M P S I 2

MARDI 10 NOVEMBRE

LYCEE CHARLEMAGNE
2020/2021

I.S.7.

♡ 0 ♡ Montrez qu'entre deux réels distincts a et b il y a toujours au moins un rationnel. 3 pt.

Des trucs luttent pour Yann.

♡ 1 ♡ Appliquez l'algorithme d'Euclide à 4181 et 1597 et donnez leur p.g.c.d. 4 pt.
une identité de Bézout.

Ces pauvres ho**mm**es **b**ouillent.

♡ 2 ♡ La fonction $Argsh$ n'est pas au programme sous ce nom. Mais il vous est demande de connaître la forme logarithmique de x comme fonction de y dans l'équation $y = sh(x)$. Donnez la et dérivez la. 3 pt.

Ils di**vergent** sur la **vague**.

♡ 3 ♡ Justifiez que l'anneau des matrices de taille 2 sur 2 n'est pas intègre. 1 pt.

Ca ne sert à rien de **con**voquer ces **pros**.

♡ 4 ♡ Calculez $\int_0^1 3^{t+3^t}.dt$. 3 pt.

♡ 5 ♡ Calculez $\int_0^1 t.3^t.dt$. 3 pt.

Résolvez $\left\{\begin{array}{ccccc} n & = & 4 & [5] \\ n & = & 5 & [13] \end{array}\right\|$ d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$. 2 pt. Résolvez $\left\{\begin{array}{ccccc} 13.n & = & 4 & [5] \\ 4.n & = & 5 & [13] \end{array}\right\|$ d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$. 4 pt.

> *Un journal coupé en morceaux n'intéresse aucune femme. Par contre, une femme coupée en morceaux ça intéresse tous les journaux.*
> Philippe GELUCK (le chat).

On note H l'ensemble des matrices de la forme $M(a,b,c,d)$ avec a, b, c et d entiers relatifs. Montrez que c'est un anneau.
Donnez le neutre. Calculez le carre de $M[0,1,0,0]$ et $M[0,0,1,0]$.
Calculez aussi leurs produits $M[1,0,0,0].M[0,1,0,0]$ et $M[0,1,0,0].M[1,0,0,0]$.
Calculez $M[a,b,c,d].M[a,-b,-c,-d]$ 5 pt.

$$M(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

> *Avec l'âge, on commence par oublier les noms. Puis on oublie les visages. Puis on oublie de refermer sa braguette. Et enfin, on oublie même de la descendre.*
> George BURNS

♣ 0 ♣ On travaille dans $(F_{13},+,.)$ qui est un corps. On définit $f = x \longmapsto \frac{8.x+6}{5.x+9}$. Donnez son domaine de définition. 2 pt.
La suite $u_0 = 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est elle bien définie pour tout n, est elle périodique ? 2 pt.

♯ -1 ♯ Voici un script :

```
def Scooby(n) :
....C = 0
....for k in range(1, n+1) :
........C += int(n%k==0)
....return(C)
```

```
L=[]
for k in range(10000) :
....if Scooby(n+1)==2*Scooby(n) :
........L.append(n)
print('Fini')
```

Justifiez que `L` commence par `1, 5, 7, 13`. 3 pt. L'entier `65` est il dans L ? Si oui, qui est le suivant ? Sinon, quelle est la longueur de L une fois imprime « Fini » ? 3 pt.

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2

CORRECTION

LYCEE CHARLEMAGNE
2020/2021

I.S.7.

Questions prises de cours.

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 I.S.7.

Un contre-exemple pour l'anneau des matrices qui n'est pas intègre ? $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Aucune n'est nulle et pourtant, le produit est nul.

Pour la densité de $\mathbb{R}$ dans , on ne donne deux réels a et b avec $a \neq b$ (on va même supposer $a < b$ par symétrie des rôles).
On doit trouver au moins un rationnel $\frac{p}{q}$ entre a et b.
On choisit déjà $q = \left[\frac{1}{b-a}\right] + 1$, ce qui nous garantit $\frac{1}{q} < b - a$.
On avance alors avec des pas de longueur $\frac{1}{q}$ jusqu'à dépasser a : $p = \left[a.q\right] + 1$.
On a alors par construction $p - 1 \leqslant a.q < p - 1 + 1$.
On divise par q (positif) : $\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leqslant a < \frac{p}{q}$.
On remet dans l'ordre qui nous plait : $a < \frac{p}{q}$ et $\frac{p}{q} \leqslant a + \frac{1}{q} < a + b - a = b$.
Le rationnel $\frac{p}{q}$ est entre a et b.

