M	P	S	I	2	VENDREDI 5 FÉVRIER
LYCEE CHARLEMAGNE 2020/2021					D.S.06

Largement mais aussi librement inspiré de Centrale-Supelec PSI 2019. Les parties sont assez indépendantes entre elles.

Dans tout ce qui suit, l'entier n (format des matrices) sera au moins égal à 2 pour éviter les cas trop triviaux ou de pure logique.

Un matrice carrée M de format n sur n est dite nilpotente si il existe un exposant r vérifiant $M^r = 0_{n,n}$. Le plus petit de ces exposants (existence par « partie de $\mathbb{N}$ non vide ») est appelé ordre de nilpotence de M. Le rang d'une matrice est la dimension de l'espace vectoriel de ses vecteurs colonnes. Deux matrices A et B de même format carré sont dites semblables si il existe P inversible vérifiant $A.P = P.B$ (en général, la seule façon de le prouver est de trouver P, les histoires de « même trace, même déterminant » ne sont que des conditions nécessaires).

I$\sim$0) Montrez que l'ensemble des matrices nilpotentes d'ordre 1 est un espace vectoriel dont vous donnerez la dimension et une base. 2 pt.

I$\sim$1) Montrez que toute matrice nilpotente a un déterminant nul. Montrez que la réciproque est fausse (construisez contre-exemple avec $n = 2$). 2 pt.

I$\sim$2) Montrez que si M est nilpotente, alors M^2, $\lambda.M$ et ${}^tM$ sont nilpotentes. 2 pt.

I$\sim$3) Montrez que le rang d'une matrice à q colonnes et n lignes est forcément inférieur ou égal à n et à q. 2 pt.

II$\sim$0) Montrez que toute matrice de format 2 de trace et déterminant nuls est nilpotente (ordre ?). 1 pt.

II$\sim$1) Montrez que si M est de format 2, semblable à $2.M$ alors elle est nilpotente. 2 pt.

II$\sim$2) Montrez que l'ensemble des matrices carrées de taille 2 sur 2 de trace nulle est un espace vectoriel. Donnez en une base faite de matrices nilpotentes. 2 pt.

III$\sim$0) Soit M une matrice nilpotente de format n sur n et d'ordre p différent de 1. Montrez qu'il existe au moins un vecteur U vérifiant $M^{p-1}.U \neq 0_n$. 1 pt.

III$\sim$1) Montrez que la famille $(U,\ M.U, \dots M^{p-1}.U)$ est libre. 2 pt.

III$\sim$2) Déduisez que l'ordre de nilpotence ne peut pas dépasser le format de la matrice. 1 pt.

IV$\sim$0) Montrez que si M est nilpotente de format 2, alors M est nulle ou semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ notée J_2 (on pourra introduire la matrice formée de U et $M.U$ de la partie précédente). 2 pt.

IV$\sim$1) Déduisez que pour M de format 2 sur 2, il y a équivalence entre M est nilpotente et $Tr(M) = \det(M) = 0$. 1 pt.

IV$\sim$2) Les matrices nilpotentes de format 2 sur 2 forment elles un espace vectoriel ? 1 pt.

V$\sim$0) Montrez que si M est une matrice nilpotente de format 3 et d'ordre 3 alors M est semblable à $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (formez la matrice dont les colonnes sont$U$, $M.U$ et $M^2.U$). 2 pt.

V$\sim$1) Montrez que J_3 est semblable à $2.J_3$ et à ${}^tJ_3$. 2 pt.

V$\sim$2) Déduisez que si M est nilpotente, alors M est semblable à $2.M$ et à ${}^tM$. 1 pt.

VI$\sim$0) On note $(U_1, \dots U_n)$ la base canonique de $(\mathbb{R}^n, +, .)$ (U_i est le vecteur colonne formé de $n-1$ termes nuls et d'un 1 en ligne i). On pose $E_i^k = U_i.{}^t(U_k)$ (transposer, c'est échanger le rôle des lignes et des colonnes). Qui est la famille $(E_i^k)_{\substack{i \leqslant n \\ k \leqslant n}}$? Calculez $E_i^k.E_p^q$ en fonction de k, p, i et q. 2 pt.

VI$\sim$1) On pose $T_j = Vect(E_i^k \mid i + j < k)$ pour j dans $\mathbb{N}$. Donnez sa dimension en fonction de j (attention à $j \geqslant n$). 2 pt.

VI$\sim$2) Montrez : $\forall A \in T_j,\ \forall B \in T_q,\ A.B \in T_{j+q}$. 2 pt.

VI∼3) Montrez que tout élément de T_j ($j \in \mathbb{N}^*$) est nilpotent. $\boxed{\text{2 pt.}}$

VII∼0) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Calculez $\det(A)$. Déduisez qu'il n'existe pas de matrice vérifiant $M^2 = A$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

VII∼1) $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -8 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ Calculez $\det(B)$. Diagonalisez B. Trouvez M vérifiant $M^2 = B$. $\boxed{\text{4 pt.}}$

VII∼2) $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Montrez que J est nilpotente (ordre ?). On cherche M vérifiant $M^2 = J$. Montrez : $M.J = J.M$.. Déduisez que M est de la forme $a.I_3 + b.J + c.J^2$. En calculant $\det(M)$, montrez $a = 0$ et déduisez enfin que l'équation $M^2 = J$ d'inconnue M n'a pas de solution. $\boxed{\text{3 pt.}}$

