



# Lycée Charlemagne

.2018. — MPSI2 — .2019.

MARDI OCTOBRE



IS 4



♡ 0 ♡ Calculez  $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin(\theta)}$ . 2 pt.

♡ 1 ♡ Calculez  $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+(\text{Arctan}(t))^2)}$ . 2 pt.

♡ 2 ♡ Résolvez  $\int_0^a \frac{dt}{t^2 - 6t + 25} = \frac{\pi}{4}$ . 3 pt.

♡ 3 ♡ L'élève Allois Séprède Neuilly affirme :  $\text{Arcsin}(19/50) = \text{Arctan}(23/56)$ . A-t-il raison ? 2 pt.

◇ 0 ◇ Montrez que  $\theta \mapsto \theta \cdot \sin(\theta)$  (notée  $f$ ) réalise une bijection de  $[0, \pi/2]$  dans lui même.

Calculez  $\int_0^{\pi/2} f^{-1}(t) \cdot dt$ . 5 pt.

◇ 1 ◇ Calculez  $\int_0^1 t \cdot \ln(1+t^4) \cdot dt$ . 5 pt.

◇ 2 ◇ Complétez :  $t \mapsto \cos^3(t) + \sin^2(t)$  est surjective de  $\mathbb{R}$  dans 3 pt.

◇ 3 ◇ On a défini dans l'I.S. précédente la loi de groupe  $*$  sur  $\mathbb{Z}$  par  $a * b = a \cdot (-1)^b + b \cdot (-1)^a$ . Peut on, rien qu'en additionnant des 1 obtenir 2018 ? Peut on, rien qu'en additionnant des 2 obtenir 2018 ? 3 pt.

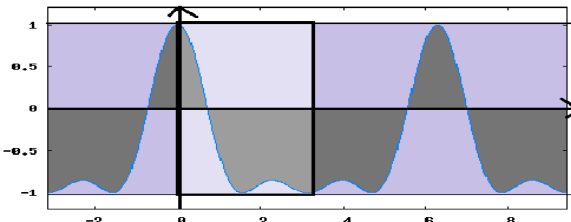
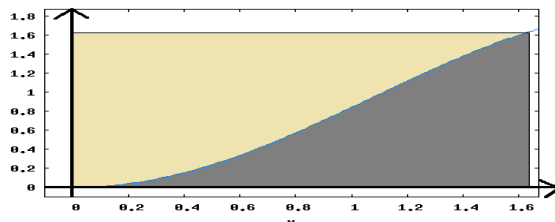
On veut alors définir la "multiplication qui va avec" au moins sur  $\mathbb{N}$  par  $a \otimes b = a * a * a \dots * a$  ( $b$  fois, comme pour  $a \cdot b = a + a + \dots + a$   $b$  fois). Cette multiplication est elle commutative sur  $\mathbb{N}$  ? 2 pt.

♡ 4 ♡ Prouvez :  $\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) + 2 \cdot \text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ . Pardon ? Il manque un terme ? Oui, c'est à vous de le retrouver. 4 pt.

♣ 0 ♣ Le loir ment les lundis, mardis, jeudis et dimanches (les autres jours il est sincère). Le chapelier ment les mardis, mercredis, samedis (les autres jours il est sincère). L'un d'eux dit "Quand même, on est deux sacrés menteurs !" Et l'autre dit "Tiens, on est samedi". Qui a parlé en premier, quel jour est on ? 3 pt.

M.P.S.I.2 2018 34 points 2019 CHARLEMAGNE

Ξ IS 4 Ξ



# Lycée Charlemagne

.2018.-

MPSI2

-.2019.

CORRECTION



IS 4



Questions de cours.

IS 4

L'intégrale  $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin(\theta)}$  existe par continuité (*dénominateur jamais nul sur l'intervalle*) et vaut  $\ln(\tan(\pi/4)) - \ln(\tan(\pi/6))$  par la primitive à connaître par coeur. L'application numérique donne  $\boxed{\ln(3)/2}$

L'intégrale  $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2).(1+(Arctan(t))^2)}$  n'est pas une horreur ! C'est juste  $\frac{u'}{1+u^2}$  avec  $u = Arctan$  !

On intègre donc en  $[Arctan(Arctan(t))]_0^1$  et on trouve  $\boxed{Arctan(\pi/4)}$  qu'on ne simplifie pas (*un arc-tangente peut donner  $\pi/4$  mais sinon il s'applique à des longueurs*).

