| $\mathcal{M}$ | $\mathcal{P}$ | $\mathcal{S}$ | $\mathcal{I}$ | 2 | VENDREDI 12 MARS |
|---|---|---|---|---|---|
| LYCEE CHARLEMAGNE 2020/2021 | | | | | D.S.07 |

Ces trois problèmes viennent du concours E3A. A vous de retrouver la filière de chacun (MP/PC/PSI)

---

$\diamond 0 \diamond$ Soit $n$ donné dans $\mathbb{N}^*$. Montrez que la suite $\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k}\right)_p$ est croissante et divergente. 2 pt.

$\diamond 1 \diamond$ Déduisez qu'il existe $Min\left\{q \geqslant n \mid \sum_{k=n}^{q} \frac{1}{k} > 1\right\}$, qu'on notera alors $a_n$. 2 pt.

$\diamond 2 \diamond$ Calculez $a_1$, $a_2$ et $a_3$. 2 pt.

$\diamond 3 \diamond$ Écrivez un script Python qui pour $n$ donné calcule $a_n$. 2 pt.

$\diamond 4 \diamond$ Montrez que la suite $(a_n)$ est croissante, divergente. 2 pt.

$\diamond 5 \diamond$ Montrez pour tout $n$ supérieur ou égal à 2 : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} < 1$ et $\sum_{k=0}^{2.n-2} \frac{1}{n+k} > 1$. 3 pt.

$\diamond 6 \diamond$ Pour tout $n$, on pose $u_n = \frac{a_n}{n}$. Montrez que $(u_n)$ est bornée. 2 pt.

$\diamond 7 \diamond$ Montrez pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ : $1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}$. 2 pt.

$\diamond 8 \diamond$ Montrez pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ : $1 - \frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1$. 3 pt.

$\diamond 9 \diamond$ Montrez que $(u_n)$ converge et donnez sa limite. 2 pt.

---

$\spadesuit 0 \spadesuit$ $n$ est un entier naturel donné, on pose $E = \mathbb{R}_{2.n}[X]$. Donnez sa dimension et sa base canonique (degrés croissants). 1 pt.

$\spadesuit 1 \spadesuit$ $a$ est un réel. Pour tout $P$ de $E$, on définit $\phi_a(P) = \frac{1-4.X^2}{4}.P'(X) + a.X.P(X)$. Pour quelles valeurs de $a$, $\phi_a$ est elle un endomorphisme[1] de$(E,+,.)$ ? 3 pt.

$\spadesuit 2 \spadesuit$ Désormais, on fait ce choix sur $a$. Donnez l'image de chaque vecteur de la base canonique. 1 pt.

$\spadesuit 3 \spadesuit$ Ajustez $\alpha$ et $\beta$ pour que $\left(\frac{2.X+1}{2}\right)^\alpha.\left(\frac{2.X-1}{2}\right)^\beta$ soit dans $E$ et soit vecteur propre de $\phi_a$. 3 pt.

$\spadesuit 4 \spadesuit$ Donnez le spectre de $\phi_a$ et donnez pour chaque valeur propre une base du sous-espace propre. 2 pt.

$\spadesuit 5 \spadesuit$ Donnez le spectre de $(\phi_a + n.Id_E)^2$ (le carré, c'est une composition, on est d'accord). 2 pt.

$\spadesuit 6 \spadesuit$ Donnez le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 3 pt.

---

I∼0) $Q$ est un polynôme de degré $n$ de racines $\alpha_1$ à $\alpha_n$ (complexes, distinctes ou non), s'écrivant $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k.X^k$. Pour tout de $\mathbb{N}^*$, on pose $T_k = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i)^k$ (et $T_0 = n$). Pour tout $i$, on pose $Q_i(X) = b_n.\prod_{\substack{j \neq i \\ j \leqslant n}} (X - \alpha_j)$. Montrez que $Q'$ est une combinaison linéaire des $Q_i$ que vous déterminerez. 2 pt.

I∼1) Montrez : $Q_i(X) = \frac{Q(X) - Q(\alpha_i)}{X - \alpha_i}$ et déduisez : $Q_i(X) = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{k=r}^{n} b_k.(\alpha_i)^{k-r}\right).X^r$. 3 pt.

I∼2) Déduisez pour tout $r$ entre 1 et $n$ : $r.b_r = \sum_{j=0}^{n-r} b_{r+j}.T_j$. 3 pt.

I∼3) Soit $k$ entre 1 et $n-1$, exprimez $T_k$ en fonction de $T_0$, $T_1$ jusqu'à $T_{k-1}$ et des coefficients de $Q$. 1 pt.

---

1. application linéaire d'un espace dans lui même

I∼4) Montrez pour $k$ supérieur ou égal à $n$ : $\sum_{j=0}^{n} b_j.T_{k-n+j} = 0$. $\boxed{\text{2 pt.}}$ Exprimez alors $T_k$ à l'aide de $T_{k-n}$, jusqu'à $T_{k-1}$ et des coefficients de $Q$. $\boxed{\text{1 pt.}}$

---

II∼0) $A$ est une matrice de format $n$ sur $n$ à coefficients réels, ayant $n$ valeur propres deux à deux distinctes $\lambda_1$ à $\lambda_n$. On pose alors $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ et on le développe en $X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k.X^k$, et on pose $S_k = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i)^k$ pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$. On définit le système $(\Sigma)$ d'inconnues $u_1$ à $u_n$ : $S_1 + u_1 = 0$ et $\forall k \in [2,\ n],\ S_k + u_1.S_{k-1} + u_2.S_{k-2} + \ldots + u_{k-1}.S_1 + k.u_k = 0$. Montrez qu'il admet une unique solution dans $\mathbb{R}^n$. $\boxed{\text{1 pt.}}$

II∼1) Vérifiez : $u_1 = a_{n-1}$ et $u_2 = a_{n-2}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

II∼2) En utilisant la partie précédente, montrez que $(a_{n-1},\ a_{n-2}, \ldots a_0)$ est solution du système. $\boxed{\text{2 pt.}}$

II∼3) Concluez. $\boxed{\text{1 pt.}}$

---

III∼0) $(B_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est la suite de matrices et $(d_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ la suite de réels définies par

$$\left\{ \begin{array}{rccc} & d_1 = -Tr(A) & et & B_1 = A + d_1.I_n \\ \forall k \in [2, n], & k.d_k = -Tr(B_{k-1}.A) & et & B_k = B_{k-1}.A + d_k.I_n \end{array} \right| .$$

Le temps de cette question : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminez les suites $(B_k)$ et $(d_k)$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

III∼1) Le temps de cette question, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminez les suites $(B_k)$ et $(d_k)$, et donnez le polynôme caractéristique de $A$. $\boxed{\text{4 pt.}}$

III∼2) On revient aux formules générales ; montrez : $\forall k \in [1,\ n],\ \sum_{i=1}^{k} d_i.A^{k-i} = B_k - A^k$. $\boxed{\text{3 pt.}}$[2]

