$I.S.01$ - CHARLEMAGNE MPSI**2** | Mardi 11 septembre | ANNEE **12/13** - $I.S.01$

CHARLEMAGNE | **Trigonométrie** | 2012/13 | $I.S.01$

$< \heartsuit(1) >$ Exprimez $\cos(2.\alpha)$ comme polynôme en $\cos(\alpha)$. $\boxed{\text{1 pt.}}$ Exprimez $\cos(4.\alpha)$ comme polynôme en $\cos(\alpha)$. $\boxed{\text{2 pt.}}$ Montrez : $\cos(3.\alpha) = 4.\cos^3(\alpha) - 3.\cos(\alpha)$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$< \heartsuit(2) >$ Montrez que $\cos(\pi/7)$ est une des racines du polynôme $8.X^4 + 4.X^3 - 8.X^2 - 3.X + 1$, noté R. $\boxed{\text{2 pt.}}$
Montrez que si un rationnel positif p/q (avec p et q entiers positifs) est racine de R alors p divise $8.p^4 + 4.p^3.q - 8.p^2.q^2 - 3.p.q$ et q^4. $\boxed{\text{3 pt.}}$ Montrez aussi que q divise $8.p^4$. $\boxed{\text{2 pt.}}$
Déduisez que si p/q est racine de R alors q/p est entier. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$< \heartsuit(3) >$ Montrez que $\cos(\pi/7)$ est irrationnel. $\boxed{\text{2 pt.}}$ Montrez que $\cos(\pi/14)$ est irrationnel. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$< \diamondsuit(1) >$ Ayant constaté que la dérivée de la tangente est positive, le jeune élève de Terminale à qui vous donnez un petit cours de soutien prétend que la tangente est croissante. Prouvez lui qu'il a tort. $\boxed{\text{1 pt.}}$
Il écrit quand même $\tan(x) \leqslant \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Afin de ne pas perdre le revenu lucratif que sont les petits cours que vous lui donnez, trouvez les x pour lesquels il a raison. $\boxed{\text{2 pt.}}$

CHARLEMAGNE | **DIVERS** | 2012/13 | $I.S.01$

$< \diamondsuit(2) >$ Montrez que $\sqrt{8+\sqrt{39}} + \sqrt{8-\sqrt{39}}$ est égal à $\sqrt{26}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$ Simplifiez de même $\sqrt{8+\sqrt{39}} - \sqrt{8-\sqrt{39}}$. $\boxed{\text{1 pt.}}$

$< \clubsuit(1) >$ Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} (-1)^{((-1)^k)}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$ Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} \left((-1)^{-1}\right)^k$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$< \clubsuit(2) >$ Calculez $(-1)^{\sum_{k=0}^{100}(-1)^k}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$ Pouvez vous calculer $(-1)^{\sum_{k=0}^{100} k^{((-1)^k)}}$? $\boxed{\text{2 pt.}}$ ***Si un élève a trouvé le temps ou l'idée de s'aventurer sur** $(-1)^a = (e^{i.\pi})^a = e^{i.a.\pi} = \cos(a.\pi) + i.\sin(a.\pi)$, **je l'expédie tout de suite en Spé ou pour le moins en** 2013 **!***

$< \diamondsuit(3) >$ Donnez un polynôme de degré 4 dont les racines sont les $a.\sqrt{17} + 3.b.\sqrt{2}$ avec a et b décrivant $\{-1, 1\}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$< \spadesuit(1) >$ On définit la suite u par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{2.n} = u_n$ et $u_{2.n+1} = 2.u_n + u_{n+1}$. Calculez u_n pour n de 0 à 10 ainsi que u_{100}. $\boxed{\text{3 pt.}}$ Calculez u_{2^p} pour tout p. $\boxed{\text{2 pt.}}$ Montrez : $u_{2^p-1} = 2^p - 1$ pour tout p entier naturel. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$< \diamondsuit(4) >$ Calculez $\displaystyle\int_1^2 \frac{3.x^2 - 2.x - 12}{x^3 - x^2 - 12.x}.dx$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$I.S.01$ - MPSI2 | 43 points | Année 2012/13 - $I.S.01$

MPSI 2	Suite $u_{2.n}=u_n$ et $u_{2.n+1}=2.u_n+u_{n+1}$.	**I.S.01**

Déjà, la définition de cette suite est cohérente : $u_{2.0}=u_0$ et $u_{2.0+1}=2.u_0+u_1$. C'est quand même ce qu'on peut attendre d'elle...

On calcule ensuite : $u_2=u_1=1$ (par $n=1$) et $u_3=2.u_1+u_2=3$.
On continue : $u_4=u_2=1$ et $u_5=2.u_2+u_3=2.1+3=5$ (cas $n=2$).
On en fait encore un avec $n=3$: $u_6=u_3=3$ et $u_7=2.u_3+u_4=2.3+1=7$.
On complète avec $u_8=u_4=1$ et $u_{10}=u_5=5$ et $u_9=2.u_4+u_5=5$.
On résume avec un tableau :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	0	1	2	3	1	5	3	7	1	7	5

, seule présentation digne d'un étudiant en sciences.
On ne devine pas de formule générale.
Et alors, on n'en demande pas forcément...

On calcule ensuite : $u_{100}=u_{50}=u_{25}$ car 100 est pair, de même que 50.
On écrit ensuite, avec $n=12$: $u_{25}=2.u_{12}+u_{13}$. On a tout de suite $u_{12}=u_6=3$.
On a aussi $u_{13}=2.u_6+u_7=2.3+7=13$.
On peut conclure : $\boxed{u_{100}=19}$
Pour information : $u_{99}=69$ et $u_{101}=89$.

Pour ce qui est de u_{1024} on redescend vite, car on a une puissance de 2 : $u_{1024}=u_{512}=u_{256}=u_{128}=u_{64}=u_{32}=u_{16}=u_8=u_4=u_2=u_1=1$.
Plus généralement, par récurrence sur p : $u_{(2^p)}=1$.
C'est vrai pour $p=0$ (c'est $u_1=1$). Ensuite, si on suppose pour un certain p donné (quelconque) que l'on a $u_{(2^p)}=1$. On applique alors la définition $u_{2.2^p}=u_{2^p}=1$ et on a bien $u_{2^{p+1}}=1$.

On procède ensuite par récurrence aussi pour $u_{2^p-1}=2^p-1$. L'initialisation, c'est $u_0=0$, qui est vrai.
On suppose ensuite pour un entier p donné (quelconque) que l'on a $u_{2^p-1}=2^p-1$ et on calcule :
$u_{2^{p+1}-1}=u_{(2.(2^p-1)+1)}=2.u_{(2^p-1)}+u_{(2^p-1+1)}=2.(2^p-1)+1=2^{p+1}-2+1=2^{p+1}-1$
en utilisant la définition de la suite u pour $n=2^p-1$, puis l'hypothèse de rang p et le résultat établi quelques lignes plus haut.

MPSI 2	Trigonométrie en $\cos(\pi/7)$.	**I.S.01**

On connaît par le cours : $\cos(a+b)=\cos(a).\cos(b)-\sin(a).\sin(b)$ qui donne $\cos(2.\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=2.\cos^2(\alpha)-1$ en ayant remplacé $\sin^2$ par $1-\cos^2$.

En réutilisant ce résultat pour $2.\alpha$ à la place de α, on trouve : $\cos(4.\alpha)=2.\cos^2(2.\alpha)-1=2.(2.c^2-1)^2-1=8.c^4-8.c^2+2-1=8.c^4-8.c^2+1$ en utilisant dès à présent la notation abrégée $c=\cos(\alpha)$.

On a ensuite des choix plus ou moins judicieux pour $\cos(3.\alpha)$.
- $\cos(3.\alpha)=\cos(2.\alpha).\cos(\alpha)-\sin(2.\alpha).\sin(\alpha)=(2.c^2-1).c-(2.s.c).s$ et il n'y a plus qu'à y remplacer s par $1-c^2$.
- $2.\cos(3.\alpha)=e^{3.i.\alpha}+e^{-3.i.\alpha}=(c+i.s)^3+(c-i.s)^3=\dots$ avec la formule du binôme et là encore le remplacement de s^2 par $1-c^2$.
- $\cos(3.\alpha)+\cos(\alpha)=\Big(\cos(2.\alpha).\cos(\alpha)-\sin(2.\alpha).\sin(\alpha)\Big)+\Big(\cos(2.\alpha).\cos(\alpha)+\sin(2.\alpha).\sin(\alpha)\Big)$ et

on remplace $\cos(2.\alpha)$ par $2.c^2 - 1$

• Même démonstration en utilisant directement $\cos(p) + \cos(q) = 2.\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ *(en connaissant un peu plus que le cours de Terminable niveau Bac (à sable), mais quand même...).*

Quel rapport entre $\cos(\pi/7)$ et ce polynôme ? Et quel rapport avec ce qui précède ?

On tente de calculer $R(\cos(\pi/7))$ en regroupant les termes et en utilisant les résultats précédents : $R(\cos(\pi/7)) = R(c) = (8.c^4 - 8.c^2 + 1) + (4.c^3 - 3.c) = \cos(4.\pi/7) + \cos(3.\pi/7)$ en prenant la faible peine de poser ici $c = \cos(\pi/7)$.

Il faudrai prouver (et convaincre le lecteur) que la somme de ces deux cosinus est nulle. Mais si on regarde sur le cercle trigonométrique, on a deux angles dont la somme vaut π. Il nous suffit d'écrire $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ pour θ égal à $3.\pi/7$ (ou $4.\pi/7$, ça revient au même).

Je sais, certains sont obligés de repasser par $\cos(\pi - \theta) = \cos(\pi).\cos(\theta) + \sin(\pi).\sin(\theta)$ pour obtenir la formule $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$. C'est juste parce qu'ils n'ont pas fait de trigonométrie en Terminable... La chose est excusable en début de Sup (et seuls les programmes de Terminable sont à incriminer pour l'instant), mais elle ne le sera plus dans moins d'un mois...

Ayant $R(\cos(\pi/7)) = 0$, on peut conclure que $\cos(\pi/7)$ est bien une des racines de ce polynôme.

On n'a bien sûr pas calculé les racines de ce polynôme, car c'est là chose mal-aisée... et pas du tout la piste que semble sous-entendre l'énoncé.

On suppose à présent qu'un certain rationnel d'écriture irréductible p/q est racine de R. On traduit immédiatement : $R(p/q) = 0$ puis $8.\frac{p^4}{q^4} + 4.\frac{p^3}{q^3} - 8.\frac{p^2}{q^2} - 3.\frac{p}{q} + 1 = 0$

et même $\frac{8.p^4 + 4.p^3.q - 8.p^2.q^2 - 3.p.q^3 + q^4}{q^4} = 0$ en réduisant au dénominateur commun.

On annule le seul numérateur et on isole : $8.p^4 + 4.p^3.q - 8.p^2.q^2 - 3.p.q^3 = -q^4$.

Que p divise le premier membre, c'est normal, puisque ce membre s'écrit $p.(8.p^3 + 4.p^2.q - 8.p.q^2 - 3.q^3)$ avec $8.p^3 + 4.p^2.q - 8.p.q^2 - 3.q^3$ entier.

Que p divise alors q^4, c'est normal, puisque q^4 est juste l'opposé de l'entier calculé juste au dessus.

Mais on a supposé que p et q n'avaient aucun diviseur commun *(écriture irréductible)*. Est ce alors possible que p divise q^4 ? Oui, c'est possible, mais uniquement avec $p = 1$ *(quand on dit "aucun diviseur commun", c'est faux, il y a toujours 1).*

Mais pour p égal à 1, le rationnel q/p est alors un entier.

On ne s'arrête pas en si bon chemin. On remplace p par 1 et on reporte : $8 + 4.q - 8.q^2 - 3.q^3 + q^4 = 0$.

Or, q divise $4.q - 8.q^2 - 3.q^3 + q$ puisque cet entier s'écrit $(4 - 8.q - 3.q^2 + 1).q$. On déduit que q divise 8, exact opposé de cet entier.