Pour résoudre  $\int_0^a \frac{dt}{t^2 - 6.t + 25} = \frac{\pi}{4}$ , on commence par calculer l'intégrale  $\int_0^a \frac{dt}{t^2 - 6.t + 25}$  qui existe pour tout  $a$ . On effectue une factorisation canonique  $\int_0^a \frac{dt}{t^2 - 6.t + 25} = \int_0^a \frac{dt}{(t-3)^2 + 4^2} = \frac{1}{4} \cdot \int_0^a \frac{dt/4}{1 + \left(\frac{t-3}{4}\right)^2} = \frac{1}{4} \cdot \left[ Arctan\left(\frac{t-3}{4}\right) \right]_{t=0}^a$ .

L'équation devient  $Arctan\left(\frac{a-3}{4}\right) - Arctan\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{4.\pi}{4}$ .

Mais c'est  $a$  qu'on cherche. Que faire alors ? Passer à la tangente ?

Même pas. Serait-il possible que la somme de deux arctangentes soit égale à  $\pi$  ? Déjà que chacun est plus petit que  $\pi/2$ . C'est impossible :  $\boxed{S = \emptyset}$

*Mais déjà, il fallait comprendre que c'était  $a$  que l'on cherchait, c'est à dire devenir matheux et pas juste calculateur...*

Un élève affirme  $Arctan(19/50) = Arctan(23/56)$ . On va voir si il a raison, les deux angles  $Arctan(19/50)$  et  $Arctan(23/56)$  étant entre 0 et  $\pi/2$ .

On calcule la tangente du premier, qui a pour sinus  $\frac{19}{50}$  et pour cosinus  $\sqrt{1 - \frac{19^2}{50^2}}$  c'est à dire  $\frac{\sqrt{(50+19).(50-19)}}{50}$ .

Sa tangente vaut  $\frac{19}{\sqrt{69.31}}$ . Tandis que le second a pour tangente  $\frac{23}{56}$ .

Il n'y a pas égalité :  $19^2.56^2 \neq 23^2.69.31$ , puisqu'il y a des facteurs premiers 19 dans le premier membre et pas dans le second.

*Les élèves "gentillets" auront calculé 1 132 096 et 1 13131 et trouvé que j'abusais de demander des calculs pareils.*

*Non, je ne demande pas des calculs. Je demande des raisonnements !*

*A part ça, la calculatrice donne  $Arctan(19/50) \sim 0,389796$  à  $10^{-6}$  près, et  $Arctan(23/56) \sim 0,389708$  à  $10^{-6}$  près. Mais ça ne fait pas une égalité.*



Des arctangentes.

IS 4

Pour prouver  $Arctan\left(\frac{1}{3}\right) + Arctan\left(\frac{1}{8}\right) + 2.Arctan\left(\frac{1}{7}\right) + Arctan\left(\frac{1}{-}\right) = \frac{\pi}{4}$ , on va poser  $a =$

$Arctan\left(\frac{1}{3}\right) + Arctan\left(\frac{1}{8}\right) + 2.Arctan\left(\frac{1}{7}\right)$  et s'intéresser à  $a + Arctan\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$ .

On va de fait même poser  $a = \left(Arctan\left(\frac{1}{3}\right) + Arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right) + \left(Arctan\left(\frac{1}{7}\right) + Arctan\left(\frac{1}{7}\right)\right)$  et résoudre  $Arctan\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4} - a$ .

On calcule  $\tan(a)$  étape par étape :  $\tan\left(Arctan\left(\frac{1}{3}\right) + Arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{11}{23}$  et

$\tan\left(2.Arctan\left(\frac{1}{7}\right)\right) = \frac{2 \cdot \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}} = \frac{14}{48} = \frac{7}{24}$  et enfin

$$\tan(a) = \frac{\frac{11}{23} + \frac{7}{24}}{1 - \frac{11}{23} \cdot \frac{7}{24}} = \frac{11 \cdot 24 + 7 \cdot 23}{23 \cdot 24 - 11 \cdot 7} = \frac{425}{475} = \frac{17}{19}.$$

Comme nos quatre réels  $Arctan(1/k)$  sont plus petits que  $Arctan(1)$ , leur somme est plus petite que  $\pi$ . Or, dans  $[0, \pi]$ , par définition, l'angle dont la tangente vaut  $\frac{17}{19}$  est  $Arctan(17/19)$  (pas la peine de chercher entre  $\pi/2$  et  $\pi$ , la tangente y est négative, on est bien sur  $[0, \pi/2[$ ).

On a donc  $Arctan\left(\frac{1}{3}\right) + Arctan\left(\frac{1}{8}\right) + 2.Arctan\left(\frac{1}{7}\right) = Arctan\left(\frac{17}{19}\right)$ .

