2.k+2} + o(t^{2.n})$$

Remarque : il existe aussi une méthode où on utilise une équation différentielle. C'est elle que l'on va suivre à présent. On dérive f deux fois. On obtient $t \rightarrow 2.Arcsin(t)/\sqrt{1-t^2}$ puis $t \rightarrow \frac{2}{1-t^2} - 2.t \frac{Arcsin(t)}{(1-t^2)^{3/2}}$ et on a bien $(1-t^2).f''(t) - t.f'(t) = 2$.

On dérive n fois car tout ce qui intervient dans cette formule valable pour tout t est de classe C_∞ . On utilise la formule de Leibniz. Très vite, les dérivées de $t \rightarrow 1-t^2$ et surtout $t \rightarrow -t$ disparaissent. Quant au second membre, si n n'est pas égal à 0, il saute définitivement. Il nous reste :

$$(1-t^2).f^{(n+2)}(t) - 2.n.t.f^{(n+1)}(t) - n.(n-1).f^{(n)}(t) - t.f^{(n+1)}(t) - n.1.f^{(n)}(t) = 0$$

Je rappelle que les âneries comme $(1-t^2)'$ et autres $(Arcsin(t))'$ ne signifient rien du tout. Ah si, ils signifient que votre cerveau ne sera jamais décrassé. Mais, pas grave. Professeur de physique est aussi un beau métier...

On prend ensuite la valeur en 0 (seulement après avoir dérivé n fois) ;

$$f^{(n+2)}(0) - n.(n-1).f^{(n)}(0) - n.f^{(n)}(0) = 0.$$

On rappelle que si on note a_k les coefficients du développement limité cherché, on a $f^{(n)}(0) = n!.a_n$. On reporte donc :

$$(n+2)!.a_{n+2} - n^2.n!.a_n = 0.$$

On simplifie : $(n+1).(n+2).a_{n+2} = n^2.a_n$ (n non nul).

On peut les calculer de proche en proche suivant parité de n .

• a_1 est nul, donc tous les $a_{2.k+1}$ sont nuls ;

• a_0 vaut 0, tous les $a_{2.k}$ vont se calculer avec des factorielles :

$$a_2 = 1 \text{ (équivalent)}, a_4 = 2^2.a_2/3.4, a_6 = 4^2.a_4/5.6, a_8 = 6^2.a_6/7.8.$$

Une factorielle se forme au dénominateur. Et le numérateur commence à bâtir des carrés de factorielles.

On fait une récurrence pour faire sérieux, et on établit donc :

$$\left(Arcsin(t)\right)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{2^{2.k-1}}{(2.k)!} . x^{2.k} + o(x^{2.n}) \text{ quand } x \text{ tend vers } 0.$$

- 1) Pour tout couple (A, x) de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, on définit : $F_A(x) = \int_0^A e^{-t} \cdot t^x \cdot dt$.

Montrez pour x fixé dans $\mathbb{R}^+$: $F_A(x+1) = (x+1) \cdot F_A(x) - A^{x+1} \cdot e^{-A}$. (2 pt.)

Montrez que pour tout n entier naturel, $F_A(n)$ tend vers $n!$ quand A tend vers $+\infty$. (3 pt.)

- 5) Montrez que $A \longrightarrow F_A(x)$ est croissante, majorée par $F_1(x) + ([x] + 1)!$. (3 pt.) Déduisez que

$F_A(x)$ admet une limite quand A tend vers $+\infty$, que l'on notera $F(x)$ (et même $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^x \cdot dt$). (2 pt.)

Montrez : $F(x+1) = (x+1) \cdot F(x)$ (on réservera la notation $n!$ au cas " n entier"). A partir d'ici, on se permettra d'écrire $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^x \cdot dt$ et de travailler avec des intégrales jusqu'à l'infini, sans revenir

à chaque fois jusqu'à $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-t} \cdot t^x \cdot dt$ comme le programme de Sup est en droit de l'exiger. (2 pt.)

12 points

- 1) On note $\alpha = F(1/2)$. Exprimez, pour n entier, $F\left(n + \frac{1}{2}\right)$ à l'aide de α et de n (avec des factorielles). (3 pt.)

On rappelle la relation sur les intégrales de Wallis : $W_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot W_{n-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ avec

$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) \cdot dt$. Calculez $F\left(n + \frac{1}{2}\right)$ à l'aide de α et des intégrales de Wallis. (2 pt.)

- 2) Montrez, pour a, b et c entiers naturels vérifiant $a < b < c$: $\left(\frac{b!}{a!}\right)^{c-b} < b^{(b-a) \cdot (c-a)} < \left(\frac{c!}{b!}\right)^{b-a}$ et

$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \ln(a!) & \ln(b!) & \ln(c!) \end{array} \right| \geq 0$ (quel nom a cette propriété?). (3 pt.)

Montrez pour x et y dans $\mathbb{R}^+$: $F\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{F(x) \cdot F(y)}$. (2 pt.) Déduisez : $\alpha \leq \frac{4^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!} \cdot \sqrt{n+1}$

et $\frac{4^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!} \cdot \frac{n+1}{\sqrt{(2n+3)/2}} \leq \alpha$. (3 pt.)

13 points

- 1) Pour tout x réel, on définit : $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2 \cdot (1+t^2)}}{1+t^2} \cdot dt$ et $g(x) = - \int_0^1 2 \cdot x \cdot e^{-x^2 \cdot (1+t^2)} \cdot dt$.

Calculez $G(0)$. (1 pt.) Montrez : $0 \leq G(x) \leq e^{-x^2}$ pour tout x positif. (2 pt.) Déduisez que G tend vers 0 à l'infini. (1 pt.)

- 2) Soit B fixé strictement positif. On prend t entre 0, dérivez deux fois l'application $\gamma_t = \left(x \longrightarrow \frac{e^{-x^2 \cdot (1+t^2)}}{1+t^2}\right)$ définie sur $[0, B]$ et montrez l'existence d'une constante K_B ne dépendant que de B et majorant $|\gamma_t''|$ sur $[0, B]$. (3 pt.) Montrez alors $|G(x+h) - G(x) - h \cdot g(x)| \leq K_B \cdot h^2/2$ pour x et h dans $[0, B]$. (2 pt.) Déduisez : G est dérivable de dérivée g . (2 pt.)

Montrez pour tout x réel : $g(x) = -2.e^{-x^2} \cdot \int_0^x .e^{-u^2} .du$. (2 pt.) Déduisez : $G(x) - G(0) = -\left(\int_0^x e^{-u^2} .du\right)^2$. (2 pt.)

Déduisez de tout ce qui précède : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} .du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (2 pt.) Que vaut α ? (1 pt.)

18 points

MPSI2

STIRLING

2010/11

D.S.12

- 1) Donnez un équivalent de $1 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln(1+x)$ quand x tend vers 0 de la forme $a.x^\alpha$. (2 pt.)
- 2) Pour tout n entier, on définit $u_n = \ln(n!) + n \cdot (1 - \ln(n)) - \frac{\ln(n)}{2}$. Montrez que $u_{n+1} - u_n$ est équivalent à a/n^2 quand n tend vers $+\infty$. (2 pt.) Déduisez que la suite $n^2 \cdot (u_{n+1} - u_n)$ est bornée. (2 pt.)
- 3) Pour tout N , on pose $S_N = \sum_{n=1}^N (u_{n+1} - u_n)$ et $A_N = \sum_{n=1}^N |u_{n+1} - u_n|$. Montrez que (A_N) et $(A_N + S_N)$ sont croissantes, majorées. (4 pt.) Déduisez que S_N converge. (3 pt.)
- 4) Déduisez que la suite $\left(\frac{n!}{(n/e)^n \cdot \sqrt{n}}\right)$ converge. (2 pt.) Montrez, en remontant à la question $\alpha \leq \frac{4^n \cdot (n!)^2}{(2 \cdot n + 1)! \cdot \sqrt{n+1}}$ et $\frac{4^n \cdot (n!)^2}{(2 \cdot n + 1)! \cdot \sqrt{(2 \cdot n + 3)/2}} \leq \alpha$ que sa limite est $\sqrt{\pi}$. (3 pt.) Concluez : $n!$ est équivalente à $\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n}$. (2 pt.)

20 points

MPSI2

SPECTRES

2010/11

D.S.12

On rappelle que si A est une matrice carrée de taille n , on appelle spectre de A l'ensemble des valeurs propres de A c'est à dire l'ensemble des racines du polynôme $\det(A - X.I_n)$.

♠(41) Montrez que les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique de taille 2 sont toutes réelles. (2 pt.)

♠(42) Montrez que l'ensemble des valeurs propres d'une matrice réelle antisymétrique de taille 3 sont toutes imaginaires pures. (2 pt.)

♠(43) Montrez que le complexe λ est dans le spectre de la matrice carrée A de taille n si et seulement si il existe au moins un vecteur non nul U de $\mathbb{C}^n$ vérifiant $A.U = \lambda.U$. (3 pt.)

♠(44) Soit S une matrice réelle symétrique. Montrez que son spectre est réel (indication : montrez que ${}^t\overline{U} \cdot S.U$ est à la fois égal à $\lambda \cdot {}^t\overline{U} \cdot U$ et à $\overline{\lambda} \cdot {}^t\overline{U} \cdot U$). (4 pt.)

♠(45) Soit S une matrice réelle antisymétrique. Montrez que son spectre est imaginaire pur (indication : calculez aussi ${}^t\overline{U} \cdot S.U$). Ah oui, qui est $\overline{U}$? C'est le vecteur dont les composantes sont les conjugués des composantes du vecteur U . (3 pt.)

♠(46) Soit S une matrice réelle symétrique de taille 2 à spectre positif, montrez : $1 + \sqrt{\det(S)} \leq \sqrt{\det(I_2 + S)}$. (3 pt.)

17 points

Existence de la factorielle, premières formules.

D.S.12

Chaque intégrale $\int_0^A e^{-t}.t^x.dt$ existe par continuité de la fonction intégrée.

Pour x donné, **on intègre par parties** $\int_0^A e^{-t}.t^{x+1}.dt$, en dérivant t^{x+1} (qui donne $(x+1).t^x$) et en intégrant le e^{-t} (en $-e^{-t}$). Le terme rectangle est nul en 0 et vaut $A^{x+1}.e^{-A}$ en A . On a alors la première formule $F_A(x+1) = (x+1).F_A(x) + A^{x+1}.e^{-A}$.

C'est parti pour une **récurrence**. On calcule $F_A(0) : \int_0^A e^{-t}.dt = [-e^{-t}]_0^A = 1 - e^{-A}$. On fait tendre A vers l'infini, il reste : $F(0) = 1 = 0!$.

On suppose ensuite qu'à un rang n , la quantité $f_A(n)$ tend vers $n!$ quand A tend vers l'infini, ce qui donne valeur et existence de $f(n)$. On prend la formule obtenue par parties : $F_A(n+1) = (n+1).F_A(n) + A^{n+1}.e^{-A}$ et on fait tendre A vers l'infini. Par hypothèse le premier terme du second membre tend vers $(n+1).n!$ et par croissances comparées, le second tend vers 0. Par conséquence, le premier membre tend vers leur somme : $(n+1)!$. Ceci prouve **à la fois l'existence de $F(n+1)$ et sa valeur**.

Pour x fixé, pas forcément entier, on veut prouver l'existence de $F(x)$.

L'application $A \longrightarrow \int_0^A e^{-t}.t^x.dt$ est croissante. Pour B plus grand que A , la différence $F_B(x) - F_A(x)$ vaut $\int_A^B e^{-t}.t^x.dt$ et est positive.

Pour ce qui est de la **majoration**, on essaye de comprendre la présence de chaque terme. On coupe l'intégrale en deux : $F_A(x) = \int_0^1 e^{-t}.t^x.dt + \int_1^A e^{-t}.t^x.dt$. On ne touche pas à la première intégrale. Dans la deuxième, on majore t^x par $t^{[x]+1}$ (on a bien $x \leq [x] + 1$, donc $t^x \leq t^{[x]+1}$ pour t plus grand que 1); le multiplicateur e^{-t} est positif et l'intégrale se prend dans le sens croissant.

L'application $A \longrightarrow F_A(x)$ est **croissante, majorée** (le majorant trouvé ne dépend pas de A , il a le droit de dépendre de x fixé le temps de la question). Cette quantité $\int_0^A e^{-t}.t^x.dt$ converge vers son plus petit majorant : $\int_0^{+\infty} e^{-t}.t^x.dt$.

L'application $x \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^x.dt$ est bien définie sur tout $[0, +\infty[$. On reprend ensuite la formule $F_A(x+1) = (x+1).F_A(x)$ et on fait tendre A vers l'infini. On trouve la formule récurrente $F(x+1) = (x+1).F(x)$ qui permet vraiment de dire : $F(x) = x!$. Mais on ne le dira pas, puisque Euler a déjà donné un nom à la fonction factorielle "décalée".

À propos de $\frac{1}{2}!$ qui se calcule par les intégrales de Wallis.

D.S.12

L'existence de $F(1/2)$ et des $F(n+1/2)$ ne pose pas de problème, puisque l'on a justifié l'existence de tous les $F(x)$ pour x positif.

Ensuite, on utilise la relation $F(x+1) = (x+1).F(x)$ prouvée pour tout x et on trouve $F(3/2)$, $F(5/2)$ et ainsi de suite :

$F\left(\frac{2.n+1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \frac{2.n+1}{2}$. On a un 2^n en bas, puis le produit des entiers impairs. On le complète comme à chaque fois en factorielle et on compense les termes pairs par un $2^n.n!$. On a donc la formule qu'on peut ensuite valider vraiment par **récurrence** : $F\left(n + \frac{1}{2}\right) = \alpha \cdot \frac{(2.n+1)!}{4^n.n!}$ (si vous n'arrivez pas à ce type de formule à ce stade de l'année, que puis je pour vous?).

On prend la formule de Wallis, au rang $2.k$: $W_{2.k} = \frac{2.k-1}{2.k} \cdot W_{2.k-2}$ et on la met en boucle : $W_{2.n} = \frac{2.n-1}{2.n} \dots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} W_0$. On a immédiatement : $W_{2.n} = \frac{(2.n)!}{4^n.(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$.

On a donc : $F\left(\frac{1}{2}+n\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2.n+1}{\pi} \cdot W_{2.n} \cdot 2.(n!)$ par exemple. On a aussi $F(n+1/2) = \alpha.n!/W_{2.n+1}$.

Convexité logarithmique de la factorielle.

D.S.12

On se donne a, b et c avec $a < b < c$. On calcule $b!/a!$, c'est un produit de $b-a$ termes positifs tous plus petits que b (de $a+1$ à b). On majore donc :

$$\left(\frac{b!}{a!}\right)^{c-b} = \left((a+1) \dots (b-1).b\right)^{c-b} \leq \left((b)^{b-a}\right)^{c-a} = b^{(b-a).(c-a)}$$

De même, on compte : dans $c!/b!$ il y a $c-b$ termes tous plus grands que b et dans $(c!/b!)^{b-a}$, il y a $(c-b).(b-a)$ termes positifs tous plus grands que b . On a l'encadrement demandé.