Les seules valeurs possibles pour q sont alors 1, 2, 4 et 8.

On les teste une par une.

Aucune ne convient.

Bilan : aucun rationnel positif p/q ne peut être racine du polynôme R.

Pour ceux qui sont intéressé : en n'imposant plus la positivité, le même raisonnement nous permet de retrouver que la seule racine rationnelle négative est -1.

On vient de prouver que le polynôme R n'avait pas de racine rationnelle positive.

Or, $\cos(\pi/7)$ est racine positive du polynôme R.

Le réel positif $\cos(\pi/7)$ est donc "non rationnel".

Tel était le but de la question.

Il contiendra donc peut être des racines carrées désagréables, ou pire encore.

Pour $\cos(\pi/14)$ c'est cadeau. Par un raisonnement par l'absurde.

Si $\cos(\pi/14)$ était un certain rationnel r/s alors $\cos(\pi/7)$ serait le rationnel $2.\cos^2(\pi/14)-1$ d'écriture fractionnaire $\dfrac{2.r^2-s^2}{s^2}$.
C'est le sens qui passe bien : "$\cos(\alpha)$ irrationnel" implique "$\cos(\alpha/2)$ irrationnel".

MPSI 2	L'égalité $\sqrt{8+\sqrt{39}}+\sqrt{8-\sqrt{39}}=\sqrt{26}$.	**I.S.01**

Déjà, le réel du premier membre existe, puisque 8^2 est plus grand que 39. Mais pourquoi se simplifierait il ainsi ? Elevons le au carré pour voir.

On a $\left(\sqrt{8+\sqrt{39}}+\sqrt{8-\sqrt{39}}\right)^2 = (8+\sqrt{39})+(8-\sqrt{39})+2.\sqrt{(8+\sqrt{39}).(8-\sqrt{39})}$ et il reste $16+2.\sqrt{64-39}$. Mais $64-39$ est le caré parfait 5^2.
Il reste donc $\left(\sqrt{8+\sqrt{39}}+\sqrt{8-\sqrt{39}}\right)^2=16+2.5=26$.
Comme les deux membres sont positifs, on passe aux racines directement : $\sqrt{8+\sqrt{39}}+\sqrt{8-\sqrt{39}}=\sqrt{26}$.

Pour ce qui est de la différence, la formule pour $(a-b)^2$ nous conduit à $\left(\sqrt{8+\sqrt{39}}-\sqrt{8-\sqrt{39}}\right)^2=16-2.5=6$. Comme $8+\sqrt{39}$ est plus grand que $8-\sqrt{39}$, on peut conclure par positivité (et croissance de la fonction "racine carrée") : $\sqrt{8+\sqrt{39}}-\sqrt{8-\sqrt{39}}=\sqrt{6}$.

On notera qu'en additionnant, on obtient $\sqrt{26}+\sqrt{6}=\sqrt{32+\sqrt{624}}$.

MPSI 2	Trois sommes telles que $\sum_{k=0}^{100}(-1)^k$.	**I.S.01**

Toutes ces sommes sont construites avec cent un termes (oui, on va de 0 à 100 et pas de 1 à 100).

Dans la première, les cent un termes sont de la forme $(-1)^{(-1)^k}$. Suivant la parité de k ils valent $(-1)^1$ ou $(-1)^{-1}$. C'est ainsi qu'ils valent tous -1.

On a donc : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{k=100}(-1)^{((-1)^k)}=-101}$

La deuxième somme est faite de cent un termes qui valent alternativement 1 et -1, puisque $(-1)^{-1}$ vaut simplement -1.
Les 1 sont majoritaires. D'une voix. La somme $1+(-1)+1+(-1)+\ldots+1$ vaut donc 1 : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{k=100}\left((-1)^{-1}\right)^k=1}$

La dernière somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{100}(-1)^k$ vaut aussi 1. L'entier $(-1)^1$ vaut -1.

Il reste l'étrange somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{100}k^{((-1)^k)}$. Les termes valent k (pour k pair) ou $\dfrac{1}{k}$ pour k impair.
La somme est donc $0+\dfrac{1}{1}+2+\dfrac{1}{3}+4+\dfrac{1}{5}+\ldots+100$.
Si on la sépare en deux, il y a $0+2+4+\ldots+100$ (c'est un entier) et $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{99}$ (ce n'est pas un entier).
Quel sens allez vous alors donner à $(-1)^a$ avec a réel non entier ?

(ici égal à $\dfrac{278112155625848279769567532914226573690621 4}{108938086296425745569584076461425474307 5}$, mais vous le saviez déjà, non ?)
Aucun.
La réponse alors déconcertante à la question de l'énoncé est : $\boxed{\text{“non”}}$.

MPSI 2	La croissance de la tangente.	**I.S.01**

Le théorème “dérivée positive implique application croissante” ne s'applique que sur un intervalle. Or, le domaine de définition de la tangente est une réunion d'intervalles...
La tangente est croissante sur chaque intervalle de son domaine de définition, mais n'est pas globalement croissante.
Il suffit de trouver ensuite un contre-exemple pour tenir une vraie preuve de l'inanité de son affirmation.
On a par exemple $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{3.\pi}{4}$ mais on n'a pas $1 = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$.

On veut quand même voir si l'on a $\tan(x) \leqslant \tan(x + \pi/4)$ pour certains x. En posant $t = \tan(x)$ sur un domaine convenable, on résiut alors l'inéquation $t \leqslant \dfrac{t+1}{1-1.t}$ en utilisant la formule $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}$. On la transforme en $\dfrac{t+1}{1-t} - t \geqslant 0$ et même $\dfrac{t^2+1}{1-t} \geqslant 0$. Le signe d'un quotient vient du signe de chacun de ses facteurs et on résout donc ici : $\tan(x) \leqslant 1$.
On trouve l'intervalle $]-\pi/2, \pi/4[$, du moins, tant qu'on reste entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.
Il convient ensuite de réunir les intervalles qui se déduisent de celui ci par translation de π et on trouve $\bigcup\limits_{k\in} \left] -\dfrac{\pi}{2} + k.\pi, \dfrac{\pi}{4} + k.\pi \right[$.

MPSI 2	Le polynôme de racines $a.\sqrt{17} + 3.b.\sqrt{2}$.	**I.S.01**

Il faut déjà comprendre la question. Qui sont ces quatre réels ? Les deux nombres a et b peuvent prendre deux valeurs chacun : -1 et 1. On a donc quatre réels : $\sqrt{17}+3.\sqrt{2}$, $-\sqrt{17}+3.\sqrt{2}$, $\sqrt{17}-3.\sqrt{2}$ et $-\sqrt{17}-3.\sqrt{2}$.
Ce polynome serait donc $(X-\sqrt{17}-3.\sqrt{2}).(X-\sqrt{17}+3.\sqrt{2}).(X+\sqrt{17}-3.\sqrt{2}).(X+\sqrt{17}+3.\sqrt{2})$.
On peut se contenter du polynôme sous cette forme. Et même le multiplier par $\sqrt{\pi}$.
On développe ce polynôme en $((X-\sqrt{17})^2-18).((X+\sqrt{17})^2-18)$.
On a donc $(X^2-1-2.X.\sqrt{17}).(X^2-1+2.X.\sqrt{17})$ et encore avec la formule $(a+b).(a-b) = a^2-b^2$ on aboutit à $(X^2-1)^2-68.X^2$ qui se développe en $\boxed{X^4-70.X^2+1}$ *(on y aboutit aussi en regroupant de manière différente).*

MPSI 2	Une intégrale.	**I.S.01**

L'intégrale existe, par continuité et parce que le dénominateur ne s'annule ni ne change de signe entre 1 et 2. On identifie ensuite une forme en u'/u qui s'intègre en logarithme. Le résultat est alors $\boxed{\ln(5/3)}$

$I.S.01$	MPSI2	43 points	Année 2012/13	$I.S.01$

Le saviez vous : si on mettait bout à bout les globules rouges de votre sang, on pourrait faire trois fois le tour de la Terre. Et ça ne servirait à rien...

$<\spadesuit(2)>$ On définit toujours la suite u par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{2.n} = u_n$ et $u_{2.n+1} = 2.u_n + u_{n+1}$. Calculez u_{2012}. $\boxed{\text{3 pt.}}$

$<\spadesuit(3)>$ On note σ la permutation $\left(\begin{array}{cccccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f & g & i & l & k & b & h & c & a & j & d & \end{array}\right)$ *(s'il manque quelque-chose, complétez)*. Calculez $\sigma^4(a)$, $\sigma^{12}(k)$ et $\sigma^{23}(f)$. $\boxed{\text{3 pt.}}$

Résolvez $\sigma^n(d) = e$ d'inconnue n dans $\mathbb{N}$. $\boxed{\text{1 pt.}}$ Résolvez le système $\left\{\begin{array}{lcl} \sigma^n(a) & = & g \\ \sigma^n(l) & = & k \end{array}\right.$ d'inconne n dans $\mathbb{N}$. $\boxed{\text{3 pt.}}$

$<\diamondsuit(5)>$ Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{p}.j^k$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{100} \binom{100}{p}.j^k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{p}.j^p$ et 3425^2. $\boxed{\text{4 pt.}}$ (j est le complexe célèbre).

$<\diamondsuit(6)>$ On définit : $f := x \longrightarrow 4.|x-1| - |x+2| - |x-2|$. Représentez graphiquement f sur $[-4, 4]$. $\boxed{\text{3 pt.}}$ Résolvez l'équation $f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{1 pt.}}$ Résolvez l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{1 pt.}}$ Résolvez l'inéquation $2 \leqslant f(x) < 3$ sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$<\clubsuit(3)>$ Vous marchez le long d'une ligne de tramway *(à vitesse constante)*. Une rame vous double toutes les douze minutes, et vous en croisez une toutes les quatre minutes. Qu'en serait il si vous restiez immobile ? *(on fait les hypothèses naturelles : les tramways roulent à la même vitesse constante dans les deux sens, avec la même fréquence...)*. $\boxed{\text{3 pt.}}$

$<\diamondsuit(7)>$ Donnez sous forme développée le polynôme unitaire *(c'est à dire de coefficient dominant 1)* de racines 1, -1, j, $-j$, j^2 et $-j^2$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$<\diamondsuit(8)>$ Donnez sous forme développée le polynôme unitaire de racines -1, j, $-j$, j^2 et $-j^2$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$<\diamondsuit(9)>$ Donnez sous forme développée le polynôme unitaire de racines i, $-i$, $i.j$, $-i.j$, $i.j^2$ et $-i.j^2$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$<\diamondsuit(10)>$ Calculez $\displaystyle\int_{\theta=\pi/3}^{\theta=\pi/2} \frac{d\theta}{\sin(\theta)}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$ Un élève affirme : "la primitive de $\dfrac{1}{\sin}$ est $t \longrightarrow \dfrac{1}{2}.\ln\left(\dfrac{1-\cos(t)}{1+\cos(t)}\right)$", prétendant l'avoir lu dans un livre. A-t-il vraiment tort ? Rectifiez ses éventuelles erreurs. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$<\heartsuit(4)>$ Démontrez : $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$ et $\sin(a+b).\sin(a-b) = \sin^2(a) - \sin^2(b)$ pour tout couple de réels (a, b). $\boxed{\text{2 pt.}}$

$<\heartsuit(5)>$ Calculez $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$. $\boxed{\text{2 pt.}}$ Calculez ensuite $\tan(\pi/24)$ *(pour avoir tous les points, vous devrez me donner les réponses avec des dénominateurs entiers...)*. $\boxed{\text{3 pt.}}$