Mais ensuite, que doit on faire ? Prendre l'équation  $Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4} - a$  et passer à la tangente pour

trouver  $x$  (condition nécessaire) :  $\frac{1}{x} = \frac{1 - \tan(a)}{1 + 1 \cdot \tan(a)} = \frac{1 - \frac{17}{19}}{1 + \frac{17}{19}} = \frac{2}{36}$ .

On écrit avec joie :  $Arctan\left(\frac{1}{3}\right) + Arctan\left(\frac{1}{8}\right) + 2.Arctan\left(\frac{1}{7}\right) + Arctan\left(\frac{1}{18}\right) = \frac{\pi}{4}$

*Et on croit avoir traité l'exercice, avec plus ou moins de bonheur dans les calculs.*

*Grave erreur ! On a juste fait les calculs. Mais y'a écrit maths en haut du devoir.*

*Si il y a une formule, ce ne peut être que celle ci.*

*Mais on a juste prouvé par condition nécessaire que  $Arctan(1/6)$  et  $\frac{\pi}{4} - Arctan\left(\frac{1}{3}\right) + Arctan\left(\frac{1}{8}\right) + 2.Arctan\left(\frac{1}{7}\right)$  avaient la même tangente. De là à ce qu'ils soient égaux...*

Or, les deux sont entre 0 et  $\pi/2$ . Il y a donc égalité.

*Les élèves élevés dans l'esprit que je qualifierai de physicien ne vont pas comprendre qu'il y ait autant de points pour cet argument en une ligne que pour le gros calcul des tangentes.*  
*Les élèves élevés dans l'esprit que je qualifieirai de mathématicien comprendront parfaitement qu'il est aussi important voire plus de se poser la bonne question que de mener à bien un calcul.*

Pour  $\int_0^1 t \cdot \ln(1+t^4) \cdot dt$ , pas de problème d'existence non plus. Comme tout est  $C^1$ , on intègre par

parties : 

|              |                   |                             |
|--------------|-------------------|-----------------------------|
| $\ln(1+t^4)$ | $\hookrightarrow$ | $\frac{4 \cdot t^3}{1+t^4}$ |
| $t$          | $\hookleftarrow$  | $\frac{t^2}{2}$             |

 Le terme rectangle vaut  $\ln(2)/2$ , on est heureux et on le met de

côté. Il reste le terme  $\frac{4}{2} \cdot \int_0^1 \frac{t^3 \cdot t^2}{1+t^4} \cdot dt$  avec un signe moins. On l'écrit "à la Leibniz" en ajoutant et soustrayant un terme :  $\int_0^1 \frac{2 \cdot t^5}{1+t^4} \cdot dt = \int_0^1 \frac{2 \cdot t^5 + 2 \cdot t - 2 \cdot t}{1+t^4} \cdot dt = \int_0^1 2 \cdot t \cdot dt - \int_0^1 \frac{2 \cdot t}{1+t^4} \cdot dt$ . Le terme  $2 \cdot t$  s'intègre facilement, et le terme qui reste en  $\frac{2 \cdot t}{1+t^4}$  est même  $\frac{2 \cdot t}{1+(t^2)^2}$  et s'intègre là encore en  $Arctan(t^2)$ .

On recolle les morceaux et on met les facteurs :  $\int_0^1 t \cdot \ln(1+t^4) \cdot dt = \left[ \frac{t^2 \cdot \ln(1+t^4)}{2} - t^2 + Arctan(t^2) \right]_0^1$ .

On trouve  $\frac{\ln(2)}{2} + \frac{\pi}{4} - 1$ .



## La loi \* sur $\mathbb{Z}$ .

IS 4

On rappelle qu'on a déjà calculé et prouvé par récurrence sur  $n$  :  $1 * 1 * \dots * 1 = (-1)^{n+1} \cdot n$ .  
 Si nécessaire, on le refait :  $1 * 1 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = -2$  ; c'est l'initialisation. Ensuite, on calcule  $(1 * 1 * \dots * 1) * 1 = (-1)^{n+1} \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1)^{n+1} \cdot n$  et on regarde les deux cas possibles :  
 •  $n$  pair :  $(1 * 1 * \dots * 1) * 1 = (-1)^{n+1} \cdot n \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)^{n+1} \cdot n = n + 1 = (-1)^{n+1+1} \cdot (n + 1)$   
 •  $n$  impair :  $(1 * 1 * \dots * 1) * 1 = (-1)^{n+1} \cdot n \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)^{n+1} \cdot n = -n - 1 = (-1)^{n+1+1} \cdot (n + 1)$   
 Pour avoir  $(-1)^{n+1} \cdot n = 2018$ , il faudrait que  $n$  soit à la fois pair (pour l'exposant) et pair (pour 2018).  
 Il n'y a pas de solution.