III∼3) Montrez : $\forall k \in [2, n],\ , -k.d_k = Tr(B_k) - n.d_k\ et\ d_k = -\frac{1}{k}.\Big(Tr(A^k) + \sum_{i=1}^{k-1} d_i.Tr(A^{k-i})\Big)$. $\boxed{\text{3 pt.}}$

III∼4) Prouvez : $\forall k \in [1,\ n],\ d_k = a_{n-k}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

III∼5) Déterminez $B_{n-1}$ puis $B_n$. Que venez vous de démontrer ? $\boxed{\text{3 pt.}}$

III∼6) Écrivez un script Python qui prend en entrée $A$ (liste de liste) et calcule les coefficients de son polynôme caractéristique (liste). $\boxed{\text{4 pt.}}$

---

Et parce que SCT me dit « ils sont mauvais en maths, ils ne savent pas dériver »[3]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| calculer $f'(0)$ et $f''(0)$ | $f = \theta \longmapsto \theta.e^{\sin(\theta)}$ | $f = x \longmapsto \dfrac{x}{3.x^2 + 2.x - 3}$ | $f = t \longmapsto Arctan(1 + e^t)$ | $\boxed{\text{6 pt.}}$ |



2. pas de récurrence, pensez à remplacer $d_i.A^{k-i}$ par $d_i.I_n.A^{k-i}$
3. ce à qoi je réponds que vous êtes mauvais parce que vous ne savez pas raisonner et savoir qui sont vos variables ; dériver, on verra plus tard, à quoi bon calculer si vous ne raisonnez pas juste

| $\mathcal{M}$ | $\mathcal{P}$ | $\mathcal{S}$ | $\mathcal{I}$ | 2 | CORRECTION |
|---|---|---|---|---|---|
| LYCEE CHARLEMAGNE 2020/2021 | | | | | D.S.07 |

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 — Jeu sur la série harmonique. — D.S.07

On va se simplifier la vie en posant $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n$ : $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

On rappelle que c'est une suite croissante ($H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1}$) divergente.

Classique : Pour la divergence de $(H_n)$ on peut comparer avec l'intégrale $1 + \int_1^n \frac{dt}{t}$
ou faire un raisonnement par l'absurde : si $(H_n)$ convergeait vers $\alpha$ alors $H_{2.n} - H_n$convergerait vers 0,
or, $H_{2.n} - H_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2.n} \geqslant n.\frac{1}{2.n}$.
En tant que suite croissante, elle n'avait que deux possibilités : converger ou diverger vers $+\infty$.
Par élimination, elle diverge vers $+\infty$.

$\boxed{0}$ Pour $n$ fixé, on a alors $\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k}\right)_p$ qui croît : $\sum_{k=0}^{p+1} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+p+1} > 0$
qui diverge vers $+\infty$ : c'est $H_{n+1} - H_{n-1}$ avec $H_{n-1}$ qui ne dépend pas de $p$ [a]

[a]. jamais je n'arriverai à la qualifier de « constante »

---

$\boxed{1}$ Pour $n$ donné, l'ensemble $\left\{q \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=n}^{q} \frac{1}{k} > 1\right\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide.

Pourquoi non vide ? Par divergence : $\forall A,\ \exists G_A,\ \forall q,\ \left(q \geqslant G_A \Rightarrow \sum_{k=n}^{q} \frac{1}{k} \geqslant 1\right)$. On l'applique à $A = 2$. A partir du rang $A_2$, $q$ est dans l'ensemble. Et peut être même avant.
On pouvait aussi raisonner par l'absurde.

Elle admet donc un plus petit élément (l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$ est un bon ordre
toute partie de $\mathbb{N}$ non vide a un plus petit élément) .

En fait, $a_n$ est le premier entier $n + p$ tel que $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}$ dépasse 1.

---

$\boxed{2}$ Pour $n$ égal à 1, 2 et 3, on cherche à la main :

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{1} \leqslant 1$ | $a_1 \neq 1$ |
| $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1$ | $a_1 = 2$ |

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{2} \leqslant 1$ | $a_2 \neq 2$ |
| $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \leqslant 1$ | $a_2 \neq 3$ |
| $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$ | $a_2 \neq 4$ |

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{3} \leqslant 1$ | $a_3 \neq 3$ |
| $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \leqslant 1$ | $a_3 \neq 4$ |
| $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} \leqslant 1$ | $a_3 \neq 5$ |
| $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20} \leqslant 1$ | $a_3 \neq 6$ |
| $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{153}{140} > 1$ | $a_3 = 7$ |

$\boxed{\diamond\ 10\ \diamond}$ $\boxed{3}$ On va partir de la somme vide et de l'indice $n$.

On va avancer, calculer la somme cumulée $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{q}$, jusqu'à ce qu'elle dépasse 1.

```
def Suite(n) :
....a = float(n) #on évite les divisions euclidiennes
....S = 1/n
....while S <= 1 :
........a += 1
........S += 1/a
....return(a)
```

Pour information :

| $n$ | 3 | 4 | 5 | 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 | 5000 | 10000 | 100000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 7 | 10 | 12 | 26 | 135 | 270 | 1358 | 2717 | 13590 | 27181 | 271827 |

Deux remarques : Moi, je vois un truc... je me dis que le nombre $e$ n'est pas loin !
Et ensuite, je n'ai pas confiance dans le calcul approché. Je suis matheux, pas physicien.
Je veux des formules exactes.

```
def Suite(n) :
....a = n #des entiers
....Numer, Denom = 1, n
....while Numer <= Denom :
........a += 1
........Numer, Denom = a*Numer+Denom, a*Denom #calcul dans Q
....return(a)
```

On a en effet : $\frac{Numer}{Denom}+\frac{1}{a}=\frac{a*Numer+Denom}{a*Denom}$.
Mais cette procédure est bien plus longue à faire tourner... On fait des calculs sans simplifier les fractions...
Il faut donc ajouter deux lignes :

```
def Suite(n) :
....a = n
....Numer, Denom = 1, n
....while Numer <= Denom :
........a += 1
........Numer = a*Numer+Denom
........Denom = a*Denom
........pgcd = gcd(Numer, Denom)
........Numer = Numer//pgcd
........Denom = Denom//pgcd
....return(a)
```

```
def gcd(a, b) :
....while b > 0 :
.........a, b = b, a%b
....return(a)
```

Le grand classique du calcul de p.g.c.d. de deux entiers.

---

$\boxed{4}$ La divergence de $(a_n)$ est acquise par $a_n \geqslant n$ (par construction) et théorème du gendarme.

Pour la croissance, on se donne $n$, et on définit $a_n$ et $a_{n+1}$.
Par définition de $a_n$ : $\boxed{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{a_n-1}\leqslant 1 \;\Big|\; \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{a_n-1}+\frac{1}{a_n}>1}$

On enlève le terme du début et on ajoute celui de la fin : $\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{a_n-1}+\frac{1}{a_n}\leqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{a_n-1}\leqslant 1$ (le terme ajouté est plus petit que celui enlevé).

Ceci dit qu'au rang $a_n$, la somme $\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{a_n-1}+\frac{1}{a_n}$ n'a pas encore dépassé 1.