MPSI 2 — La suite $u_{2.n} = u_n$ et $u_{2.n+1} = 2.u_n + u_{n+1}$. — **I.S.2**

On n'a guère le choix, pour calculer $u(2012)$ il faut en revenir à la définition. Mais il va y avoir un peu de travail, puisque certaines fois, il faudra remonter calculer deux valeurs qui pourront elle même necessiter le calcul de deux valeurs et ainsi de suite. C'est ce que l'on appelle du calcul récursif.
$u_{2012} = u_{1006} = u_{503} = 2.u_{251} + u_{252}$ ça commençait trop bien.
On remonte d'une part $u_{251} = 2.u_{125} + u_{126} = 2.u_{125} + u_{63}$ et d'autre part $u_{252} = u_{126} = u_{63}$.
On a donc besoin de u_{125} (qui vaut $2.u_{62} + u_{63}$) et de u_{63} (qui vaut $2.u_{31} + u_{32}$). L'un d'entre eux est gentil, c'est u_{32} qui remonte jusqu'à u_1 et vaut donc 1. Pour les autres, il faut remonter encore.
Ensuite, il faut repartir et reporter.
Tous calculs faits : $u_{125} = 125$, $u_{63} = 63$ et au final $\boxed{u_{2012} = 689}$

MPSI 2 — Formule $\sin(a+b).\sin(a-b) = \sin^2(a) - \sin^2(b)$. — **I.S.2**

Pour ce qui est de $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$ il n'y a aucun problème, on développe et on profite de la commutativité de la multiplication. Pour la belle formule avec les sinus, on développe "sinus de la somme" et "sinus de la dissférence", puis on distribue :
• $\sin(a+b).\sin(a-b) = \big(\sin(a).\cos(b) + \cos(a).\sin(b)\big).\big(\sin(a).\cos(b) - \cos(a).\sin(b)\big)$
• $\sin(a+b).\sin(a-b) = \sin^2(a).\cos^2(b) - \cos^2(a).\sin^2(b)$
• $\sin(a+b).\sin(a-b) = \sin^2(a).\big(1 - \sin^2(b)\big) - \big(1 - \sin^2(a)\big).\sin^2(b)$
et les $sin^2(a).\sin^2(b)$ s'en vont.

MPSI 2 — L'application $x \longrightarrow 4.|x-1| - |x+2| - |x-2|$. — **I.S.2**

Cette application s'étudie intervalle par intervalle, des changements de forme ayant lieu en -2, 1 et 2. On découpe donc $\mathbb{R}$ *(ou simplement $[-4,4]$ pour le graphe)* en deux segments et deux ouverts, et on résout sur chacun d'entre eux l'équation et les inéquations.
C'est encore une fois avec un tebleau que tout va devenir fort visible et rédigé sans efforts *(pensez à faire des tableaux plutôt que des rédactions indigestes ou des gribouillis de dégoûtant).*

x	$]-\infty,-2[$	-2	$]-2,1[$	1	$]1,2[$	2	$]2,+\infty[$
$4.\|x-1\|$	$4-4.x$	12	$4-4.x$	0	$4.x-4$	4	$4.x-4$
$-\|x+2\|$	$x+2$	0	$-2-x$	-3	$-2-x$	-4	$-2-x$
$-\|x-2\|$	$x-2$	-4	$x-2$	-1	$x-2$	0	$2-x$
$f(x)$	$4-2.x$	8	$-4.x$	-4	$4.x-8$	0	$2.x-4$
$f(x)=1$	$\emptyset$		$\{-1/4\}$		$\emptyset$		$\{5/2\}$
$f(x)\leqslant 0$	$\emptyset$		$[0,1[$	$\{1\}$	$]1,2[$	$\{2\}$	$\emptyset$
$2\leqslant f(x)<3$	$\emptyset$		$]-3/4,-1/2]$		$\emptyset$		$[3,7/2[$

Les trois ensembles de solutions sont donc :

$f(x)=1$	$f(x)\leqslant 0$	$f(x)\in[2,3[$
$\left\{-\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right\}$	$\left[0,2\right]$	$\left]-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right]\cup\left[3,\frac{7}{2}\right[$

Ayant aussi les formes de f intervale par intervalle, on peut faire la représentation graphique. Les valeurs en -2, 1 et 2 donnent même directement le graphe sur les segments, sans chercher la forme explicite de f. Si on ajoute les valeurs en -4 et 4 tout devient juste un jeu du type "reliez les points".

MPSI 2 — Une histoire de tramways. — **I.S.2**

On ne pourra pas calculer la vitesse à laquelle je marche ni celle à laquelle roulent les tramways. Seulement le rapport de ces vitesses. Les données sont des durées, le seul résultat qu'on peut trouver

est une durée.
On peut jouer sur des changements de référentiels, avec des formules utilisant $V_{tram} - V_{pieton}$ et $V_{tram} + V_{pieton}$.
Je vous le dis, on va trouver qu'en restant immobile, on verrait passer dans chaque sens un tramway toutes les six minutes.

Et je vous le fais rapidement.
Marchez dans un sens $A \to B$ pendant une heure. Et comptez juste les tramways qui vont dans votre sens (ceux qui vous doublent). Vous en comptez cinq (l'intervalle de temps d'une heure est purement mathématique, du type $[h, h+1[$).
Revenez ensuite à votre point de départ : une autre heure de marche. Et continuez à compter les tramways qui roulent dans le sens $A \to B$ (ceux que vous croisez). Vous en comptez cette fois quinze (un toutes les quatre minutes).
Au final, vous avez marché pendant deux heures et vous avez compté vingt tramways.
Si vous étiez resté sur place pendant ces deux heures, vous auriez vu aussi vingt tramways. D'où $\boxed{\text{une rame toutes les six minutes.}}$
C'est donc la fréquence de mise en route des tramways sur cette ligne.

MPSI 2	$\cos(\pi/12)$, $\sin(\pi/12)$ et $\tan(\pi/24)$.	**I.S.2**

On utilise à la fois $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ et $\cos(a+b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$ et la formule pour les sinus : $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

On utilise ensuite la formule de retour de l'arc moitié : $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ pour θ non multiple de π :

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}}$$

Pour éliminer ensuite les racines du dénominateur, on multiplie ensuite "haut et bas" par $\sqrt{6}+\sqrt{2}$, et on trouve :

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}-2}$$

MPSI 2	Trois polynômes de racines en j imposées...	**I.S.2**

Le premier est connu et peut s'écrire de deux façons :

$$\boxed{(X-1).(X+1).(X-j).(X+j).(X-j^2).(X+j^2) \text{ et } X^6-1}$$

La seconde s'obtient soit en développant la première (d'abord des groupes de deux, puis $(X^2-1).(X^2-j^2).(X^2-j)$ dans lequel on reconnaît $(X^2)^3-1$) ou en se souvenant qu'il s'agit bien là des six racines de l'unité).

Le second est $(X+1).(X-j).(X+j).(X-j^2).(X+j^2)$ c'est à dire $\dfrac{X^6-1}{X-1}$. On pose la division et on trouve $\boxed{X^5+X^4+X^3+X^2+X+1}$ en passant par ce chemin. Mais le développement de $(X+1).(X-j).(X+j).(X-j^2).(X+j^2)$ n'est pas trop laborieux...

Le troisième s'écrit $(X-i).(X+i).(X-i.j).(X+i.j).(X-i.j^2).(X+i.j^2)$. On le factorise en $i^6.\Big(\dfrac{X}{i}-1)(\dfrac{X}{i}+1\Big).\Big(\dfrac{X}{i}-j\Big).\Big(\dfrac{X}{i}+j\Big).\Big(\dfrac{X}{i}-j^2\Big).\Big(\dfrac{X}{i}+j^2\Big)$ et on y reconnaît $i^6.\Big(\Big(\frac{X}{i}\Big)^6-1\Big)$. C'est donc $\boxed{X^6+1}$

MPSI 2	L'intégrale $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin(\theta)}$.	I.S.2

On est sur un intervalle où le sinus ne s'annule pas et reste continu, on peut intégrer et appliquer directement la formule du cours : $\displaystyle\int_{\theta=\pi/3}^{\theta=\pi/2} \frac{d\theta}{\sin(\theta)} = \ln\left(\frac{\tan(\pi/4)}{\tan(\pi/6)}\right)$ et trouver $\ln(\sqrt{3})$ *(effectivement positif)*.

Ensuite, que penser de la réponse de l'élève ? Qu'elle contient une grossière erreur, un oubli et qu'elle recèle une approche incorrecte.
• L'erreur : l'élève parle de "la primitive" au lieu de "une primitive". • • C'est une erreur grave.
• L'oubli : le domaine de définition (il faut éviter les valeurs multiples de π. C'est un peu embêtant...
• L'attitude : chercher la réponse dans un livre, pourquoi pas. Mais il ne faut pas s'en contenter ; il faut aussi lire la démonstration. Sinon, c'est un simple acte de foi sans aucun rapport avec la science.

Quant à la formule. Est elle correcte ? Oui. C'est la même primitive que dans le cours.
La preuve : $1+\cos(t) = 2.\cos^2(t/2)$ et $1-\cos(t) = 2.\sin^2(t/2)$ en renversant les formules $\cos(2.\theta) = 2.\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2.\sin^2(\theta)$. On remplace donc : $\dfrac{1-\cos(t)}{1+\cos(t)} = \dfrac{\sin^2(t/2)}{\cos^2(t/2)} = \tan^2(t/2)$. Le logarithme va trasformer le carré en facteur 2 devant, compensé par le 1/2.
C'est donc bel et bien la même fonction, en tout cas sur $]0, \pi[$.

Quant au fait qu'on intègre en θ et que le primitive soit de variable t, c'est sans importance puisque les variables sont ici muettes (grâce à $d\theta$ et $t \longrightarrow$).

MPSI 2	Une permutation.	I.S.2

Déjà, on complète : $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f & g & i & l & k & b & h & c & a & j & d & e \end{pmatrix}$ sans avoir le choix, pour que σ soit bien une bijection.

Ensuite, on décompose σ en produit de cycles de supports disjoints : $\boxed{(\overrightarrow{afbghci}) \circ (\overrightarrow{dlek})}$ et on voit que j est immobile.
On a un cycle de taille 7 et un cycle de taille 4.

k est sur le cycle de taille 4 donc $\sigma^4(k) = k$.

a est sur le cycle de taille 7 et $\sigma^4(a)$ est égal à h.

f est sur le cycle de taille 7, d'où $\sigma^{23}(f) = \sigma^{21+2}(f) = \sigma^2(f) = g$.

---

d et e sont sur le même cycle, il y a donc au moins une solution à $\sigma^n(d) = e$ et c'est $\sigma^2(d) = e$. Ensuite, comme ce cycle est de taille 4 les solutions sont de la forme $2+4.p$ avec p décrivant $\mathbb{N}$.

La question du système est cohérente, puisque a et g sont dans le même cycle ($\sigma^3(a) = g$) de même que l et k ($\sigma^2(l) = k$). Au vu de la taille des cycles, il faut et suffit ensuite que n soit à la fois de la forme $3+7.p$ et $2+4.q$ (avec p et q entiers).
On dresse les deux listes à la recherche d'au moins une valeur commune : $[3, 10, 17, 24, \ldots]$ et $[2, 6, 10, 14, \ldots]$. On voit une solution : $n = 10$.
Comme ensuite il faut une période commune, on trouve $S = \{10 + 28.k | k \in \mathbb{Z}\}$.

Dans la première somme, seul k varie, et p doit être une donnée de l'énoncé, on peut factoriser : $\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{p}.j^k = \binom{100}{p}.\sum_{k=0}^{100} j^k$ et dans la somme, les termes se regroupent trois par trois en $1+j+j^2$ *(périodicité des puissances de j)*. Il reste les deux derniers termes : $1+j$ *(de $j^{99}+j^{100}$)*. La somme vaut $\binom{100}{p}.(1+j)$. Simplifiable en $\boxed{\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{p}.j^k = -j^2.\binom{100}{p}}$

Dans la deuxième somme, c'est p qui varie, et k est une donnée de l'énoncé. On a donc $j^k.\sum_{p=0}^{100}\binom{100}{p}$.
La somme de tous les binomiaux d'une ligne est connue *(je l'espère)* et vaut 2^n s'il s'agit de la ligne d'indice n *(c'est en fait le développement de $(1+1)^n$)*. Ici, n vaut 100 et on a $\boxed{\sum_{p=0}^{100}\binom{100}{p}.j^k = 2^{100}.j^k}$

Dans la dernière somme, p et k sont indépendants, et on peut donc dire qu'il y a 101 termes tous égaux à $\binom{100}{p}.j^p$. La somme vaut $\boxed{\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{p}.j^p = 101.\binom{100}{p}.j^p}$

On termine par le carré : $3425^2 = 11.730.625$, de tête.