On ne garde alors que les termes extrêmes de l'inégalité : $\left(\frac{b!}{a!}\right)^{c-b} \leq \left(\frac{c!}{b!}\right)^{b-a}$. On passe d'un même côté les termes en $c!$ et en $a!$ et de l'autre les termes en $b!$ (tout est positif, les sens des inégalités se conservent) : $(b!)^{c-a} \leq (a!)^{b-c} \cdot (c!)^{b-a}$. On passe au logarithme (application croissante) :

$$(c-a) \cdot \ln(b!) \leq (b-c) \cdot \ln(a!) + (b-a) \cdot \ln(c!).$$

On reconnaît le développement de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \ln(a!) & \ln(b!) & \ln(c!) \end{vmatrix}$.

L'application $n \longrightarrow \ln(n!)$ est convexe de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Le restera-t-elle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

On étend à la **petite inégalité de convexité** "uniquement pour t égal à $1/2$ " :

$$\ln\left(F\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \leq \frac{\ln(F(x)) + \ln(F(y))}{2}.$$

Quel résultat doit on donc prouver ? $F((x+y)/2)^2 \leq F(x).F(y)$. Le carré d'une intégrale, le produit de deux intégrales ? Mais, ça sent l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** ça !

On prend $f = t \longrightarrow e^{-t} \cdot t^{x/2}$ et $g = t \longrightarrow e^{-t} \cdot t^{y/2}$. L'intégrale $\int_0^A f(t).g(t).dt$ donne $F_A((x+y)/2)$ et les intégrales $\int_0^A f^2(t).dt$ et $\int_0^A g^2(t).dt$ donnent $F_A(x)$ et $F_A(y)$. Il n'y a plus qu'à faire passer A à la limite infinie : $F((x+y)/2) \leq F(x).F(y)$.

On applique cette inégalité au triplet $(n, n + \frac{1}{2}, n+1)$ et on majore $F(n+1/2)$ par $n!.(n+1)!$. On remplace $F(n+1/2)$ par sa valeur en fonction de α : $\left(\alpha \cdot \frac{(2.n+1)!}{4^n.n!}\right)^2 \leq (n!)^2.(n+1)$.

On prend ensuite le triplet $(n - \frac{1}{2}, n, n + \frac{1}{2})$, ordonné. Cette fois, les α sont du côté des majorants. Ce qui nous convainc bien que c'était une application directe de l'inégalité de convexité logarithmique. Mais ce qu'il ne faut pas oublier, c'est de vérifier $n + 1/2 \leq n \leq n + 1/2$ par exemple.

La fonction $x \longrightarrow \int_0^1 \frac{e^{-x^2} \cdot (1+t^2)}{1+t^2} \cdot dt$.

D.S.12

Pour tout x , on peut calculer $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2 \cdot (1+t^2)}}{1+t^2} \cdot dt$ car la fonction sous le signe somme est continue. On peut, mais on ne le fait pas, car on n'a pas l'impression d'avoir de primitive simple... On calcule quand même $F(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ (on intègre en arctangente).

On sent bien que quand x tend vers l'infini, la fonction sous le signe somme tend vers 0 et l'intégrale aussi. Mais soyons prudent. Pour faire tendre une intégrale vers 0, on l'encadre.

On minore par 0 : l'application sous le signe intégrale est positive.

On majore : $\frac{e^{-x^2 \cdot (1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x^2} \cdot e^{-x^2 \cdot t^2} \leq e^{-x^2}$. On intègre sur un intervalle de longueur 1 : $0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2 - x^2 \cdot t^2}}{1+t^2} \leq \int_0^1 e^{-x^2} \cdot dt = e^{-x^2}$. Le **théorème de l'encadrement** permet de conclure que $G(x)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini positif. Ce n'est pas un passage à la limite, c'est plus fort, puisque le théorème prouve que le terme du milieu admet une limite, ce que l'on ne savait pas a priori.

La dérivabilité de G .

D.S.12

L'application g existe aussi, par continuité de tout ce qui est en jeu sur le segment d'intégration $[0, 1]$. Et finalement, si on dérive sous le signe intégrale par rapport à x l'application G , il reste $\int_0^1 \frac{-2 \cdot x \cdot (1+t^2) \cdot e^{-x^2 \cdot (1+t^2)}}{1+t^2} \cdot dt$, c'est à dire $g(x)$. Mais, il faut le prouver... ("ah bon !" s'étonnera le physicien, persuadé que la dérivation effectuée formellement ci dessus est une preuve alors qu'il ne s'agit que d'un calcul formel). Les questions intermédiaires et très "Taylor/Lagragiennes" sont là pour ça.

On prend donc t entre 0 et 1 et x entre 0 et B (si B est assez grand, j'aurai n'importe quel x auquel vous aurez pensé). On définit γ_t , fonction de x (à l'origine de la flèche) et on la dérive : $\gamma'_t = x \longrightarrow -2 \cdot x \cdot e^{-x^2 \cdot (1+t^2)}$ puis $\gamma''_t = x \longrightarrow -2 \cdot e^{-x^2 \cdot (1+t^2)} + 4 \cdot x^2 \cdot e^{-x^2 \cdot (1+t^2)} \cdot (1+t^2)$. C'est énorme, il faut majorer cette application.

On y majore les exponentielles par 1. On majore $1+t^2$ par 2, et on ne fait confiance à personne pour les signes. Un majorant est pour l'instant $2+8 \cdot x^2$. Mais on nous dit que x reste entre 0 et B . On peut conclure : $|\gamma''_t(x)| \leq 2+8 \cdot B^2$. Comme demandé, ce majorant de la dérivée seconde ne dépend plus de t et de x du moment que x ne part quand même pas trop loin. On le note K_B pour marquer sa dépendance (bien nommer les variables, c'est faire la moitié du travail, comme de bien choisir son référentiel en mécanique).

On se donne x et $x+h$ entre 0 et B . On écrit, pour chaque t , une formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2 : $\gamma_t(x+h) - \gamma_t(x) - h \cdot \gamma'_t(x) = h^2 \cdot \gamma''_t(c)$ pour au moins un c entre x et $x+h$. Ce c est donc dans $[0, B]$ aussi. On peut donc encadrer : $-K_B \cdot h^2/2 \leq \gamma_t(x+h) - \gamma_t(x) - h \cdot \gamma'_t(x) \leq K_B \cdot h^2/2$.

On intègre pour t de 0 à 1 : on reconstitue au milieu $G(x+h) - G(x) - h \cdot g(x)$. Et ensuite, de chaque côté, on intègre une constante : $-K_B \cdot h^2/2 \leq G(x+h) - G(x) - h \cdot g(x) \leq K_B \cdot h^2/2$.

Pour x fixé dans $[0, B]$, la différence $G(x+h) - (G(x) + h \cdot g(x))$ est un $O(h^2)$ et donc un $o(h)$ (petit o) quand h tend vers 0. C'est la définition de la dérivabilité par rapport à x .

L'application G est dérivable de dérivée $g...$ sur chaque intervalle $[0, B]$. Les élèves qui ne surveillent pas les variables se contentent de voir le mot "dérivable" et ne cherchent pas plus loin. Les autres se

méfient... Si x n'est pas dans $[0, B]$? C'est juste qu'on a mal choisi son B . Disons qu'on attend la question "l'application G est elle bien dérivable de dérivée g en $x = 12$ " par exemple. Dans ce cas, on choisit $B = 13$ avant de commencer la démonstration. On prouve ainsi "continue en tout point", et c'est ça la continuité...

Le calcul final : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} . du = \sqrt{\pi}/2$.

D.S.12

On veut maintenant prouver : $-2.x. \int_0^x e^{-x^2-x^2.t^2} . dx = -2.e^{-x^2} . \int_0^x e^{-u^2} . du$. Pour x nul, pas de problème, sinon, on veut passer de $x. \int_0^1 e^{-(x.t)^2} . dt$ à $\int_0^x e^{-u^2} . du$ (en ayant sorti e^{-x^2}). Le nom de la variable a changé? On a fait un **changement de variable**, en posant $u = x.t$. On vérifie le changement de bornes, de fonction et d'élément différentiel.

On veut arriver à $G(x) - G(0) = -\left(\int_0^x e^{-u^2} . du\right)^2$. On sent l'intégration d'une dérivée dans le premier membre.

Le premier membre vient de l'intégration de G' de 0 à x . Mais G' c'est g . Et g est de la forme $-2.\phi' . \phi$ avec $\phi = x \longrightarrow \int_0^x e^{-u^2} . du$. En effet, $\phi(x)$ est l'intégrale $\int_0^x e^{-u^2} . du$ et $\phi'(x)$ est le facteur e^{-x^2} devant, obtenu à la question précédente.

On avait donc $G' = -2.\phi' . \phi$. On intègre de 0 à x et on a la relation indiquée... On pouvait aussi poser $\psi = x \longrightarrow G(x) - G(0) + \left(\int_0^x e^{-u^2} . du\right)^2$, dériver, constater que la dérivée était nulle sur $[0, +\infty[$. Cette application est donc constante, égale à sa valeur en 0 : 0.

On fait tendre x vers l'infini. $G(x) - G(0)$ tend vers $-G(0)$ c'est à dire $-\pi/2$. Le membre de droite est donc contraint d'avoir aussi une limite, égale à $-\pi/2$. C'est donc que $2.\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2} . du\right)^2$ existe et vaut $\pi/2$. On passe à la racine, on utilise un argument de positivité et on connaît la valeur de l'intégrale (dite "**de Gauss**") $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} . du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On revient à α , c'est à dire $F(1/2)$ par le changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale $\int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} e^{-t} . \sqrt{t} . dt$. On trouve $F(1/2) = \sqrt{\pi}/2$.

La suite $u_n = \ln(n!) - (n+1/2) . \ln(n) + n$.

D.S.12

Le **développement limité** pour commencer. On a une forme assez indéterminée. On utilise le développement $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)$ quand x tend vers 0. On gagne deux points en constatant que les termes en $1/x$, 1, x et $1/x$ s'en vont. Il reste un terme en $-x^2/12$. Le premier terme non nul du développement limité donne l'équivalent : a vaut $-1/12$ et α vaut 2. On peut offrir l'allure locale du graphe.

Comme par hasard, une fois qu'on a remplacé $\ln((n+1)!) - \ln(n!)$ par $\ln(n+1)$, il reste $u_{n+1} - u_n = 1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) . \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. En posant $x = 1/n$ (qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini) on retrouve la question précédente. $u_{n+1} - u_n$ est équivalent à $-1/(12.n^2)$.

La suite $n^2.(u_{n+1} - u_n)$ converge donc vers $-1/12$ (définition de l'équivalent : le quotient tend vers 1). Si la suite converge, elle est **bornée à partir d'un certain rang**. Et elle est donc bornée.

On a donc un réel λ tel que $|u_{n+1} - u_n|$ soit majoré par $\frac{\lambda}{n^2}$ (je ne dis pas qu'il vaut $1/12$, il ne faut pas devenir physicien, l'infini n'est pas au bout du couloir).

Deux séries : A_N et S_N .

D.S.12

Pour la **croissance**, c'est rapide, en tout cas pour A_N . On a en effet $A_{N+1} - A_N = |u_{N+1} - u_N|$ et une valeur absolue, c'est positif.

Et pour $A_N + S_N$? On trouve $(A_{N+1} + S_{N+1}) - (A_N + S_N) = |u_{N+1} - u_N| + (u_{N+1} - u_N)$. Pourquoi une telle valeur est elle positive ? Elle est de la forme $\mu + |\mu|$ avec μ réel. Si μ est positif, cette somme est 2μ et elle est justement positive. Si μ est négatif, elle est nulle. *Attention, on ne fait pas des conclusions hâtives du type : la suite est croissante/ la suite est constante. On peut en effet passer sans cesse d'un signe à l'autre. La suite donc "tantôt croissante, tantôt stationnaire", mais pas "croissante ou constante".*

Et la **majoration** ? On a écrit $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{\lambda}{n^2}$ pour tout n . On somme de 1 à N : $S_N \leq \sum_{n=1}^N \frac{\lambda}{n^2}$. Or,

la somme $\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}\right)_N$ converge vers son plus petit majorant (qui vaut $\pi^2/6$, mais c'est sans importance).

On peut donc majorer la suite $(S_N)_N$ par $\lambda \cdot \pi^2/6$. C'est un vrai majorant, qui ne dépend pas de N (pléonasme).

Et pour $S_N + A_N$? Par inégalité triangulaire, on a $S_N \leq A_N$ (majoration terme à terme), et on peut donc majorer $S_N + A_N$ par $\lambda \cdot \pi^2/3$.

On a **deux suites réelles croissantes majorées**. Les deux convergent, vers leur plus petit majorant.

Et la suite $(S_N)_N$ converge, en tant que **différence de deux suites convergentes** : $S_N = (A_N + S_N) - A_N$ (mais là, aucune information de monotonie).

Ce coup des deux suites croissantes majorées dont la différence donne la suite qui nous intéresse est un classique. On peut le rendre plus efficace et utilisable dans $\mathbb{C}$ sous le nom de convergence en valeur absolue, en passant par les suites de Cauchy.

Certains élèves sont peut être surpris. Pourquoi avoir fait de tels détours pour prouver la convergence de (S_N) , alors qu'elle **se simplifie et télescope**. En effet, il reste juste $S_N = a_{N+1} - a_1$. Mais justement, parce que l'on ignore si (a_N) converge. Et il faut passer par les accroissements $a_{n+1} - a_n$ et ces deux suites A_N et S_N .

Faisons alors le bilan. On a prouvé que (S_N) converge (*sans connaître explicitement sa limite*). On en déduit que (a_{N+1}) converge (la constante a_1 ne change rien). En décalant les indices : a_N admet une limite (de valeur inconnue) quand N tend vers $+\infty$.

Qui est cette suite (a_n) ? Si on la compacte, c'est $\left(\ln(n!) - \ln(n^{n+1/2}) - \ln(e^n)\right)$ et même $\left(\ln\left(\frac{n!}{(n/e)^n \cdot \sqrt{n}}\right)\right)$. La convergence de cette suite donne, par passage à l'exponentielle (*continue, c'est tout ce qui compte, inutile d'invoquer la croissance*) : $\frac{n!}{(n/e)^n \cdot \sqrt{n}}$ converge vers un réel que l'on ne connaît pas.

Mais la chose donne déjà une idée du comportement de l'exponentielle.

Notons β la limite du rapport de $n!$ et $(n/e)^n \cdot \sqrt{n}$. On peut donc remplacer : $n!$ est équivalent à $\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n} \cdot \beta$.

On regarde alors ce que fait $\frac{4^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!} \cdot \sqrt{n+1}$. Les équivalents passent aux produits et quotients. Il se produit un grand nettoyage, surtout si on tient compte du fait que $\sqrt{n+1}$ est équivalent à $\sqrt{n}$ par exemple. Il reste que cette quantité devient simplement équivalente à $\beta/2 \cdot \sqrt{2}$. Et être équivalent à une constante numérique, c'est converger vers cette constante.

Mais l'inégalité $\alpha \leq \frac{4^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!} \cdot \sqrt{n+1}$ donne alors $\alpha \leq \beta/2 \cdot \sqrt{2}$.

Mais on a une autre inégalité. Et avec le même traitement, elle donne $\alpha \geq \beta/2 \cdot \sqrt{2}$.

Par antisymétrique, α est égal à $\beta/2 \cdot \sqrt{2}$.

Or, on connaît déjà la valeur de α .

Résultat : on a la valeur de β .

On remplace dans l'équivalent trouvé plus haut.

On termine : $n!$ est équivalent à $\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n}$. C'est la célèbre formule de Stirling (Wiki, quelles dates?).