C'est donc plus tard qu'elle dépassera 1 : $\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{a_n-1}+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_n+1}+\ldots+\frac{1}{a_{n+1}}>1$.
$a_{n+1}$ est donc strictement plus grand que $a_n$.

---

$\boxed{5}$ Les majorations $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}<1$ et $\sum_{k=0}^{2.n-2}\frac{1}{n+k}>1$ sont obtenues en comptant les termes.

Dans $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}$ il y a $n$ termes. Le plus grand est le premier (décroissance) :

on a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}=n.\frac{1}{n}=1$.

Et dans la somme, il y a au moins un terme strictement plus petit que $\frac{1}{n}$. La majoration est stricte.

| | |
|---|---|
| Erreur classique : | Dire « il y a un $n$, donc je fais une récurrence ».<br>C'est une preuve directe. Et la récurrence n'est pas la meilleure piste.<br>En effet, passer de $n$ à $n+1$ n'est pas évident sous la forme $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}$. Le nombre de termes change, mais les termes changent aussi... |

Pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{2.n-2}\frac{1}{n+k}$ on minore chaque terme par le dernier : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2.n-2}\frac{1}{n+k}>\sum_{k=0}^{2.n-2}\frac{1}{3.n-2}\geqslant\frac{2.n-1}{3.n-2}$. Pas gagné...

Et si on faisait une comparaison série intégrale : $\displaystyle\frac{1}{n+k}=\int_{n+k}^{n+k+1}\frac{dt}{n+k}\geqslant\int_{n+k}^{n+k+1}\frac{dt}{t}$.

On somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2.n-2}\frac{1}{n+k}\geqslant\sum_{k=0}^{2.n-2}\int_{n+k}^{n+k+1}\frac{dt}{t}=\int_{n}^{3.n-1}\frac{dt}{t}=\ln\Big(\frac{3.n-1}{n}\Big)$.

On aimerait avoir $\ln\Big(\dfrac{3.n-1}{n}\Big)\geqslant 1$ c'est à dire $3.n-1>e.n$.

C'est acquis pour $n$ plus grand que 2.

La correction officielle du Concours E3A propose une récurrence.

Pour $n$ égal à 2, on a $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1$.

On se donne $n$, on pose $\displaystyle S_n=\sum_{k=0}^{2.n-2}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{3.n-2}$ et on suppose $S_n>1$.

On calcule par relation de Chasles :

$$S_{n+1}=\sum_{k=0}^{2.n}\frac{1}{n+1+k}=\sum_{k=1}^{2.n+1}\frac{1}{n+k}=S_n-\frac{1}{n}+\frac{1}{3.n-1}+\frac{1}{3.n}+\frac{1}{3.n+1}=S_n+\frac{2}{(3.n-1).3.n.(3.n+1)}>S_n>1.$$

---

$\boxed{6}$ A quoi sert ce qui précède ? A encadrer $a_n$.

Au rang $2.n-1$ la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{2.n-1}\frac{1}{k}$ est toujours plus petite que 1 : $2.n-1<a_n$.

Au rang $3.n-2$ la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{3.n-2}\frac{1}{k}$ a dépassé 1 (peut-être depuis longtemps) : $a_n\leqslant 3.n-1$.

On a encadré $a_n$. On divise par $n$ (positif) : $2\leqslant\dfrac{a_n}{n}\leqslant 3$.

La suite $(u_n)$ est bornée.

---

$\boxed{7}$ Dans $1<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\leqslant 1+\frac{1}{a_n}$, il y a $1<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{a_n}$ qui est dans la caractérisation de $a_n$ : la somme a dépassé 1.

Mais comme c'est le premier indice où on dépasse 1, ce n'était pas le cas avant :

$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{a_n-1}\leqslant 1$.

Ajoutons $\frac{1}{a_n}$ de chaque côté et on a $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\leqslant 1+\frac{1}{a_n}$.[4]

---

$\boxed{8}$ Dans $\displaystyle 1-\frac{1}{n}\leqslant\sum_{k=n+1}^{a_n}\frac{1}{k}\leqslant\int_n^{a_n}\frac{dt}{t}\leqslant\sum_{k=n}^{a_n-1}\frac{1}{k}\leqslant 1$, la première inégalité s'écrit $\displaystyle 1\leqslant\sum_{k=n}^{a_n}\frac{1}{k}$.

On l'a déjà.

La seconde est une comparaison série intégrale :

$$\sum_{k=n+1}^{a_n}\frac{1}{k}\leqslant\sum_{k=n+1}^{a_n}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{k}\leqslant\sum_{k=n+1}^{a_n}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t}=\int_n^{a_n}\frac{dt}{t}.$$

4. le sujet de E3A écrivait parfois les sommes sous cette forme malpropre, avec des points de suspension au lieu de sigma

On refait une comparaison série intégrale[5] :

$$\int_n^{a_n} \frac{dt}{t} = \sum_{k=n}^{a_n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=n+1}^{a_n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{a_n - 1}.$$

Et la dernière a été démontrée à la question précédente.

---

$\boxed{9}$ On a prouvé $1 - \frac{1}{n} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leqslant 1$ (en effaçant des inégalités inutiles).

La membre de gauche tend vers 1. par encadrement, $\int_n^{a_n} \frac{dt}{t}$ converge vers 1.

Mais l'intégrale vaut $\ln\left(\frac{a_n}{n}\right)$ c'est à dire $\ln(u_n)$.

Puisque $\ln(u_n)$ converge vers 1, par continuité de l'exponentielle, $u_n$converge vers $e$, comme conjecturé dans le tableau numérique plus haut.

| $\mathcal{M}$ | $\mathcal{P}$ | $\mathcal{S}$ | $\mathcal{I}$ | 2 | Endormorphisme sur un espace de polynômes. | **D.S.07** |
|---|---|---|---|---|---|---|

La base canonique de $(\mathbb{R}_{2.n}[X], +, .)$ est $(1, X, X^2, \ldots X^{2.n})$. Elle est faite de $2.n + 1$ vecteurs.
$(E, +, .)$ est donc de dimension $2.n + 1$.

Trop gentil : | Un cadeau cette question. mais j'ai peur d'avoir quand même des réponses erronées...

---

Que $\phi_a$ soit linéaire, c'est acquis. On se donne $P$ et $Q$ et $\lambda$ :

$$\begin{array}{llll} \phi_a : & P & \longmapsto & \frac{1-4.X^2}{4}.P'(X) + a.X.P(X) \\ & Q & \longmapsto & \frac{1-4.X^2}{4}.Q'(X) + a.X.Q(X) \\ & P+Q & \longmapsto & \frac{1-4.X^2}{4}.(P'(X) + Q'(X)) + a.X.(P(X) + Q(X)) \\ & \lambda.P & \longmapsto & \frac{1-4.X^2}{4}.\lambda.P'(X) + a.X.(\lambda.P(X)) \end{array}$$

On a bien $\phi_a(P + Q) = \phi_a(P =) + \phi_a(Q)$ et $\phi_a(\lambda.P) = \lambda.\phi_a(P)$.

Mais il manque « de $(E, +, .)$ dans lui même ».