VII∼3) On pose $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. Donnez la dimension et une base des espaces vectoriels $\{U \mid C.U = 0_3\}$ (noté K) et $\{C.U \mid U \in \mathbb{R}^3\}$ (noté I [1]) et $K \cap I$. Montrez que C est nilpotente. Est elle semblable à J_3 ? $\boxed{\text{4 pt.}}$
Soit M une matrice vérifiant $M^2 = C$ (si il y en a). Montrez que M est nilpotente (ordre ?). Montrez : $\forall U \in K,\ M.U \in K$ et $\forall V \in I,\ M.V \in I$. Trouvez une matrice M qui convient. $\boxed{\text{4 pt.}}$

VIII∼0) On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrez que M est nilpotente (ordre ?). $\boxed{\text{1 pt.}}$

VIII∼1) Trouvez U vérifiant $\dim(U,\ M.U,\ M^2.U,\ M^3.U,\ M^4.U,\ M^5.U) = 3$ $\boxed{\text{3 pt.}}$.
V vérifiant $\dim(U,\ V,\ M.V,\ M^2.V,\ M^3.V,\ M^4.V,\ M^5.V) = 3$

VIII∼2) Montrez que $(U,\ M.U,\ M^2.U,\ V,\ M.V)$ est une base de $(\mathbb{R}^5, +, .)$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

VIII∼3) Montrez que M est semblable à la matrice par blocs $\begin{pmatrix} J_3 & 0_{3,2} \\ 0_{2,3} & J_2 \end{pmatrix}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

VIII∼4) Explicitez la suite $(rg(M^n))_{n\in\mathbb{N}}$. Trouvez N telle que la suite $(rg(N^n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit $(6, 4, 2, 0, 0, 0\ldots)$. $\boxed{\text{4 pt.}}$

IX∼0) Allez, pour se la jouer MPSI2 : $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est nilpotente, prouvez le (trouvez le corps dans lequel ça se passe) ! Montrez que cette matrice est semblable à J_3. $\boxed{\text{6 pt.}}$

X∼0) Le sujet montrait ensuite que toute matrice nilpotente N de format n était semblable à une matrice par blocs de la forme $\begin{pmatrix} J_{i_1} & & & \\ & J_{i_2} & & \\ & & J_{i_3} & \\ & & & \ddots \\ & & & & J_r \end{pmatrix}$ où les J sont des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (comme à la question VIII). Et on les classifiait en fonction de la traille des différents blocs. Il fallait donc dénombrer les « partitions de n ». Une partition de n est une suite finie décroissante d'entiers non nuls de somme n : $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_k$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$. On note Γ_n l'ensemble des partitions de n. On note $y_{n,j}$ le nombre de partitions de n dont le premier élément est inférieur ou égal à j.

Justifiez et complétez :

n	0	1	2	3	4	5				
Γ_n			$\{[2],\ [1,1]\}$							
$Card(\Gamma_n)$	1	1		3		$y_{5,1}$	$y_{5,2}$	$y_{5,3}$	$y_{5,4}$	$y_{5,5}$
									6	

$\boxed{\text{5 pt.}}$

Calculez $y_{n,1}$ pour tout n. $\boxed{\text{1 pt.}}$ Montrez : $\forall\ 2 \leqslant j \leqslant n,\ y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,min(j,n-j)}$ (on montrera déjà ce résultat pour $j = n$ et on prouvera $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,j}$ pour $j < n$). $\boxed{\text{4 pt.}}$
Écrivez un script Python qui prend en argument n et renvoie $y_{n,n}$. $\boxed{\text{3 pt.}}$ Calculez $y_{n,j}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n \leqslant 6$. $\boxed{\text{3 pt.}}$

1. et donc $V \in I \Leftrightarrow \exists U,\ V = M.U$

$\mathcal{M}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{I}$	2	CORRECTION
LYCEE CHARLEMAGNE 2020/2021					D.S.06

Premières questions.

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 — D.S.06

Il n'y a qu'une matrice nilpotente d'ordre 1 (par définition : $M^1 = 0_{n,n}$), c'est la matrice nulle.
En tant que vecteur nul de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ elle forme un espace vectoriel de dimension 0 et de base ( ) (famille vide).

Remarque : Plantez sur la dimension, ou donnez une base faite du vecteur nul, et c'est déjà mort pour vous.
Une base ne peut pas contenir le vecteur nul. Et la dimension, c'est bien le nombre de vecteurs, ici 0.

Si M est nilpotente, elle vérifie $M^r = 0_{n,n}$. On passe au déterminant, et sachant que le déterminant du produit est le produit des déterminants : $(\det(M))^n = 0$. Pr intégrité dans $(\mathbb{C}, +, .)$ (puisqu'on est dans le cors), $\det(M)$ est nul.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a un déterminant nul, mais n'est pas nilpotente. Toutes ses puissance redonnent la matrice elle même et jamais la matrice nulle.

Si M est nilpotente d'ordre r alors on a $M^2)^r = M^{2.r} = (M^r).M^r = 0_{n,n}.0_{,n,n} = 0_{n,n}$.
La matrice M^r est nilpotente d'ordre inférieur ou égal à r.

Remarque : Comme on ne cherche pas son ordre, inutile de se fatiguer, même si on peut se douter qu'il s'agira de $\dfrac{r}{2}$ si r est pair et $\dfrac{r+1}{2}$ (ou $\dfrac{r-1}{2}$) si r est impair.

Quant à ${}^tM$, en utilisant la formule ${}^t(A.B) =^t A.^tB$, on montre : $({}^tM)^r =^t (M^r) =^t 0_{n,n} = 0_{n,n}$. Elle a gardé le même ordre que M.