Vous la reverrez en Spé, elle fait partie de votre programme, avec la fonction Γ d'Euler.

On y accédait aussi en passant par les intégrales de Wallis. C'est à ça qu'elles servaient.

Un peu d'algèbre linéaire.

D.S.12

Les matrices réelles symétriques de taille 2 sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$. Leur polynôme caractéristique est $X^2 - (a+d)X + a.d - b^2$. Le discriminant est $(a-d)^2 + 4.b^2$ après ré-arrangement. Il est toujours positif (ou nul), le polynôme caractéristique est réel, avec ses valeurs propres réelles.

Les matrices antisymétriques de taille 3 sont nécessairement de la forme $\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix}$ avec a, b et c réels. Leur polynôme caractéristique est du type $-\lambda^3 - (a^2 + b^2 + c^2) \cdot \lambda$. Il y a une racine nulle (et 0 est un imaginaire pur) et deux racines imaginaires, conjuguées : $\pm i \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Regardons le système $A.U = \lambda.U$ d'inconnue vectorielle U (vecteur colonne de taille n). On fait passer d'un même côté : $A.U - \lambda.U = O_n$ (vecteur nul). On met le vecteur U en commun à droite : $(A - \lambda.I_n).U = O_n$. On n'invente pas $A - \lambda$ qui n'a pas de sens (matrice plus réels?).

Si le déterminant de $A - \lambda.I_n$ est non nul, son inverse existe (matrice carrée), et en multipliant à gauche par cet inverse, il reste $U = O_n$. Le système n'admet pas d'autre solution que le vecteur nul.

Si le déterminant est nul, le système dégénère. Et comme il admet déjà une solution, il en admet une infinité (les coefficients d'une combinaison des colonnes donnant le vecteur nul).

On a donc bien prouvé l'équivalence. Et nulle part on n'a prétendu des âneries majuscules telles que "le produit matriciel est intègre", ce qui est bien entendu faux. On ne passe donc pas de $A.U = \lambda.I_n.U$ à $A = \lambda.I_n$. Et je vous rappelle que les vecteurs colonnes n'ont pas d'inverse matriciel. Même quand ils sont non nuls... Halte au crétinisme. Vous avez passé le bac, mais le b.a.c. ne passera pas par vous (bac=bétise, abrutissement, crétinisme).

Pour le cas général en dimension n , en voici les grandes lignes. On part d'une valeur propre de M , éventuellement complexe. On a alors un vecteur propre complexe U vérifiant $M.U = \lambda.U$ avec U non nul. On multiplie à gauche par ${}^t\overline{U}$. On trouve

$\heartsuit(12)$ On définit : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $f = X \longrightarrow A.X$ de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

Montrez que $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans $\text{Ker}(f)$. Calculez le rang de f . Déterminez l'image de f (base, équation cartésienne). (3 pt.)

$\heartsuit(13)$ Quelle inclusion a-t-on entre $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$? Déterminez le rang de f^2 (au sens de $f \circ f$), son noyau (base, équation) et son ensemble image (base, équation(s)). (4 pt.)

$\heartsuit(14)$ Donnez le polynôme caractéristique de A , son spectre. Pour chaque λ du spectre, donnez une base de $\text{Ker}(f - \lambda.Id)$. (4 pt.)

Montrez que sur une base bien choisie de $\mathbb{R}^3$, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ avec α que vous préciserez (matrice notée D). (4 pt.)

$\diamondsuit(17)$ On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$. Montrez que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $(L(\mathbb{R}^3), +, \cdot)$, contenant Id , f et f^2 , de dimension supérieure ou égale à 3. (3 pt.)

$\diamondsuit(18)$ Montrez que si g est dans $C(f)$ alors $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g (un sous-espace vectoriel A de $\mathbb{R}^3$ est stable par h si et seulement si pour tout $\vec{u}$ de A , $h(\vec{u})$ est dans A). (4 pt.)

$\diamondsuit(19)$ Montrez que si g est dans $C(f)$, alors $\text{Ker}(f^2)$, et $\text{Ker}(f - \alpha.Id)$ sont stables par g (et par f ?). (3 pt.)

$\spadesuit(47)$ On note $P(f)$ l'ensemble des polynômes en f , c'est à dire l'ensemble des $a_0 + a_1.f + a_2.f^2 + \dots + a_N.f^N$ avec les a_i réels et f^k désignant $f \circ f \circ \dots \circ f$. Quelle inclusion a-t-on entre $P(f)$ et $C(f)$? (3 pt.)

$\spadesuit(48)$ Calculez $D^3 - \alpha.D^2$. Déterminez la dimension de $P(f)$. Déduisez $P(f) = C(f)$. (5 pt.)

- 1) On note K l'ensemble des entiers de 0 à 10 pour l'addition et la multiplication modulo 11. Résolvez l'équation $3.x + 1 = 6$ dans K . (2 pt.)

- 2) Résolvez le système $\begin{cases} x & +2.y & = & 5 \\ 3.x & +5.y & = & 3 \end{cases}$ dans K^2 . (4 pt.)

- 3) Résolvez l'équation $x^2 + 4.x + 7 = 0$ dans K . (3 pt.)

- 1) On note P le plan K^2 . Montrez qu'il y a 121 vecteurs dans ce plan et 12 droites vectorielles. Qui sont les points de la droite vectorielle passant par $(3, 4)$? (4 pt.)

- 2) Déduisez qu'il y a $12 \times 11 + 2$ projecteurs dans ce plan. 3 pt.
- 3) Montrez que $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ est l'un d'entre eux, déterminez son noyau et son image. 3 pt.
- 4) Donnez la matrice du projecteur qui projette sur $Vect((1, 4))$, parallèlement à $Vect((1, 5))$. 4 pt.
-
- 1) Montrez qu'il y a 13 200 bases dans ce plan. 3 pt.
- 2) Combien y a-t-il de matrices non inversibles dans $M_2(K)$? 3 pt.
- 3) Combien y a-t-il de matrices de déterminant 1 dans $M_2(K)$? 3 pt.
- 4) Déterminez l'inverse (dans $M_2(K)$) de $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. 2 pt.
-
- 1) Démontrez : dans l'espace $(K^3, +, \cdot)$ il y a 1331 vecteurs, 133 droites, autant de plans, 2 124 276 000 bases (c'est $(11^3 - 1) \cdot (11^3 - 11) \cdot (11^3 - 11^2)$). 5 pt.
- 2) Si vous tirez au hasard une des 11^9 matrices (c'est à dire de manière équiprobable), quel est le pourcentage de chances de tirer une matrice de déterminant 1? 4 pt.
- Montrez qu'il y a 133×121 projecteurs de rang 2. 4 pt.
- Combien y a-t-il de projecteurs de rang 1, de rang 0, de rang 3, de rang 4? 4 pt.

			51 points
MPSI2	ANALYSE	2010/11	D.S.13

Dans un devoir précédent, vous avez été amenés à calculer $\int_{1/4}^4 \frac{\text{Arctan}(t)}{t} \cdot dt$ en changeant de variable. On propose une variante. On note κ l'application $a \longrightarrow \int_{u=1/a}^a \frac{\text{Arctan}(x)}{x} \cdot dx$. Dérivez la, et concluez. 4 pt.

			4 points
MPSI2 Charlemagne	848 points	Année 2010/11	D.S.13

L'intégrale $\int_{1/a}^a \frac{\text{Arctan}(x)}{x} dx$.

D.S.13

Pour dériver cette intégrale fonction des deux bornes, on note G une primitive de $x \rightarrow \frac{\text{Arctan}(x)}{x}$, et notre application s'écrit $a \rightarrow G(a) - G(1/a)$. On la dérive comme une composée en $x \rightarrow G'(a) + \frac{1}{a^2} G'(1/a)$. On trouve donc $a \rightarrow \frac{\text{Arctan}(a)}{a} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\text{Arctan}(1/a)}{1/a}$. On compacte en $a \rightarrow \frac{\text{Arctan}(a)}{a} + \frac{\text{Arctan}(1/a)}{a}$, puis en $a \rightarrow \frac{\pi/2}{a}$, sur $]0, +\infty[$.

On connaît la dérivée, on remonte en $a \rightarrow \frac{\pi \cdot \ln(a)}{2}$ (puisque cette intégrale est nulle pour a égal à 1). On retrouve bien le résultat du devoir pour a égale à 2.

Noyau, rang et image de l'application f .

D.S.13

L'appartenance du vecteur au noyau se fait par simple calcul : $A.X = 0$ (vecteur nul).

Le noyau est au moins de dimension 1. S'il était de dimension 2, alors le rang vaudrait 1 (par formule du rang et soustraction), et les vecteurs images seraient tous proportionnels. Or, $\vec{k}$ et $\vec{i}$ ont des images non proportionnelles.

Le noyau est donc juste de dimension 1. Le rang vaut 2.

Pour avoir une base de l'image, il suffit d'y prendre deux vecteurs non colinéaires : $f(\vec{k})$ et $f(\vec{i})$ par exemple. Une base de l'image est donc $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ (mais on peut prendre aussi des multiples ou des combinaisons de ces vecteurs).

Ayant une base de ce plan, on en a une équation cartésienne : $\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ 4 & 4 & y \\ -4 & -2 & z \end{vmatrix} = 0$. On trouve

$$2.x + y + 2.z = 0.$$

On pouvait y arriver aussi avec le produit vectoriel pour trouver un vecteur normal à ce plan. On pouvait aussi proposer cette équation de plan et la vérifier pour deux vecteurs de base. L'essentiel était de ne pas faire des pages de calculs inutiles et pseudo-savants. Beh oui, on est en maths et surtout en algèbre. La vertu première est le raisonnement efficace.

Le rang de f^2 .

D.S.13

Certes f^2 est associée à A^2 , mais je ne calculerai pas A^2 ici. Je vais raisonner ("merde (vont se dire certains) j'ai encore fait tout ce qu'il ne fallait pas faire! toujours le mauvais hémisphère au mauvais moment, c'est bête d'avoir deux jours de retard dans la semaine").

$\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont de dimensions respectives 1 et 2; "au mieux" on a une inclusion de la droite dans le plan... Et justement, on constate que le vecteur directeur de $\text{Ker}(f)$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans le plan

($2.1 + (-2) + 2.0 = 0$). Tous ses multiples y sont aussi : $\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(f)$.

Les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont l'image par f est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ont une image nulle par f^2 . Ils sont donc dans le noyau de f^2 sans avoir été dans le noyau de f . La dimension du noyau augmente d'au moins une unité. Pour en perdre 2, il faudrait que tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ aient leur image par f dans $\text{Ker}(f)$. Or, la dimension de $\text{Im}(f)$ est 2 et non 1. Le rang ne chute donc que d'une unité : $\text{rg}(f^2) = 1$.

Allez, je me dédis, et je calcule A^2 , la matrice de $f \circ f$. Je trouve $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & -4 \end{pmatrix}$. On confirme, c'est une matrice de rang 1.

Son ensemble image est $Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Il est bien inclus dans $Im(f)$ (vérifiez $2.1 + 0 + 2.(-1) = 0$).

Son noyau a pour équation $2.x + y + z = 0$ (et est bien de dimension 2). S'il faut une base, on garde le premier vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on lui en ajoute un, non colinéaire comme $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ par exemple. Mais le plus joli, c'est de prendre en effet d'abord un vecteur de $Ker(f)$ et ensuite un vecteur dont l'image est dans $Ker(f)$ (c'est ici le cas).

Polynôme caractéristique, spectre...

D.S.13

On revient aux méthodes des devoirs précédents : $Ker(f - \lambda.Id)$ n'est pas réduit au vecteur nul ; $f - \lambda.Id$ a un défaut au niveau du noyau. On annule donc $det(f - \lambda.Id)$. On trouve $\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 4 & 2 - \lambda & 4 \\ -4 & -2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$.

On simplifie en $-\lambda^3 + 2.\lambda$.

Les valeurs propres sont 0 (valeur propre double) et 2 (valeur propre simple).

Avec de l'habitude : on savait déjà que 0 était valeur propre double, il nous manquait donc juste l'autre valeur propre. La trace donnait alors cette valeur manquante.

$Ker(f)$ est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$Ker(f - 2.Id)$ est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On cherche la nouvelle base pour que la matrice devienne $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Par analyse et synthèse. Si

on note $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ la base cherchée, on a doit avoir :

- $f(\vec{a}) = vo$ (un vecteur de $Ker(f)$)
- $f(\vec{b}) = \vec{a}$ (finalement, un vecteur de $Ker(f^2)$ mais pas de $Ker(f)$)
- $f(\vec{c}) = \alpha.\vec{c}$ (un vecteur propre de valeur propre α).

La valeur propre intéressante est 2. On a trouvé $\vec{c} = (-1 \ 0 \ 1)$, et on a compris qu'on pouvait

prendre $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Par mesure de sécurité, on vérifie que l'on a bien une base : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

Mieux encore, si on la note P , on retrouve la relation $A.P = P.D$ avec P inversible. On a presque diagonalisé la matrice A et la formule $A = P.D.P^{-1}$ traduit bien un changement de base qui transforme la matrice A en une matrice D plus agréable.

Le commutant de f .

D.S.13

On a appelé en effet commutant de f l'ensemble des endomorphismes de E permutables avec f (mal dit : "qui commutent avec f ").

Ce commutant $C(f)$ est par définition une partie de $L(E)$.

On y trouve l'endomorphisme nul, qui vérifie bien $0 \circ f = f \circ 0$.

Si deux morphismes g et h vérifient ensemble $f \circ g = g \circ f$ et $f \circ h = h \circ f$, alors leur somme vérifie encore $(g + h) \circ f = f \circ (g + h)$ quitte à développer par linéarité.

Enfin, partant de $f \circ g = g \circ f$ et λ dans $\mathbb{R}$, on a sans effort $(\lambda.g) \circ f = f \circ (\lambda.g)$. Il n'y a rien de plus à écrire, même si les mauvais élèves ont une capacité étonnante à produire ici des lignes de formules inutiles.

La présence de Id , de f et de f^2 se fait sans heurts : par exemple $f^2 \circ f = f \circ f^2 = f^3$.

Or, ces trois applications linéaires sont non proportionnelles, et même indépendantes (on le voit sur les matrices, impossibilité d'en reconstruire une à l'aide des autres).

Elles engendrent donc un "petit" sous-espace vectoriel de dimension 3 et cet espace est inclus dans $C(f)$ (justement stable par combinaisons).

La dimension de $C(f)$ est donc tenue de dépasser 3.

Critères de commutation.

D.S.13

On prend g qui commute avec f . Que doit on prouver ? Que des ensembles sont stables par g .

- On prend donc $\vec{u}$ dans $Ker(f)$, et on calcule $g(\vec{u})$ (est il resté dans $Ker(f)$). On calcule alors son image par f : $f(g(\vec{u}))$ est égal à $g(f(\vec{u}))$. Mais $f(\vec{u})$ est nul (hypothèse $\vec{u}$ dans $Ker(f)$). Et l'image du vecteur nul est nulle. On reconnaît : $g(\vec{u})$ est encore dans $Ker(f)$.

- On prend ensuite $\vec{v}$ dans $Im(f)$. C'est à dire que $\vec{v}$ est de la forme $f(\vec{w})$. On regarde alors où en est son image par g . On écrit juste : $g(\vec{v}) = g(f(\vec{w})) = f(g(\vec{w}))$. Et voilà que notre humble vecteur $g(\vec{v})$ est l'image d'un vecteur par f , il est dans $Im(f)$.