Certes, par construction $\frac{1-4.X^2}{4}.P'(X) + a.X.P(X)$ est encore un polynôme.

Mais que est son degré ?

Si $P$ est de degré $d$, $P'$ est de degré $d - 1$ ,

$\frac{1-4.X^2}{4}.P'(X)$ est de degré $d + 1$

$a.X.P(X)$ est aussi de degré $d + 1$

$\phi_a(P)$ est donc au maximum de degré $d + 1$.

Mais ceci peut nous faire sortir de $(E, +, .)$, avec un degré qui atteindrait $2.n + 1$.

Il ne faut pas.

Les seuls polynômes posant problème sont ceux de degré $2.n$ (augmenter d'une unité le degré d'un polynôme de degré inférieur ou égal à $2.n - 1$ ne pose pas de problème).

Prenons $P$ de terme dominant $c.X^{2.n}$ (en fait, il suffirait même de prendre par linéarité $P = X^{2.n}$ tout court).

On regarde le terme de plus haut de degré de son image, ou pour le moins le terme de degré $2.n + 1$. Il faut qu'il parte.

$$\frac{1-4.X^2}{4}.(c.X^{2.n} + \ldots)' + a.X.(c.X^{2.n} + \ldots) = \frac{1-4.X^2}{4}.(2.n.c.X^{2.n-1} + \ldots)' + a.X.(c.X^{2.n} + \ldots)$$

Le terme à éliminer est donc $-2.n.c.X^{2.n+1} + a.c.X^{2.n+1}$ , le seul à ne pas être dans $E$.

Il faut et il suffit d'avoir choisi $a = 2.n$.

5. ne pas se contenter de l'argument, en rédiger au moins une et citer la décroissance de $t \longmapsto t^{-1}$

| $a \neq 2.n$ | $a = 2.n$ |
|---|---|
| $\phi_a(X^{2.n}) \notin E$ | $\phi_a(X^k) \in E$ pour tout $k$ de 0 à $2.n$<br>$\phi_a(X^k) = (2.n-k).X^{k+1} + \frac{k}{4}.X^{k-1}$ |
| pas endomorphisme | endomorphisme |

Le polynôme $\Big(\frac{2.X+1}{2}\Big)^{\alpha}.\Big(\frac{2.X-1}{2}\Big)^{\beta}$ est dans $(E, +, .)$ si et seulement si $\alpha$ et $\beta$ sont entiers, et vérifient $\alpha + \beta \leqslant 2.n$.

Ensuite, on dérive ce polynôme qu'on va noter $P_{\alpha,\beta}$ :

$$P'_{\alpha,\beta} = \alpha.\Big(\frac{2.X+1}{2}\Big)^{\alpha-1}.\Big(\frac{2.X-1}{2}\Big)^{\beta} + \beta.\Big(\frac{2.X+1}{2}\Big)^{\alpha}.\Big(\frac{2.X-1}{2}\Big)^{\beta-1}$$

$$\frac{(2.X-1).(1+2.X)}{4}.P'_{\alpha,\beta} = \alpha.\Big(\frac{2.X+1}{2}\Big)^{\alpha}.\Big(\frac{2.X-1}{2}\Big)^{\beta+1} + \beta.\Big(\frac{2.X+1}{2}\Big)^{\alpha+1}.\Big(\frac{2.X-1}{2}\Big)^{\beta}$$

(mais oui ! $1 - 4.X^2 = (1-2.X).(1+2.X)$)

$$\frac{(1-2.X).(1+2.X)}{4}.P'_{\alpha,\beta} = -\Big(\frac{2.X+1}{2}\Big)^{\alpha}.\Big(\frac{2.X-1}{2}\Big)^{\beta}.\Big((\alpha+\beta).X + \frac{\beta-\alpha}{2}\Big)$$

$$\phi_a(P_{\alpha,\beta}) = P_{\alpha,\beta}.\Big(-\alpha-\beta+\tfrac{\alpha-\beta}{2}\Big) + 2.n.X.P_{\alpha,\beta}$$

Trop fort : $\boxed{\phi_a(P_{\alpha,\beta}) = P_{\alpha,\beta}.\Big((2.n-\alpha-\beta).X + \tfrac{\alpha-\beta}{2}\Big)}$

On veut un vecteur propre : le coefficient de proportionnalité $\phi_a(P) = \lambda.P$ doit être un réel, et pas un polynôme.
On va donc imposer $2.n - \alpha - \beta = 0$. C'est cohérent avec $P_{\alpha,\beta} \in E$.
La somme d'entiers naturels $\alpha + \beta$ prend la valeur $2.n$ pour $2.n+1$ couples : $(0,\ 2.n)$, $(1,\ 2.n-1)$, jusqu'à $(2.n,\ 0)$.

Précisément : $(k,\ 2.n-k)$ pour $k$ de 0 à $2.n$. $\boxed{\phi_a(P_{k,2.n-k}) = P_{\alpha,\beta}.\Big(0.X + \tfrac{k-(2.n-k)}{2}\Big)}$

| entier | 0 | 1 | ... | $k$ | ... | $2.n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| polynôme | $\Big(\frac{2.X-1}{2}\Big)^{2.n}$ | $\Big(\frac{2.X+1}{2}\Big).\Big(\frac{2.X-1}{2}\Big)^{2.n-1}$ | | $\Big(\frac{2.X+1}{2}\Big)^{k}.\Big(\frac{2.X-1}{2}\Big)^{2.n-k}$ | | $\Big(\frac{2.X+1}{2}\Big)^{2.n}$ |
| formule | $\phi_a(P_{0,2.n}) = -n.P_{0,2.n}$ | $\phi_a(P_{1,2.n-1}) = (-n+1).P_{1,2.n-1}$ | | $\phi_a(P_{k,2.n-k}) = (k-n).P_{k,k-2.n}$ | | $\phi_a(P_{2.n,0}) = (2.n-n).P_{2.n,0}$ |
| valeur propre | $-n$ | $1-n$ | | $k-n$ | | $n$ |

On a trouvé $2.n+1$ valeur propres. Comme la dimension de l'espace vectoriel.
Pas besoin d'en chercher plus (un endomorphisme ne peut avoir plus de valeurs propres que le degré du polynôme caractéristique...).

Et pour chaque valeur propre, on a un vecteur propre donnant une base du sous-espace propre<.
Pardon, on a un vecteur propre non nul dans le sous-espace propre.

Serait il possible que certains de ces sous-espaces propres soit de dimension plus grande que 1 ? On aurait alors trop de vecteurs propres linéairement indépendants (plus que la dimension de l'espace).

Bref, on peut diagonaliser $\phi_a$.

---

Partons de $\phi_a(P_{k,2.n-k}) = (k-n).P_{k,2.n-k}$ et ajoutons :
$\phi_a(P_{k,2.n-k}) + n.P_{k,2.n-k} = (k-n).P_{k,2.n-k} + n.P_{k,2.n-k} = k.P_{k,2.n-k}$.
On a donc $(\phi_a + n.d_E)(P_{k,2.n-k}) = k.P_{k,2.n-k}$.