$<\heartsuit(6)>$ Déterminez le minimum de l'application $t \longrightarrow t^t$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. 2 pt.

$<\spadesuit(4)>$ Résolvez l'équation "$n!$ est un multiple de 2012" d'inconnue entière n. 3 pt.
Résolvez l'équation "2012 est un multiple de $p!$" d'inconnue entière p. 2 pt.

$<\heartsuit(7)>$ Montrez que l'équation $2.Arctan(x)+Arctan(2/3)=Arctan(2.x)+Arctan(3/2)$ a au moins une solution *(par la valeur en 0 et la limite en $+\infty$ par exemple)*, que l'on va noter a. 2 pt.

Trouvez l'équation du troisième degré à coefficients entiers dont a est la solution réelle *(par exemple en passant à la tangente de chaque côté)*. 2 pt.
Vérifiez que cette équation n'a qu'une racine réelle. 2 pt.
Calculez la partie entière de a. 2 pt.

$<\clubsuit(4)>$ Un sot a des problèmes de maths. Deux élèves habitent le même foyer et viennent au lycée par le même chemin. Le garçon met trente minutes, la fille n'en met que vingt. Sachant qu'il part cinq minutes avant elle, au bout de combien de temps le doublera-t-elle ? 3 pt.
Cadeau : $\ln(2)\simeq 0,693$, $\ln(3)\simeq 1,098$ et $\ln(10)\simeq 2,303$ à 10^{-3} près.

$<\heartsuit(8)>$ Simplifiez $\cos(\alpha+\beta).\cos(\beta)+\sin(\alpha+\beta).\sin(\beta)$. 1 pt.

$<\diamondsuit(11)>$ On prend trois points A, B et C dans le plan complexes d'affixes respectives a, b et c. Montrez que le triangle (ABC) est équilatéral direct si et seulement si on a $(c-a)=e^{i.\pi/3}.(b-a)$. 1 pt.
Montrez que cette condition se ramène à $a+j.b+j^2.c=0$. 1 pt.

$<\diamondsuit(12)>$ Calculez les tangentes de ces différents angles : $\pi/12$, $Arctan(2)-\pi/3$, $Arccos(5/6)$ et $Arctan(3)-Arctan(2)$. 3 pt.
Justifiez : $Arctan(2)-\dfrac{\pi}{3}\leqslant Arctan(3)-Arctan(2)\leqslant\dfrac{\pi}{12}\leqslant Arccos\left(\dfrac{5}{6}\right)$. 3 pt.

$<\diamondsuit(13)>$ Qui de ces deux nombres est le plus grand : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2012}2^k$ et $\sqrt{\displaystyle\sum_{p=0}^{2012}3^p}$ *(la réponse devra être justifiée, puisque sinon, vous avez une chance sur deux)*. 2 pt.

$<\heartsuit(9)>$ Calculez $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{9.t^2+6.t+17}$. 2 pt.

$<\heartsuit(10)>$ Le polynôme $X^2+b.X+c$ a pour racines α et β. Calculez $\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}+\dfrac{1-\beta}{1+\beta}$ et $\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}.\dfrac{1-\beta}{1+\beta}$ à l'aide de b et c et donnez le polynôme de racines $\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$ et $\dfrac{1-\beta}{1+\beta}$.

MPSI 2 | Minimum de $t \longrightarrow t$. | **I.S.3**

Cette application s'écrit nécessairement $t \longrightarrow \exp(t.\ln(t))$ car l'exposant n'est que très rarement entier.
Pour ceux qui en ont besoin : $a^b = (a)^b = (e^{\ln(a)})^b = e^{\ln(a).b}$.
On dérive cette application sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on trouve $t \longrightarrow \Big(1.\ln(t) + t.\dfrac{1}{t}\Big).\exp(t.\ln(t))$. Cette dérivée s'annule et change de signe uniquement pour $\ln(t) = -1$ c'est à dire en $1/e$.
La valeur du minimum *(puisque la dérivée y passe du négatif au positif)* est $\exp(-1/e)$ et on ne peut pas vraiment simplifier d'avantage.
Combien d'élèves oublient que le minimum "c'est le $f(x)$ et non le x" et se contentent de $1/e$!

MPSI 2 | L'équation "$n!$ est un multiple de 2012". | **I.S.3**

Une remarque déjà : si un entier n est solution, alors tous les entiers $n+k$ au dela de n sont encore solutions, puisque $(n+k)!$ est elle même un multiple de $n!$.
Comme $n!$ est déjà un produit d'entiers, le problème se résume à ce que l'on trouve tous les facteurs premiers de 2012 dans le grand produit $1.2.3.4\dots n$.
Or, on a : $2012 = 2.1006 = 2.2.503$. On cherche ensuite : 503 est un nombre premier. En effet, il n'est pas pair, pas divisible par 3 (somme des chiffres), par 5 (chiffre final), par 7 (posez la division), par 11 (somme alternée des chiffres), par 13, par 17, par 19, par 23 (posez la division). Il n'y a pas lieu de chercher de fateur premier p plus grand, puisque sinon on aurait déjà détecté l'entier $2012/p$ comme facteur...
On veut donc qu'il y ait un facteur 503 dans le produit $1.2.3.4\dots n$. Il faut et suffit que n dépasse 503.
Et dans ce cas, on a depuis longtemps un facteur 4.
On peut conclure : $\boxed{S = [503, +\infty[\, \cap \mathbb{N}}$

L'autre équation est un peu plus crétine encore aux yeux de certains. Pour que 2012 soit un multiple de $n!$, il faut que $n!$ ne contienne que des 2 (et encore, pas plus de deux) et un 503. Bref, dès que n a atteint 3, c'est déjà fini : 2012 n'est pas un multiple de 6 (et encore moins de 24).
On écrit la conclusion : $\boxed{S = \{0, 1, 2\}}$

MPSI 2 | L'équation $2.Arctan(x) + Arctan(2/3) = Arctan(2.x) + Arctan(3/2)$. | **I.S.3**

Déjà, il n'y a aucun problème d'existence des quantités présentes des deux côtés du signe égale, l'inconnue x est une longueur, sans aucune contrainte (on calcule des arctangentes, pas des tangentes).
On définit la fonction différence : $x \longrightarrow 2.Arctan(x) + Arctan(2/3) - Arctan(2.x) - Arctan(3/2)$.
Elle est continue. En 0, elle vaut $Arctan(2/3) - Arctan(3/2)$, et elle est donc négative (croissance de l'arctangente). En $+\infty$, elle tend vers $\pi + Arctan(2/3) - \frac{\pi}{2} - Arctan(3/2)$ qui est positif (car déjà, $\pi/2$ dépasse $Arctan(3/2)$.
Par application du **théorème des valeurs intermédiaires** (dans une version avec limites aux bornes et non avec valeurs) sur l'intervalle $[0, +\infty[$, la fonction différence s'annule au moins une fois. L'équation a donc au moins une racine.
...et peut-être plusieurs.

On repart de l'équation et on applique la tangente de chaque côté :
$2.Arctan(x) + Arctan(2/3) = Arctan(2.x) + Arctan(3/2) \ \Rightarrow\ \tan\big(2.Arctan(x) + Arctan(2/3)\big) = \tan\big(Arctan(x) + Arctan(3/2)\big)$

On utilise (trois fois) la fomule $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}$ (sous réserve d'existence des tangentes en jeu) et on simplifie $tan(Arctan(x)) = x$ (sens favorable, l'arctangente reste strictement entre $-\pi/2$ et $\pi/2$). L'équation devient $\dfrac{\dfrac{2.x}{1-x^2}+\dfrac{2}{3}}{1-\dfrac{2.x}{1-x^2}.\dfrac{2}{3}} = \dfrac{2.x+\dfrac{3}{2}}{1-3.x}$ (condition seulement nécessaire).

On effectue les produits en croix : $\dfrac{6.x+2-2.x^2}{3-3.x-4.x^2} = \dfrac{4.x+3}{2-6.x}$ puis $24.x^3-15.x^2-5=0$. C'est l'équation du troisième degré demandée.

Ceux qui auront choisi de déformer l'équation en $2.Arctan(x) - Arctan(x) = Arctan(3/2) - Arctan(2/3)$ par exemple avant de passer à la tangente arriveront à la même équation du troisième degré, il est ici inutile de "ruser" hélàs.

Pour vérifier que cette équation n'a qu'une solution réelle, on va étudier les variations du trinôme $x \longrightarrow 24.x^3-15.x^2-5$ sur $\mathbb{R}$. On le note f et on dérive : $f' = x \longrightarrow 72.x^2-30.x$. La dérivée s'annule et change de signe en 0 et en $5/12$.
f est donc croissante sur $]-\infty, 0]$, décroissante sur $[0, 5/12]$ et croissante sur $[5/12, +\infty[$. Or, en 0, f est négative. Son maximum local est donc négatif. Elle reste donc négative sur $[0, 5/12]$ (et même encore un peu plus loin).

x	$]-\infty, 0]$	$[0, 5/12]$	$[5/12, +\infty[$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$^{-5} \searrow -\ldots$	$\nearrow^{+\infty}$

On sait déjà que a est plus grand que 0.
On calcule ensuite f en 1 et on trouve $f(1) = 4$ (positif). La racine est donc avant 1.
La solution a cherchée est entre 0 et 1, sa partie entière vaut 0.
Un logiciel tel que Maple nous donne $a \simeq 0,89$ à 10^{-2}près, mais c'est une autre histoire.

Ayant raisonné par conditions suffisantes (au moins une racine réelle) et nécessaires (si il y a une racine ce ne peut être que...), on sait que l'équation n'a qu'une racine, et on a plusieurs informations sur elle.

MPSI 2	Une histoire de trajet "foyer/lycée".	**I.S.3**

Une approche purement algébrique, avec mise en équation.
On prend comme origine des temps le départ du garçon, sur un axe Ot. On prend comme origine d'espace sur l'axe Oy le foyer, et on place le lycée à une distance d.
La modélisation du déplacement du garçon est alors linéaire (on suppose que les déplacements se font à vitesse constante) : $g = t \longrightarrow 2.d.t$ (le temps est mesuré en heures, et le facteur $2.d$ est une vitesse et t décrit $[0, 1/2]$).
La loi horaire de la fille est $f = t \longrightarrow 3.d.\left(t - \dfrac{1}{20}\right)$ (sa vitesse est $3.d$ et les cinq minutes de retard font ce $-1/12$). Ici, t décrit $\left[\dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{3}\right]$.
Pour que les deux mobiles se rencontrent, on égalise les deux ordonnées $f(t)$ et $g(t)$. L'équation du premier degré $2.d.t = 3.d.(t - \frac{1}{20})$ a pour solution $t = 1/4$. Cette mesure en heure se convertit en minutes : quinze minutes (à partir du départ du garçon, donc dix minutes pour la fille).
Et on trouve $f(1/4) = g(1/4) = d/2$. C'est à mi-parcours que la rencontre a lieu. Pour des raisons évidentes de symétrie du problème.
On note d'ailleurs qu'on pouvait effectivement résoudre le problème en profitant de cette symétrie, sans aucune équation alors...

MPSI 2	La somme $\cos(a+b).\cos(b)+\sin(a+b).\sin(b)$.	**I.S.3**

Certains développent la somme, simplifient par $\sin^2+\cos^2=1$ et sont assez fiers du résultat.
Et pourtant, c'est tellement plus joli en reconnaissant $\cos(\alpha).\cos(\beta)+\sin(\alpha).\sin(\beta)$ (avec $\alpha=a+b$ et $\beta=b$). On compacte alors en $\cos(\alpha-\beta)$ ce qui fait ici $\cos(a)$.