De même, $(\lambda.M)^r = \lambda^r.M^r = \lambda^r.0_{n,n} = 0_{n,n}$. Elle a gardé le même ordre.

A propos de rang.

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 — D.S.06

On prend une matrice $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^q \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^q \end{pmatrix}$

et on doit mesurer la dimension de $Vect(\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ \vdots \\ a_n^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_n^2 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} a_1^q \\ a_2^q \\ \vdots \\ a_n^q \end{pmatrix})$.

Ce sont q vecteurs dans $(\mathbb{R}^n, +, .)$ (dont on connaît la dimension : n).
Or, dans un espace de dimension n, les sous-espaces sont de dimension inférieure ou égale à n.

On a donc $dim(Vect(\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ \vdots \\ a_n^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_n^2 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} a_1^q \\ a_2^q \\ \vdots \\ a_n^q \end{pmatrix})) \leqslant dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Mais d'autre par, la famille des colonnes engendre... elle engendre ce qu'elle engendre. La dimension de cet espace est donc inférieure ou égale à n
(et il faut peut être enlever des vecteurs pour trouver la dimension si la famille des vecteurs colonne n'est pas libre...).

$\mathcal{M}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{I}$	2	En taille 2.	D.S.06

Si on suppose $Tr(M) = 0$ et $\det(M) = 0$, la formule de Cayley Hamilton donne $M^2 - 0.M + 0.I_2 = 0_{2,2}$.
M est nilpotente d'ordre 2 (ou même 1 si c'est la matrice nulle).

Variante : | Sinon, on peut partir de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ et élever au carré avec l'hypothèse $-a^2 - b.c = 0$.
On trouve $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On suppose que M est semblable à $2.M$. Il existe alors P vérifiant $2.M = P.M.P^{-1}$.
Mais si M et $2.M$ sont semblables, elles ont même trace et même déterminant : $Tr(2.M) = Tr(M)$ et $\det(2.M) = \det(M)$.
Ceci conduit à $2.Tr(M) = Tr(M)$ et $4.\det(M) = \det(M)$.
On n'a pas le choix : $Tr(M)$ et $\det(M)$ sont nuls. Et M est nilpotente.

L'ensemble des matrices carrées de taille 2 sur 2 est fait des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.
On les écrit $a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui permet de dire que notre ensemble est $Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ et d'en faire de facto un espace vectoriel (notation $Vect(\ldots)$) d'en donner une base : $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$.
Il est de dimension 3.

Remarque : | Oui, inutile d'en dire plus, tout est là.

Pour avoir une base, il faut et il suffit de donner trois matrices linéairement indépendantes. Et on les veut aussi nilpotente.
$(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$: une d'entre elles ne convient pas.Vous voyez laquelle.
Mais $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente. Et elle a toujours une trace nulle.
La famille est elle restée libre ?
$(a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \Rightarrow (a = b = c = 0)$

Variante : | Ou alors je vous montre qu'on peut ré-engendrer $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ à partir de $(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$, et on passe cette fois par « génératrice et bon cardinal ».

$\mathcal{M}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{I}$	2	Majoration de l'ordre de nilpotence.	D.S.06

Si M est nilpotente d'ordre r alors M^r est nulle, mais M^{r-1} ne l'est pas (sinon, l'ordre serait strictement plus petit que r).
Et pour qu'une matrice ne soit pas nulle, il faut et il suffit qu'il existe au moins un vecteur non nul U vérifiant $M.U \neq 0_n$.

Remarque : | Le sens utile est ici : si on avait $M.U = 0_n$ pour tous les vecteurs, M serait nulle.
Il suffit d'appliquer l'hypothèse $\forall U,\ M.U_{0_n}$ aux n vecteurs de la base canonique.

Il existe donc au moins un vecteur tel que $M^{r-1}.U$ soit nul nul.

On se donne alors, pour ce vecteur r réels α_0 à α_{r-1} vérifient $\alpha_0.U + \alpha_1.M.U + \ldots + \alpha_{r-1}.M^{r-1}.U = 0_n$.
On veut obtenir que les α_i sont tous nuls.
On va composer par M plusieurs fois, et utiliser $M^r = 0_{n,n}$ et donc $M^r.U_n = 0_n$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\alpha_0.U & +\alpha_1.M.U & +\ldots & +\alpha_{r-2}.M^{r-2}.U & +\alpha_{r-1}.M^{r-1}.U & = & 0_n \\
\alpha_0.M.U & +\alpha_1.M^2.U & +\ldots & +\alpha_{r-2}.M^{r-1}.U & & = & 0_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\alpha_0.M^{r-2}.U & +\alpha_1.M^{r-1}.U & & & & = & 0_n \\
\alpha_0.M^{r-1}.U & & & & & = & 0_n
\end{array}$$

La dernière ligne, avec l'hypothèse $M^{r-1}. \neq 0_n$ donne $\alpha_0 = 0$.
On reporte dans l'avant dernière : $\alpha_1 = 0$.
Et ainsi de suite.

Concours :	Mais on ne voudra pas que vous rédigiez ainsi avec cette remontée (contenant une récurrence). On voudra que vous supposiez par l'absurde au moins un α_i non nul. Vous prenez alors le plus petit indice i tel que α_i soit non nul (donc α_0 jusqu'à α_{i-1} s'en vont).. Vous multipliez la relation $\alpha_i.M^i.U + \alpha_{i+1}.M^{i+1}.U + \ldots + \alpha_{r-1}.M^{r-1}.U = 0_n$ par M^{r-1-i} et vous obtenez $\alpha_i.M^{r-1}.U + 0_n = 0_n$ et vous tenez la contradiction.