Ces questions de pure logique permettent de tester quels sont les élèves pour qui la filière M.P.S.I. était vraiment non adaptée, et qui ont donc intérêt à bétonner pour un passage en P.S.I. : ceux qui ne savent pas bâtir un raisonnement, et étalent des formules, avec la conviction d'avoir démontré des choses quand en fait ils n'ont que tapé sur des hypothèses.

D'autres stabilités.

D.S.13

Là aussi, il suffit de prendre le temps d'être matheux, et de "se contenter" de raisonner.

On prend g dans $C(f)$. On a alors $g \circ f = f \circ g$. Mais alors, on a aussi :

$$g \circ f^2 = g \circ (f \circ f) = (g \circ f) \circ f = (f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ f \circ g$$

f^2 et g sont donc permutables. Le noyau et l'image de f^2 sont donc stables par g (et aussi $Ker(g)$ et $Im(g)$ sont stables par f^2).

Sans effort de calcul : $f - Id$ et g sont permutables. Noyau et Image de l'un est alors stable par l'autre. Il faut savoir exploiter ce qu'on a fait avant.

Un truc tout bête : $f^2 \circ f = f \circ f^2$. Noyau et image de f^2 sont donc stables par f (même si la preuve directe est alors ici intéressante).

Polynômes en f .

D.S.13

Chacun des polynômes en f est une application linéaire de E dans E .

Mais chacune de ces applications va commuter avec f sans gros calcul :

$$f \circ \sum_{k=0}^{k=d} a_k \cdot f^k = \sum_{k=0}^{k=d} a_k \cdot f \circ f^k = \sum_{k=0}^{k=d} a_k \cdot f^{k+1} = \sum_{k=0}^{k=d} a_k \cdot f^k \circ f = \left(\dots \right) \circ f$$

On a donc : $P(f) \subset C(f)$ et juste ce sens... (ce n'est pas parce qu'une application commute avec f que c'est forcément un polynôme en f).

Le calcul de $D^3 - \alpha.D^2$ se mène sans effort, et donne la matrice nulle.

Il se reporte sur A : $A^3 = 3.A^2$ (vérifiez si vous ne me croyez pas).

On a donc ensuite $A^4 = 3.A^3$ (multipliez par A).

On simplifie et reporte : $A^4 = 9.A^2$. Par récurrence rapide : $A^n = 3^{n-2}.A_2$.

Les polynômes en f n'ont donc aucun terme au delà de l'exposant 2 : $\sum_{k=0}^{k=d} a_k X^k = a_0 Id + a_1 f + a_2 f^2 + 3a_3 f^2 + 9a_4 f^2 + \dots + 3^{d-2} a_n X^n$
 $P(f)$ est de dimension 3, engendré par Id , f et f^2 (dont il est prouvé qu'ils sont bien indépendants).

Et si on prouvait que $C(f)$ est aussi de dimension 3 ? L'inclusion et l'égalité des dimensions permettrait de conclure à l'égalité des ensembles.

On va donc regarder plus prosaïquement que le commutant de la matrice A est aussi de dimension 3. Et plutôt que celui de A , on regarde celui de D . Les dimensions seront les mêmes.

En effet, M est permutable avec A si et seulement si $P^{-1} M P$ commute avec $P^{-1} A P$.

Pour la permutabilité avec D , on redescend jusqu'aux coefficients avec une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$, on résout le système et on arrive à la forme $\begin{pmatrix} a & a' & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. On conclut à une dimension égale à 3.

C'est ce qui permet de conclure pour l'égalité du commutant et de l'ensemble des polynômes en A .

Trois équations dans K .

D.S.13

On part de $3x + 1 = 6$. On soustrait 1 de chaque côté : $3x = 5$. On multiplie par l'inverse de 3 (c'est 4 car $3 \cdot 4 = 12 = 1 + 11 = 1$). On trouve $x = 4 \cdot 3x = 4 \cdot 5 = 9$.

On a l'unique solution : $X = 9$ et on vérifie : $3 \cdot 9 + 1 = 28 = 2 \cdot 11 + 6 = 6$.

Pour le système, on vérifie que c'est un système de Cramer : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$. Ce déterminant est non nul et est son propre inverse. L'unique solution pour x est donc $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} / -1$. Le calcul donne $x = 19/10 = 8/10 = 8 \cdot 10 = 3$.

Le calcul de la même forme donne $y = 1$.

L'unique solution est le couple $(3, 1)$ (on peut vérifier).

On pouvait aussi résoudre par combinaisons bien agencées.

Le trinôme $x^2 + 4x + 7$ a pour discriminant $16 - 4 \cdot 7 = -12 = -10$. Le signe n'a pas de signification. On cherche juste si c'est un carré parfait. La liste des carrés parfaits modulo 11 est $[0, 1, 4, 9, 16 = 5, 25 = 3, \dots]$. Le 10 n'est pas dans la liste. Il n'y a pas de solution.

On pouvait aussi tester les entiers un par un.

Premier plan.

D.S.13

Chaque vecteur est fait de deux composantes : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Onze choix pour chacune des deux composantes. Au total, il y a donc 11×11 choix.

Il y a 120 vecteurs non nuls. Sur chaque droite, il y a 10 vecteurs non nuls et le vecteur nul. Les 120 vecteurs se répartissent en 12 droites.

Autre point de vue : une droite est donnée par une équation de la forme $y = ax$ avec a à choisir (11 choix, car il peut être nul (droite "horizontale")) ou par l'équation $x = 0$. Ceci donne bien 12 droites.

Celle qui passe par $(3, 4)$ a pour équation $y = ax$ avec $4 = 3a$. On trouve $y = 5x$. On dresse la liste de ses points, pas dans l'ordre, hélas : $(0, 0), (1, 5), (2, 10), (3, 4), (4, 9), (5, 3), (6, 8), (7, 2), (8, 7), (9, 1), (10, 6)$. Mais déjà, rien que sous cette forme, il y a beaucoup de choses à comprendre. Pensez à

la tracer sur les 11^2 sommets d'un quadrillage...

Dénombrement des projecteurs et exemples.

D.S.13

Un projecteur est défini par son image et son noyau, en somme directe dans K^2 . Pour un projecteur de rang 1, noyau et image sont des droites.

On doit donc choisir l'image : 12 droites possibles.

Mais pour le noyau, on ne reprend pas la même droite. Il n'y a plus que 11 choix. D'où le 12.11. Mais il y a ensuite le +2 qui correspond aux deux projecteurs qui ne sont pas de rang 1 : Id et 0.

La matrice de l'énoncé s'élève facilement au carré :

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 24 \\ 12 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44+7 & 22+2 \\ 11+1 & 22+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ on a bien un projecteur.}$$

Son noyau s'obtient en résolvant $7.x + 2.y = 0$ ou $x + 5.y = 0$. On trouve $y = 2.x$ et on vérifie :

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Son image est aussi le noyau de $A - I_2$. Mais il me suffit de dire que $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une base de l'image.

Pour le vecteur de noyau et image imposées, c'est facile. Les colonnes sont des multiples de $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 4.a & 4.b \end{pmatrix}$. On se sert ensuite du noyau $a + 5.b = 0$. La matrice ne dépend plus que d'un paramètre : $\begin{pmatrix} a & 2.a \\ 4.a & 8.a \end{pmatrix}$. Mais on n'a pas encore l'assurance d'avoir un projecteur. On élève la matrice au carré. Pour retomber sur la même, il faut avoir $a^2 + 8.a^2 = a$. On écarte $a = 0$ qui donne la matrice nulle. Il ne reste que $a = 5$. La matrice cherchée est donc $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$ (je vérifie que sa trace vaut 1).

On pouvait aussi écrire $M = P.D.P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Bases, matrices inversibles.

D.S.13

On nous parle de 13 200 bases, on ne va pas les compter.

Que faut-il pour une base ? Deux vecteurs non nuls et même non colinéaires.

On choisit le premier dans la liste des $11^2 - 1$ vecteurs non nuls.

Pour le second, il reste $11^2 - 11$ vecteurs (tous moins les 11 multiples du premier vecteur).

Les choix sont indépendants : $(11^2 - 1).(11^2 - 11)$ est la bonne réponse.

Une matrice inversible, c'est la matrice d'une base. Il y a donc 12 300 matrices inversibles, parmi 11^4 matrices au total (quatre cases, onze choix par case). Il reste $11^4 - 13\,200$ matrices de déterminant nul. Application numérique : 1441 matrices non inversibles.

On revient aux 13 200 bases et autant de matrices inversibles. Toutes ces matrices peuvent avoir pour déterminant un entier de 1 à 10. D'ailleurs de manière "équiprobable". En effet, pour chaque matrice de déterminant 1, on peut construire une matrice de déterminant a en multipliant la première colonne par a .

Bilan	déterminant	0	1	2	...	10
	nombre de matrices	1441	1320	1320	...	1320

Le cadeau : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ a pour déterminant -2 c'est à dire 9. L'inverse du déterminant est donc 5. On

échange ensuite les termes : $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot 5 = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ (on vérifie en effectuant le produit).

On passe à l'espace.

D.S.13

Les vecteurs ont trois composantes à choisir entre 0 et 10. On a donc 11 choix pour chaque composante, donc 11^3 vecteurs.

Il reste $11^3 - 1$ vecteurs non nuls. Sur chaque droite, il y a tous les multiples d'un vecteur. Parmi eux, le vecteur nul, et 10 vecteurs non nuls.

On a donc 133 familles de 10 vecteurs. C'est ce qu'on appelle des droites.

Il y a autant de plans. Chaque plan, c'est une équation de la forme $a.x + b.y + c.z = 0$. Mais on refuse une et une seule solution : l'équation $0.x + 0.y + 0.z = 0$. Mais deux équations proportionnelles le même plan. Il y a donc $(11^3 - 1)/10$ familles d'équations de plans.

On commence peut être à saisir alors la notion de dualité et de transposition. Pas encore ? C'est normal. Mais relisez cet exercice étant en Spé...

Pour une base : un vecteur non nul : $11^3 - 1$ choix,

puis un vecteur non colinéaire au premier : $11^3 - 11$ choix

et enfin un vecteur qui ne soit pas combinaison des deux premiers $11^3 - 11^2$ (le 11^2 c'est pour les $\alpha.\vec{a} + \beta.\vec{b}$ avec α et β décrivant $\{0, 1, \dots, 11\} \times \{0, 1, \dots, 11\}$).

C'est encore par soustraction qu'il nous reste le nombre de matrices non inversibles. Et les inversibles se répartissent en 10 valeurs équiprobables.

Pour les projecteurs de rang 2. Il faut choisir l'image : 133 choix de plans possibles. Dans ce plan, il y a 12 droites. Il reste $133 - 12$ droites pour le noyau. On a donc 133×121 projecteurs de rang 2.

- Mais ensuite, il y a autant de projecteurs de rang 1. En effet, si p est de rang 2, alors $Id - p$ est un projecteur de rang 2 et vice versa.

- Il n'y a qu'un projecteur de rang 0 c'est la projecteur nulle ("tous sur $\vec{0}$ ").

- Il n'y a qu'un projecteur de rang 3, c'est Id .

- Il ne peut pas exister de projecteur de rang 4 dans un espace à trois dimensions...

MPSI2 Charlemagne

848 points

Année 2010/11

D.S.13

Combien d'années par siècle (environ) Noël tombe-t-il un vendredi 13 ?

Combien d'années par siècle (environ) le lundi de Pâques tombe-t-il un vendredi 13 ?

MPSI2

EXERCICES

2010/11

D.S.14

♠(49) On note s et c les applications sinus et cosinus et d la dérivation, vue comme endomorphisme de $\text{Vect}(c^4, c^3.s, c^2.s^2, c.s^3, s^4)$. Calculez $\det(d)$, $\text{Tr}(d)$ et $\text{rg}(d)$. Cette question nécessite la vérification de pas mal de choses en cours de route, n'oubliez rien. (5 pt.)

♠(50) On note p l'opérateur d'intégration (réciproque de la dérivation sur $\text{Vect}(c^3, c^2.s, c.s^2, s^3)$). Calculez $\det(p)$, $\text{Tr}(p)$ et $p(c^3)$. (5 pt.)

◇(20) Limite et développement limité d'ordre 2 quand x tend vers 0 de $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{1/\tan^2(x)}$. (4 pt.)

14 points

MPSI2

THÉORÈME SPECTRAL

2010/11

D.S.14

L'objectif de ce problème est le théorème spectral : **toute matrice réelle symétrique est diagonalisable, et on peut même exiger $P^{-1} = {}^t P$ (la base de diagonalisation est orthonormée)**. Je le pose à peu près chaque année en D.S., avec des démonstrations un peu différentes. Et vous le reverrez en seconde année, en cours. On n'en donnera pas dans ce devoir la démonstration complète, mais on en verra des morceaux, permettant normalement de se faire une idée de la démonstration : pourquoi les valeurs propres sont réelles, un passage de 2 à 3 au lieu d'une récurrence véritable.

MPSI2

Échauffement.

2010/11

D.S.14

- 1) Montrez que les valeurs propres de $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & d_1 \\ 0 & \beta & d_2 \\ d_1 & d_2 & t \end{pmatrix}$ sont toutes réelles (coefficients α, β, d_1, d_2 et t réels, avec $\alpha < \beta$), et que α et β s'intercalent entre ces trois racines (c'est à dire $\lambda_1 \leq \alpha \leq \lambda_2 \leq \beta \leq \lambda_3$). (3 pt.)

- 2) Montrez que la matrice inversible P vérifie $P^{-1} = {}^t P$ si et seulement si P est la matrice de passage de la base canonique vers une base orthonormée. (3 pt.)

MPSI2

Cas du plan.

2010/11

D.S.14

- 1) Montrez que les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique de taille 2 sont réelles. (2 pt.)
Montrez qu'elles sont distinctes, sauf si la matrice est une matrice d'homothétie. (1 pt.)

- 2) Soit S une matrice réelle symétrique de taille n , et U et V deux vecteurs propres de S de valeurs propres λ et μ . Montrez : ${}^t(\lambda.U).V = {}^t U.(\mu.V)$. (2 pt.) Dédisez que deux vecteurs propres de S de valeurs propres distinctes sont orthogonaux. (2 pt.) Montrez que tout multiple non nul d'un vecteur propre de S est encore un vecteur propre de S (valeur propre?). (1 pt.)

- 3) Dédisez : toute matrice réelle de taille 2 se diagonalise et on peut imposer ${}^t P = P^{-1}$. (2 pt.)

MPSI2

Espace.

2010/11

D.S.14

- 1) Soit S une matrice réelle symétrique de taille 3. Montrez qu'elle a au moins une valeur propre réelle μ et au moins un vecteur propre associé U . (3 pt.) Pourquoi peut-on imposer que U soit de norme 1 (c'est ce qu'on supposera pour la suite)? (1 pt.)
- 2) On note alors H l'ensemble des vecteurs X de $\mathbb{R}^3$ vérifiant ${}^tU.X = 0$ (les formats sont compatibles?). Montrez que H est un espace vectoriel et donnez sa dimension. (2 pt.) Montrez que pour tout X dans H , $S.X$ est encore dans H . (2 pt.)
- 3) On prend une base orthonormée de $H : (V, W)$. Montrez que (U, V, W) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. (3 pt.) Montrez que la matrice de $X \rightarrow S.X$ sur cette base est de la forme $\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & c \end{pmatrix}$. (3 pt.)
- 4) Dédisez qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ sur laquelle la matrice de $X \rightarrow S.X$ est diagonale.
- 5) Que vous reste-t-il à voir pour prouver le théorème spectral en dimension 3?