On calcule de même  $2 * 2 * 2 * \dots * 2$  ( $n$  termes), par récurrence sur  $n$ .  
 On calcule les premiers :  $2 * 2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4$ , puis  $2 * 2 * 2 = 4 * 2 = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 6$ .  
 Cette fois, c'est bien plus simple car 2 est pair :  $2 * 2 * 2 * \dots * 2 = 2 \cdot n$ .  
 On a initialisé une récurrence. On en démontre l'hérédité. On se donne un entier naturel  $n$  quelconque, on suppose  $2 * 2 * 2 * \dots * 2 = 2 \cdot n$ . On remet une étoile de plus :  $(2 * 2 * 2 * \dots * 2) * 2 = (2 \cdot n) * 2 = (2 \cdot n) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2 \cdot n + 2 = 2 \cdot (n + 1)$ . La formule est établie au rang  $n + 1$ . Par principe de récurrence, elle est établie à tout rang.  
 Il ne reste plus qu'à écrire :  $(2 * 2 * \dots * 2 = 2018 \text{ avec } 1009 \text{ termes})$  (et 1008 étoiles seulement...).

*L'élève matheux (au sens par forcément laudatif du terme) écrit "il est évident que  $2 * 2 * \dots * 2 = 2 \cdot n$ " et il ne fait pas la récurrence, il répond tout de suite  $n = 1009$ .*

*L'élève physicien (au sens pas forcément laudatif du terme) dit qu'il faut faire une récurrence, la fait posément comme en Terminale en douze lignes, et oublie quelle était la vraie question : trouver  $n$ .*

*L'élève de M.P.S.I.2. doit faire la récurrence en quatre lignes et chercher  $n$ .*

On calcule par exemple  $2 \otimes 3 = 2 * 2 * 2 = 6$  (calcul précédent).

On calcule ensuite  $3 \otimes 2 = 3 * 3 = -6$ .

Bon, beh c'est déjà fini, on a un contre-exemple.

*Il fallait tatonner d'abord sur quelques exemples pour avoir une idée de où on voulait aller ; Si on trouve un cas qui ne marche pas, on a notre contre-exemple. Si on n'a aucun cas qui ne marche pas, on a peut être commencé à deviner une démonstration en voyant "ce qui fait marcher la machine".*



## Le loi et le chapelier.

IS 4

Est il possible qu'un personnage dise "on est deux menteurs"? Oui, puisqu'on vient de l'entendre dire.

|                               |         |         |         |         |
|-------------------------------|---------|---------|---------|---------|
| celui qui parle               | menteur | menteur | sincère | sincère |
| l'autre                       | menteur | sincère | menteur | sincère |
| ils sont deux menteurs        | oui     | non     | non     | non     |
| il dit "on est deux menteurs" | non     | oui     | non     | non     |

Le seul cas de figure possible est donc "celui qui parle ment et l'autre est sincère".

Mais alors, comme l'autre est sincère, on est vraiment samedi.

Et qui est menteur le samedi? Le chapelier.

|                 |           |         |                        |
|-----------------|-----------|---------|------------------------|
|                 | jour      | samedi  |                        |
| On récapitule : | loir      | sincère | On est samedi          |
|                 | chapelier | menteur | On est deux menteurs ! |



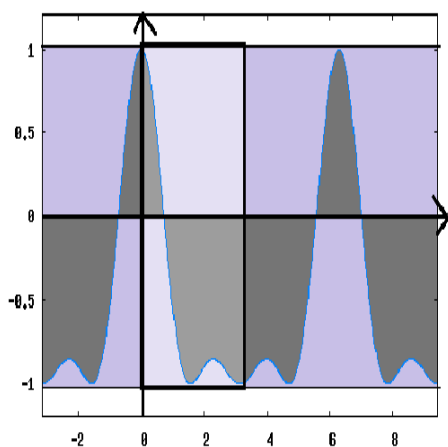
## Un peu de surjectivité.

IS 4

L'application  $x \mapsto \cos^3(x) - \sin^2(x)$  est définie sur tout  $\mathbb{R}$  (on la notera  $f$ ). Et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Mais c'est juste une application à ce stade. Pour en faire une surjection, il faut trouver les valeurs vraiment atteintes. On peut déjà restreindre à  $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 2]$  car le cube du cosinus reste entre  $-1$  et  $1$  et le carré du sinus entre  $0$  et  $1$ . Mais on ne pourra pas atteindre  $2$ .