MPSI 2	Un triangle équilatéral et $a+j.b+j^2.c$.	**I.S.3**

Pour que (ABC) soit équilatéral direct, il faut et suffit qu'on puisse passer de B à C par rotation de centre A et d'angle $\pi/3$. Cette rotation se décrit dans $\mathbb{C}$ par la multiplication par $e^{i.\pi/3}$, complexe de module 1 et d'argument convenable.
Les deux vecteurs concernés sont $(b-a)$ qui tourne et $(c-a)$ sur qui on doit arriver, d'où la conclusion $(c-a)=e^{i.\pi/3}.(b-a)$.

On remplace $e^{i.\pi/3}$ par $j+1$ ou même $-j^2$. La condition (nécessaire et suffisante à la fois) devient $c-a=-j^2.(b-a)$.
On fait tout passer d'un même côté : $(-1-j^2).a+j^2.b+c=0$. On remplace : $j.a+j^2.b+c=0$.
Ce n'est pas la formule attendue ? Multipliez la par j^2 (non nul) et ce sera chose faite...

MPSI 2	Quatre angles à trier grâce à leurs tangentes.	**I.S.3**

On calcule $\tan(\pi/12)$ grâce à $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ et on trouve $\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$. En utilisant la quantité conjuguée, on trouve $2-\sqrt{3}$ *(vu en cours mais pas à retenir)*.

On a ensuite $\tan(Arctan(2)-\pi/3)=\dfrac{2-\sqrt{3}}{1+2.\sqrt{3}}=\dfrac{(2-\sqrt{3}).(2.\sqrt{3}-1)}{4.3-1}=\dfrac{5.\sqrt{3}-8}{11}$.

On poursuit avec l'angle dont le cosinus vaut $5/6$ et qui est dans $[0,\pi]$. La relation de Pythagore $1+\tan^2=\dfrac{1}{\cos^2}$ nous permet d'affirmer que le carré de sa tangente vaut $\dfrac{11}{25}$. Sa tangente vaut $\dfrac{\sqrt{11}}{5}$ *(elle est positive, car la mesure de l'angle est entre 0 et $\pi/2$)*.

Enfin, $\tan(Arctan(3)-Arctan(2))=\dfrac{3-2}{1+3.2}=\dfrac{1}{7}$

On résume :

θ	$\pi/12$	$Arctan(2)-\pi/3$	$Arccos(5/6)$	$Arctan(3)-Arctan(2)$
$\tan(\theta)$	$2-\sqrt{3}$	$(5.\sqrt{3}-8)/11$	$\sqrt{11}/5$	$1/7$

On doit enfin justifier un tri croissante de ces mesures angulaires. Comme elles sont toutes entre 0 et $\pi/2$, il suffit de trier leurs tangentes.
Comme les valeurs sont connus et l'ordre donné, on a juste trois inégalités à justifier, en passant aux carrés s'il le faut :
- $\dfrac{5.\sqrt{3}-8}{11}\leqslant\dfrac{1}{7}$ qui vient de $35.\sqrt{3}\leqslant 67$ qui s'obtient par comparaison de $35^2.3$ (égal à 3675) et de 67^2 (égal à 4489) ;
- $\dfrac{1}{7}\leqslant 2-\sqrt{3}$ qui vient de $3\leqslant\left(2-\dfrac{1}{7}\right)^2$ qui lui même vient de $147=3.49\leqslant 13^2=169$;
- $2-\sqrt{3}\leqslant\sqrt{11}/5$ qui vient de $10\leqslant\sqrt{11}+5.\sqrt{3}$ qui est issu de $100\leqslant 11+75+10.\sqrt{33}$assez facile à saisir ;

MPSI 2	Comparaison de $\sum_k=0^{2012}2^k$ et $\sqrt{\sum_k=0^{2012}3^p}$.	**I.S.3**

La première somme est calculable, égale à $2^{2013}-1$ (série géométrique de raison 2 non nulle, de premier terme 1 et de terme à venir 2^{2013}).
La seconde somme est $\sqrt{\dfrac{3^{2013}-1}{2}}$.
Quitte à effacer les 2 qui n'ont que peu de poids, on va comparer 2^{2013} et $\dfrac{3^{2013/2}}{2^{1/2}}$.

On va donc comparer leurs carrés car ils sont positifs, et quitte à multiplier par 2 : 2^{4027} face à 3^{2013}. Comme le logarithme et l'exponentielle croissent, je vais comparer $4027.\ln(2)$ et $2013.\ln(3)$.

Tout repose alors sur $2.\ln(2) \geqslant \ln(3)$ (et de beaucoup) pour conclure : $\sum_{k=0}^{2012} 2^k \geqslant \sqrt{\sum_{p=0}^{2012} 3^p}$.

MPSI 2	L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{9.t^2+6.t+17}$.	**I.S.3**

L'existence de cette intégrale ne pose pas de problème, puisque le dénominateur est continu, jamais nul. On passe par la forme canonique :

$$\int_0^1 \frac{dt}{9.t^2+6.t+17} = \int_0^1 \frac{dt}{(3.t+1)^2+16} = \frac{1}{16}\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(\frac{3.t+1}{4}\right)^2}$$

On peut intégrer en arctangente, en prenant garde aux constantes numériques :

$$\int_0^1 \frac{dt}{9.t^2+6.t+17} = \frac{1}{3.4}\left[Arctan\left(\frac{3.t+1}{4}\right)\right]_{t=0}^{t=1}$$

On trouve $\dfrac{\frac{\pi}{4} - Arctan\left(\frac{1}{4}\right)}{12}$ et on peut compacter le numérateur en $Arctan(3/5)$.

MPSI 2	Le polynôme $X^2 + b.X + c$.	**I.S.3**

Les relations coefficients racines donnent $\alpha + \beta = -b$ et $\alpha.\beta = c$.
On calcule ensuite :

- $\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} + \dfrac{1-\beta}{1+\beta} = \dfrac{(1-\alpha+\beta-\alpha.\beta)+(1+\alpha-\beta-\alpha.\beta)}{1+\alpha+\beta+\alpha.\beta} = \dfrac{2-2.c}{1-b+c}$
- $\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} \times \dfrac{1-\beta}{1+\beta} = \dfrac{1-\alpha-\beta+\alpha.\beta}{1+\alpha+\beta+\alpha.\beta} = \dfrac{1+b+c}{1-b+c}$

On tient alors la somme et le produit des racines du polynôme cherché, ce polynôme est donc $X^2 - \dfrac{2-2.c}{1-b+c}.X + \dfrac{1+b+c}{1-b+c}$ à constante multiplicative près.

$<\heartsuit(11)>$ Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\cos(4.\theta).\sin(\theta).d\theta$. 3 pt.

$<\heartsuit(12)>$ A, B, C et D sont quatre parties d'un ensemble E. Exprimez $1_{A\cup B}$ à l'aide de 1_A et 1_B. 1 pt.

Exprimez $1_{A\cup B\cup C\cup D}$ à l'aide de 1_A, 1_B, 1_C et 1_D (indication : qui est $(\overline{\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}})$). 2 pt.
Exprimez $Card(A\cup B\cup C\cup D)$ à l'aide des cardinaux de A, B, C et D et des cardinaux des intersections. 1 pt.

$<\diamondsuit(14)>$ Résolvez $\displaystyle\int_1^a\frac{dx}{\sqrt{x}.(x+1)}=\frac{\pi}{3}$ d'inconnue a après avoir calculé cette intégrale en y détectant une forme en $\displaystyle\frac{u'}{1+u^2}$. 3 pt.

$<\heartsuit(13)>$ Montrez que la composée de deux injections est une injection. 1 pt.

$<\heartsuit(14)>$ Sachant que $\cos(x)$ est entre $0,47$ et $0,52$, encadrez finement $\cos(3.x)$.(les valeurs pourront être données sous forme décimale ou sous forme quotient, au choix). 2 pt.

$<\diamondsuit(15)>$ f est une fonction affine. On sait : $2\leqslant f(-1)\leqslant 2,1$ et $5,1\leqslant f(2)\leqslant 5,2$. Encadrez le plus finement possible $f(8)$. 3 pt.

$<\diamondsuit(16)>$ φ est une application paire, de période 4, définie par $\varphi(x)=\begin{cases}2.x-1 & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ -\cos(\pi.x) & \text{si } 1<x\leq 2\end{cases}$.
Représentez graphiquement φ sur $[-3,3]$. 2 pt. Calculez $\varphi(33/2)$, $\varphi(47/3)$ et $\varphi(106/7)$. 3 pt. Calculez $\displaystyle\int_0^5\varphi(t).dt$. 1 pt.

$<\diamondsuit(17)>$ Donnez un intervalle contenant 1 le plus grand possible contenant 1 sur lequel l'application $t\longrightarrow t^{\ln(2.t)}$ soit injective *(pensez à dériver)*. 3 pt.

$<\heartsuit(15)>$ Trouvez la primitive de $x\longrightarrow x.Arctan(x)$ nulle en 1 (indication : $\displaystyle\frac{1}{1+t^2}-1=\ldots$) 3 pt.

$<\heartsuit(16)>$ ♡ Résolvez $\cos(4.\theta+\pi/3)=\cos(5.\theta-\pi/5)$ d'inconnue réelle θ. 2 pt.

$<\clubsuit(5)>$ Déterminez $\displaystyle\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Big[0,\frac{k}{k+1}\Big[\Big)\Delta\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\Big]0,\frac{n+1}{n}\Big]\Big)$. 3 pt.

Et $\displaystyle\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Big[0,\frac{k}{k+1}\Big[\Big)\Delta\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\Big]0,\frac{n+1}{n}\Big]\Big)$ k dans $\mathbb{Z}$. 1 pt.

MPSI 2	L'intégrale $\int_0^{\pi/3}\cos(4.\theta).\sin(\theta).d\theta$.	**I.S.4**

Cette intégrale existe, par continuité des fonctions sous le signe somme.

On fait appel au cours, aux polynomes de Tchebitchev et à la linéarité de l'intégrale : cette intégrale vaut
$8.\int_0^{\pi/3}\cos^4(\theta).\sin(\theta).d\theta-8.\int_0^{\pi/3}\cos^2(\theta).\sin(\theta).d\theta+\int_0^{\pi/3}\sin(\theta).d\theta$

On a des intégrales de la forme $\int u^k.u'.du$ et on intègre en $\Big[-8.\dfrac{\cos^5(\theta)}{5}+8.\dfrac{\cos^3(\theta)}{3}-\cos(\theta)\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/3}$.

Le calcul poussé à son terme donne $\boxed{-17/60}$

On pouvait aussi transformer les produits en somme. On se souvient qu'un produit $\sin.\cos$ peut s'écrire comme différence de deux sinus :

- $\sin(a+b)=\sin(a).\cos(b)+\cos(a).\sin(b)$
- $\sin(a-b)=\sin(a).\cos(b)-\cos(a).\sin(b)$ donc $2.\sin(a).\cos(b)=\sin(a+b)+\sin(a-b)$

On ajuste avec $a=x$ et $b=4.x$: $\sin(x).\cos(4.x)=\dfrac{\sin(5.x)-\sin(3.x)}{2}$. On a juste à intégrer alors en $-\cos(5.x)/10$ et $\cos(3.x)/6$.

MPSI 2	Indicatrice et cardinal de $A\cup B\cup C\cup D$.	**I.S.4**

D'abord, c'est du cours : $1_{A\cup B}=1_A+1_B-1_A.1_B$ et $Card(A\cup B)=Card(A)+Card(B)-Card(A\cap B)$.