MPSI2

De 3 à 4.

2010/11

D.S.14

- 1) Soit A' une matrice réelle symétrique de taille 4 de terme général a_i^j . On note A la matrice de terme général a_i^j mais pour i et j seulement de 1 à 3. On sait donc que A est diagonalisable en une matrice D par un changement de base de matrice P (terme général p_i^j) vérifiant $P^{-1} = {}^tP$.

On pose alors $Q = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_1^2 & p_1^3 & 0 \\ p_2^1 & p_2^2 & p_2^3 & 0 \\ p_3^1 & p_3^2 & p_3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrez que Q est inversible d'inverse tQ . (2 pt.)

Simplifiez la matrice $Q^{-1}.A'.Q$. (2 pt.)

Montrez que le polynôme caractéristique de A' est de la forme $(\alpha - \lambda).(\beta - \lambda).(\gamma - \lambda).(a_4^4 - \lambda) - (d_1)^2.(\beta - \lambda).(\gamma - \lambda) - (d_2)^2.(\alpha - \lambda).(\gamma - \lambda) - (d_3)^2.(\alpha - \lambda).(\beta - \lambda)$ (noté χ) où α, β et γ sont les trois valeurs propres de A , et où les d_i sont des réels à préciser. (3 pt.)

- 2) On suppose d'abord pour cette question $\alpha < \beta < \gamma$. En calculant ce polynôme χ en α, β et γ , montrez que les quatre valeurs propres de A' sont toutes réelles. (3 pt.)
- 3) On suppose ensuite pour cette question $\alpha = \beta < \gamma$. En étudiant le polynôme caractéristique de A' en α et γ , montrez que les quatre valeurs propres de A' sont toutes réelles (pensez à calculer $\chi'(\alpha)$). (3 pt.)

-
- 1) Soit μ une valeur propre de A' , et U un vecteur propre associé. Montrez que l'ensemble $\{X \in \mathbb{R}^4 | {}^tU.X = 0\}$ est un espace vectoriel (dimension?), stable par la multiplication par A' . (3 pt.) Si (C_1, C_2, C_3) est une base de H , donnez la forme de la matrice de $X \rightarrow A'.X$ sur la base (U, C_1, C_2, C_3) (n'allez surtout pas dire que je vous ai donné ici des indices par rapport aux dernières questions). (3 pt.)

- 2) Montrez qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ sur laquelle la matrice de $X \rightarrow A'.X$ est diagonale. (3 pt.)

MPSI2 Charlemagne

914 points

Année 2010/11

D.S.14

La dérivation sur $Vect(c^4, c^3.s, c^2.s^2, c.s^3, s^4)$.

D.S.14

On nous invite pour ce problème à tout vérifier :

- $E = Vect(c^4, \dots, s^4)$ est bien un **espace vectoriel** (quelle dimension, une base ?)
- la dérivation est un **endomorphisme** (linéarité, caractère “endo”),
- en tant qu’endomorphisme, elle a un **déterminant et une trace**, qu’on peu calculer en prenant la matrice de cet endomorphisme sur une base (n’importe laquelle, les matrices obtenues seront de toutes façons semblables...).

Celui que j’ai appelé E est bien un **espace vectoriel**, par définition même d’espace engendré. On a même une famille génératrice, à cinq vecteurs.

S’il s’avère que cette famille est **libre**, elle formera une **base**.

On suppose donc $\alpha_0.c^4 + \alpha_1.c^3.s + \alpha_2.c^2.s^2 + \alpha_3.c.s^3 + \alpha_4.s^4 = 0$ (fonction nulle). On a pour objectif la nullité des α_k .

La relation en 0 donne $\alpha_0.1 = 0$, on déduit que α_0 est nul. Il reste $\alpha_1.c^3.s + \alpha_2.c^2.s^2 + \alpha_3.c.s^3 + \alpha_4.s^4 = 0$.

On divise par $\sin$ (à condition de se placer maintenant sur $]0, \pi[$ par exemple). On fait ensuite tendre x vers 0 (la valeur 0 nous est maintenant interdite). On trouve $\alpha_1 = 0$.

On en est maintenant à $\alpha_2.\cos^2(x).\sin^2(x) + \alpha_3.\cos(x).\sin^3(x) + \alpha_4.\sin^4(x) = 0$ pour tout x de $]0, \pi[$. On divise encore par $\sin(x)$ et on fait tendre x vers 0 (son rôle de variable très libre est capital). C’est au tour de α_2 de “tomber”, et ainsi de suite.

La famille $(c^4, c^3.s, c^2.s^2, c.s^3, s^4)$ (notée B) est libre, E est de dimension 5 et B en est une base.

Que **la dérivation soit linéaire**, c’est un fait sur lequel je ne reviendrai pas.

Il reste à établir qu’elle va bien de E dans E . Par linéarité, il suffit de le vérifier pour les cinq vecteurs d’une base, telle que justement B :

- $d(c^4) = (\cos^4)' = -4.\cos^3.\sin = -4.c^3.s \in E$
- $d(c^3.s) = (\cos.\sin^3)' = -3.\cos^2.\sin^2 + \cos^4 = c^4 - 3.c^3.s \in E$
- $d(c^2.s^2) = (\cos^2.\sin^2)' = -2.\cos.\sin^3 + 2.\cos^3.\sin = -2.c.s^3 + 2.c^3.s \in E$
- $d(c.s^3) = (\cos.\sin^3)' = -s^4 + 3.c^2.s^2 \in E$
- $d(s^4) = (\sin^4)' = 4.c.s^3 \in E$

C’est donc acquis : d est un **endomorphisme de E** .

La question précédente (ou plutôt la réponse à la question précédente) donne même la matrice de d de B

dans B :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il était important de vérifier que B était une base et pas juste une famille génératrice, pour s’assurer du format de la matrice à calculer...

Les matrices de d sur les diverses bases de E seront semblables à cette matrice et auront pour trace 0 et pour déterminant 0 (j’ai développé par rapport à la première colonne, j’ai recommencé en première ligne,

il restait $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ avec ses deux colonnes visiblement proportionnelles).

On écrit donc proprement : $Tr(d) = 0$ et $\det(d) = 0$.

Pardon ? On pouvait se douter de $\det(d) = 0$? Oui, **la dérivation a un noyau non réduit au seul**

vecteur nul. On y trouve les fonctions constantes. Oui, mais sont elles dans E ?

J'écris avec spontanéité : $1 = c^2 + s^2$ et j'élève au carré : $1 = c^4 + 2.c^2.s^2 + s^4$.

Je tiens donc un vecteur du noyau : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (et ses multiples).

Puis je en avoir plus ? Non ! Seules les constantes peuvent être dans $\text{Ker}(d)$.

On en déduit $\dim(\text{Ker}(d)) = 1$ **puis** $\text{rg}(d) = 4$ (encore une fois, il fallait être sûr de la valeur de la dimension de E).

La dérivation comme automorphisme de $\text{Vect}(c^3, c^2.s, c.s^2, s^3)$.

D.S.14

Cet exercice commence comme le précédent, jusqu'à l'obtention de la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Et maintenant, tout change.

Cette matrice a pour déterminant 9 et pour trace 0.

La non nullité du déterminant permet d'affirmer que cette fois on a un **automorphisme**.

On a donc une application réciproque, dont la matrice sur la base B' sera l'inverse de cette matrice.

Le déterminant de p vaut donc $1/9$ (sans calculer M^{-1}).

Il me faudra quand même calculer M^{-1} pour en avoir la trace. Mais en fait, seuls les coefficients diagonaux m'intéressent. Ce sont donc les cofacteurs des termes diagonaux. Des déterminant tels que

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \text{ Ils sont tous nuls : } \text{Tr}(d^{-1}) = 0.$$

Pour ce qui est de $p(c^3)$, le calcul de la matrice inverse est efficace, dans la mesure où il ne nous faut guère calculer qu'une colonne.

Mais je peux aussi chercher à intégrer, quitte à vérifier si la primitive trouvée est bien dans $\text{Vect}(c^3, c^2.s, c.s^2, s^3)$. Classiquement, j'écris c^3 sous la forme $(1 - s^2).c$ et j'intègre en $s - s^3/3$. La fonction $\sin^3/3$ est dans mon espace vectoriel, je la garde. Mais le sinus tout seul ?

Si ! Je l'écris $s = s.1 = s.(c^2 + s^2)$.

Et on achève avec $p(c^3) = c^2.s + 2.s^3/3$. Et on vérifie : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Développement limité de $(\sin(x)/x)^{1/\tan^2(x)}$.

D.S.14

L'existence de cette quantité ne pose pas de problème sur $[-\pi/3, 0[$ ni sur $]0, \pi/3]$. Sa limite est plus problématique. Une fois levée l'indétermination de $\sin(x)/x$ (limite 1), on a la forme en 1^∞ pour laquelle il faut en revenir au logarithme.

Rapidement pour commencer : $\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$. On extrait le logarithme, équivalent à $-x^2/6$.

On divise par $\tan^2(x)$, équivalent à x^2 . Le logarithme de $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{1/\tan^2(x)}$ est équivalent à $-1/6$ et tend donc vers $-1/6$. Par continuité de l'exponentielle, la limite cherchée vaut $e^{-1/6}$.

Reste à savoir ensuite comment on tend vers cette valeur. On reprend, avec des développements plus poussés.

$\frac{\sin(x)}{x}$ est égal à $1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$ quand x tend vers 0.

On passe au logarithme ; $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ est égal à $-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^4)$. On a $-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4)$ quand x tend vers 0.

On divise par $(x - x^3/3)^2 + o(x^4)$ c'est à dire par $x^2 - 2.x^4/3 + o(x^4)$, par la méthode que l'on veut (division suivant les puissances croissantes, produit en croix et système) après simplification par x^2 .

Il reste un petit quelquechose : $\frac{\ln(\sin(x))}{\tan^2(x)} = -\frac{1}{6} + \frac{19}{180}.x^2 + o(x^2)$.

On compose avec l'exponentielle : $e^{-1/6}.e^{19.x^2/180+o(x^2)}$.

Il reste : $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{1/\tan^2(x)} = e^{-1/6} + \frac{19}{180}.e^{-1/6}.e^t + o(x^2)$ quand t tend vers 0.

Théorème spectral. Deux exercices d'échauffement.

D.S.14

On prend la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & d_1 \\ 0 & \beta & d_2 \\ d_1 & d_2 & t \end{pmatrix}$ et on en calcule le polynôme caractéristique : $\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 0 & d_1 \\ 0 & \beta - \lambda & d_2 \\ d_1 & d_2 & t - \lambda \end{vmatrix}$.

On trouve $-\lambda^3 + (\alpha + \beta + t).\lambda^2 + ((d_1)^2 + (d_2)^2 - \alpha.\beta - \alpha.t - \beta.t).\lambda + \alpha.\beta.t - \alpha.(d_2)^2 - \beta.(d_1)^2$ (autant dire : une horreur) !

On doit montrer que les racines sont réelles.

On ne cherche pas à les calculer, c'est suicidairement calculatoire et voué à l'échec... Tiens, je viens de perdre celles et ceux qui auraient mieux fait de passer par P.C.S.I. ("celles et celui..." ?).

On ne cherche pas à écrire plein de formules comme les relations coefficients racines, ce serait encore trop lourd... Tiens, je viens de perdre celles et ceux qui vont aller plutôt en P.S.I.

On cherche juste à **voir ce polynôme de degré 3**.

Maintenant qu'on est entre gens qui réfléchissent : puisqu'on nous demande de situer ces racines par rapport à α et β , calculons ce polynôme en α et β .

- $P(\alpha) = (d_1)^2.(\beta - \alpha)$, toutes simplifications faites (et il y en a un paquet)

- $P(\beta) = (d_2)^2.(\alpha - \beta)$ (là aussi, ça se simplifie bien).

$P(\alpha)$ est négatif et $P(\beta)$ est positif. On a déjà une racine entre α et β par le théorème des valeurs intermédiaires.

- P est positif "au voisinage de $-\infty$ " (terme dominant en $-\lambda^3$).

Le théorème de l'homéomorphisme nous donne au moins une racine sur $] -\infty, \alpha[$.

- P est négatif "au voisinage de $+\infty$ (mêmes raisons).

Le même théorème des valeurs intermédiaires généralisé donne une racine sur $] \beta, +\infty[$.

On tient trois racines, le polynôme ne peut pas en avoir plus (degré 3). On les a toutes.

Le théorème qui dit qu'un polynôme de degré n n'a pas plus de n racines est un simple théorème sur la factorisation. Il n'a en rien la classe du théorème de d'Alembert-Gauss qui donne lui l'existence d'au moins une racine. Ne confondez pas. L'un est gentil l'autre est un gros théorème...

Soit donc P une matrice inversible. Déjà, elle est forcément carrée. On calcule le produit matriciel ${}^tP.P$ pour pouvoir ensuite raisonner par équivalences. Le terme de position (i, j) de ce produit est obtenu avec la "chute de la colonne j de P sur la ligne i de tP ". Or, les lignes de tP sont les lignes de P . Ce coefficient est donc le produit scalaire de C_i et C_j où l'on indexe de C_1 à C_n les colonnes de P .

La famille des vecteurs-colonne est orthonormée si et seulement si le produit matriciel ${}^tP.P$ est égal à I_n .

Et cette égalité ${}^tP.P = I_n$ est équivalente à "l'inverse de P est tP ".

On met bout à bout les deux équivalences et on a tout de suite l'équivalence demandée (sans même qu'il s'agisse d'une double implication).

Théorème spectral. Cas de la dimension 2.

D.S.14

On prend donc une matrice carrée de taille 2, symétrique : $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $X^2 - (a+c).X + a.c - b^2$. Il a pour discriminant $(a-c)^2 + 4.b^2$ après simplification. **Ce discriminant est positif** (carré de réels), les coefficients sont réels, les racines le sont aussi.

Pour avoir une racine double : $a = c$ et $b = 0$. La matrice est alors de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, déjà diagonale...

On prend une matrice symétrique de taille 2 ou plus, et deux vecteurs propres : $S.U = \lambda.U$ et $S.V = \mu.V$. On transpose : ${}^t(\lambda.U) = {}^t U.{}^t S$. On multiplie à droite par V : ${}^t(\lambda.U).V = ({}^t U.{}^t S).V$ (formats compatibles : ligne fois colonne donne réel). On remplace aussi $S.V$ par $\mu.V$. On synthétise : ${}^t(\lambda.U).V = {}^t (S.U).V = {}^t U.{}^t S.V = {}^t U.S.V = {}^t U.\mu.V$.

On exploite au milieu la symétrie de la matrice S .

On peut sortir les réels : $\lambda.{}^t U.V = \mu.{}^t U.V$.

Comme on a supposé λ différent de μ , il vient nécessairement ${}^t U.V = 0$.

Les deux vecteurs sont orthogonaux.

On savait déjà que les vecteurs propres associés à des valeurs propres distincts sont linéairement indépendants. On apprend ici que pour une matrice symétrique, les vecteurs propres sont orthogonaux.