Dans une espace vectoriel tel que $(\mathbb{R}^n, +, .)$ où sont ici tous les $M^i.U$, le cardinal des familles libres ne peut dépasser n.
Et ici, le cardinal est r.
On a donc $r \leqslant n$ (le cas $r = n$ donne une base...).

M P S I 2 — Retour sur les nilpotentes de format 2. — **D.S.06**

Si M est nilpotente de format 2 sur 2, son ordre ne peut dépasser 2. Et il ne vaut pas 0, car M^0 vaut I_2 et pas $0_{2,2}$.
Le cas $r = 1$ donne la matrice nulle. C'est réglé.
Le cas $n = 2$ dit qu'il existe un vecteur U non nul vérifiant $M.U \neq 0_2$.
La famille $(U,\ M.U)$ est alors libre.
Elle a le bon cardinal pour former une base de $\mathbb{R}^2$.
Écrivons la matrice formée des deux colonnes $(U\ |M.U)$. Inversible puisque cette famille est une base. On la note P.
On calcule alors : $M.P$ est formée de deux colonnes : $M.U$ et $M.M.U$.
Et $P.J_2$ est formée des deux mêmes colonnes.
On a donc $M.P = P.J_2$.

Terre à terre : En posant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}$ et $M.U = \begin{pmatrix} a.u + b.u' \\ c.u + d.u' \end{pmatrix}$ et même $M.U = \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix}$ pour alléger
on pose $P = \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix}$ on calcule $M.P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & 0 \\ v' & 0 \end{pmatrix}$
et en même temps
$P.J_2 = \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & 0 \\ v' & 0 \end{pmatrix}$

Comme P est inversible (famille libre), on a $M = P.J_2.P^{-1}$. On reconnaît « M est semblable à J_2 ».

Les matrices nilpotente de format 2 sur 2 sont de deux types :

ordre	ordre 1		ordre 2	
forme	$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$		$M = P. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .P^{-1}$	
éléments propres	$Tr(M) = 0$	$\det(m) = 0$	$Tr(M) = Tr(J_2) = 0$	$\det(M) = \det(J_2) = 0$

On a donc M *nilpotente* $\Rightarrow Tr(M) = \det(m) = 0$.
Et la réciproque a été prouvée quelques questions plus haut.

Avec cette caractéristique, peut on montrer la stabilité par combinaison linéaire ?
Mais on n'a rien pour $\det(\alpha.A + \beta.B)$.
Peut être qu'avec les hypothèses de nilpotence ?

Mais si on regarde un peu... On a trouvé trois matrices nilpotentes formant une base de l'espace des matrices de trace nulle.
Si les matrices nilpotentes formaient un espace vectoriel, elles engendreraient alors cet espace des matrices de trace nulle.
Or, il y a des matrices de trace nulle qui ne sont pas nilpotentes.

Donc, les matrices nilpotentes ne forment pas un espace vectoriel.
D'ailleurs, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes, mais leur somme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est plus (déterminant non nul, puissances tournant sur des modèles $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc jamais nulles).

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 — Cas des matrices nilpotentes de format 3 sur 3. — D.S.06

On regarde $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$, nilpotente d'ordre 1, 2 ou 3 (car l'ordre ne peut dépasser le format).
L'ordre 1 est vite réglé.

On regarde le cas de l'ordre 3. La partie générale en taille quelconque dit qu'il existe un vecteur tel que $M^2.U$ soit non nul.
La famille $(U,\ M.U,\ M^2.U)$ est alors libre dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
Elle a le bon cardinal pour former une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
La matrice formée des trois colonnes $(U|M.U|M^2.U)$ est inversible. On la note P.
On effectue le produit $M.P$ colonne par colonne :
$M.P = M.(U|M.U|M^2.U) = (M.U|M^2.U|M^3.U) = (M.U|M^2.U|0_3)$
On compare : $\begin{pmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & w & 0 \\ v' & w' & 0 \\ v'' & w'' & 0 \end{pmatrix} = (M.U|M^2.U|0_3)$.

On a donc naturellement : $M.P = P.J_3$.
M est semblable à J_3.

Vérification : | Et J_3 est nilpotente : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{J_3} \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{J_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \xrightarrow{J_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour montrer que J est semblable à $2.J$, il faut trouver une (nouvelle) matrice inversible P vérifiant $J_3.P = P.2.J_3$.
On veut (avec de nouvelles variables u à w'') :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
On bricole, et si on a de l'intuition pour tester des solutions assez simples,
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que J est semblable à ${}^tJ$, il faut trouver une matrice inversible Q vérifiant $J_3.Q = Q.{}^tJ_3$.
On veut (avec d'encore nouvelles variables u à w'') :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On bricole, et si on a de l'intuition pour tester des solutions assez simples,
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit alors M nilpotente d'ordre 3. On a plusieurs phrases

M est semblable à J_3	$M = P.J_3.P^{-1}$
J_3 est semblable à $2.J_3$	ci dessus du type $J_3 = D.(2.J_3).D^{-1}$
$2.M$ est semblable à $2.J_3$	$2.M = P.(2.J_3).P^{-1}$
J_3 est semblable à ${}^tJ_3$	du type $J_3 = Q.({}^tJ_3).Q^{-1}$
${}^tM$ est semblable à ${}^tJ_3$	${}^tM = {}^t(P^{-1}).{}^tJ_3.{}^tP$ avec ${}^tP = ({}^t(P^{-1}))^{-1}$

Avec la transitivité de la relation être semblable à », on peut conclure.
Et on peut même expliciter des matrices de passage.