On recommence :

$$\begin{aligned}
(\phi_a + n.d_E)^2(P_{k,2.n-k}) &= (\phi_a + n.d_E)((\phi_a + n.d_E)(P_{k,2.n-k})) \\
(\phi_a + n.d_E)^2(P_{k,2.n-k}) &= (\phi_a + n.d_E)(k.(P_{k,2.n-k})) \\
(\phi_a + n.d_E)^2(P_{k,2.n-k}) &= k.(\phi_a + n.d_E)(P_{k,2.n-k}) \\
(\phi_a + n.d_E)^2(P_{k,2.n-k}) &= k^2.P_{k,2.n-k})
\end{aligned}$$

On a des vecteurs propres, de valeurs propres $k^2$ pour $k$ de 0 à $2.n$ (0, 1, 4, 9, 16, 25 jusqu'à $(2.n)^2$).
On a $2.n+1$ valeurs propres, on ne va pas en trouver plus.

---

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est un cadeau, qui ne nécessite aucun calcul (mais si vous visez la PSI, vous pouvez vous ruer sur les calculs sans chercher le rapport avec ce qui précède, et vous aurez les points[6]).
On a juste pris $n = 2$. Et cette matrice est celle de $\phi_4$ sur la base canonique.
Ses valeurs propres sont celles de $\phi_4$ c'est à dire $-2$, $-1$, 0, 1 et 2.
Le polynôme caractéristique est celui dont ce sont les racines : $(-2 - X).(-1 - X).(0 - X).(1 - X).(2 - X)$.
On le simplifie : $\boxed{X.(X^2 - 1).(X^2 - 4)}$

| $\mathcal{M}$ | $\mathcal{P}$ | $\mathcal{S}$ | $\mathcal{I}$ | 2 | Des polynômes, des sommes de puissances des racines. | D.S.07 |
|---|---|---|---|---|---|---|

Chaque $Q_i$ est de degré $n - 1$. Comme $P'$.
On part de $P(X)$ sous la forme factorisée $b_n.\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ et on dérive ce produit de $n$ termes.[7]
La généralisation de $(u.v)' = u'.v + u.v'$ et $(u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$ donne
$\boxed{P'(X) = Q_1(X) + Q_2(X) + \ldots + Q_n(X)}$
(chaque fois qu'on dérive un des monômes et un seul, on a $(X - \lambda_i)' = 1$).

Je n'ai pas retrouvé le rapport du jury. Je me demande si ici ils attendaient une récurrence sur $n$. Si tel est le cas, la voici.
$b_2.(X - \alpha_1).(X - \alpha_2)$ se dérive bien en $b_2.(X - \alpha_1) + b_2.(X - \alpha_2)$.
Supposons, pour un $n$ donné que $\prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)$ se dérive en $\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{k\neq i\\ k\leqslant n}}(X - \alpha_k)$
dérivons alors $\prod_{k=1}^{n+1}(X - \alpha_k)$ en l'écrivant $\left(\prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)\right).(X - \alpha_{n+1})$
on obtient $\left(\prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)\right)'.(X - \alpha_{n+1}) + \left(\prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)\right).1$
on le développe en $\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{k\neq i\\ k\leqslant n}}(X - \alpha_k).(X - \alpha_{n+1})\right) + \left(\prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)\right)$
et c'est $\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{k\neq i\\ k\leqslant n+1}}(X - \alpha_k)\right) + \left(\prod_{k\leqslant n}(X - \alpha_k)\right)$

*Pardon ? Vous n'avez pas reconnu qu'on vous demandait de prouver*
$\Big((X - \alpha_1).(X - \alpha_2).(X - \alpha_3)\ldots(X - \alpha_n)\Big)' =$
$(X - \alpha_2).(X - \alpha_3)\ldots(X - \alpha_n) + (X - \alpha_1).(X - \alpha_3)\ldots(X - \alpha_n) + (X - \alpha_1).(X - \alpha_2)\ldots(X - \alpha_{n-1})$
*Que puis je alors faire pour vous ? Vous dire de continuer à travailler la physique, la SII, le français, l'anglais et même la chimie...*

---

$Q_i(X)$ est un produit où il manque $(X - \alpha_i)$. Et le quotient $\dfrac{Q(X) - Q(\alpha_i)}{X - \alpha_i}$ est égal à $\dfrac{Q(X)}{X - \alpha_i}$ puisque chaque $\alpha_i$ est racine. Et le dénominateur vient simplifier un terme au numérateur.
L'égalité est un cadeau.

| A éviter ici : | écrire $P(X) = b_n.\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ puis diviser par $X - \alpha_i$.<br>En quoi c'est absurde ! Mais en tout. Qui est $i$ ? Il est fixé pour le dénominateur. tandis qu'il est variable de sommation au numérateur.<br>Aucun sens ! |
|---|---|

6. sauf si vous visez la PSI, vous ruez sur les calculs mais ne savez pas calculer
7. qui a oublié $b_n$ en facteur ? le polynôme n'était pas unitaire...

On voit une formule avec des $b_k$ ? C'est donc qu'on écrit $Q(X)=\sum\limits_{k=0}^{n} b_k.X^k$.

On a donc $Q_i(X)=\dfrac{Q(X)-Q(\alpha_i)}{X-\alpha_i}=\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} b_k.(X^k-(\alpha_i)^k)}{X-\alpha_i}=\sum\limits_{k=0}^{n} b_k.\dfrac{X^k-(\alpha_i)^k}{X-\alpha_i}$.

On rappelle alors la formule de la série géométrique : $\dfrac{a^k-b^k}{a-b}=\sum\limits_{p=0}^{k-1} a^p.b^{k-1-p}$. Celle que les élèves confondent avec la formule du binôme alors qu'il n'y a même pas de coefficient binomial... [8].

On remplace $Q_i(X)=\sum\limits_{k=0}^{n} b_k.\Big(\sum\limits_{p=0}^{k-1}(\alpha_i)^{k-1-p}.X^p\Big)$

On fusionne en un seul signa : $Q_i(X)=\sum\limits_{0\leqslant p<k\leqslant n}^{n} b_k.(\alpha_i)^{k-1-p}.X^p$.

On permute les sommes : $Q_i(X)=\sum\limits_{p=0}^{n-1}\Big(\sum\limits_{k=p+1}^{n} b_k.(\alpha_i)^{k-1-p}.X^p\Big)$.

On décale les indices ($r=p+1$) : $Q_i(X)=\sum\limits_{r=0}^{n}\Big(\sum\limits_{k=r}^{n} b_k.(\alpha_i)^{k-p}.X^{r-1}\Big)$.

C'est la formule demandée : $Q_i(X)=\sum\limits_{r=0}^{n} X^{r-1}.\Big(\sum\limits_{k=r}^{n} b_k.(\alpha_i)^{k-r}\Big)$.