Ensuite, on peut écrire $1_{(A\cup B)\cup(C\cup D)}=1_{A\cup B}+1_{C\cup D}-1_{A\cup B}.1_{C\cup D}$ et remplacer. Mais on peut aussi faire appel aux lois de Morgan :
$\overline{(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})}=\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}}\cup\overline{\overline{C}}\cup\overline{\overline{D}}=A\cup B\cup C\cup D$, puis en passant aux indicatrices :
$1_{A\cup B\cup C\cup D}=1-(1-1_A).(1-1_B).(1-1_C).(1-1_D)$ et on comprend alors le lien avec les relations coefficients racines et les alternances de signes :

$$1_{A\cup B\cup C\cup D}=1_A+1_B+1_C+1_D-1_A.1_B-1_A.1_C-1_A.1_D-1_B.1_C-1_B.1_D-1_C.1_D+1_A.1_B.1_C+1_A.1_C.1_D+1_A.1_B.1_D+1_B.1_C.1_D-1_A.1_B.1_C.1_D$$

On évalue en a et on somme sur tous les a de E et on utilise $\sum_{a\in E}1_A(a)=Card(A)$ et on a une formule qui ne sera pas écrite ici en détails :

$$Card(A\cup B\cup C\cup D)=Card(A)+Card(B)+\ldots-\Big(Card(A\cap B)\ldots\Big)+\Big(Card(A\cap B\cap C)+\ldots\Big)-Card(A\cap B\cap C\cap D)$$

MPSI 2	L'équation $\int_1^a\frac{dx}{\sqrt{x}.(x+1)}$.	**I.S.4**

Pour a strictement positif, cette intégrale existe. Et pour que l'intégrale soit positive, égale à $\pi/3$, il vaut mieux que a soit plus grand que 1.

Où trouver la structure en $\dfrac{u'}{1+u}$? Dérivez donc $x\longrightarrow Arctan(\sqrt{x})$. On y trouve $\dfrac{1}{2.\sqrt{x}}$ et $\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}$.

Il y a donc juste un facteur 2 à ajuster :
$\int_1^x\dfrac{dx}{\sqrt{x}.(x+1)}=\Big[2.Arctan(\sqrt{x})\Big]_{x=1}^{x=a}=2.Arctan(\sqrt{a})-2.Arctan(1)=2.Arctan(\sqrt{a})-\dfrac{\pi}{2}$

L'équation devient $2.Arctan(\sqrt{a}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ qui donne $Arctan(\sqrt{a}) = \frac{5.\pi}{12}$.
On passe à la tangente, puis au carré : $a = \tan^2(5.\pi/12)$.
Si il vous reste du temps : $\tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}$, $\tan(5.\pi/12) = 2 + \sqrt{3}$ et $a = 7 + 4.\sqrt{3}$.
La vision graphique de la question garantit existence et unicité de la solution, ce qui nous permet d'avoir pris la tangente et le carré.

MPSI 2	Une fonction affine encadrée en deux points.	**I.S.4**

Habituellement, on connaît la fonction en deux points. Comme elle est affine, on la connaît parfout, par résolution d'un système. Mais ici, on a des encadrements. La droite de la représentation graphique n'est pas très bien accrochée, elle brinquebale. On a un système de deux équations avec des notations naturelles : $\left\{\begin{array}{lllll} 2 \leq & -a & +b & \leq 2,1 & : \ f(-1) \\ 5,1 \leq & 2.a & +b & \leq 5,2 & : \ f(2) \end{array}\right.$.
On résout en effectuant une combinaison $2.f(-1) + f(2)$: b est entre $9,1/3$ et $9,4/3$.
On pense à renverser le système avant d'encadrer a : $\left\{\begin{array}{lllll} -2,1 \leq & a & -b & \leq 2 & : \ -f(-1) \\ 5,1 \leq & 2.a & +b & \leq 5,2 & : \ f(2) \end{array}\right.$, a est entre 1 et $3,2/3$.

On encadre alors $f(8)$ est entre $8 \times 1 + 9,1/3$ et $8.(3,2/3) + (9,4/3)$ et en version rationnelle : $\boxed{\frac{331}{30} \leqslant f(8) \leqslant \frac{35}{3}}$

Attention, on peut additionner des égalités mais pas les soustraire. Sinon, essayez avec ça pour comprendre : $\left\{\begin{array}{lll} 2 & \leq 4 & \leq 5 \\ 2 & \leq 3 & \leq 5 \\ - & - & - \\ 0 & \leq 1 & \leq 0 \end{array}\right.$ et on peut faire pire.
Graphiquement, la chose se comprend sans effort.

MPSI 2	L'application $\varphi(x) = \left\{\begin{array}{ll} 2.x - 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\cos(\pi.x) & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \end{array}\right.$ paire et périodique.	**I.S.4**

On représente graphiquement φ sur $[0, 2]$: d'abord affine, passant par $(0, -1)$ et $(1, 1)$ puis sinusoïdale redescendant de $(1, 1)$ à $(2, -1)$.
On complète par parité à $[-2, 2]$.
On complète par périodicité de période 4.
Tout est très visuel.

Pour l'intégrale de 0 à 5, on découpe par relation de Chasles. On a une période complète de 0 à 4 puis un quart de période.
Or, $\int_0^1 \varphi(t).dt$ est nul (deux triangles quise compensent). De plus $\int_1^2 \varphi(t).dt$ est nul aussi (arche de sinusoïde).
Par parité, $\int_{-1}^0 \varphi(t).dt$ et $\int_{-2}^{-1} \varphi(t).dt$ sont nulles aussi.
Par relation de Chasles, l'intégrale de -2 à 2 est nulle.
Par périodicité, l'intégrale est nulle sur toute période.
On a donc $\int_0^5 \varphi(t).dt = 0 + \int_4^5 \varphi(t).dt = \int_0^1 \varphi(t).dt = 0$.

Pour ce qui est des calculs de valeurs en quelques points :
- on se ramène à l'intervalle $[-2, 2]$ par périodicité modulo 4 (en soustrayant 4, 8, 12, 16 ou plus),
- on se ramène à $[0, 2]$ par parité,
- et on calcule par la formule :

x	$x \quad mod \quad 4$	parité	formule	valeur
$33/2 \in [16, 20]$	$1/2 \in [-2, 2]$	$1/2 \in [0, 2]$	$2.(1/2) - 1$	0
$47/3 \in [12, 16]$	$-1/3 \in [-2, 2]$	$1/3 \in [0, 2]$	$2.(1/3) - 1$	$-1/3$
$104/7 \in [12, 16]$	$-8/7 \in [-2, 2]$	$8/7 \in [0, 2]$	$-\cos(8.\pi/7)$	$\cos(\pi/7)$

MPSI 2 | L'application $t \longrightarrow t^{\ln(2.t)}$. | **I.S.4**

Cette application est définie sur $]0, +\infty[$ à cause du logarithme.
Elle y est dérivable. On peut donc en dresser le tableau de variations.
Il nous reste à utiliser les résultats suivants :
- f' strictement positive implique f strictement croissante
- f strictement croissante implique f injective.

On dérive donc après avoir mis f sous forme exponentielle : $f = x \longrightarrow e^{\ln(x).\ln(2.x)}$ et on trouve $f' = x \longrightarrow e^{\ln(x).\ln(2.x)}.\Big(\frac{1}{x}.\ln(2.x) + \ln(x).\frac{1}{x}\Big)$ (rappelons que e^u se dérive en $u'.e^u$ et que $x \longrightarrow \ln(2.x)$ est égale à $x \longrightarrow \ln(x) + \ln(2)$ et se dérive juste en $x \longrightarrow 1/x$).
La dérivée s'annule et change de signe en un seul point, solution de $\ln(2.x) + \ln(x) = 0$. Ce point est $1/\sqrt{2}$ (de $\ln(x) = -\ln(2)/2$).
L'intervalle cherché est donc $[\sqrt{2}/2, +\infty[$.

MPSI 2 | Primitive de $x \longrightarrow x.Arctan(x)$ nulle en 1. | **I.S.4**

Comme l'arctangente est positive, cette primitive n'est autre que $x \longrightarrow \int_1^x t.Arctan(t).dt$.
Attention, en effet, on n'aura pas de résultats de ce type avec les applications non continues (les intégales pourront s'envisager mais ne seront pas forcément des primitives...).
Attention aussi, une notation telle que $x \longrightarrow \int_1^x x.Arctan(x).dx$ est une absurdité sans nom qui vous relèguera au rang des huitres (sans coquille) dans la hierarchie des scientifiques potentiels.

Ensuite, comme l'arctangente est surtout célèbre par sa dérivée, on intègre par parties, en dérivant l'arctangente et en remontant $x \longrightarrow x$ en $x \longrightarrow x^2/2$. On a alors $\int_1^x x.Arctan(x).dx = \Big[\frac{t^2.Arctan(t)}{2}\Big]_{t=1}^{t=x} - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}.dt$ et c'est alors que l'indication du texte devient lumineuse : $\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$ On sépare cette nouvelle intégrale en deux termes : $\int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}.dt = \int_1^x dt - \int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$. Le deuxième s'intègre en arctangente.
On réunit les morceaux : $\frac{t^2.Arctan(t) - t + Arctan(t)}{2}$ qu'on doit estimer en x et en 1, sachant qu'on a $Arctan(1) = \pi/4$. La réponse finale est $\boxed{x \longrightarrow \frac{x^2.Arctan(x) - x + Arctan(x) + 1}{2} - \frac{\pi}{4}}$

MPSI 2 | L'équation $\cos(4.\theta + \pi/3) = \cos(5.\theta - \pi/5)$. | **I.S.4**

Le domaine de définition de cette application ne pose pas de problème, c'est $\mathbb{R}$. Maintenant, on cherche les θ pour lesquels il y a bien égalité. Les deux cas d'égalité des cosinus donnent deux ensembles de solutions :
$\exists p \in \mathbb{Z}, 4.\theta + \frac{\pi}{3} = 5.\theta - \frac{\pi}{5} + 2.p.\pi$ ou $\exists q \in \mathbb{Z}, -\Big(4.\theta + \frac{\pi}{3}\Big) = 5.\theta - \frac{\pi}{5} + 2.q.\pi$
N'oubliez pas de quantifier les variables p et q avant de les utiliser.
D'autre part, attention, c'est bien des $\exists$ qu'il faut utiliser. En effet, il y a une solution pour chaque valeur de p et chaque valeur de q quels qu'ils soient dans $\mathbb{Z}$, mais la quantification complète est

$\forall \theta \in \mathbb{R}, (\theta \in S) \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{Z}, \theta = \dots)$ et non pas $\forall \theta \in \mathbb{R}, (\theta \in S) \Leftrightarrow (\forall p \in \mathbb{Z}, \dots)$ qui forcerait θ à être égal à tous les $8.\pi/15 + 2.p.\pi$ en même temps !

On résout et on termine sous forme d'ensemble :

$$\boxed{S = \left\{\frac{8.\pi}{15} + 2.p.\pi | p \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{-\frac{2.\pi}{45} + \frac{2.q.\pi}{9} | q \in \mathbb{Z}\right\}}$$

en ayant peut être remplacé p par $-p$, ce qui ne change pas grand chose à l'ensemble, puisque p et $-p$ décrivant tous les deux $\mathbb{Z}$.

MPSI 2	Encadrement fin de $cos(3.x)$.	**I.S.4**

Tout va reposer sur la formule $\cos(3.x) = 4.\cos^3(x) - 3.\cos(x)$.
Comme on a une information sur $\cos(x)$, il va s'agir d'étudier les variations de $c \longrightarrow 4.c^3 - 3.c$ sur l'intervalle qui va de $0,47$ à $0,52$.
Les valeurs aux deux bornes ne sont pas des informations utiles. Car l'application $c \longrightarrow 4.c^3 - 3.c$ (appelée ψ) change de sens de variation en $1/2$ qui est justement dans cet intervalle...
Il faut donc dresser un tableau de variations :
- ψ est décroissante de $0,47$ à $0,5$ (valeurs balayées de $\psi(0,47)$ à -1,
- ψ est croissante de $0,5$ à $0,52$ (valeurs balayées de -1 à $\psi(0,52)$.