Racines carrées de matrices.

On calcule : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -1.$

Par l'absurde s'il existe M vérifiant $M^2 = A$ alors $\det(M^2) = \det(A)$ (juste nécessaire, pas suffisant) puis $(\det(M))^2 = -1$.
C'est impossible dans $\mathbb{R}$. Il n'y a donc pas de solution réelle.

La matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -8 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ a pour déterminant 0, trace 5 et trace de comatrice la somme

$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ qui vaut 4.

Pour diagonaliser B, on écrit le polynôme caractéristique $X^3 - 5.X^2 + 4.X$.

on trouve le spectre : 0, 1 et 4

on cherche trois vecteurs propres :

$M.X = 0.X$	$M.X = X$	$M.X = 4.X$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

on trouve P et D :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Avec les notations habituelles : $B = P.D.P^{-1}$ et même $B^n = P.D^n.P^{-1}$.
Et pour l'exposant 1/2 ? Si on essayait avec des notations totalement impossibles $B^{1/2} = P.D^{1/2}.P^{-1}$.

Et qui serait $\sqrt{D}$? Pourquoi pas $\begin{pmatrix} \sqrt{0} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{4} \end{pmatrix}$?

En tout cas, si on pose $D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,et $M = P.D'.P^{-1}$,

on a bien $M^2 = (P.D'.P^{-1}).(P.D'.P^{-1}) = P.(D')^2.P^{-1} = P.D.P^{-1} = B$.

On peut donc proposer $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ et justifier par la ligne de calcul au dessus.

On peut même mettre des $\pm$ sur la diagonale et trouver quatre solutions.

Et si on veut parachever le calcul sans se tromper, on calcule P^{-1} par comatrice : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Le calcul final donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}}$$

Et trois autres solutions.

Évidemment que $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente, d'ordre 2.
Si on suppose $M^2 = J$, on a $M.J = M.M^2 = M^3$ et $J.M = M^2.M = M^3$ d'où l'égalité demandée.

Maintenant, en écrivant pour une fois au niveau des coefficients :
$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$,
l'identification terme à terme donne neuf équations dont certaines inutiles :

$b = 0$	$c = 0$	$0 = 0$
$b' = a$	$c' = b$	$0 = c$
$b'' = a'$	$c'' = b'$	$0 = c'$

on reporte : $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a' & a & 0 \\ a'' & a' & a \end{pmatrix}$.
On reconnaît : $M = a.I_3 + a'.J_3 + a''.(J_3)^2$ et même $M = R(J_3)$ avec $R(X) = a + a'.X + a''.X^2$.

Mais la condition n'est que nécessaire à ce stade.
En observant $\det(M) = a^3$ et $\det(M)^2 = \det(J_3) = 0$, on annule a.

On veut donc $M^2 = J_3$ avec $M = (a'.J_3 + a''.(J_3)^2)$.
On développe et égalise : $a'^2.(J_3)^2 + 0_{3,3} = J_3$.
C'est impossible...

Il n'y a donc pas de solution.

On prend cette fois $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ notée C.
On résout $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On trouve trois fois la même ligne. Ce sont donc les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} -3.y + 7.z \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On les sépare sous la forme $y. \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z. \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a un plan dont une base est $(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. Et qui dit plan dit « dimension 2 ».

L'autre ensemble est plus subtil : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3.y - 7.z \\ 2.x + 6.y - 14.z \\ x + 3.y - 7.z \end{pmatrix}$.
Ce sont des vecteurs dont « la seconde composante est le double de la première »
« la troisième composante est égale à la première »
On écrit $\begin{pmatrix} a \\ 2.a \\ a \end{pmatrix}$ et $I = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$, de dimension 1.

Variante :
On peut aussi les écrire $\begin{pmatrix} x + 3.y - 7.z \\ 2.x + 6.y - 14.z \\ x + 3.y - 7.z \end{pmatrix} = x. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y. \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + z. \begin{pmatrix} -7 \\ -14 \\ -7 \end{pmatrix}$.
C'est donc $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -14 \\ -7 \end{pmatrix}) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Pour $K \cap I$, on cherche les vecteurs de la forme $V = M.U$ vérifiant $M.V = 0_3$. On constate $M^2.U = 0_3$.

Mais surtout, $K \cap I$ est au plus de dimension 1 car inclus dans I.
Et en fait, c'est soit (0_3), soit I (dimension 0 ou 1).
Mais le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans K. Il suffit de vérifier $M.U = 0_3$ ou de l'écrire $2.\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On a donc $K \cap I = I$, de dimension 1 dont une base est la même que K.

espace	K	I	$K \cap I$
une base	$\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$	$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$	$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
sa dimension	2	1	1

M est nilpotente d'ordre 2, il suffit de calculer M^2.
Elle ne peut pas être semblable à J_3 puisque $M^2 = 0_{3,3}$ et $(J_3)^2 \neq 0_{3,3}$ (or, si on avait $J_3 = P.M.P^{-1}$ on aurait $(J_3)^2 = P.M^2.P^{-1} = 0_{3,3}$).

Prenons M vérifiant $M^2 = C$. On a alors $M^4 = C^2 = 0$.
M est nilpotente d'ordre... euh pas si vite. Pas 4 car 4 est plus grand que son format.
Pas 2 car M^2 est égale à C et pas à $0_{3,3}$.
Par élimination, M est nilpotente d'ordre 3.

Prenons U dans K. On traduit : $C.U = 0_3$.
On veut montrer $M.U \in K$, c'est à dire $C.(M.U) = 0_3$.
On calcule : $C.(M.U) = M^2.M.U = M.M^2.U = M.C.U = M.0_3 = 0_3$.