On va chercher le maximum et le minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Comme elle est  $2\pi$  périodique, étudions la juste sur une période :  $[-\pi, \pi]$ . Pour des raisons de périodicité, on peut même la restreindre à  $[0, \pi]$ . On dresse un tableau de variations en dérivant :  $f'(x) = -3 \cdot \cos^2(x) \cdot \sin(x) - 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = -\sin(x) \cdot \cos(x) \cdot (2 + 3 \cdot \cos(x))$ .

Pour le signe de la dérivée, on dresse un tableau de signes :



| $x$                   | $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ | $\left[\frac{\pi}{2}, \operatorname{Arccos}\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$ | $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ |
|-----------------------|---------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| $\sin(x)$             | +                               | +                                                                            | +                                 |
| $\cos(x)$             | +                               | -                                                                            | -                                 |
| $2 + 3 \cdot \cos(x)$ | +                               | +                                                                            | -                                 |
| $f'(x)$               | -                               | +                                                                            | -                                 |
| $f(x)$                | 1 ↘ -1                          | -1 ↗ a                                                                       | a ↘ -1                            |

avec  $a = f(\operatorname{Arccos}(-2/3))$ .

On calcule :  $\cos(\operatorname{Arccos}(2/3)) = 2/3$  et  $\cos(\operatorname{Arccos}(2/3)) = \sqrt{5}/3$  (Pythagore).

On trouve  $a = f(\operatorname{Arccos}(-2/3)) = -23/27$ .

Le maximum est 1 et le minimum -1.

On résume :  $c^3 - s^2$  est surjective de  $\mathbb{R}$  sur  $[-1, 1]$  Mais il fallait le prouver.



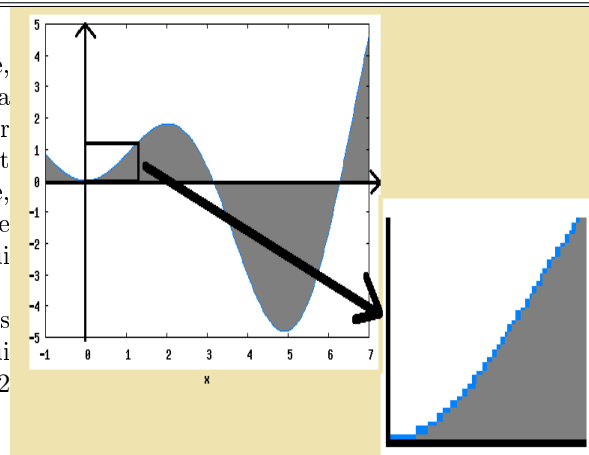
### Une application réciproque.

IS 4

On pose  $f = \theta \mapsto \theta \cdot \sin(\theta)$ . Elle est dérivable, de dérivée  $\theta \mapsto \sin(\theta) + \theta \cdot \cos(\theta)$ . Cette dérivée a un signe qui varie. Mais si on ne travaille que sur  $[0, \pi/2]$ , elle reste positive. Par théorème, elle est strictement croissante. Comme elle est continue, elle réalise une bijection continue de réciproque continue de  $[0, \pi/2]$  dans l'intervalle image, qui est aussi  $[0, \pi/2]$ .

On a donc, en renversant les rôles des deux axes une application  $f^{-1}$  qui va de  $[0, \pi/2]$  dans lui-même (vérifiez :  $f^{-1}(0) = 0$  et  $f^{-1}(\pi/2) = \pi/2$  puisque  $f(0)=0$  et  $\pi/2 = f(\pi/2)$ ).

Comme  $f^{-1}$  est continue, on peut intégrer.



Mais pour calculer  $\int_0^{\pi/2} f^{-1}(t) \cdot dt$ , il faut raisonner géométriquement. On a un rectangle (et même un carré) de côtés  $\pi/2$  et  $\pi/2$ . Et on enlève un morceau qui n'est autre que  $\int_{\theta=0}^{\pi/2} f(\theta) \cdot d\theta$ .

Pour calculer  $\int_0^{\pi/2} \theta \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta$ , il suffit d'intégrer par parties  $\int_{\theta=0}^{\pi/2} \theta \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta = [\theta \cdot (-\cos(\theta))]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \cdot (-\cos(\theta)) \cdot d\theta$ . La primitive en  $\sin(\theta) - \theta \cdot \cos(\theta)$  et donne une aire égale à 1.

La valeur par soustraction est donc  $\frac{\pi^2}{4} - 1$