On se donne y et on résout $sh(x) = y$ d'inconnue x.
On résout donc $e^x - e^{-x} = 2.y$ d'inconnue x en passant par l'inconnue $e^x = T$.
On veut $T - \frac{1}{T} = .y$ ou même $T - .y.T - 1 = 0$ d'inconnue T.
On trouve $T = y + \sqrt{1+y^2}$ ou $T = y + \sqrt{1+y^2}$.
Mais des deux racines, l'une est négative (car le produit des racines vaut -1). On l'élimine et on remonte par logarithme : $\boxed{x = \ln(y + \sqrt{1+y^2})}$

On dérive cette composée : $y \longmapsto \dfrac{1 + \frac{1}{2}.\frac{2.y}{\sqrt{1+y^2}}}{y + \sqrt{1+y^2}}$ et on trouve $y \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

On pouvait aussi dériver $sh(Argsh(y)) = y$ et obtenir $ch(Argsh(y)).Argsh'(y) = 1$ et simplifie après division, en utilisant $ch^2 - sh^2 = 1$.

Integrales.

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 I.S.7.

$\int_0^1 3^{t+3^t}.dt$ existe (continuité). On change de variable $x = 3^t$ et $t = \frac{\ln(x)}{\ln(3)}$ et $dt = \frac{dx}{x.\ln(3)}$ et même $\ln(3).3^t.dt = dx$.

L'intégrale devient $\int_1^3 3^x.\frac{dx}{\ln(3)}$. On intègre sans effort en $\frac{3^x}{\ln(3)}$ et on trouve $\boxed{\int_0^1 3^{t+3^t}.dt = \frac{3^3 - 3}{(\ln(3))^2}}$

Pour $\int_0^1 t.3^t.dt.$, on intègre plutôt par parties :

t	$\hookrightarrow$	1
3^t	$\hookleftarrow$	$\frac{3^t}{\ln(3)}$

On a un terme rectangle et un terme normal : $\boxed{\int_0^1 t.3^t.dt = \left[\frac{t.3^t}{\ln(3)}\right]_0^1 - \frac{1}{\ln(3)}.\int_0^1 3^t.dt = \frac{3}{\ln(3)} - \frac{2}{(\ln(3))^2}}$

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2

Arithmetique.

I.S.7.

Pour Euclide :

$$\begin{array}{rcrrr} 4181 & = & 2 & \times 1597 & +987 \\ 1597 & = & 1 & \times 987 & +610 \\ 987 & = & 1 & \times 610 & +377 \\ 610 & = & 1 & \times 377 & +233 \\ 377 & = & 1 & \times 233 & 144 \\ 233 & = & 1 & \times 144 & +89 \\ 144 & = & 1 & \times 89 & +55 \\ 89 & = & 1 & \times 55 & +34 \\ 55 & = & 1 & \times 34 & +21 \\ 34 & = & 1 & \times 21 & +13 \\ 21 & = & 1 & \times 13 & +8 \\ 13 & = & 1 & \times 8 & +5 \\ 8 & = & 1 & \times 5 & +3 \\ 5 & = & 1 & \times 3 & +2 \\ 3 & = & 1 & \times 2 & +1 \end{array}$$

sinon, $4181 = 37 \times 113$ et 1597 est premier !

Le p.g.c.d. vaut 1, les deux entiers sont premiers entre eux (et les divisions n'ont pas été trop dures à poser !). On l'écrit

1	$= \begin{vmatrix}3&2\\1&1\end{vmatrix}$	$= \begin{vmatrix}3&5\\1&2\end{vmatrix}$	$= \begin{vmatrix}8&5\\3&2\end{vmatrix}$	$= \begin{vmatrix}8&13\\3&5\end{vmatrix}$	$= \begin{vmatrix}21&13\\8&5\end{vmatrix}$	$= \begin{vmatrix}21&34\\8&13\end{vmatrix}$	$= \begin{vmatrix}55&34\\21&13\end{vmatrix}$
		$C_2+=C_1$	$C_1+=C_2$	$C_2+=C_1$	$C_1+=C_2$	$C_2+=C_1$	$C_1+=C_2$

et on continue ainsi jusqu'à $1 = \begin{vmatrix}987&610\\377&233\end{vmatrix}$. On effectue encore $C_2 = C_1 + C_2$: $1 = \begin{vmatrix}987&1597\\377&610\end{vmatrix}$ mais on termine par $C_1 = C_1 + 2.C_2$:

$$\boxed{1 = \begin{vmatrix}4181&1597\\1597&610\end{vmatrix} = 4181 \times 610 - 1597 \times 1597}$$

$\left\{\begin{array}{rcll} n & = & 4 & [5] \\ n & = & 5 & [13] \end{array}\right\|$ admet une solution « triviale » : 44 (c'est $5 \times 8 + 4$ et c'est aussi $3 \times 13 + 5$).

