

MPSI2 LYCEE CHARLEMAGNE 2020/2021	MARDREDI 18 DÉCEMBRE I.S.12
---	---

♥ 0 ♥ Résolvez $\cos(x) + \cos(2.x) - \cos(3.x) = 1$ d'inconnue réelle x . 3 pt.

♥ 1 ♥ a, b et c sont trois réels. Montrez : $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 \Rightarrow |2.a + 6.b + 9.c| \leq 11$. 2 pt.

♦ 0 ♦ Vous avez vu : $a + (1 - a) = ?$ $a + (1 - a).b + (1 - a).(1 - b) = ?$
 $a + (1 - a).b + (1 - a).(1 - b).c + (1 - a).(1 - b).(1 - c) = ?$

Énoncez avec des $\sum$ et des $\prod$ la formule générale, et démontrez la. 3 pt.

♦ 1 ♦ Montrez $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} \frac{\text{Min}(i,k)}{\text{Max}(i,k)} = \binom{n+1}{2}$ pour tout n . 3 pt.

♦ 2 ♦ a_0, a_1 et a_2 sont trois réels strictement positifs. Calculez les déterminants de
`[[a[i]/a[k]+a[k]/a[i] for k in range(2)] for i in range(2)]`
et `[[a[i]/a[k]+a[k]/a[i] for k in range(3)] for i in range(3)]` 3 pt.

Contrairement aux chasseurs qui ne sont pas des lapins,
les pollueurs sont des ordures. Philippe GELUCK (Le Chat)

♣ 0 ♣ Mon code secret de téléphone portable est composé de quatre chiffres différents et tous non nuls. Quand j'effectue la somme de tous les nombres possibles que je peux former avec deux de ces quatre chiffres (dans un sens ou dans un autre), je retrouve mon code. Montrez que c'est impossible. Oups, je m'étais trompé, il faut encore multiplier le résultat par 7 pour trouver mon code. Quel est mon code ? 4 pt. Pourquoi pas un algorithme ?

♠ 0 ♠ Montrez pour tout x positif : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$. 3 pt.

♠ 1 ♠ Pour tout entier naturel n , on pose $A_n = \sum_{k=1}^{2.n} \frac{\sqrt{k.(2.n+1-k)}}{4.n^2}$, $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k.(2.n+1-k)}}{4.n^2}$,

$B_n = \frac{1}{8.n^2} \cdot \sum_{k=1}^{2.n} \frac{k.(2.n+1-k)}{4.n^2}$, $L_n = \sum_{k=1}^{2.n} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{k.(2.n+1-k)}}{4.n^2} \right)$. Montrez : $A_n = 2.a_n$. 1 pt.

♠ 2 ♠ Calculez B_n (sous forme la plus factorisée possible, et c'est possible) et donnez sa limite quand n tend vers l'infini. 2 pt.

♠ 3 ♠ Montrez : $A_n - B_n \leq L_n \leq A_n$. 1 pt.

♠ 4 ♠ Montrez que a_n converge vers $\int_0^{1/2} \sqrt{x.(1-x)}.dx$ quand n tend vers l'infini (par comparaison somme/intégrale, pensez à découper $[0, 1/2]$ en n segments égaux.) 3 pt.

♠ 5 ♠ Calculez l'intégrale du membre de droite (choisissez le bon : $x = t^2$, $x = \sin^2(\theta)$, $x = \tan(\theta)$, $t = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$). 2 pt.

♠ 6 ♠ Donnez la limite de $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\sqrt{k.(2.n+1-k)}}{4.n^2} \right)$ quand n tend vers l'infini. 2 pt.

J'ai lancé

Qu'affichera-t-il ?

Indication : montrez déjà

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2.\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

```
from math import *
S=0
for k in range(1, 10001):
....S += 1/sqrt(k)
print(int(S))
```

L'homme politique est capable de dire à l'avance ce qui va arriver demain, la semaine prochaine, le mois prochain et l'année prochaine. Le vrai homme politique est capable, après, d'expliquer pourquoi rien de tout cela ne s'est produit.
Winston CHURCHILL

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 LYCEE CHARLEMAGNE 2020/2021	CORRECTION I.S.12
--	--

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 Equation trigonométrique.	I.S.12
--	--------

On transforme $\cos(a) + \cos(2.x) - \cos(3.x)$ en $c + 2.c^2 - 1 - (4.c^3 - 3.c)$ en posant $c = \cos(x)$.