Pour ce qui est de la question de cours “multiple d’un vecteur propre”, on écrit $M.U = \lambda.U$. On calcule ensuite, en exploitant les linéarités :

$M.(\alpha.U) = \alpha.M.U = \alpha.(\lambda.U) = \lambda.(\alpha.U)$ (on exploite plusieurs propriétés du registre “espace vectoriel”).

On prend donc une matrice symétrique de taille 2. Si elle est déjà diagonale, inutile de chercher plus. La base canonique est base de vecteurs propres, et elle est orthonormée. La matrice de passage $P = I_2$ vérifie bien $P^{-1} = {}^t P$.

Sinon, le polynôme caractéristique est assuré d’avoir deux racines réelles différentes. On a donc, pour chacune des deux valeurs propres au moins un vecteur propre. Comme les valeurs propres sont distinctes, on a deux vecteurs propres orthogonaux entre eux. Ils forment une base. On les renorme. Ils restent propres, et on a une base orthonormée.

On identifie donc une matrice de passage qui va vérifier ${}^t P = P^{-1}$.

Dimension 3.

D.S.14

Si on prend une matrice réelle symétrique de taille 3, son polynôme caractéristique est de degré 3 : $-\lambda^3 + Tr(S).\lambda^2 - Min_2(S).\lambda + det(S)$. On lui applique le **théorème des valeurs intermédiaires entre $-\infty$ et $+\infty$** . On a au moins une racine μ .

Pour ce réel μ , on a $det(S - \mu.I_3) = 0$. L’endomorphisme $X \longrightarrow S.X - \mu.X$ n’est donc ni injectif, ni surjectif. Son noyau contient au moins un vecteur non nul, qu’on peut noter U . Et tout vecteur proportionnel à U est encore vecteur de ce noyau (stabilité par multiplication par un réel). On renorme donc un vecteur non nul de ce noyau, et on trouve un vecteur unitaire vérifiant donc $S.U = \mu.I_3.U$. C’est un vecteur propre.

On regarde l’espace H des vecteurs X vérifiant ${}^t U.X = 0$ comme le noyau d’une forme linéaire : $X \longrightarrow {}^t U.X$. Cette forme va de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Son noyau est de dimension 2 (son ensemble image est vraiment $\mathbb{R}$, de dimension 1, sinon ce serait 0 aors que U lui même a une image non nulle par cette application).

En fait, avec des notations naturelles, on écrit $(u_1 \ u_2 \ u_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ et on reconnait un plan

dont le vecteur normal est U .

On prend X dans ce plan H (puisque c'en est un), et on calcule le produit scalaire de U avec son image $S.X$. C'est donc ${}^tU.S.X$ par associativité. On remplace S par tS et on arrange :

$${}^tU.(S.X) = {}^tU.S.X = {}^tU.{}^tS.X = {}^t(S.U).X = {}^t(\mu.U).X = \mu.{}^tU.X = \mu.0 = 0$$

La conclusion est la bonne : $S.X$ est resté dans H .

On garde un endomorphisme de H mais avec H de dimension 2.

Entrelacement des valeurs propres de A et des valeurs propres de A' .

D.S.14

Pour ce qui est de l'inversibilité de Q , son déterminant est égal à celui de P en développant par rapport à la dernière colonne. Or, P est inversible, en tant que matrice de passage.

Pour ce qui est de son inverse, soyons efficace !

Puisqu'on nous le propose, calculons $Q.{}^tQ$. On (re)trouve le calcul de $P.{}^tP$ avec quelques 0 en plus, ce qui ne change rien. Et on a un 1 dans le coin en bas. Bref, du produit par blocs.

Le pire, c'est que certains élèves auront perdu leur temps à chercher l'inverse de Q par une méthode quelconque (cofacteurs, pivot), juste parce qu'ils sont obéissants et "gentils". Et ensuite, ils auront comparé avec tQ .

Le calcul de ${}^tQ.A'.Q$ peut aussi se faire par blocs :

$${}^tQ.A'.Q = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & a_4^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A.P & C \\ {}^tC.P & a_4^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tP.A.P & {}^tP.C \\ {}^tC.P & a_4^4 \end{pmatrix}$$

On notera que la trace est préservée.

C est un vecteur colonne en coefficients a_i^4 .

La matrice ${}^tP.A.P$ est diagonale par choix de P .

On a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & \beta & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & \gamma & d_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 & a_4^4 \end{pmatrix}$. Et elle est semblable à A' par construction.

Le polynôme caractéristique de A' est égal à celui de ${}^tQ.A'.Q$ (matrices semblables, question de cours classique).

On calcule $\begin{pmatrix} \alpha - \lambda & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & \beta - \lambda & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & \gamma - \lambda & d_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 & a_4^4 - \lambda \end{pmatrix}$ en développant par rapport à la dernière colonne. On a

déjà un terme simple : $(a_4^4 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \beta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma - \lambda \end{vmatrix}$ qui donne un produit de quatre termes.

On a aussi des termes comme $-d_1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \beta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma - \lambda \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$. En redéveloppant par rapport à la bonne colonne, on a $-(d_1)^2 \cdot (\beta - \lambda) \cdot (\gamma - \lambda)$.

Puisqu'on nous le demande : les d_i sont les coefficients de $P.C$ où C est la colonne $\begin{pmatrix} a_1^4 \\ a_2^4 \\ a_3^4 \end{pmatrix}$.

On note χ ce polynôme de degré 4.

On le calcule en α , β et γ (les trois valeurs propres de A dans l'ordre). Plusieurs termes sautent, et on va surtout regarder le signe :

$$\left[\begin{array}{c|c} x & \alpha \\ \chi(x) & - \\ \text{signe} & \end{array} \right] \begin{array}{ccc} & \alpha & \beta \\ & -(d_1)^2 \cdot (\beta - \alpha) \cdot (\gamma - \alpha) & -(d_2)^2 \cdot (\alpha - \beta) \cdot (\gamma - \beta) \\ & - & + \end{array} \begin{array}{ccc} & \gamma & \\ & -(d_3)^2 \cdot (\alpha - \gamma) \cdot (\beta - \gamma) & \\ & - & \end{array} \right] .$$

Que déduit on ? χ **admet au moins deux racines réelles** : l'une entre α et β et l'autre entre β et γ .

On ne savait pas à l'avance que le polynôme caractéristique de A' allait avoir des racines réelles, puisque est de degré 4 à coefficients réels. C'est déjà beau...

Mais il y a encore mieux.

Le polynôme caractéristique de A' est de degré 4, avec terme dominant en λ^4 . On peut appliquer le théorème de l'homéomorphisme à χ déjà sur $] - \infty, \alpha[$ et aussi sur $] \gamma, +\infty[$.

Et on a donc un total de quatre racines pour χ , dans chacun des intervalles : $] - \infty, \alpha[$, $] \alpha, \beta[$, $] \beta, \gamma[$ et $] \gamma, +\infty[$.

Le polynôme ne peut avoir d'autre racine, on a donc montré que toute matrice réelle symétrique de taille 4 admet quatre racines réelles.

On peut faire le même raisonnement en dimension n avec une récurrence : **les n racines du polynôme caractéristique d'une matrice réelle symétrique sont réelles.**

Mieux encore, on a ce qu'on appelle le **théorème d'entrelacement** :

si A' est une matrice réelle symétrique, si A est la matrice (*réelle symétrique*) obtenue en effaçant dernière colonne et dernière ligne, alors on a deux spectres, tous deux réels (*l'un à n éléments, et l'autre à $n - 1$ éléments*), et les valeurs propres de A s'intercalent entre celles de A' :

$$\alpha_1 \leq a_1 \leq \alpha_2 \leq a_2 \leq \alpha_3 \leq a_3 \leq \dots \leq \alpha_{n-1} \leq a_{n-1} \leq \alpha_n$$

Mais il reste un problème. On s'est placé dans le cas où les trois valeurs propres de A sont distinctes : $\alpha < \beta < \gamma$ (supposer qu'elles sont dans cet ordre ne réduit pas la généralité).

Il faut quand même s'intéresser au cas où il y a une des racines qui est double...

On suppose donc cette fois $\alpha = \beta < \gamma$. Le calcul du polynôme caractéristique de A' reste le même. Il suffit de remplacer β par α dans χ .

On voit tout de suite que α est racine de χ :

$$(\alpha - \lambda)^2 \cdot (\gamma - \lambda) \cdot (a_4^2 - \lambda) - ((d_1)^2 + (d_2)^2) \cdot (\alpha - \lambda) \cdot (\gamma - \lambda) - (d_3)^2 \cdot (\alpha - \lambda)^2$$

Le signe en γ et le comportement à l'infini restent ce qu'on avait auparavant. On a une racine après γ . Mais il nous faut d'autres racines...

Et c'est là que l'idée est de regarder le signe de la dérivée de χ en α .

On dérive, les termes en $(\alpha - \lambda)^2$ (variable λ) donnent 0 quand on remplace λ par α . Il reste (tous calculs faits) : $\chi'(\alpha) = ((d_1)^2 + (d_2)^2) \cdot (\gamma - \alpha)$ (dérivation des deux termes en $-d^2 \cdot (\alpha - \lambda) \cdot (\gamma - \lambda)$). Ce nombre est positif.

Par continuité, χ' reste positive sur un voisinage de α et est donc localement croissante (théorème des accroissements finis).

On a donc χ qui décroît d'abord (dérivée en $\lambda \rightarrow 4\lambda^3 + \dots$), mais quand son graphe traverse Ox en $x = \alpha$ c'est en croissant...

Il faut donc que son graphe ait déjà coupé Ox avant.

On trouve ensuite un point au delà de α en lequel χ est positif. On applique le théorème des valeurs intermédiaires entre ce point et γ , et on a une deuxième racine avant γ .

On dresse l'inventaire des racines de χ :

- une racine sur $] - \infty, \alpha[$,
- α , la racine double du polynôme caractéristique de A ,
- une racine entre α et γ
- une racine sur $] \gamma, +\infty[$.

On ne peut pas avoir plus de racines (degré 4), elles sont toutes réelles...

Les démonstrations que je proposais les années précédentes avaient tendance à être plutôt sur le modèle suivant : le polynôme caractéristique de A' est de degré 4 et a donc au moins une racine dans $\mathbb{C}$, on la prend, on prend un vecteur propre et on exploite ensuite le caractère réel symétrique de la matrice pour montrer que cette valeur propre est en fait réelle. Finalement, j'aime assez cette démonstration

alternative qui donne ici le fait que les racines soient réelles (et encadrent celles de A) en s'affranchissant du théorème de d'Alembert Gauss.

Cette démonstration a l'avantage de nécessiter une vision géométrique du graphe du polynôme caractéristique de degré 4 pour saisir ce qu'il se passe. Bref, des maths et pas du calcul.

On devine qu'il faudrait quand même penser à étudier le cas où la racine double est la plus grande. Et le cas de la racine triple. On va poursuivre en imaginant qu'on a traité ces cas "de manière similaire" (oh l'affreux bluff qui ne passerait pas sur une copie), et on va diagonaliser A' en cherchant une base de $3 + 1$ vecteurs propres.

Cosntruction d'une base de vecteurs propres en dimension 4.

D.S.14

On prend donc une des valeurs propres de A' (réel noté μ), et un vecteur propre associé U .

Le fait que H (ensemble des vecteurs orthogonaux à U) soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ repose encore sur "noyau d'une forme linéaire". Sa dimension (c'est 3) est donnée encore par la formule du rang. La stabilité par multiplication par A' repose encore sur " A' est réelle symétrique" :

$${}^tU.(A'.X) = {}^tU.A'.X = {}^tU.{}^tA'.X = {}^t(A'.U).X = {}^t(\mu.U).X = \mu.{}^tU.X = \mu.0 = 0$$

Si on part ensuite du vecteur U et qu'on ajoute des vecteurs de H , on a une famille libre (lemme d'agrandissement à partir de la famille des trois C_k sachant que U n'est pas dans l'espace qu'elles engendrent). Elle a le bon cardinal pour faire une base de $\mathbb{R}^4$.

Sur cette base, la matrice de $X \longrightarrow A.X$ est $\begin{pmatrix} \mu & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \end{pmatrix}$ car le premier vecteur est propre.

C'est même $\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \end{pmatrix}$, car les éléments de H ont une image dans H .

Enfin, on pouvait aussi dire qu'on cherchait $P^{-1}.S.P$ où P est la matrice de passage de la base canonique à la base orthonormée des quatre vecteurs. On a donc $P^{-1} = {}^tP$.

On transpose alors $P.S.P^{-1}$. On retrouve la même matrice car S est symétrique.

La matrice $\begin{pmatrix} \mu & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . \end{pmatrix}$ est donc tenue d'être aussi symétrique.

Il traîne donc une matrice carrée de taille 3 qui est réelle symétrique. On peut la diagonaliser, c'est à dire trouver trois vecteurs propres de S formant une base orthonormée de H .

Quand on les met avec U , on a une famille orthonormée de 4 vecteurs.

Et c'est une famille libre, donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$. Par construction de cette base, elle sert à diagonaliser S .

S (matrice réelle symétrique de taille 4) est donc diagonalisable en base orthonormée.

MPSI2 Charlemagne

914 points

Année 2010/11

D.S.14

♠(51) Voici, sur la base canonique (donc orthonormée), la matrice R d'une rotation et la matrice P d'un projecteur orthogonal. Complétez P , retrouvez noyau et image (justifiez, indiquez s'il y a plusieurs solutions). (4 pt.) Complétez pour R , et retrouvez axe, angle. (4 pt.)

$$P = \frac{1}{*} \cdot \begin{pmatrix} 26 & 2 & * \\ * & 29 & * \\ * & * & 5 \end{pmatrix} \text{ et } R = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & * \\ * & 12 & * \\ 12 & * & * \end{pmatrix}.$$

◇(21) Calculez. Concluez. (0 pt.)

60 points

L'énoncé qui suit est un large extrait d'un problème de concours (C.C.P. 2003, filiaire M.P.). On y mesure la distance d'une matrice à des sous-espaces ou à des sous-ensembles de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme euclidienne "usuelle" (issue du produit scalaire en $(A, B) \rightarrow \text{Tr}(^t A.B)$ appelée ici "norme de Schur"). On y fait redémontrer des résultats qui pour certains sont des exercices classiques de Sup (orthogonalité) et pour d'autres de Spé (décomposition polaire).

On en profite pour traiter un cas particulier.

Vous pourrez utiliser le théorème spectral (démontré en spé, ébauché dans un devoir précédent : toute matrice réelle symétrique se diagonalise et on peut imposer à la matrice de passage d'être orthogonale).

Tiens, au fait, aujourd'hui, Marie a huit ans. Et je l'aime.

Dans tout l'énoncé, les matrices sont réelles, et le mot positif est pris au sens large.

Les diverses parties de ce devoir sont indépendantes.

- 1) On pose $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. On pose : $H = {}^t \Gamma \Gamma$. Déterminez le rang de Γ , le noyau de

$X \rightarrow \Gamma.X$. (2 pt.)

- 2) Déterminez le rang de H . (1 pt.) Calculez $H.Y$ où Y est le vecteur de composantes valant toutes 1. (1 pt.) Déterminez le rang de $H - I_3$ et donnez une base orthonormée de $\text{Ker}(X \rightarrow (H - I_3).X)$. (2 pt.) Diagonalisez H . (2 pt.)

- 3) Déterminez une matrice P dans $O_3(\mathbb{R})$ et une matrice D à diagonale positive vérifiant $D^2 = P^{-1}.H.P$. (2 pt.) On pose : $S = P.D.P^{-1}$. Montrez que S est symétrique. (1 pt.)