Un exemple :

$$
\begin{aligned}
&P(X)=(X-a).(X-b).(X-c)=X^3-s.X^2+d.X-p.\\
&P_1(X)=(X-b).(X-c)=\frac{(X-a).(X-b).(X-c)}{X-a}\\
&P_1(X)=\frac{P(X)}{X-a}=\frac{P(X)-P(a)}{X-a}\\
&P_1(X)=\frac{(X^3-s.X^2+d.X-p)-(a^3-s.a^2+d.a-p)}{X-a}\\
&P_1(X)=\frac{X^3-a^3}{X-a}-s.\frac{X^2-a^2}{X-a}+d.\frac{X-a}{X-a}\\
&P_1(X)=(X^2+a.X+a^2)-s.(X+a)+d\\
&P_1(X)=X^2+(a-s.).X+(a^2-s.a+d)
\end{aligned}
$$

---

On a une formule pour chaque $Q_i(X)$ : $Q_i(X)=\sum\limits_{r=0}^{n} X^{r-1}.\Big(\sum\limits_{k=r}^{n} b_k.(\alpha_i)^{k-r}\Big)$.

Et une pour la somme des $Q_i(X)$ : $P'(X)=\sum\limits_{i=1}^{n} Q_i(X)$.

Il n'y a qu'à reporter : $P'(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{r=0}^{n} X^{r-1}.\Big(\sum\limits_{k=r}^{n} b_k.(\alpha_i)^{k-r}\Big)\Big)$

puis permuter les sommes (indépendantes) : $P'(X)=\sum\limits_{r=0}^{n} X^{r-1}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{k=r}^{n} b_k.(\alpha_i)^{k-r}\Big)\Big)$.

Or, si on repart de $P(X)=\sum\limits_{r=0}^{n} b_r.X^r$,

on dérive en $P'(X)=\sum\limits_{r=0}^{n} r.b_r.X^{r-1}=\sum\limits_{r=1}^{n} r.b_r.X^{r-1}$( comment avez vous dérivé la constante).

On compare $P'(X)=\sum\limits_{r=0}^{n} X^{r-1}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{k=r}^{n} b_k.(\alpha_i)^{k-r}\Big)\Big)=\sum\limits_{r=1}^{n} r.b_r.X^{r-1}$.

On identifie pour chaque valeur de $r$ (mot clef : base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$) :
$\forall r,\ \Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{k=r}^{n} b_k.(\alpha_i)^{k-r}\Big)\Big)=r.b_r$.

8. c'est $a^2-b^2=(a-b).(a+b)$ puis $a^3-b^3=(a-b).(a^2+a.b+b^2)$ et ainsi de suite

On permute les sommes (encore une !) : $\forall r,\ \sum\limits_{k=r}^{n}\Big(b_k.\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i)^{k-r}\Big)\Big) = r.b_r$.

La somme des puissances des racines ! $\forall r,\ \sum\limits_{k=r}^{n} b_k.T_{k-p} = r.b_r$.

Et si cette fois on décalait les sommes : $\forall r,\ \sum\limits_{j=0}^{n-r} b_{j+r}.T_j = r.b_r$.

Un exemple : on a obtenu $(X-b).(X-c) = P_1(X) = X^2 + (a-s.).X + (a^2 - s.a + d)$
de même $(X-a).(X-c) = P_2(X) = X^2 + (b-s.).X + (b^2 - s.b + d)$
et aussi $(X-a).(X-b) = P_3(X) = X^2 + (c-s.).X + (c^2 - s.c + d)$
On somme : $P'(X) = 3.X^2 + X^2.(a-s+b-s+c-s) + (a^2 - s.a + d + b^2 - s.b + d + c^2 - s.c + d)$.
On a aussi $P'(X) = 3.X^2 - 2.s.X + d$.
On compare : $3 = 3$
$-2.s = a - s + b - s + c - s$
$d = a^2 - s.a + d + b^2 - s.b + d + c^2 - s.c + d$
On récapitule : $a + b + c = s$
$a^2 + b^2 + c^2 - s.(a+b+c) + 2.d = 0$
On les avait déjà, mais en taille plus grande, ça va ouvrir sur des formules plus folles...

On a la possibilité de calculer les $T_k$ de proche en proche : $T_k = \dfrac{1}{b_n}.\Big((n-k).b_{n-k} - \sum\limits_{j=0}^{k-1} b_{n-k+j}.T_j\Big)$

pour $k$ entre 0 et $n-1$ car $\sum\limits_{j=0}^{k} b_{n-k+j}.T_j = (n-k).b_{n-k}$.

---

Que se passe-t-il à partir de $n$ ?
Les $\alpha_i$ sont solutions de l'équation : $b_n.(\alpha_j)^n + \ldots + b_0 = 0$.
On écrit même pour tout $i$ : $\sum_{j=0}^{n} b_j.(\alpha_i)^j = 0$.
On multiplie par $(\alpha_i)^{k-n}$ (exposant positif, on se moque de savoir si $\alpha_j$ est nul ou pas) : $\sum_{j=0}^{n} b_j.(\alpha_i)^{k-n+j} = 0$.

On somme ces $n$ relations (une par racine) : $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n} b_j.(\alpha_i)^{k-n+j} = n.0$.

On permute les sommes (indépendantes) : $\sum\limits_{j=0}^{n} b_j.\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i)^{k-n+j}\Big) = 0$.

On isole celui qui nous intéresse : $T_k = \dfrac{1}{b_n}.\sum\limits_{j=0}^{n-1} b_{k-n+j}.T_{k-n+j}$ (en notant qu'on a bien $k \geqslant n$, les indices sont positifs).

Rappel : On l'a fait plusieurs fois en cours avec le degré 3 :
on note $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ les racines de $X^3 - s.X^2 + d.X - p$.
On sait donc $\alpha^3 = s.\alpha^2 - d.\alpha + p$
$\beta^3 = s.\beta^2 - d.\beta + p$
$\gamma^3 = s.\gamma^2 - d.\gamma + p$
On somme : $S_3 = s.S_2 - d.S_1 + 3.p$. Cohérent si en plus on a posé $S_0 = 3$.
Mais on écrit aussi $\alpha^4 = s.\alpha^3 - d.\alpha^2 + p.\alpha$
$\beta^4 = s.\beta^3 - d.\beta^2 + p.\beta$
$\gamma^4 = s.\gamma^3 - d.\gamma^2 + p.\gamma$
d'où de nouvelles relations de proche en proche.

On extrait : $T_k = -\dfrac{1}{b_n}.\sum\limits_{j=0}^{n-1} b_j.T_{k-n-j} = \dfrac{1}{b_n}.\sum\limits_{p=k-n}^{k-1} b_{k-n+p}.T_p$ si vous y tenez.

Bilan : Les formules de Viète nous ont donné les sommes de produits de racines à l'aide des coefficients du polynôme.
Et ici, on sait calculer de proche en proche les somme de puissances des racines.
Et il y a un basculement à partir de l'exposant $n$ inclus dans le type de formule.
Sauf si on arrive à prendre de bonnes notations pour $b_{n+1}$ et les suivants (nuls au delà du degré du polynôme) dt les $b_{-1}$, $b_{-2}$ nuls aussi.
La formule complète devient $\boxed{b_n.T_k = (n-k).b_{n-k} - \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-k+j}.T_j}$

On va ensuite faire un aller retour sur ces formules,
mais surtout, on va les exploiter pour calculer les coefficients du polynôme caractéristique...