Comment la trouver sinon ? On veut $n = 4 + 5.p = 5 + 13.q$ avec p et q entiers. La condition $1 = 5.p - 13.q$ fait penser à une identité de Bézout entre 5 et 13. On en a une : $2.13 - 5.5 = 1$. On tient donc une solution avec $p = -5$: $n = -21$. Par commodité on lui ajoute 5×13 et on a 44. $\boxed{S = \{44 + 65.k \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

$\left\{\begin{array}{rcll} 13.n & = & 4 & [5] \\ 4.n & = & 5 & [13] \end{array}\right\|$ équivaut à $\left\{\begin{array}{rcll} 3.n & = & 4 & [5] \\ 4.n & = & 5 & [13] \end{array}\right\|$ en simplifiant la première équation

En la multipliant par 2, elle donne même $\left\{\begin{array}{rcll} n & = & 8 & [5] \\ 4.n & = & 5 & [13] \end{array}\right\|$ puis $\left\{\begin{array}{rcll} n & = & 3 & [5] \\ 4.n & = & 5 & [13] \end{array}\right\|$.

On multiplie aussi la seconde par 10 (l'inverse de 4) : $\left\{\begin{array}{rcll} n & = & 3 & [5] \\ n & = & 50 & [13] \end{array}\right\|$ et on réduit $\left\{\begin{array}{rcll} n & = & 3 & [5] \\ n & = & 11 & [13] \end{array}\right\|$.

On a un vrai système de congruences dont on doit juste trouver une solution.

On dresse la liste des solutions de la première et de la deuxième à la recherche d'un élément commun, ce qui ira plus vite que de faire appel à Bézout :

$$\left\{\begin{array}{rcll} n & = & 3 & [5] \\ n & = & 11 & [13] \end{array}\right. \quad \begin{array}{lccccccccccccc} solutions & 3 & 8 & 13 & 18 & 23 & 28 & 33 & 38 & 43 & 48 & 53 & 58 & 63 \\ & 11 & 24 & 37 & 50 & 63 & 76 \end{array} \Bigg\|$$

On a une solution, on les a toutes : $S = \{63 + 65.p \mid p \in \mathbb{Z}\}$

On vérifie : $13 \times 63 = 819 = 4\ [5]$ et $4 \times 63 = 252 = 5\ [13]$ car $247 = 13 \times 19$.

L'application $f = x \longmapsto \frac{8.x + 6}{5.x + 9}$ nécessite $x \neq -9 \times 5^{-1}$.

Mais qui est ce nombre ? L'inverse de 5 est 8 car $5 \times 8 = 40 = 1$. Et l'opposé de 9 est 4. On doit donc se passer de 32 c'est à dire 6.

Vérifiez : $\frac{8.6+6}{5.6+9} = \frac{truc}{39} = \frac{truc}{0}$. Et *truc* n'est même pas nul.
$D_f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ et pas de notation « intervalle » du type $] - \infty, ...[\cup] \ldots$ qui n'a pas de sens...

On calcule les images successives de 0 :$f = 0 \longmapsto \frac{6}{9} = 5$. Oui, $5 \times 9 = 45 = 6$.
On poursuit : $f = 5 \longmapsto \frac{8.5+6}{5.5+9} = \frac{46}{34} = \frac{7}{8} = 9$.
On continue $f = 9 \longmapsto \frac{8.9+6}{5.9+9} = \frac{78}{54} = \frac{0}{2} = 0$. La suite devient periodiue, de periode 4 : $(0, 5, 9, 0, 5, 9, 0, \ldots)$.

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2

Quaternions presentés en taille 4 sur 4.

I.S.7.