Remarque : Sur ce type de démonstration le prof de maths vous dira « il suffit de se laisser porter ».
Et il aura du mal à saisir que vous n'arriviez pas à prendre des initiatives là dessus et à trouver un début de chemin.
Et certains élèves continueront à réclamer : « on fait quoi, qu'est ce qu'il y a ici comme méthode à appliquer systématiquement ? ».

Prenons V dans I. On l'écrit $V = C.U$.
On veut montrer : $M.V \in I$, c'est à dire $M.U = C.W$ pour un w bien choisi.
On écrit $M.V = M.(C.U) = M.(M^2.U) = M^3.U = M^2.(M.U) = C.(M.U)$.
Il suffit de poser $W = M.U$ et c'est fini.

Remarque : Cette fois, pour l'élève qui a besoin qu'on lui donne des points de méthode, le prof de maths dire
« prends le temps d'écrire ce que tu veux obtenir ; et ce que tu veux obtenir n'est pas une égalité, c'est des variables dans différents rôles ; bref, des maths, pas du calcul ».

Ceci va-t-il nous permettre de trouver M ?
On a déjà $M.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour un certain α.
Mais on voudra aussi $M^2.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = C.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans K.
Ceci ne nous laisse pas le choix : $\alpha = 0$.

Et on a aussi $M.\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta.\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma.\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $M.\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta'.\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma'.\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour la stabilité de K.
Puis on exige $M^2.\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C.\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et aussi $M^2.\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C.\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On ouline, on mouline... Et on y arrive.

Mais en fait, le mieux est de « diagonaliser » C ou plutôt de la trigonaliser.

C s'écrit $P.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Et il suffit de prendre $M = P.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.P^{-1}$.

On trouve $M = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 19 \\ 1 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 — Une matrice à coefficients modulo 7. — D.S.06

Les puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ auront toutes des coefficients positifs et ne pourront pas donner $0_{3,3}$... si on est dans $\mathbb{R}$.
Mais on a le droit de se plonger dans $(\mathbb{F}_7, +, .)$ pour l'addition et la multiplication modulo 7.

Et là, tout va bien, il suffit de calculer M^2 et M^3 (on sait que son ordre ne dépassera pas 3) :

M	M^2
$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 41 & 30 & 4 \\ 30 & 45 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Devait on tout calculer à la main, et face à $\begin{pmatrix} 266 & 336 & 49 \\ 336 & 315 & 42 \\ 49 & 42 & 14 \end{pmatrix}$ se demander « ce sont tous des multiples de combien ? ».
Non, évidemment. On est matheux et pas....
On se dit qu'il faut montrer que M est nilpotente. Son déterminant vaudra donc 0 (et sa trace aussi, puisque M sera semblable à J_3).
On doit donc avoir $-63 = 0$ et $7 = 0$. On n'a plus le choix. C'est 7.
Et on calcule donc tout de suite « modulo 7 », dernière ligne des calculs matriciels.

Maintenant qu'elle est nilpotente d'ordre 3, il faut trouver une matrice P vérifiant $M.P = P.J_3$.
Et en écrivant $(U|V|W)$ la matrice P coupée en colonnes : $(M.U|M.V|M.W) = (V|W|0_3)$.

On résout donc déjà $M.W = 0_3$: $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c \\ c' \\ c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

C'est assez direct : $c + 2.c'' = 0$ et $6.c + 3.c' = 0$. Les vecteurs sont les multiples de $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ par exemple.

Remarque : Vous n'avez pas le même vecteur mais un de ses multiples ? C'est pareil.
Sauf si ledit multiple est 0_3, n'abusons pas, on veut une base à la fin !

On résout ensuite $M.V = W$: $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b \\ b' \\ b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Une solution est $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ (on se fixe $z = 0$ et c'est direct, par conditions nécessaires/vérification).

Remarque : ...mais on a d'autres solutions avec $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha.\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, comprenez vous pourquoi ?
Et comprenez vous pourquoi elles ne changent rien au fait de trouver une base à la fin ?

On termine avec $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ par exemple.

Remarque : | La difficulté : penser à découper le problème plutôt que de chercher tout de suite les neuf coefficients de P
prendre l'initiative de choisir une des composantes à chaque fois, car les systèmes sont dégénérés,
le prof le comprend,
l'élève qui le comprend mérite tout de suite l'étoile

On résume et vérifie : $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

C'est fait !

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 Une matrice 5 sur 5. **D.S.06**

M	M^2	M^3
$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On n'a pas eu à aller trop loin, elle est nilpotente d'ordre 3.
Il suffit de prendre ensuite un vecteur U vérifiant $M^2.U \neq 0$ et la famille $(U,\ M.U,\ M^2.U)$ sera libre.
On sait qu'ensuite $(U,\ M.U,\ M^2.U,\ M^3.U)$ sera liée à cause d'un vecteur nul.
Le premier vecteur de base ne convient pas (image tout de suite nulle).

Le second vecteur de base convient : $(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$: cette famille est libre et engendre un espace de dimension 3.
Et les suivants sont nuls.

Dans le rôle de V, il faut un vecteur tel que V soit non nul sinon espace de dimension 0
$M.V$ non nul sinon espace de dimension 1
$M^2.V$ nul sinon dimension 3 car il nous fait le même coup que U

Le dernier vecteur de base convient : $(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots)$.

On montre que la famille $(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ est libre et forme une base de $(\mathbb{R}^5, +, .)$.
Il suffit de calculer son déterminant relatif à la base canonique . Ah non, raté.