L'équation devient un système : $4.c^3 - 2.c^2 - 4.c + 2 = 0$ et $c = \cos(x)$.

L'équation de degré 3 se factorise en $4.(c^2 - 1).c - 2.(c^2 - 1) = 0$

$(c - 1).(c + 1).(4.c - 2) = 0$

On trouve trois familles de solutions qu'on réunit ensuite

$\cos(x) = 1$	$\cos(x) = -1$	$\cos(x) = \frac{-1}{2}$
$\{2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\{(2.k + 1).\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{3} + 2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
		$\left\{-\frac{\pi}{3} + 2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Et on fait un dessin sur le cercle trigonométrique.

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 Inégalité de Cauchy-Schwarz.	I.S.12
---	--------

L'implication $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 \Rightarrow |2.a + 6.b + 9.c| \leq 11$ est en effet une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux fois trois variables. $|a.\alpha + b.\beta + c.\gamma| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$.

Et ici, $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq 1$ par hypothèse

$$\sqrt{2^2 + 6^2 + 9^2} = \sqrt{4 + 36 + 81} = \sqrt{121} = 11$$

Pour la seconde inégalité, on prend $|a.b + b.c + c.a| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{b^2 + c^2 + a^2}$. C'est fini.

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 Une égalité avec des produits de plus en plus longs.	I.S.12
---	--------

$a + (1 - a) = 1$	$a + (1 - a).b + (1 - a).(1 - b) = 1$	$a + (1 - a).b + (1 - a).(1 - b).c + (1 - a).(1 - b).(1 - c) = 1$
$(1 - a_1).(1 - a_2) \dots (1 - a_n) + \sum_{k=1}^n (1 - a_1).(1 - a_2) \dots (1 - a_{k-1}).a_k = 1$		
$\prod_{i=1}^n (1 - a_i) + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cdot \prod_{i=1}^{k-1} (1 - a_i) \right) = 1$		

Avec la convention sur les produits vides égaux à 1.

Vous voulez la démontrer par récurrence ?

$$\begin{array}{rcl} A_0 & = & 1 \\ \text{Non ! Posez } A_k = \prod_{i=1}^k (1 - a_i) \text{ c'est à dire} & \begin{array}{l} A_1 = (1 - a_1) \\ A_2 = (1 - a_1) \cdot (1 - a_2) \\ A_3 = (1 - a_1) \cdot (1 - a_2) \cdot (1 - a_3) \end{array} & \end{array}$$

$$\text{On a alors } A_{k+1} - A_k = \prod_{i=1}^{k+1} (1 - a_i) - \prod_{i=1}^k (1 - a_i)$$

$$A_{k+1} - A_k = (1 - a_{k+1}) \cdot \prod_{i=1}^k (1 - a_i) - \prod_{i=1}^k (1 - a_i)$$

$$A_{k+1} - A_k = -a_{k+1} \cdot \prod_{i=1}^k (1 - a_i)$$

La formule conjecturée devient alors un télescopage : $\sum_{k=0}^{n-1} (A_{k+1} - A_k) = A_n - A_0$ avec $A_0 = 1$.

Remarque : Évident pour le professeur qui en a vu d'autres.
 Astucieux pour le colleur qui l'a posé.
 Artificiel pour le prof de physique qui trouve beau un interféromètre de Michelson mais pas belle une démonstration.
 Rassurant pour l'élève qui l'a déjà croisé
 ou qui l'a réussi par récurrence.