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 Un système. **D.S.07**

$P = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ est (au signe près, et encore, ça dépend des conventions) le polynôme caractéristique de la matrice.
Si $A$ se diagonalise en $A = \mathbb{P}.D.\mathbb{P}^{-1}$ avec $\mathbb{P}$ inversible (et c'est le cas, car on a supposé les racines distinctes, et VanDerMonde nous aide), alors chaque somme $\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i)^k$ est la trace de $D^k$ et donc, par similitude, la trace de $A^k$.

Le système $S_1 + u_1 = 0$ et $\forall k \in [2,\ n],\ S_k + u_1.S_{k-1} + u_2.S_{k-2} + \ldots + u_{k-1}.S_1 + k.u_k = 0$ est triangulaire et permet de calculer ligne par ligne les composantes de la solution :

$$\begin{array}{ll} u_1 + S_1 = 0 & u_1 = -S_1 \\ S_2 + u_1.S_1 + 2.u_2 = 0 & u_2 = \dfrac{-u_1.S_1 - S_2}{2} \\ S_3 + u_1.S_2 + u_2.S_1 + 3.u_2 = 0 & u_3 = \dfrac{-u_2.S_1 - u_1.S_2 - S_3 - S_2}{3} \end{array}$$

et ainsi de suite

Attention : Ne soyez pas naïf. la question ne demande pas de résoudre le système.
Elle demande juste de prouver qu'il a une unique solution. Et si on regarde bien, on a toute la suite de la partie pour trouver la forme des solutions.
On est en maths. L'intitulé précis des questions a son importance.

Plus proprement, on écrit le système sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ S_1 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ S_2 & S_1 & 3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n-1} & S_{n-2} & S_{n-3} & \ldots & n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On fait passer de l'autre côté, on multiplie par l'inverse de la matrice triangulaire et on a une unique solution.

Mot-clef : Système de Cramer.

---

Ce n'est pas par hasard que j'ai écrit les premières formules.
Déjà, $u_1 = -S_1$. Mais $S_1$ est la somme des racines. C'est donc le coefficient de $X^{n-1}$, au signe près (il est pas sot, Viète, et le polynôme est unitaire).
On a donc bien $u_1 = a_{n-1}$.

Mais ensuite, $u_2 = \dfrac{-u_1.S_1 - S_2}{2} = \dfrac{(S_1)^2 - S_2}{2}$.
Le carré de la somme moins la somme des carrés. C'est le double produit.
On divise par 2. On récupère donc la somme $\sum_{i<j} \lambda_i.\lambda_j$. Et là, c'est le coefficient du terme en $X^{n-2}$ (qu'est ce qui nous sert, Viète).

Remarque : Et si on s'y prend avec courage, on peut montrer que $u_3 = \dfrac{-u_2.S_1 - u_1.S_2 - S_3 - S_2}{3}$ va donner la somme $\sum_{i<j<k} \lambda_i.\lambda_j.\lambda_k$.

Mais la chose ne nous est pas demandée, car on va trouver les formules sans effort.

---

Qu'a-t-on prouvé dans la partie précédente : $(n-k)$.

Finalement, c'est juste histoire de dire « dans un cas, ce sont des $a_i$ et des $S_k$
dans l'autre cas, ce sont $b_i$ des et des $T_k$
mais finalement ce sont les mêmes.

---

On a donc bien une solution en prenant $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}$.

Et comme on a prouvé que le système n'a qu'une solution...

Bilan : Tout ça pour raconter : les deux suites vérifient la même relation qui permet de retrouver les termes de proche en roche.

On a donc prouvé ici les formules dites « de Newton », qui prolongent ce Viète.

Exemple :

| degré 2 : | de degré 3 : | de degré 3 : |
|---|---|---|
| $X^2 - s.X + p$ | $X^3 - s.X^2 + d.X - p$ | $X^4 - s.X^3 + d.X^2 - t.X + p$ |
| $\alpha + \beta = S$ et<br>$\alpha.\beta = p$ | $\alpha + \beta + \gamma = s$ et<br>$\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma = d$<br>$\alpha.\beta.\gamma = p$ | $\alpha + \beta + \gamma + \gamma = S$ et<br>$\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma + \ldots + \gamma.\delta = d$<br>$\beta.\gamma.\delta + \alpha.\gamma.\delta + \alpha.\beta.\delta + \alpha.\beta.\gamma = t$<br>$\alpha.\beta.\gamma.\delta = p$ |
| $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2.p$ | $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = s^2 - 2.p$<br>$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^3 = s.S_2 - d.S_1 + 3.p$ | $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = s^2 - 2.p$<br>$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = s.S_2 - d.S_1 + 3.p$<br>$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 = s.S_3 - d.S_2 + t.S_1 - 4.p$ |

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 — Construction d'une suite de matrices. — **D.S.07**

L'algorithme est celui de LeVerrier[9]. Appelé aussi « de Faddeev et Sominskii ».
Il va nous donner « au compte goutte » les coefficients du polynôme caractéristique.

| | | |
|---|---|---|
| $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ | $d_1 = -Tr(A) = -4$ | $B_1 = A + d_1.I_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ |
| $B_1.A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ | $d_2 = -\frac{1}{2}.Tr(B_1.A) = 1$ | $B_2 = B_1.A + d_2.I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ |

Juste savoir si vous savez appliquer une consigne, proprement, pas à pas.
Est ce compliqué ? En tout cas, c'est un bon test.

9. Urbain Jean Joseph LeVerrier, 1811-1877, son père vendit sa maison pour qu'il fasse des études (Louis le Grand, Polytechnique), chimiste, prof de maths à Stanislas, prof de chimie à l'X, astronome qui découvrit Neptune en étudiant les défauts de trajectoire d'Uranus ; publie l'algorithme ici indiqué dans son mémoire à l'Académie des Sciences (1840) consacré justement à Uranus et Neptune...

| | | |
|---|---|---|
| $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $d_1 = -Tr(A) = -6$ | $B_1 = A + d_1.I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ |
| $B_1.A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$<br>$B_1.A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -3 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$ | $d_2 = -\dfrac{1}{2}.Tr(B_1.A) = 11$ | $B_2 = B_1.A + d_2.I_3$<br>$B_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ |
| $B_2.A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$<br>$B_2.A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ | $d_3 = -\dfrac{1}{3}.Tr(B_2.A) = 9$ | $B_3 = B_2.A + d_3.I_3$<br>$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |

Il doit se passer quelquechose ! On trouve à la fin la matrice nulle.
Et la colonne du milieu donne les coefficients du polynôme caractéristique !
On vérifie en effet $\chi_A(X) = X^3 - 6.X^2 + 11.X + 9$.

---

On doit établir $\forall k \in [1,\ n],\ B_k = A^k + \sum_{i=1}^{k} .d_i.A^{k-i}$ pour tout $k$.
On commence par $k = 1$. A-t-on bien $d_1.A^{1-1} = B_1 - A^1$ ? Oui. C'est la définition de $B_1 = A + d.I_n$.