On additionne deux matrices de cette forme

$$M(a,b,c,d) + M(a',b',c',d') = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a' & -b' & -c' & -d' \\ b' & a' & d' & -c' \\ c' & -d' & a' & b' \\ d' & c' & -b' & a' \end{pmatrix}.$$

La matrice obtenue suit le schéma $\begin{pmatrix} A & -B & -C & -D \\ B & A & D & -C \\ C & -D & A & B \\ D & C & -B & A \end{pmatrix}$ avec $LETTRE = letttre + lettre'$.

On multiplie deux matrices de cette forme

$$M(a,b,c,d) \times M(a',b',c',d') = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a' & -b' & -c' & -d' \\ b' & a' & d' & -c' \\ c' & -d' & a' & b' \\ d' & c' & -b' & a' \end{pmatrix}$$

On trouve $\begin{pmatrix} (aa'-bb'-cc'-dd') & -(ba'+ab'+dc'-cd') & -(ca'-db'+ac'+bd') & -(da'+cb'-bc'+ad') \\ (ba'+ab'+dc'-cd') & (aa'-bb'-cc'-dd') & (da'+cb'-bc'+ad') & -(ca'-db'+ac'+bd') \\ (ca'-db'+ac'+bd') & -(da'+cb'-bc'+ad') & (aa'-bb'-cc'-dd') & (ba'+ab'+dc'-cd') \\ (da'+cb'-bc'+ad') & (ca'-db'+ac'+bd') & (ba'+ab'+dc'-cd') & (aa'-bb'-cc'-dd') \end{pmatrix}$

de la formule $\begin{pmatrix} A & -B & -C & -D \\ B & A & D & -C \\ C & -D & A & B \\ D & C & -B & A \end{pmatrix}$ avec ... bon, on a compris[1].

Les deux lois sont internes. L'addition a un neutre : $M(0,0,0,0)$.
Chaque matrice $M(a,b,c,d)$ a un oppose $M(a',b',c',d')$ et ce symétrique est dans l'ensemble.
L'addition est commutative et associative.
La multiplication est associative, et distributive sur l'addition. Dans H comme dans $(M_4(\mathbb{R}), +, .)$ de toutes façons.
Ne perdez pas votre temps à développer des formules comme $(A+B).C$ avec trois fois seize coefficients.

Le neutre demandé est le neutre multiplicatif $M[1,0,0,0]$. C'est en quelque sorte 1.
$M[0,1,0,0] = -I_4$ et $M[0,0,1,0] = -I_4$. Ici, c'est i et j.

$M[0,1,0,0].M[0,0,1,0] = M[0,0,0,1]$ mais $M[0,0,1,0].M[0,1,0,0] = -M[0,0,0,1]$.

Enfin, $M(a,b,c,d).M(a,-b,-c,-d) = (a^2+b^2+c^2+d^2).I_4$.
Un quaternion et son conjugué...

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2

Python.

I.S.7.

---

[1] et je vais me marrer à corriger

Que fait le premier script Scooby ? Pour n donne, on va de 1 à N (inclus) et on compte les diviseurs (en profitant du booléen (n%k==0) qui vaut 1 si k divise n et 0 sinon).

Que fait on ensuite ? On crée une liste où l'on colle les entiers n tels que Scooby(n+1) soit le double de Scooby(n).
On cherche les entiers plus petits que 1000 tels que n+1 ait deux fois plus de diviseurs que n.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
diviseurs	1	1, 2	1, 3	1, 2, 4	1, 5	1, 2, 3, 6	1, 7	1, 2, 4, 8	1, 3, 9	1, 2, 5, 10	1, 11	
Scooby	1	2	2	3	2	4	2	4	3	5	2	6
dans L	oui				oui		oui					

On confirme 1, 5, 7 sont dans L.
13 a deux diviseurs et 14 en a quatre. On prend 13 (mais on n'a pris ni 11 ni 12).

Et ensuite

	65	66	67	68	69	70
	1,5,13,65	1,2,3,6,11,33,66	1, 67	1, 2, 4, 17, 34, 68	1, 3, 3, 69	1,2,5,7,10,14,35,70
	4	8	2	6	4	8
	oui				oui	

65 est dans la liste L. Et le suivant est 69.
Heureusement que finalement on ne doit pas donner la longueur d cette liste. Allez me détecter que 997, 998 et 999 en font partie par exemple, juste avec votre cerveau.
On notera quand même que si on connaît la décomposition de n en produit de facteurs premiers $2^a.3^b.5^c.7^d.11^e$ par exemple, alors on connait son nombre de diviseurs : $(a+1).(b+1).(c+1).(d+1).(e+1)$.