$\mathcal{M}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{I}$	2	Une somme avec <i>Min</i> et <i>Max</i> .	I.S.12
---------------	---------------	---------------	---------------	---	---	--------

On va séparer $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} \frac{\text{Min}(i,k)}{\text{Max}(i,k)} = \binom{n+1}{2}$ en trois :

$i < k$		$i = k$		$i > k$																																																
<table><tr><td></td><td>o</td><td>o</td><td>o</td></tr><tr><td></td><td></td><td>o</td><td>o</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>o</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		o	o	o			o	o				o						<table><tr><td>o</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>o</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>o</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>o</td></tr></table>	o					o					o					o		<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>o</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>o</td><td>o</td><td></td><td></td></tr><tr><td>o</td><td>o</td><td>o</td><td></td></tr></table>					o				o	o			o	o	o	
	o	o	o																																																	
		o	o																																																	
			o																																																	
o																																																				
	o																																																			
		o																																																		
			o																																																	
o																																																				
o	o																																																			
o	o	o																																																		
$\sum_{1 \leq i < k \leq n} \frac{Min(i,k)}{Max(i,k)}$	+	$\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{Min(i,i)}{Max(i,i)}$	+	$\sum_{1 \leq k < i \leq n} \frac{Min(i,k)}{Max(i,k)}$																																																
$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{k} \right)$	+	$\sum_{1 \leq i \leq n} 1$	+	$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{k}{i} \right)$																																																
$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{k \cdot (k-1)}{2} \right)$	+	n	+	$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \left(\frac{i \cdot (i-1)}{2} \right)$																																																
$\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (k-1)$	+	n	+	$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (i-1)$																																																

Les deux sommes « triangulaires » valent $\frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2}$. Le total donne $\frac{2}{4} \cdot n \cdot (n-1) + n$ et on simplifie en $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Ou même $\frac{(n+1) \cdot (n+1-1)}{2}$.

$\mathcal{M}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{I}$	2	Deux déterminants.	I.S.12
---------------	---------------	---------------	---------------	---	--------------------	--------

[[a[i]/a[k]+a[k]/a[i] for k in range(2)] for i in range(2)]	[[a[i]/a[k]+a[k]/a[i] for k in range(3)] for i in range(3)]
construit la matrice	construit la matrice
$\begin{pmatrix} \frac{a_0}{a_0} + \frac{a_0}{a_0} & \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_0} \\ \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_0}{a_1} & \frac{a_1}{a_1} + \frac{a_1}{a_1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{a_0}{a_0} + \frac{a_0}{a_0} & \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_0} & \frac{a_0}{a_2} + \frac{a_2}{a_0} \\ \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_0}{a_1} & \frac{a_1}{a_1} + \frac{a_1}{a_1} & \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \\ \frac{a_2}{a_0} + \frac{a_0}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} & \frac{a_2}{a_2} + \frac{a_2}{a_2} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_0} \\ \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_0}{a_1} & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_0} & \frac{a_0}{a_2} + \frac{a_2}{a_0} \\ \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_0}{a_1} & 2 & \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \\ \frac{a_2}{a_0} + \frac{a_0}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} & 2 \end{pmatrix}$
$4 - \left(\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_0}{a_1} \right)^2$	calcul
$-\left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{a_0}{a_1} \right)^2$	0

Dans le développement à 3! termes, on a 8

trois termes en $-2 \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 = -\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} - 2$

deux termes en

$\text{dsp} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \cdot \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) \cdot \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c} \right)$: ils donnent 2 et les six sommes en $\frac{a^2}{b^2}$

M P S I 2

Quatre chiffres.

I.S.12

On a un code $\overline{abcd}$ c'est à dire $1000.a + 100.b + 10.c + d$.

On crée des sommes comme $\overline{ab} + \overline{ba}$ avec des rôles symétriques.

Chacune vaut $11.(a + b)$. Et il y a six sommes de ce type (choisir 2 parmi 4).

Le total vaut $11.((a + b) + (a + c) + (a + d) + (b + c) + (b + d) + (c + d))$.

L'énoncé dit $33.(a + b + c + d) = 1000.a + 100.b + 10.c + d = \overline{abcd}$.

L'entier $\overline{abcd}$ est donc multiple de 3 (somme des chiffres)

et multiple de 11 (somme alternée des chiffres).