Mais il faut aussi que

$((rg(M^n))_{n\in\mathbb{N}}$est la suite $(rg(I_5),\ rg(M),\ rg(M^2),\ rg(M^3),\ rg(M^4), \ldots)$.
Déjà, elle est nulle à partir d'un moment, puisque les colonnes de M^3 sont toutes nulles. Elles n'engendrent qu'un espace de dimension 0.

M^0	M	M^2	M^3
$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&-1&2&-2&-1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&1&-1&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&-1&1&-1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$
5 colonnes libres	3 colonnes indépendantes C_2, C_3 et C_5 par exemple	1 seule colonne	rien
rang=5	rang=3	rang=1	rang=0

La suite demandée est $(5,\ 3,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ldots)$.

Pour une suite $(6, 4, 2, 0, 0, 0\ldots)$, la maytrice doit être de format 6, puisque le premier terme de la suite est le rang de la matrice unité. Pour qu'il vaille 6, il faut quand même qu'elle ait six colonnes.
Il doit rester dans M cinq colonnes indépendantes. On peut en avoir une nulle.
Puis dans M^2 il n'en reste que 3, puis une, puis plus rien. Comme pour la matrice précédente, mais avec un peu plus de termes encore au départ.
Ajoutons une colonne et une ligne. Et surtout, jouons sur des matrices comme J_3 et autres.

M^0	M	M^2	M^3
$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$
rang=6	rang=4	rang=2	rang=0

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 — Partitions. — D.S.06

n	0	1	2	3	4
Γ_n	?	$\{[1]\}$	$\{[2],\ [1,1]\}$	$\{[3],\ [2,1],\ [1,1,1]\}$	$\{[4],\ [3,1],\ [2,2],\ [2,1,1],\ [1,1,1,1]\}$
$Card(\Gamma_n)$	1	1	2	3	5

Il suffit de découper au cas par cas.
Au passage, on traite $y_{n,1} = n$.
Si la suite commence par 1, les autres termes sont plus petits que 1 (décroissante)
et strictement positifs
ils valent 1
il en faut n.
L'unique solution est $[1,\ 1,\ldots 1]$ et $y_{n,1} = 1$.

Pour n égal à 5 on avance pas à pas :

$y_{5,1}$	$y_{5,2}$	$y_{5,3}$	$y_{5,4}$	$y_{5,5}$
$[1,1,1,1,1]$	et $[2,1,1,1]$ $[2,2,1]$	et $[3,1,1]$ $[3,\ 2]$	et $[4,\ 1]$	et $[5]$
1	3	5	6	7
$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$

Les matrices en bas sont des cadeaux. C'est pour ce qu'on attendait au sujet Centrale-Supelec.
Et plus lisibles :

$y_{5,1}$	$y_{5,2}$	$y_{5,3}$	$y_{5,4}$	$y_{5,5}$
$[1,1,1,1,1]$	et $[2,1,1,1]$ $[2,2,1]$	et $[3,1,1]$ $[3,\ 2]$	et $[4,\ 1]$	et $[5]$
1	3	5	6	7
$\begin{pmatrix}0&&&&\\&0&&&\\&&0&&\\&&&0&\\&&&&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&&&\\1&0&&&\\&&0&&\\&&&0&\\&&&&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&0&&&\\1&0&&&\\&&0&0&\\&&1&0&\\&&&&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&&\\1&0&0&&\\0&1&0&&\\&&&0&\\&&&&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&0&0&&\\1&0&0&&\\0&1&0&&\\&&&0&0\\&&&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&0&\\1&0&0&0&\\0&1&0&0&\\0&0&1&0&\\&&&&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$

Si on connaît toutes les partitions de n vérifiant $\alpha_1 \leqslant n-1$, que nous manque-t-il pour passer à $y_{n,n}$?
Il manque les éventuelles suites vérifiant $\alpha_1 = n$. Il n'y en a qu'une : $[n]$ (la somme vaut n, il n'y a rien à ajouter).
On a donc $y_{n,n} = y_{n,n-1} + 1 = y_{n,n-1} + y_{0,0} = y_{n,n-1} + y_{n-n,min(n,n-n)}$.

Passons à la formule générale $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,min(j,n-j)}$.
n est fixé. On connaît le nombre de partitions de premier terme inférieur ou égal à $j-1$: $y_{n,j-1}$
et on veut le nombre de partitions de premier terme inférieur ou égal à j.
Il nous manque donc juste celles de premier terme$j$. Elles sont de la forme $[j,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ldots]$.
Si on regarde juste $[\alpha_2,\ \alpha_3,\ldots]$ [2] : les termes sont des entiers qui vont en décroissant
leur somme vaut $n-j$
le premier terme est plus petit que j
On en a$y_{n-j,j}$ a priori.

Si l'on prend la formule récursive $\forall\ 2 \leqslant j \leqslant n,\ y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,min(j,n-j)}$ et la condition d'arrêt $y_{n,1} = 1$, on applique le programme en deux temps :

```
def y(n j) :
....if j < 2 :
.......return(1)
....return(y(n,j-1)+y(n-j,min(j,n-j))

def Partition(n) :
....return(Partitions(n, n))
```

Il fallait penser à créer les $y_{n,j}$ et à les utiliser pour finalement calculer $y_{n,n}$ (puisque c'est lui le cardinal de Γ_n).