- 4) Montrez que la relation $\Gamma = U.S$ définit une unique matrice U . (1 pt.) Montrez qu'elle est orthogonale, puis calculez cette matrice. (3 pt.)

15 points

- 1) Montrez que $(A, B) \rightarrow \text{Tr}(^t A.B)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$ (noté ϕ). (2 pt.) La norme (de Schur) d'une matrice A est alors $|A| = \sqrt{\phi(A, A)}$. La distance d'une matrice A à une partie Π de $M_n(\mathbb{R})$ est $d(A, \Pi) = \inf(|A - M|/M \in \Pi)$.

- 2) Montrez que $M_n(\mathbb{R})$ est la somme directe orthogonale des deux sous espaces $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ (matrices symétriques/antisymétriques). (2 pt.) - 3) Montrez : $d(A, S_n(\mathbb{R})) = |A - {}^t A|/2$ et déterminez $d(A, A_n(\mathbb{R}))$. (2 pt.)

- 4) Calculez $d(\Gamma, S_3(\mathbb{R}))$ et $d(\Gamma, A_3(\mathbb{R}))$ pour la matrice Γ de la première partie. (2 pt.)

MPSI2		Distance orthogonale		2010/11	8 points
					D.S.15

- 1) On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques S de taille n vérifiant ${}^tX.S.X \geq 0$ pour tout vecteur X de taille n . Montrez que $S_n^+(\mathbb{R})$ est stable par addition et multiplication par un réel positif (on parle de cône convexe). (2 pt.)
- 2) On rappelle que toute matrice réelle symétrique se diagonalise en base orthonormée (c'est à dire s'écrit $P.D.P^{-1}$ avec D diagonale et $P^{-1} = {}^tP$). Montrez qu'une matrice réelle symétrique S est dans $S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si ses valeurs propres sont positives. (2 pt.)

- 1) Soit A dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrez que ${}^tA.A$ est dans $S_n^+(\mathbb{R})$. (2 pt.)
- 2) Soit A dans $M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe D , matrice diagonale à termes diagonaux positifs ou nuls d_1 à d_n , vérifiant ${}^tA.A = D^2$. En étudiant les produits scalaires entre les vecteurs colonnes de A (notés C_1 à C_n), montrez qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ ($E_1, \dots, E_n$) vérifiant $C_i = d_i.E_i$ pour tout i de 1 à n . (2 pt.) En déduire qu'il existe E dans $O_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = E.D$. (2 pt.)
- 3) Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tA.A = {}^tB.B$. Montrez qu'il existe D diagonale à coefficients positifs et P orthogonale vérifiant $P^{-1}.{}^tA.A.P = P^{-1}.{}^tB.B.P = D^2$. (2 pt.) Montrez à l'aide des questions précédentes qu'il existe U dans $O_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = U.B$. (2 pt.)
- 4) Déduisez alors de tout ce qui précède le théorème de décomposition polaire : toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $A = U.S$ avec U orthogonale et S symétrique à valeurs propres positives (on peut même prouver l'unicité de cette décomposition si A est inversible, mais on ne le fera pas ici, car ce résultat est inutile pour la suite).
- 5) Donnez une décomposition polaire de la matrice Γ des préliminaires.

- 14 points
- 1) Montrez, pour M dans $M_n(\mathbb{R})$ et Ω dans $O_n(\mathbb{R})$: $|M| = |\Omega.M| = |M.\Omega|$. (2 pt.)
- 2) On prend donc pour cette partie une matrice A qu'on décompose en $U.S$ avec U orthogonale et S dans $S_n^+(\mathbb{R})$. On diagonalise S en $P.D.P^{-1}$ avec P orthogonale. Montrez, pour toute matrice Ω de $O_n(\mathbb{R})$: $|A - \Omega| = |S - U^{-1}.\Omega|$. (1 pt.) Déduisez : $d(A, O_n(\mathbb{R})) = d(S, O_n(\mathbb{R})) = d(D, O_n(\mathbb{R}))$. (3 pt.)
- 3) On pose donc : $D = \text{Diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$. Montrez pour toute matrice Ω de $O_n(\mathbb{R})$: $|D - \Omega|^2 = \sum_{k=1}^n (\lambda_k)^2 - 2.Tr(D.\Omega) + n$. (2 pt.)
- 4) Montrez, pour toute matrice Ω de $O_n(\mathbb{R})$: $Tr(D.\Omega) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k$. (2 pt.)
- 5) Concluez : $d(D, O_n(\mathbb{R})) = |D - I_n|$. (2 pt.)
- 6) Montrez : $d(A, O_n(\mathbb{R})) = |A - U|$. (2 pt.)
- 7) Calculez la distance de Γ à $O_3(\mathbb{R})$. (2 pt.)

MPSI2		Distance et rang		2010/11	16 points
					D.S.15

- 1) Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrez qu'il existe α strictement positif tel que, pour tout λ de $]0, \alpha[$, la matrice $M - \lambda.I_n$ est inversible.
- 2) Calculez alors la distance $d(M, GL_n(\mathbb{R}))$ (ensemble des matrices inversibles). (2 pt.) Calculez pour chaque p de 0 à n la distance de M à Δ_p (ensemble des matrices de taille n de rang supérieur ou égal à p). (1 pt.)
- 1) Déterminez la distance de la matrice Γ à l'ensemble des matrices symétriques de rang 1. (4 pt.)

MPSI2 Charlemagne		982 points		Année 2010/11	D.S.15
-------------------	--	------------	--	---------------	--------

Deux matrices à compléter.

D.S.15

On commence par la matrice de rotation. Il faut que la première colonne soit normée. Le coefficient du milieu doit vérifier $3^2 + x^2 + 12^2 = 13^2$ d'inconnue x . On trouve $x^2 = (13 - 12) \cdot (13 + 12) - 3^2 = 16$. Le coefficient est soit 4 soit -4 . De même, dans la deuxième colonne, c'est soit 3 soit -3 .

Si on prend la première colonne $(3, -4, 12)$, la deuxième colonne n'arrivera pas à lui être orthogonale, quel que soit le choix de signes sur la deuxième. On doit donc choisir $(3, 4, 12)$ et la seconde colonne

est $(-4, 12, -3)$. On a donc pour l'instant $R = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & * \\ 4 & 12 & * \\ 12 & -3 & * \end{pmatrix}$.

Comme l'isométrie est directe, la troisième colonne est le produit vectoriel des deux premières :

$$R = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & -12 \\ 4 & 12 & -3 \\ 12 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

On trouve le cosinus de l'angle : $1 + 2 \cdot \cos(\theta) = 19/13$. On extrait : $\cos(\theta) = 3/13$.

On cherche ensuite • un vecteur invariant / • un vecteur du noyau de $R^{-t}R$ / • un vecteur de l'image

de $R + {}^tR - 2 \cdot \cos(\theta) \cdot I_3$. On trouve l'axe dirigé par $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. On estime même qu'on l'oriente ainsi. Le

déterminant $\det(\text{axe}, \text{vecteur}, \text{image})$ donne un sinus négatif. L'angle est alors $-\text{Arccos}(3/13)$. Mais si vous orientez l'axe par ${}^t(0, 3, -1)$ vous n'aurez pas de signe moins.

Et pour le projecteur orthogonal ? Il est autoadjoint, et sa matrice est symétrique. De plus, sa trace est égale à son rang. Le bloc en haut est $\begin{pmatrix} 26 & 2 \\ 2 & 29 \end{pmatrix}$. Deux colonnes non proportionnelles. Le rang vaut au moins 2. Il ne peut pas valoir 3 (on aurait la matrice $I_3 \dots$). Le rang vaut 2 et le dénominateur devant

la fraction vaut 30. On a donc pour l'instant $P = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 26 & 2 & * \\ 2 & 29 & * \\ * & * & 5 \end{pmatrix}$. Il nous manque deux coefficients

(par symétrie). La condition $P^2 = P$ donne 10 et 5 aux signes près, avec des signes opposés.

On peut conclure : $P = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 26 & 2 & 10 \\ 2 & 29 & -5 \\ 10 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ ou $P = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 26 & 2 & -10 \\ 2 & 29 & 5 \\ -10 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Si on prend la première matrice. L'ensemble image est déterminé par les deux colonnes indépendantes :

$\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et l'équation du plan image est $2x = y + 5z$ (vérifié aussi par l'autre colonne).

Le noyau est l'image de $P - I_3$, qui est de rang 1 : on calcule ne serait ce donc qu'une colonne de cette matrice, et on trouve le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$. D'ailleurs, on aurait peut être du commencer par là.

On a un vecteur du noyau, et on sait que l'image est l'orthogonal du noyau, donc a pour équation $2x - y - 5z = 0$.

Dans le cas de l'autre matrice, aussi de rang 2, le noyau est engendré par $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et l'image a pour équation $2x + 5z = y$.

La matrice Γ .

D.S.15

Le déterminant de Γ est non nul ! Il vaut -4 . La matrice Γ est inversible, son rang vaut 3. Le noyau de $X \rightarrow \Gamma.X$ se résume au vecteur nul. Et l'ensemble image est $\mathbb{R}^3$.

La matrice H a pour déterminant 16. Elle est de rang 3.

On calcule : $H = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. On trouve vite $H.U = 16.U$ pour le vecteur U de coefficients tous égaux à 1. On a un vecteur propre. Et une valeur propre : 16.

Il nous manque deux valeurs propres. Leur somme vaut 2 (*par la trace*) et leur produit vaut 1 (*par le déterminant*). Ces deux valeurs propres vaudraient toutes les deux 1 ?

Et comme par hasard, on nous a demandé le rang de $H - I_3$. On trouve 1 (*colonnes toutes proportionnelles*). Le noyau est fait des vecteurs de composantes (x, y, z) vérifiant $x + y + z = 0$. C'est un plan.

On peut y prendre les vecteurs ${}^t(1, -1, 0)$ et ${}^t(1, 1, -2)$ qu'il nous reste à normer.

On a alors trois vecteurs propres de H : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. On les met en colonne dans une matrice de passage, mais comme on veut une matrice de changement de base orthonormée : $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$. C'est la matrice P . Ensuite, on construit la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en plaçant les valeurs propres dans l'ordre des vecteurs propres. On la note Δ .

On a donc diagonalisé H : $H = P.\Delta.P^{-1}$ avec $P^{-1} = {}^tP$.

On est fortement tenté d'écrire Δ sous la forme D^2 avec $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On déduit en multipliant

à droite par P et à gauche par P^{-1} : $P^{-1}.H.P = D^2$.

On a extrait une "racine carrée de Δ " et on va construire une "racine carrée de Γ ".

On pose donc $S = P.D.P^{-1} = P.D.{}^tP$ et on transpose : ${}^tS = {}^t(P).{}^tD.{}^tP = P.D.{}^tP$ car D est diagonale et la transposition est un opérateur involutif. On aboutit à ${}^tS = S$.

La matrice S est inversible (*déterminant 4, c'est celui de D*), et on peut donc résoudre l'équation matricielle $\Gamma = U.S$ d'inconnue U en multipliant à droite par S^{-1} : $U = \Gamma.S^{-1}$.

Si je suis en devoir de physique, je calcule le grand produit de matrices, j'inverse, et je regarde ensuite si les colonnes de U sont deux à deux orthogonales et normées.

Mais je suis en devoir de maths. Je réfléchis donc d'abord, et je cherche le plus court chemin. Ensuite, si je n'arrive à rien, je calcule.

On a donc : $U = \Gamma.P.D^{-1}.P^{-1}$. On transpose : ${}^tU = P.{}^tD^{-1}.{}^tP.{}^t\Gamma$.

On effectue : ${}^tU.U = (P.{}^tD^{-1}.{}^tP.{}^t\Gamma).(\Gamma.P.D^{-1}.P^{-1})$. Au milieu, on a ${}^t\Gamma.\Gamma$, qui s'appelle H . Mais le produit ${}^tP.H.P$ se simplifie en Δ (*diagonalisation*) qui s'appelle D^2 .

On en est à ${}^tU.U = P.D^{-1}.(D^2).D^{-1}.P^{-1}$ (j'ai simplifié le ${}^tD^{-1}$ en D^{-1} car D est diagonale). Les puissances de D se simplifient. Et à la fin, que reste-t-il ? Juste P et P^{-1} . On a donc ${}^tU.U = I_3$.

C'est la définition même de "matrice orthogonale". Si on me pose la question "ah, c'est ce qu'on aurait voulu appeler orthonormale, non ?", eh bien je mords...

Ah, finalement, on nous demande de calculer U . On n'a pas le choix. On alors il faut faire de tels raisonnements alambiqués qu'on y passe plus de temps qu'à calculer. On trouve $U = \Gamma.P.D^{-1}.{}^tP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(quelle que soit la matrice P qui ait été prise...)

On retrouve bien sans effort une matrice de permutation sur les vecteurs de base, au signe près. C'est bien une isométrie...

Les matrices symétriques et les matrices antisymétriques.

D.S.15

On a montré à plusieurs reprises (en cours comme en devoir) que $(A, B) \longrightarrow \text{Tr}({}^tA.B)$ est un produit scalaire. On ne le refait pas ici.

On prend ensuite une matrice symétrique S et une matrice antisymétrique A (${}^tS = S$ et ${}^tA = -A$), et on calcule de deux façons le produit scalaire :

- $\phi(S, A) = \text{Tr}({}^tS.A) = \text{Tr}(S.A) = \text{Tr}(A.S)$ (par "commutativité dans le trace")
- $\phi(A, S) = \text{Tr}({}^tA.S) = \text{Tr}(-A.S) = -\text{Tr}(A.S)$

Le seul réel égal à son opposé est 0.

Toute matrice symétrique est orthogonale à toute matrice antisymétrique. On a donc $S_n \subset (A_n)^\perp$. On n'en est pas encore à l'égalité. On n'a donc pas encore la somme directe orthogonale demandée.

Tenez, par exemple : la matrice unité est orthogonale à toute matrice antisymétrique, mais on n'a pas $\text{Vect}(I_n) \oplus A_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$.

Mais on a une belle information sur les dimensions : $\dim(S_n) = n.(n+1)/2 = \dim(M_n) - \dim(A_n) = \dim(A_n^\perp)$. On aboutit alors à l'égalité des espaces et à la somme directe, orthogonale.

Toute matrice M se décompose en $\frac{M+{}^tM}{2} + \frac{M-{}^tM}{2}$ qu'on va appeler S_M et A_M . On écrit alors $M - S = (S_M - S) + A_M$ pour toute matrice S symétrique. Par l'orthogonalité établie à la question précédente, et par formule de Pythagore, on a : $|M - S|^2 = |S_M - S|^2 + |A_M|^2$. Cette somme ne pourra pas être rendue plus petite que $|A_M|^2$. Et l'on atteint cette valeur pour S égale à S_M . La borne inférieure est donc ici un minimum atteint. Et elle vaut $|A_M|^2$.

C'est bien la formule de l'énoncé.

De la même façon, avec $|M - A| = \sqrt{|A_M - A|^2 + |S_M|^2} \geq |S_M|$, on trouve $d(M, A_n(\mathbb{R})) = |S_M|$.

Pour la matrice Γ de l'énoncé, les deux projections orthogonales sont $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

On calcule : $d(\Gamma, A_3(\mathbb{R})) = \sqrt{8}$ et $d(\Gamma, S_3(\mathbb{R})) = \sqrt{14}$.