Mais $a + b + c + d$ ne peut dépasser $6 + 7 + 8 + 9$ (chiffres distincts).

Et $33.(6 + 7 + 8 + 9)$ vaut 990. pas assez de chiffres (non nuls).

On a oublié le facteur 7 ? Cette fois $3 \times 7 \times 11 \times (a + b + c + d) = 1000.a + 100.b + 10.c + d = \overline{abcd}$. C'est jouable.

On veut $a + c = b + d$ ou même $a + c = b + d + 11$.

Peut on avoir $a + c = b + d + 11$? Par exemple $9 + 8 = (1 + 5) + 11$.

$$9 + 8 = (2 + 4) + 11$$

$$9 + 7 = (2 + 3) + 11$$

Mais la somme $a + b + c + d$ n'est pas multiple de 3.

Le code est 4158

Et pourquoi pas un algorithme assez brutal ?

```
for a in range(1, 10) :
...for b in range(1, 10) :
.....for c in range(1,10) :
.....for d in range(1, 10) :
.....code = 1000*a+100*b+10*c+d
.....if a!=b and a!=c and a!=d and b!= c and b!= d and c!= d :
.....if 3*7*11*(a+b+c+d)==code :
.....print(code)
print('Fin')
```

M P S I 2

Un script qui calcule une somme.

I.S.12

Le script calcule la somme $\sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Si on prouve $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$,
on encadre par les sommes télescopiques

$$2. \sum_{k=1}^n \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2. \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$$

$$2. \sqrt{n+1} - 2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2. \sqrt{n}$$

On encadre $\sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}$ entre 198 et 200.

```
from math import *
S=0
for k in range(1, 10001) :
...S += 1/sqrt(k)
print(int(S))
```

La réponse sera donc 198 ou 199. Et en fait 198 car le premier encadrement est trop large.

$$1 + 2. \sum_{k=1}^{10000} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 1 + 2. \sum_{k=2}^{10000} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

Et comment prouver l'encadrement ? Par comparaison avec des intégrales :

$$2.(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \left[2.\sqrt{t} \right]_n^{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$2.(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \left[2.\sqrt{t}\right]_{n-1}^n = \int_{n-1}^n \frac{dt}{\sqrt{t}} \geq \int_{n-1}^n \frac{dt}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Mais je préfère sincèrement la quantité conjuguée : $2.(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 2. \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{2}{2.\sqrt{n}}$.

J'avais en réserve les questions « bonus » : et ceux là :

<pre>from math import * S=0 for k in range(1, 10001):S += sqrt(1/k) print(S)</pre>	<pre>from math import * S=0 for k in range(1, 10001):S += int(1/sqrt(k)) print(int(S))</pre>
---	---

M P S I 2	Petit problème.	I.S.12
---	-----------------	--------

L'inégalité initiale $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ peut se démontrer en étudiant $x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ et $x \mapsto x - \ln(1+x)$ sur $[0, +\infty[$.

Mais il y a plus pro : la formule de Taylor avec reste intégrale.

$$\ln(1+x) = \ln(1) + x \cdot \frac{1}{1} + \frac{x}{1} \cdot \int_0^1 (1-t) \cdot \frac{-1}{(1+tx)^2} dt$$

$$\text{et } \ln(1+x) = \ln(1) + x \cdot \frac{1}{1} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{(-1)}{1} + \frac{x^3}{2} \cdot \int_0^1 (1-t)^2 \cdot \frac{2}{(1+tx)^3} dt$$

et on regarde le signe de chaque intégrale.

On découpe $A_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\sqrt{k.(2n+1-k)}}{4.n^2}$ en deux termes (pour déjà trouver a_n à mi parcours) :

$$A_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\sqrt{k.(2n+1-k)}}{4.n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k.(2n+1-k)}}{4.n^2} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sqrt{k.(2n+1-k)}}{4.n^2} \text{ (autant de termes dans chacun)}$$

On réindexe le second en posant $p = 2n+1-k$ (on renverse la somme, non ?).