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
$j=0$							
$j=1$	1	1	1	1	1	1	1
$j=2$		2	2	3	3	4	4
$j=3$			3	4	5	7	8
$j=4$				5	6	9	11
$j=5$					7	10	12
$j=6$						11	14
$j=7$							15

Même sans avoir traité les autres questions, en utilisant la formule « type Pascal plus compliqué », on remplit le tableau.
Par exemple : $y_{6,3} = y_{6,2} + y_{3,3}$.

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 — Matrices strictement triangulaires. **D.S.06**

La définition des E_i^k donne bien des matrices, de par le format étrange choisi :

2. L.pop(0) dira le Pythoniste

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ce sont des colonnes d'un seul terme qui tombent sur des lignes d'un seul terme.

Le vrai format est ici « n sur n ». Et comme ce sont toujours des 0 qui tombent sur des 0
ou des 0 sur des 1
ou des 1 sur des 0
tous les termes sont nuls.
Sauf un en colonne k et ligne i dans $U_i.^t(U_k)$.
On reconnaît les matrices de la base canonique de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$.

Le calcul $E_i^k.E_p^q$ donne encore moult 0 tombant sur des 0 et seulement quelques 1 qui peuvent se retrouver face à face.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$E_3^2.E_1^3 = 0_{3,3}$	$E_3^2.E_2^3 = E_3^3$

Une narration confiante mais mal étayée dira qu'on a presque toujours la matrice nulle sauf quand c'est le 1 de la bonne colonne qui tombe sur la bonne ligne.
Et pour ce faire, il faut avoir $k = p$.
Et dans ce cas, la matrice retrouvée est E_i^q.

Mais proprement ? Justement, les U_i sont là pour ça, avec l'associaitivité du produit matriciel.
$E_i^k.E_p^q = (U_i.^t(U_k)).(U_p.^t(U_q) = U_i.(^t(U_k).U_p).^t(U_q)$ colonne$\times$ligne $\times$ colonne $\times$ ligne
Mais au milieu, le produit $(^t(U_k).U_p)$ donne un réel : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ par exemple.
C'est en fait le produit scalaire des deux vecteurs.

Si k n'est pas égal à p, ce produit scalaireest nul	Si k est égal à p, ce produit scalaire vaut 1
exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$E_i^k.E_p^q = U_i.0.^t(U_q) = 0.U_i.^t(U_q) = 0_{n,n,}$	$E_i^k.E_p^q = U_i.1.^t(U_q) = U_i.^t(U_q) = E_i^q$

On résume :

$k \neq p$	$k = p$
$E_i^k.E_p^q = 0_{n,n,}$	$E_i^k.E_k^q = E_i^q$

T_0 est engendré par les matrices E_i^k avec i strictement plus petit que k :

E_1^2	E_1^3		jusqu'à	E_1^n
	E_2^3	E_2^4	jusqu'à	E_2^n
		$\ddots$	$\dots$	$\vdots$
				E_{n-1}^n

Comme les E_i^ksont indépendantes (base, canonique ou non), la dimension est « le nombre d'éléments de la famille » : $(n-1) + (n-2) + \ldots + 1$ ce qui fait ici $\frac{n.(n-1)}{2}$.

Les éléments de T_0 sont de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ 0 & 0 & a_2^3 & a_2^4 \\ 0 & 0 & 0 & a_3^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour T_1, on exige $i < k - 1$. On en perd une partie. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1^3 & a_1^4 \\ 0 & 0 & 0 & a_2^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Puis, T_2 repousse un peu plus loin la « diagonale » $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Et T_3 est réduit au seul vecteur nul. Logique.

Dans T_j, pour chaque valeur de k, i peut prendre $k-j-1$ valeurs.
Le nombre de vecteurs de la famille $(E_i^k \mid i+j<k)$ est donc une somme des $k-j$ pour k qui bouge (j est fixé).

Mais k doit bouger pour imposer à i de rester quand même positif $\sum_{k=n}^{j+1}(k-j-1)$.

On réindexe, et on trouve $\dfrac{(n-j).(n-j-1)}{2}$.

Evidemment, pour j trop grand, il ne reste plus aucun couple possible, et la dimension vaut 0.

Quand on multiplie ces matrices triangulaires, il est normal de voir les 0 gagner du terrain :
$$\begin{pmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ 0 & 0 & a_2^3 & a_2^4 \\ 0 & 0 & 0 & a_3^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1^3 & b_1^4 \\ 0 & 0 & 0 & b_2^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1^2.b_2^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Mais il faut le faire avec rigueur.
On prend A dans T_j : $A = \sum_{i+j<k} \alpha_i^k.E_i^k$
et B dans T_q : $B = \sum_{p+q<r} \beta_p^r.E_p^r$.
On les multiplie entre elles : $A.B = \sum_{i,k,p,r} \alpha_i^k.\beta_p^r.E_i^k.E_p^r$.
Dans cette somme, il y a une condition : $i+j<k$ et $p+q<r$ (j et q sont fixés).
On simplifie les $E_i^k.E_p^r$ en des $0_{n,n}$, ou E_i^r suivant qu'on a ou non $k=p$.
Il reste une somme $A.B = \sum_{i,k,p,r} \alpha_i^k.\beta_p^r.E_i^r$ avec condition $\begin{array}{ccccc} i & + & j & < & k \\ p & + & q & < & r \\ k & = & p & & \end{array}$.
Il ne reste donc que des E_i^r avec $i+j+p+q<k+r$ et donc $i+j+q<r$ en simplifiant par k.
On reconnaît la définition d'un élément de T_{j+q}.

Si on prend A dans T_j son carré est déjà dans $T_{2.j}$, son cube dans $T_{3.j}$ et ainsi de suite. Elle finit par arriver dans $\{0_{n,n}\}$.