Décomposition polaire.

D.S.15

On prend deux matrices symétriques A et B vérifiant ${}^tX.A.X \geq 0$ et ${}^tX.B.X \geq 0$. La somme $A + B$ est encore une matrice symétrique (qui a omis de le dire ? qui n'aura que la moitié des points ?), et on a ${}^tX.(A + B).X \geq 0$ pour tout vecteur colonne X .

On fait de même pour $\lambda.A$.

On prend une matrice symétrique S . On la diagonalise en base orthonormée : $S = P.D.P^{-1}$. On effectue alors le calcul du réel ${}^tX.S.X = {}^tX.P.D.{}^tP.X = {}^tY.D.Y$ en ayant posé $Y = {}^tP.X$. On note de y_1 à y_n les composantes de ce vecteur Y et on note λ_1 à λ_n les valeurs des termes diagonaux de D .

On a alors ${}^tX.S.X = \sum_{k=1}^n \lambda_k.(y_k)^2$ tous calculs faits.

- Si tous les λ_k une telle somme est bien toujours positive.
- Si au moins l'un des λ_k était négatif, il suffirait de prendre pour Y le vecteur $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ (avec le 1 en $k^{ième}$ position) pour avoir ${}^tX.S.X$ négatif.

Ces deux petits raisonnements donnent l'équivalence attendue :

S est dans $S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si les λ_k sont tous positifs.

A est donnée. Par compatibilité des formats, ${}^tA.A$ existe. Cette matrice est même symétrique : ${}^t({}^tA.A) = {}^tA.({}^tA) = {}^tA.A$.

Pour tout X , on peut calculer ${}^tX.({}^tA.A).X = {}^t(A.X).(A.X)$. C'est la somme des carrés des coefficients de $A.X$ et ça fait donc bien un réel positif.

On suppose donc qu'on a A qui vérifie ${}^tA.A = D^2$. Par construction, le terme de position (i, k) de la matrice produit ${}^tA.A$ vient de la "chute" de la colonne k de A sur la ligne i de tA . C'est la rencontre de C_k et C_i en simples termes de produit scalaire.

- Pour i différent de k , la conclusion est donc " C_k est orthogonal à C_i pour i différent de k ".
- Pour i égal à k , on trouve $|C_i|^2 = (d_i)^2$.

Pour les d_i non nuls (et donc strictement positifs), on pose $E_i = C_i/d_i$. On a un vecteur normé. Pour les d_i nuls, on ne sait pas quoi faire.

On sépare donc en deux :

- les i tels que d_i soit non nul : on définit $E_i = C_i/d_i$; on a des vecteurs normés, deux à deux orthogonaux
- les j tels que d_j soit nul; disons qu'il en reste $n - p$; on complète la famille des $(E_i)_{d_i \neq 0}$ en base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (méthode de Gram-Schmidt), avec des E_k soumis à la seule contrainte d'orthonormalité.

La réunion des deux familles donne une base orthonormée (orthonormalité et bon cardinal). Et pour tout i , on a $C_i = d_i.E_i$, que d_i soit nul ou non.

On note bien sûr E la matrice des vecteurs colonne E_i . C'est une matrice orthogonale (matrice de changement de base orthonormée). Et le produit $E.D$ donne la matrice dont les colonnes sont les $d_i.E_i$ (produit à droite par une matrice diagonale). C'est la matrice A .

On part donc de ${}^tA.A = {}^tB.B$. Cette matrice est symétrique. Elle se diagonalise donc en base orthonormée : ${}^tA.A = P.\Delta.P^{-1}$ (théorème spectral, admis ici).

Les coefficients diagonaux de Δ sont positifs (valeurs propres d'une matrice de Gram). On peut prendre la racine carrée (positive) de chacun un par un. On crée ainsi la matrice D à coefficients positifs, vérifiant $D^2 = \Delta$.

On reporte dans ${}^tA.A = P.\Delta.P^{-1} = P.D^2.P^{-1}$.

On reprend : ${}^tP.{}^tA.A.P = D^2$.

Mais alors, que peut on écrire en notant C la matrice $(A.P)$? On peut écrire ${}^tC.C = D^2$ avec D à diagonale positive. On suit le raisonnement précédent : il existe E (matrice orthogonale) vérifiant $A.P = E.D$.

On reprend aussi avec ${}^tP.{}^tB.B.P = D^2$. On note C' la matrice $B.P$. On a cette fois ${}^tC'.C' = D^2$. On déduit l'existence de F dans $O_n(\mathbb{R})$ vérifiant $B.P = F.D$.

Dans la seconde de ces formules, on isole : $D = F^{-1}.B.P$.

On reporte dans la première : $A.P = E.F^{-1}.B.P$.

On multiplie à droite par l'inverse de P (certains diront qu'ils simplifient par P) : $A = (E.F^{-1}).B$.

Mais la matrice $E.F^{-1}$ est orthogonale, comme produit de matrices orthogonales.

On la note U et on est arrivé à $A = U.B$ à partir de ${}^tA.A = {}^tB.B$.

On en vient enfin à la décomposition polaire.

On nous donne juste A , il faut construire U orthogonale et S symétrique à valeurs propres positives. On construit donc ${}^t A.A$. C'est une matrice réelle symétrique à spectre positif. On peut donc la diagonaliser en base orthonormée ${}^t A.A = P.\Delta.P^{-1}$ avec Δ diagonale à termes positifs. On met Δ sous la forme D^2 avec D à diagonale positive (les racines des termes diagonaux de D).

On en est à ${}^t A.A = P.D^2.P^{-1}$.

Quitte à poser $B = {}^t P.D.P$, on a ${}^t A.A = {}^t B.B$.

On applique le résultat précédent : il existe U orthogonale vérifiant $A = U.B$.

Et B est bien symétrique (vérifiez : ${}^t({}^t P.D.P) = \dots$) à spectre positif (les coefficients de D). On l'appelle S pour la coïncidence avec les notations de l'énoncé.

On prend un exemple ? On part de la matrice Γ . On calcule ${}^t \Gamma.\Gamma$? C'est fait. On la diagonalise ? C'est fait. On extrait une racine carrée de la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c'est fait. Mais c'est toute la construction du I tout ça !

La matrice U a été calculée : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Le produit $U^{-1}.\Gamma$ est la matrice réelle symétrique $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Et son spectre est positif, c'est $[4, 1, 1]$.

Distance à l'ensemble des matrices orthogonales.

D.S.15

Même si on n'a pas réussi à traiter les questions sur la décomposition polaire, on peut reprendre ici le cours du sujet. En effet, les questions sont à nouveau tout à fait abordables. Il suffit de bien lire les définitions, et de faire des petits calculs.

M est dans $M_n(\mathbb{R})$ et Ω est dans $O_n(\mathbb{R})$. On compare $Tr({}^t M.M)$ et $Tr({}^t(\Omega.M).(\Omega.M))$ et $Tr({}^t(M.\Omega).(M.\Omega))$. La deuxième donne déjà $Tr({}^t M.{}^t \Omega.\Omega.M)$ qui se simplifie directement avec la propriété ${}^t \Omega.\Omega = I_n$. La troisième donne $Tr({}^t \Omega.{}^t M.M.\Omega)$ qui nécessite l'usage de $Tr(A.B) = Tr(B.A)$ pour que ${}^t \Omega$ rejoigne Ω et s'en aille. Mais on a gélaité comme demandé.

On part ensuite de $|A - \Omega|$ qu'on transforme en $|U.S - \Omega|$ puis en $|U.(S - U^{-1}.\Omega)|$. On utilise alors le résultat précédent avec $S - U^{-1}.\Omega$ dans le rôle de la matrice quelconque et U dans le rôle de la matrice orthogonale qui n'a aucune influence dans le calcul de la norme.

On cherche à minimiser $|A - \Omega|$ quand Ω décrit $O_n(\mathbb{R})$. On minimise donc $|S - U^{-1}.\Omega|$ quand Ω décrit $O_n(\mathbb{R})$.

Mais quand Ω décrit $O_n(\mathbb{R})$, la matrice $U^{-1}.\Omega$ reste dans le groupe $O_n(\mathbb{R})$ et le décrit même en entier (bijection réciproque en $\Omega \longrightarrow U.\Omega'$).

On remplace ensuite S par $P.D.P^{-1}$ et on doit donc minimiser $|P.D.P^{-1} - \Omega'|$ quand Ω' décrit $O_n(\mathbb{R})$. Mais là encore, en factorisant, on étudie $|P.(D - \Omega'').P^{-1}|$ avec Ω'' égal à $P^{-1}.\Omega'.P$. On utilise $D - \Omega''$ dans le rôle de la matrice quelconque et P puis ${}^t P$ dans le rôle de la matrice orthogonale dans la conservation de la norme.

On minimise donc finalement $|D - \Omega''|$ quand Ω'' décrit $O_n(\mathbb{R})$. Mais Ω'' reste dans $O_n(\mathbb{R})$ quand Ω et P y sont justement. Et comme P est fixée, la bijection $\Omega' \longrightarrow P^{-1}.\Omega'.P$ fait que Ω'' décrit tout $O_n(\mathbb{R})$ quand Ω' décrit $O_n(\mathbb{R})$. C'est donc encore le même minimum.

Je vous laisse le soin de dire pour quel Ω le minimum de $|A - \Omega|$ sera atteint quand on aura atteint le minimum de $|D - \Omega''|$. Et je vous laisse le soin de deviner quels élèves seront totalement débordés par ces questions sur des variables que l'on change. Aucun rapport avec les maths de Terminale, mais directement des maths de concours d'écoles d'ingénieurs. Du raisonnement et non du calcul bidon.

On connaît D et on se donne Ω . On calcule le carré de la norme de la différence :

$$Tr(^t(D - \Omega).(D - \Omega)) = Tr(^tD.D - ^tD.\Omega - D.^t\Omega + ^t\Omega.\Omega) = Tr(D^2 - D.\Omega - D.^t\Omega + I_n)$$

On sépare par linéarité, et on a la somme des carrés des termes diagonaux de D , puis n dans le rôle de $Tr(I_n)$. On a aussi $Tr(D.\Omega)$. Et que fait on de $Tr(D.^t\Omega)$? C'est aussi la trace de la transposée $Tr(\Omega.^tD)$ et D est égale à tD . On termine avec la propriété " $Tr(A.B) = Tr(B.A)$ ".

On calcule les termes diagonaux de $D.\Omega$? Ils sont de la forme $\omega_i^j.\lambda_i$ (produit à droite par une matrice diagonale), avec des notations naturelles. Or, chaque ω_i^j est entre -1 et 1 (coefficients d'une matrice orthogonale, la somme des carrés des coefficients sur une colonne vaut 1 , aucun coefficient ne peut dépasser 1). Il faut aussi penser à dire que les λ_i sont positifs, pour la conservation du sens des inégalités.

$$\text{On passe à la somme : } Tr(D.\Omega) = \sum_{k=1}^n \lambda_k.\omega_k^k \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

$$\text{On met bout à bout l'égalité et l'inégalité des questions précédentes : } |D - \Omega|^2 \geq \sum_{k=1}^n (\lambda_k)^2 - 2 \cdot \sum_{k=1}^n \lambda_k + n.$$

$$\text{On regroupe en } n \text{ sommes : } \sum_{k=1}^n (\lambda_k - 1)^2.$$

On en est arrivé à $|D - \Omega|^2 \geq |D - I_n|^2$, pour toute matrice Ω de $O_n(\mathbb{R})$.

On a un minorant qui ne dépend pas de Ω . Et ce minorant est atteint pour un choix de Ω convenable : $\Omega = I_n$. Un minorant atteint, c'est la borne inférieure.

On a donc explicitement la valeur du minimum, et aussi la matrice Ω pour laquelle ce minimum est atteint. Après changement de variable. On remonte donc l'information :

- la matrice de $O_n(\mathbb{R})$ la plus proche de D est I_n
- la matrice de $O_n(\mathbb{R})$ la plus proche de S est I_n
- la matrice de $O_n(\mathbb{R})$ la plus proche de A est U

Dans le cas particulier de Γ des préliminaires, on a deux méthodes.

$$\text{On a calculé la matrice } U \text{ il n'y a qu'à effectuer la différence } A - U, \text{ c'est } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et à en}$$

mesurer la norme : 3 .

Mais on peut aussi rester avec $|D - I_n|$. Mais qui est D ? C'est la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de $^t\Gamma.\Gamma$, c'est à dire $4, 1$ et 1 . On a donc $(4-1)^2 + (1-1)^2 + (1-1)^2$ et on en prend la racine. Le résultat est le même.

Distance et rang.

D.S.15

On se donne M et on s'intéresse à l'inversibilité de $M - \lambda.I_n$. Pourquoi elle? Celle qui figure dans le polynôme caractéristique. Justement, le polynôme.

Pour M donnée, $\det(M - \lambda.I_n)$ est réputé pour être un polynôme de degré n , Vraiment n . Il a donc au plus n racines. Il reste donc de la place pour trouver des λ tels que ce polynôme soit non nul.

On note α le module de la plus petite racine non nulle (s'il n'y en a pas, on note $\alpha = 1$). Dans la boule/segment de rayon α et de centre 0 , il n'y a plus de racine (à part peut être 0). Donc, pour tout λ de $]0, \alpha[$, $\det(M - \lambda.I_n)$ est non nul. Et la matrice est inversible.

M donnée, la suite des $(M + \frac{\alpha.I_n}{p+1})$ avec p variable tend vers M et n'est faite que de matrices inversibles. Les normes $|M - (M - \alpha.I_n/(p+1))|$ sont dans $\{|M - P|/P \in GL_n(\mathbb{R})\}$ et tendent vers 0 . La borne inférieure de cet ensemble est nulle.

La distance de M à $GL_n(\mathbb{R})$ est nulle pour toute matrice M inversible ou non.

Comme dans chaque Δ_p il y a les matrices inversibles, on peut reprendre les mêmes $M - \alpha.I_n/(p+1)$

avec p variable. On rend la distance de M à ces éléments aussi petite qu'on veut. La distance est nulle.

On cherche déjà la forme des matrices symétriques de rang 1. En tant que matrices de rang 1 elles sont de la forme *colonne* fois *ligne* du type $U \cdot {}^tV$ avec U et v vecteurs colonnes. Mais en tant que matrices symétriques, il leur faut $U = V$. On aboutit aux matrices de la forme $\begin{pmatrix} a^2 & a.b & a.c \\ a.b & b^2 & b.c \\ a.c & b.c & c^2 \end{pmatrix}$ avec a , b et c variables. On a un ensemble à trois paramètres.

On va chercher donc à minimiser la norme de $\begin{pmatrix} a^2 - 1 & a.b - 2 & a.c - 1 \\ a.b + 2 & b^2 + 1 & b.c + 1 \\ a.c + 1 & b.c + 1 & c^2 + 2 \end{pmatrix}$ ou même le carré de sa norme.

On calcule ce carré de norme. C'est un polynôme de degré 4 en nos trois variables.

$(a^2 - 1)^2 + (a.b - 2)^2 + (a.c - 1)^2 + (a.b + 2)^2 + (b^2 + 1)^2 + (b.c + 1)^2 + (a.c + 1)^2 + (b.c + 1)^2 + (c^2 + 2)^2$

On en annule les trois dérivées partielles et on tente de résoudre.

je n'aurais peut être pas dû ajouter cette question que j'ai inventée...

MPSI2 Charlemagne

982 points

Année 2010/11

D.S.15