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k.(2n+1-k)}}{4.n^2} + \sum_{n \geq p \geq 1} \frac{\sqrt{(2n+1-p).p}}{4.n^2}$$

Les variables sont muettes d'admiration devant un tel prodige, c'est $a_n + a_n$.

On calcule B_n en développant : $B_n = \frac{1}{16.n^4} \cdot \left((2n+1) \cdot \sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{2n} k^2 \right)$

On utilise les formules du cours : $B_n = \frac{1}{16.n^4} \cdot \left((2n+1) \cdot \frac{2.n.(2n+1)}{2} - \frac{2.n.(2n+1).(4n+1)}{6} \right)$

On factorise avant de développer : $B_n = \frac{(2n+1)}{96.n^4} \cdot (6.n.(2n+1) - 2.n.(4n+1))$.

La parenthèse vaut $4.n^2 + 4.n$ et on peut simplifier un peu $B_n = \frac{(2n+1).(n+1)}{24.n^3}$

Pour la limite, c'est 0 car le degré du numérateur l'emporte sur celui du dénominateur.

Pratiquement : $B_n = \frac{1}{24.n} \cdot \left(2 + \frac{1}{n} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.

On encadre chaque terme de L_n avec le lemme du début :

$$\frac{\sqrt{k.(2n+1-k)}}{4.n^2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{k.(2n+1-k)}}{4.n^2} \right)^2 \leq \ln \left(1 + \frac{\sqrt{k.(2n+1-k)}}{4.n^2} \right) \leq \frac{\sqrt{k.(2n+1-k)}}{4.n^2}$$

On somme de 1 à $2n$ et on a exactement A_n, B_n et L_n .

L'application $x \mapsto x.(1-x)$ est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (maximum en $\frac{1}{2}$ justement).

On passe à la racine : $x \mapsto \sqrt{x.(1-x)}$ croît.

On découpe l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ en n segments de la forme

Pour l'intégrale, il y a très rapide. $y = \sqrt{x.(1-x)}$ est l'équation d'un arc de cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ donne } y = \sqrt{x.(1-x)} \text{ ou son opposé.}$$

Sinon, comme proposé : $x = \sin^2(\theta) : \int_0^{1/2} \sqrt{x.(1-x)}.dx = \int_{\theta=0}^{\pi/4} \sqrt{\sin^2(\theta). \cos^2(\theta)}.2. \sin(\theta). \cos(\theta).d\theta.$

On n'a pas besoin de valeurs absolues vu l'intervalle : $\int_0^{1/2} \sqrt{x.(1-x)}.dx = \int_{\theta=0}^{\pi/4} 2. \sin^2(\theta). \cos^2(\theta).d\theta.$

Un soupçon de trigonométrie : $\int_0^{1/2} \sqrt{x.(1-x)}.dx = \frac{1}{2}. \int_{\theta=0}^{\pi/4} \sin^2(2.\theta).d\theta.$

Un autre soupçon : $\int_0^{1/2} \sqrt{x.(1-x)}.dx = \frac{1}{4}. \int_{\theta=0}^{\pi/4} (1 - \cos(4.\theta)).d\theta.$

On intègre : $\int_0^{1/2} \sqrt{x.(1-x)}.dx = \frac{1}{4}. \left[\theta - \frac{\sin(4.\theta)}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{16}.$

Cela dit, avec $t = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$, c'était pas mal. $x = \frac{t^2}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$ et $\sqrt{x.(1-x)} = \frac{t}{1+t^2}$. Il n'y a plus qu'à décomposer une horreur en éléments simples et intégrer.

$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\sqrt{k.(2.n+1-k)}}{4.n^2}\right)$ a pour logarithme L_n , comme pas hasard (logarithme du produit, somme des logarithmes).

L_n est encadré par $A_n - B_n$ et A_n .

B_n tend vers 0 et A_n tend vers une intégrale de valeur connue.

Par encadrement, L_n tend vers $\frac{\pi}{16}$.

Par continuité de l'exponentielle, $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\sqrt{k.(2.n+1-k)}}{4.n^2}\right)$ converge vers $\sqrt[16]{e^\pi}$ par exemple, pour le formuler « simplement ».