On se donne $k$, on calcule : $\sum_{i=1}^{k} d_i.A^{k-i} = \sum_{i=1}^{k} d_i I_n..A^{k-i}$

On remplace : $\sum_{i=1}^{k} .d_i.A^{k-i} = \sum_{i=1}^{k} (B_i - B_{i-1}.A)..A^{k-i}$

ou plutôt $\sum_{i=1}^{k} .d_i.A^{k-i} = d_1.A^{k-1} + \sum_{i=2}^{k} (B_i - B_{i-1}.A)..A^{k-i}$ par cohérence d'exposant

On développe $\sum_{i=1}^{k} .d_i.A^{k-i} = d_1.A^{k-1} + \sum_{i=2}^{k} (B_i.A^{k-i} - B_{i-1}.A^{k-i+1})$.
Vous l'écrivez avec des points de suspension ?
$d_1.A^{k-1} + (B_2.A^{k-2} - B_1.A^{k-1}) + (B_3.A^{k-3} - B_2.A^{k-2}) + (B_4.A^{k-4} - B_3.A^{k-3}) + \dots$
Il faut rendre ceci rigoureux. On pose $C_i = B_i.A^{k-i}$ et on télescope :
$\sum_{i=1}^{k} .d_i.A^{k-i} = d_1.A^{k-1} + \sum_{i=2}^{k} (C_i - C_{i-1}) = d_1.A^{k-1} + C_k - C_1 = d_1.A^{k-1} + B_k - B_1.A^{k-1}$.

On a notre $B_k$. Et si on regroupait : $\sum_{i=1}^{k} .d_i.A^{k-i} = B_k - (B_1.A^{k-1} - d_1.A^{k-1}) = B_k - (B_1 - d_1.I_n).A^{k-1}$.
Et cette fois encore $(B_1 - d_1.I_n) = A$.
On a bien $\sum_{i=1}^{k} d_i.A^{k-i} = B^k - A^k$.

| Remarque : | Je n'ai pas essayé la récurrence.<br>Mais peut être passait elle bien... |
|---|---|

---

On tente ensuite d'enchaîner les questions.
On a prouvé $B_k = A^k + \sum_{i=1}^{k} d_i.A^{k-i}$.
Et on doit calculer $Tr(B_{k-1}.A)$ sachant qu'on pose aussi $B_k = B_{k-1}.A + d_k.I_n$.
On a donc $Tr(B_{k-1}.A) = Tr(B_k + d_k.I_n) = Tr(B_k) - n.d_k$.
Comme on pose $d_k = \dfrac{-1}{k}.Tr(B_{k-1}.A)$, nous voilà avec $-k.d_k = Tr(B_k) + n.d_k$.

On remplace : $-k.d_k = Tr\Big(A^k + \sum_{i=1}^{k} d_i.A^{k-i}\Big) + n.d_k$.
On sépare par linéarité de la trace : $-k.d_k = Tr(A^k) + \sum_{i=1}^{k} d_i.Tr(A^{k-i}) - n.d_k$.

Le dernier terme s'en va, justement : $-k.d_k = Tr(A^k) + \sum_{i=1}^{k-1} d_i.Tr(A^{k-i})$.

---

Mais qui sont les $Tr(A^k)$ dans nos formules ?

On l'a déjà dit, on diagonalise $A$ (valeur propres distinctes). On a $Tr(A^k) = Tr(D^k) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i)^k = S_k = T_k$ suivant nos notations...

Et donc, nos $d_k$ vérifient le même système de calcul de proche en proche que les coefficients du polynôme caractéristique.

Ce sont donc eux.

On ne l'a pas vu venir, mais en tournant autour de ces formules, on peut le résumer ainsi :

| | | |
|---|---|---|
| les formules de Viète | donnent des relations | entre les coefficients du polynôme caractéristique $b_k$ et les sommes de produits de valeurs propres $\sigma_i$ |
| les formules de Newton | donnent les relations | entre les sommes de produits de valeurs propres $\sigma_i$ et les sommes de puissances des valeurs propres $S_j$ |
| la diagonalisation | donne les relations | entre les sommes de puissances des valeurs propres $S_j$ et les traces des puissances de $A$ |
| l'algorithme de le Verrier | donne des relations | entre les traces des puissances de $A$ et des coefficients $d_i$ |

Mieux encore, on parvient à $B_n = 0_{n,n}$.

Et que dit ceci ? Juste que $A^n + \sum_{j=0}^{n-i} d_i.A^i = 0_{n,n}$.

Et ça, c'est le théorème de Cayley-Hamilton !

---

On regarde de quoi on va avoir besoin. : Produit matriciel.
Combinaison de matrices du type M+d.I_n pour M donnée et d donné.
Trace.

```
def Trace(M) :
....n = len(M)
....T = 0
....for k in range(n) :
........T += M[k][k]
....return(T)
```

Un classique encore.

```
def Produit(M, N) :
....n = len(M)
....P = [[0 for k in range(n)] for in in range(n)]
....for i in range(n) :
........for k in range(n) :
............s = 0
............for j in range(n) :
................s += M[i][k]*N[j][k]
............P[i][k] = s
....return(P)
```

```
def Combi(M, d) :
....n = len(M)
....for k in range(n) :
........M[i][i] += d
....return(M)
```

Et maintenant, on recolle tout.

```
def LeVerrier(A) :
....n = len(A)
....Poly = [1]
....d = -Trace(A)
....B = Combi(A, d)
....Poly.append(d)
....for k in range(2, n+1) :
........B = Produit(B, A)
........d = -Trace(B)/k
........B = Combi(B,d)
........Poly.append(d)
....return(Poly)
```

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 | Dérivation. | D.S.07

| $f = t \longmapsto \theta.e^{\sin(\theta)}$ | $f = x \longmapsto \dfrac{x}{3.x^2+2.x-3}$ | $f = t \longmapsto Arctan(1+e^t)$ |
|---|---|---|
| $e^{\sin(\theta)} + \cos(\theta).\theta.e^{\sin(\theta)}$ | $\dfrac{-3.x^2-3}{(3.x^2+2.x-3)^2}$ | $\dfrac{e^t}{(1+e^t)^2+1}$ |
| $(\theta.\cos^2(\theta) - \theta.\sin(\theta) + 2.\cos(\theta)).e^{\sin(\theta)}$ | $\dfrac{18.x^3+54.x+18}{(3.x^2+2.x-3)^3}$ | $\dfrac{2.e^t - e^{3.t}}{((1+(1+e^t)^2)^2}$ |
| $1$ | $-1/3$ | $1/5$ |
| $2$ | $-4/9$ | $1/25$ |

Mais pour celle du milieu, je ne peux m'empêcher de le ouer matheux : $f(x).(3.x^2+2.x-3) = x$
On dérive : $f'(x).(3.x^2+2.x-3) + f(x).(6.x+2) = 1$.
On recommence : $f''(x).(3.x^2+2.x-3) + 2.f'(x).(6.x+2) + f(x).(6) = 0$.
On calcule en 0 : $-3.f'(0) + 0 = 1$
$-3.f''(0) + 4.f'(0) = 0$. C'est tout !

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 | 76 points | D.S.07