$\cos(3.x)$ sera donc compris entre -1 (valeur minimale qui peut être atteinte pour $x = \pi/3$) et $Max(\psi(0,47), \psi(0,52))$. Sous forme d'intervalle :

$\boxed{\left[-1, Max\left(-\frac{248677}{250000}, -\frac{15587}{15625}\right)\right] \text{ ou } \left[-1, Max\left(-0,994708, -0,997568\right)\right]}$ suivant vos préférence et votre courage à calculer des choses inutiles...

Ce que je vais surtout vérifier : que vous avez bien envisagé les variations, avec le minimum de ψ en $1/2$, ne vous contentant surtout pas d'un faux intervalle $[\psi(0,47), \psi(0,52)]$.

MPSI 2	Une différence symétrique de réunion et d'intersection généralisées.	**I.S.4**

La réunion généralisée $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[0, \frac{k}{k+1}\right[$ est une réunion d'intervalles “de plus en plus grands”. Tous contiennent 0,mais aucun réel négatif et aucun réel plus grand que 1. Et 1 lui même n'est dans aucun d'entre eux. En revanche, tout réel de $[0,1[$ finira par être atteint (et dépassé) par la suite $\left(\frac{k}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$).
Par double inclusion, l'ensemble obtenu est $[0,1[$ (fermé en 0, ouvert en 1).

L'intersection généralisée $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]0, \frac{n+1}{n}\right]$ ne contient ni 0 ni aucun réel négatif. Tous les réels de $]0,1]$ sont acceptés, puisque chaque $\dfrac{n+1}{n}$ est plus grand que 1. Chaque réel strictement plus grand que 1 finit par être exclus, pour n assez grand. Il reste cette fois $]0,1]$.

Et la différence symétrique est faite de l'ensemble $\{0,1\}$ à deux éléments.

Pour $\displaystyle\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[0, \frac{k}{k+1}\right[\right) \Delta \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]0, \frac{n+1}{n}\right]\right)$, la réunion $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[0, \frac{k}{k+1}\right[$ est faite d'ensembles tous égaux. Le fait qu'on fasse une réunion n'y change rien, il ne reste que cet ensemble, dans lequel k doit être déjà connu : $\left[0, \frac{k}{k+1}\right[$. Sa différence symétrique avec $]0,1]$ donne $\{0\} \bigcup \left[\frac{k}{k+1}, 1\right]$.

$I.S.05$	CHARLEMAGNE MPSI**2**	Mardi 9 octobre	ANNEE **12/13**	$I.S.05$

$<\diamondsuit(18)>$ On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation R par $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2, \big(aRb\big)\Leftrightarrow\big(3|(a+2.b)\big)$ (comprendre $a+2.b$ est un multiple de 3). Indiquez pour les entiers de 0 à 8 qui est en relation avec qui. 2 pt.
Cette relation est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive sur $\mathbb{Z}$? 4 pt.

$<\spadesuit(5)>$ $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$ est un hexagone régulier dans le plan complexe. Chaque A_k a pour affixe z_k. Calculez $\dfrac{z_5-z_1}{z_6-z_2}$ et $\dfrac{z_6-z_3}{z_1-z_2}$. 3 pt.

$<\clubsuit(6)>$ Représentez graphiquement $1_{\mathbb{Q}}\circ\tan\circ(\pi.1_{\mathbb{Q}}/4)$. ($1_{\mathbb{Q}}$est la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$) 2 pt.

$<\heartsuit(17)>$ Résolvez $Arctan(x)+Arctan(x+1)=\pi/6$ d'inconnue réelle x. 3 pt.

$<\clubsuit(7)>$ Calculez 2012! modulo 20^{12}. 1 pt.

$<\heartsuit(18)>$ Si R est une relation d'ordre sur un ensemble E, quantifiez "ce n'est pas un ordre total". 1 pt.

$<\heartsuit(19)>$ Transformez la somme $\cos(a)+\cos(b)$ en produit de cosinus ou de sinus. 1 pt.

$<\heartsuit(20)>$ Prouvez pour a et b hors de $\{k.\pi+\pi/2|k\in\mathbb{Z}\}$: $\tan(a)-\tan(b)=\dfrac{\sin(a-b)}{\cos(a).\cos(b)}$. 1 pt.

$<\heartsuit(21)>$ Calculez $\displaystyle\sum_{k=-100}^{100}5^k$. 1 pt.

$<\spadesuit(6)>$ On définit : $f=n\longrightarrow(Max(n,10), Min(n,30))$. Montrez que f est injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$, mais non surjective.(conseil pour l'injectivité : séparez suivant la position de vos entiers par rapport à 10 et 30) 3 pt.

$<\spadesuit(7)>$ On définit : $g=n\longrightarrow(Max(n,30), Min(n,10))$. Montrez que g n'est ni injective ni surjective de N dans N^2. 2 pt.

$<\diamondsuit(19)>$ On note P le polynôme $X^4-s.X^3+d.X^2-t.X+p$, de racines a_1, a_2, a_3 et a_4. Montrez alors $(a_1-a_2).(a_1-a_3).(a_1-a_4)=P'(a_1)$ (pensez à dériver la forme factorisée de P). 3 pt.
Simplifiez $(a_2-a_1).(a_2-a_3).(a_2-a_4)$ et $\prod_{k=1}^{3}(a_1-a_4)$. 1 pt.
Rectifiez la formule fausse $\displaystyle\prod_{i<j}(a_j-a_i)=P'(a_1).P'(a_2).P'(a_3).P'(a_4)$. 1 pt.

$I.S.05$	MPSI2	178 points	Année 2012/13	$I.S.05$

Exercice non posé, car necessitant une calculatrice (quoique...), mais qui mérite réflexion.
On tend une corde au niveau du sol entre deux piquets distants de douze mètres l'un de l'autre. Puis on allonge cette corde de cinquante centimètres. Quels sont les élèves de la classe qui pourront passer sous la corde au milieu sans avoir à se baisser ?

$I.S.05$	CHARLEMAGNE — Correction — ANNEE **2012/13**		$I.S.05$

MPSI 2	Un hexagone régulier.	**I.S.05**

Les différences d'affixes qui interviennent peuvent être assimilées à des vecteurs. Or, $z_5 - z_1$ et $z_6 - z_2$ ont la même norme. Le quotient est un complexe de module 1 dont l'argument est l'angle entre $\overrightarrow{A_5A_1}$ et $\overrightarrow{A_6A_2}$. On trouve $\pi/3$, au signe près.

On a donc $\boxed{\dfrac{z_5 - z_1}{z_6 - z_2} = \exp(-i.\pi/3)}$

Verson rapide : on prend le cas particulier de l'hexagone dont les sommets sont les $e^{i.k.\pi/3}$ par invariance de la quantité par translation, rotation et homothétie. On calcule $\dfrac{e^{5.i.\pi/3} - e^{i.\pi/3}}{e^{6.i.\pi/3} - e^{2.i.\pi/3}}$.

Les vecteurs mis en jeu ensuite dans $\dfrac{z_6 - z_3}{z_1 - z_2}$ sont parallèles. Le rapport est donc réel, et même réel positif car les deux vecteurs sont de même sens.

On se contentera du rapport des normes. Il vaut $\boxed{2}$ (en découpant en triangles équilatéraux).

MPSI 2	Relation $(aRb) \Leftrightarrow (3\vert a + 2.b)$.	**I.S.05**

C'est bien une relation : quand on se donne deux entiers, il se peut que la formule aRb soit vraie (exemple : 2 et 5), il se peut qu'elle soit fausse (exemple : 3 et 4).

On dresse un tableau qui nous dit pour les entiers de 0 à 8 qui est en relation avec qui :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	•	.	.	•	.	.	•	.	.
1	.	•	.	.	•	.	.	•	.
2	.	.	•	.	.	•	.	.	•
3	•	.	.	•	.	.	•	.	.
4	.	•	.	.	•	.	.	•	.
5	.	.	•	.	.	•	.	.	•
6	•	.	.	•	.	.	•	.	.
7	.	•	.	.	•	.	.	•	.
8	.	.	•	.	.	•	.	.	•

On doit tester diverses propriétés. On va donner pour certaines l'argument, pour d'autres un contre-exemple :

			preuve	
réflexivité	$\forall a, (aRa)$	oui	$\forall a, 3\vert(a + 2.a)$	
symétrie	$\forall (a, b), \big((aRb) \Rightarrow (bRa)\big)$	oui	$b + 2.a = 2.(a + 2.b) - 3.b$	
antisymétrie	$\forall (a, b), \big((aRb) et (bRa) \Rightarrow (a = b)\big)$	non	$(2R5)$ et $(5R2)$ mais $(2 \neq 5)$	
transitivité	$\forall (a, b, c), \big((aRb) et (bRc) \Rightarrow (aRc)\big)$	oui	$a + 2.c = (a + 2.b) + (b + 2.c) - 3.b$	

On notera que le pur logicien qui lit la question peut l'interpréter ainsi : "cette relation est elle réflexive ou symétrique ou antisymétrique ou transitive" et répondre "oui", puisqu'elle est symétrique, et que un vrai dans une liste de ou donne vrai.

On notera aussi une fois de plus que les choses sont bien plus lisibles quand on pense à faire un tableau.

D'autre part, on voit qu'en fait c'est juste la relation $a = b \mod 3$ puisque $a + 2.b$ n'est autre que $a - b + 3.b$.

MPSI 2	La fonction $1_{\mathbb{Q}} \circ \tan \circ (\pi \times 1_Q/4)$.	**I.S.05**

A première vue, c'est assez monstrueux : $x \longrightarrow 1_{\mathbb{Q}}(\tan(\pi.1_{\mathbb{Q}}(x)/4))$ avec $1_{\mathbb{Q}}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Et pourtant, c'est si simple.
En notant f cette application, on distingue deux cas :
• si x est dans $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ alors : $f(x) = 1_{\mathbb{Q}}(\tan(0)) = 1_{\mathbb{Q}}(0) = 1$
• si x est dans $\mathbb{Q}$ alors : $f(x) = 1_{\mathbb{Q}}(\tan(\pi/4) = 1_{\mathbb{Q}}(1) = 1$
Cette application est constante, égale à 1. Son graphe ne sera même pas tracé ici...

MPSI 2	L'équation $Arctan(x) + Arctan(x+1) = \pi/6$.	**I.S.05**

Déjà, je sais qu'il va y avoir une unique solution. Le premier memebre est une fonction réelle de variable réelle, continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, croissante *(comme somme de fonctions croissantes)*, dont les limites aux bornes sont $-\pi$ et π. C'est la version faible *("bijection")* du théorème de l'homéomorphisme qui permet de conclure.
Pour détecter la solution *(unique par croissance stricte)*, on passe à la tangente des deux côtés à la fois *(condition seulement nécessaire)* : $\dfrac{x + (x+1)}{1 - x.(x+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
On aboutit à l'équation du second degré $x^2 + (2.\sqrt{3} + 1).x + \sqrt{3} - 1 = 0$ de discriminant 17 et de racines $\dfrac{-2.\sqrt{3} - 1 - \sqrt{17}}{2}$ et $\boxed{\dfrac{-2.\sqrt{3} - 1 + \sqrt{17}}{2}}$
Les deux racines sont toutes les deux négatives (leur produit est positif, elles sont de même signe, et l'une d'entre elles est visiblement négative), et pourtant, l'équation initiale n'a qu'une solution.
Il faut en éliminer une. C'est celle qui est la plus grande en valeur absolue, qui conduit à ce que $Arctan(x)$ et $Arctan(x+1)$ soient négatifs, ce qui n'est pas cohérent avec $Arctan(x) + Arctan(x+1) = \pi/6$.

En fait, pour $x = \dfrac{-2.\sqrt{3} - 1 - \sqrt{17}}{2}$, on a $Arctan(x) + Arctan(x+1) = \dfrac{\pi}{6} - \pi$ (ce qui ne se voit plus quand on passe à la tangente).
Ce que j'espérais avec cet exercice : que vous pensiez bien au fait qu'il ne peut y avoir qu'une racine par croissance stricte et que vous compreniez qu'en passant à la tangente, on a perdu des modulo π et introduit des solutions en plus.

MPSI 2	Réduction de 2012! modulo 20^{12}.	**I.S.05**

La question est en fait simple. On va montrer que l'énorme nombre 2012! estt un multiple de 20^{12}. En effet, dans 2012! il y a tous les entiers de 1 à 2012. Et 20^{12} c'est $2^{24}.5^{12}$.
Or, dans 2012! il y a déjà plus de quatre cent multiples de 5, d'ou au bas mot 5^{402} (il y a aussi les multiples de 25 qui ont apporté des facteurs 5 en plus).
De plus, dans 2012 il y a 1006 nombres pairs, d'où un gros exposant sur 2.
Bilan : $\boxed{2012! = 0 \quad mod \quad 20^{12}}$

MPSI 2	Questions de cours.	**I.S.05**

L'ordre R n'est pas total : $\exists\ (a,b) \in E^2,\ \overline{(a\ R\ b)}\ et\ \overline{(b\ R\ a)}$.

On se donne deux réels a et b et on écrit :
$\cos(a) + \cos(b) = \cos\left(\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2}\right)$
On a alors $(\cos.\cos - \sin.\sin) + (\cos.\cos + \sin.\sin)$ et on trouve donc
$\cos(a) + \cos(b) = \cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right).\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
(formule cohérente dans les cas $a = b$ et $a = -b$).

On va prouver $\tan(a) - \tan(b) = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos(a).\cos(b)}$ quand ni $\cos(a)$ ni $\cos(b)$ n'est nul. On soustrait les deux tangentes :
$\tan(a) - \tan(b) = \frac{\sin(a).\cos(b)-\sin(b).\cos(a)}{\cos(a).\cos(b)} = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a).\cos(b)}$ c'est cadeau !

On termine avec une série géométrique $\displaystyle\sum_{k=-100}^{k=100} 5^k$. C'est une série géométrique de raison 5, de premier terme 5^{-100} et de terme à venir 5^{101} (faite de deux cent un termes, car il y a un exposant 0 au milieu de la liste.

On trouve donc $\dfrac{\frac{1}{5^{100}} - 5^{101}}{1-5}$ qu'on écrit $\boxed{\dfrac{5^{101}}{4}.\Big(1 - \dfrac{1}{5^{201}}\Big)}$

Mine de rien, avec le fait qu'il y ait deux cent un termes, j'ai un argument de plus pour vous dire : "oubliez la formule où on compte le nombre de termes", et retenez celle en "premier terme écrit moins premier terme à venir".

MPSI 2	Les applications $n \longrightarrow (Max((n,10), Min(n,30))$ et $n \longrightarrow (Max((n,30), Min(n,10))$.	**I.S.05**

On veut prouver que f va bien de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$, c'est immédiat.
On veut ensuite prouver que f est injective. On prend donc p et q ayant la même image : $(Max((p,10), Min(p,30)) = (Max((q,10), Min(q,30))$. On doit arriver à $p = q$.
On étudie suivant les possibilités pour p :
• $p \leqslant 10$: l'hypothèse devient : $(10,p) = (Max((q,10), Min(q,30))$. On déduit de $Max(q,10) = 10$ que q est plus petit que 10 et on reporte : $p = Min(q,30) = q$.
• $10 < p \leqslant 30$: l'hypothèse devient : $(p,p) = (Max((q,10), Min(q,30))$. On déduit de $Max(q,10) = p$ que q est égal à p.
• $30 < p$: l'hypothèse devient $(p,30) = (Max(q,10), Min(q,30))$. De $Min(q,30) = 30$, on déduit que q vaut plus que 30. On reporte dans $Max(10,q) = p$ et on déduit : $p = q$.
Dans tous les cas, on aboutit à $p = q$. C'est la définition de l'injectivité.

Attention, on ne peut conclure qu'une fois qu'on a étudié tous les cas. C'est une idiotie de dire si p est plus petit que 10, f est injective.
De même, il serait idiot de dire : f est injective sur $[0,10]$, puis sur $[10,30]$ puis sur $[30,+\infty[$ et de prétendre alors conclure sur tout N.

f n'est pas surjective sur $\mathbb{N}^2$ car un couple tel que $(0,0)$ ne peut pas être atteint.

Pour ce qui est de g, pour prouver sa non injectivité, il suffit de trouver deux entiers p et q ayant la même image. On comprend que c'est avec des entiers entre 10 et 30 qu'on va avoir un problème :
$g(15) = (Max(15,30), Min(15,10)) = (30,10) = (Max(18,30), Min(18,10)) = g(18)$
D'autres couples conviennent aussi. Si vous proposez le même que votre voisin, que devrai je conclure ?

MPSI 2	Des relations coefficients racines.	**I.S.05**

On écrit s'il le faut les formules de Viète : $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = s$, $a_1.a_2 + a_1.a_3 + a_1.a_4 + a_2.a_3 + a_2.a_4 + a_3.a_4 = d$ et ainsi de suite. Mais on se souvient surtout que cette formule vient d'une identification entre P sous forme développée et sous forme factorisée : $P(X) = (X - a_1).(X - a_2).(X - a_3).(X - a_4)$.
On dérive cette forme en utilisant la formule $(u.v)' = u'.v + u.v'$ que l'on étend en $(u.v.w)' = (u.v)'.w + u.v.w' = (u'.v + u.v').w + u.v.w'$.
On généralise : $(t.u.v.w.)' = t'.u.v.w + t.u'.v.w + t.u.v'.w + t.u.v.w'$.
On l'applique à des termes du premier degré dont la dérivée vaut 1 :

$P'(X) = 1.(X-a_2).(X-a_3).(X-a_4) + (X-a_1).1.(X-a_3).(X-a_4) + (X-a_1).(X-a_2).1.(X-a_4) + (X-a_1).(X-a_2).(X-a_3).1$
On calcule en a_1 : trois des quatre produits disparaissent :
$P'(a_1) = (a_1-a_2).(a_1-a_3).(a_1-a_4)$.
On calcule aussi en a_2 :
$P'(a_2) = (a_2-a_1).(a_2-a_3).(a_2-a_4)$, puis en a_3 : $P'(a_3) = (a_3-a_1).(a_3-a_2).(a_3-a_4)$ et enfin en a_4 :
$P'(a_4) = (a_4-a_1).(a_4-a_2).(a_4-a_3)$.

On pense ensuite à multiplier ces quatre égalités.
On a alors $\prod_{k=1}^{4} P'(a_k)$ d'un côté.
Mais de l'autre, on a trop de termes.
Chaque $(a_i - a_j)$ a plutôt tendance à se retrouver là deux fois :

	a_2-a_1	a_3-a_1	a_4-a_1	a_3-a_2	a_4-a_2	a_4-a_3
$P'(a_1)$	$-$	$-$	$-$	.	.	.
$P'(a_2)$	$+$	.	.	$-$	$-$	.
$P'(a_3)$	.	$+$	.	$+$	.	$-$
$P'(a_4)$	.	.	$+$	.	$+$	$+$

Chaque terme est donc présent deux fois, et il y a six signes moins, c'est à dire un signe plus *(sauf pour Lannelongue...)*.

On résume : $\boxed{\left(\prod_{i<j}(a_j - a_i)\right)^2 = \prod_{k=1}^{4} P'(a_k)}$

la formule se généraliserait à d'autres degrés, avec un exposant à surveiller et surtout un $(-1)^{n.(n-1)/2}$ ou approchant...

$I.S.05$	MPSI2	178 points	Année 2012/13	$I.S.05$

Pour ce qui est de l'exercice de la corde, traitons le.
On note A et A' les pieds des piquets (donnée : $AA' = 12$).
On note M le milieu de $[A, A']$ (donnée : $AM = 6$).
On note C le sommet du crane d'un élève passant au milieu, sous la corde (inconnue : CM).
On tend cette fois une corde cinquante centimètres plus longue que la corde initiale : $AC = 6,25$.
On applique le théorème de Pythagore dans e triangle (AMC) rectangle en M : $AM^2 + MC^2 = AC^2$.
On effectue l'opération algébrique : $MC = \sqrt{AC^2 - AM^2}$ et son calcul approché : $\sqrt{(6,25)^2 - 6^2} = 1,75$ (c'est en fait une valeur exacte).
Quasiment tous les élèves passent au milieu sans se baisser...

$<\spadesuit(8)>$ On définit : $\varphi = x \longrightarrow \dfrac{\sqrt{3}.x + \sqrt{1-x^2}}{2}$. Donnez son ensemble de définition, son tableau de variations et son ensemble image I. Cette application est elle injective de D dans I ? Est elle surjective de D sur I ? [3 pt.]

$<\spadesuit(9)>$ Indiquez suivant la valeur de b dans $\mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation $\varphi(x) = b$ d'inconnue x. [1 pt.]

$<\spadesuit(10)>$ On rappelle que la dérivée de l'arcsinus est, sur $]-1,1[$: $x \longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Montrez que la dérivée de $x \longrightarrow Arcsin(\varphi(x))$ est la même au signe près. Que pouvez vous en déduire ? [3 pt.]

$<\diamondsuit(20)>$ Montrez qu'une suite périodique de périodes 153 et 24 est périodique de période 3. [3 pt.]

$<\diamondsuit(21)>$ On note S l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \sqrt{x^2+1} & x \\ x & \sqrt{1+x^2} \end{pmatrix}$. Montrez que cet ensemble est stable par multiplication. [3 pt.] Retrouvez alors sans efffort le résultat : la loi $*$ définie sur $\mathbb{R}$ par $a * b = a.\sqrt{1+b^2} + b.\sqrt{1+a^2}$ est associative. [2 pt.]

$<\clubsuit(8)>$ Le coefficient binomial $\binom{24}{17}$ est il un multiple de 24 ? [2 pt.]

$<\spadesuit(11)>$ Représentez graphiquement sur $[-2,4]$ l'application $1_{[-1,3]} + 2.1_{[0,2[} + 1_{\mathbb{Z}}$. *(il s'agit de fonctions indicatrices)* Déterminez l'ensemble image. [3 pt.]

$<\spadesuit(12)>$ Trouvez les racines de $(1+i).X^2 - (7+i).X + 14 + 2.i$ sachant que les deux racines ont la même partie réelle. [3 pt.]

$<\spadesuit(13)>$ On pose : $M = \begin{pmatrix} 1 & . \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & . \end{pmatrix}$. Oui, par malchance, du café est tombé, cachant quelques coefficients. On sait quand même une chose aussi : il existe P inversible vérifiant $M.P = P.D$. Retrouvez alors les nombres cachés sous les taches. [3 pt.] Trouvez une matrice P qui convienne. [2 pt.] Calculez D^n. [1 pt.] Calculez M^{17}. [3 pt.] Calculez $Tr(M^{2012})$. [2 pt.]

$<\heartsuit(22)>$ Calculez $A.B.C$, $A.C.B$ et $C.A.B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. [3 pt.]

$I.S.06$	CHARLEMAGNE — Correction	ANNEE **2012/13**	$I.S.06$

MPSI 2	Le coefficient binomial $\binom{24}{17}$.	**I.S.06**

A priori, je ne peux pas répondre comme ça au premier coup d'oeil. Je n'ai pas de théorème pour cela. Mais ai je besoin de calculer ce coefficient binomial ? Non, pas forcément. Du moins, pas comme l'entendrait l'élève trop zélé et bas de plafond (pléonasme ?).

On revient à la définition, en profitant des symétries :

$\binom{24}{17} = \dfrac{24!}{17!.7!} = \dfrac{24.23.22.21.20.19.18}{1.2.3.4.5.6.7}$ *(c'est aussi* $\binom{24}{7}$*, sept termes en haut, sept termes en bas).*

On simplifie ce qu'on peut $\binom{24}{17} = \dfrac{23.22.21.20.19.18}{2.3.5.7} = \dfrac{23.22.20.19.18}{2.5} = 23.22.2.19.18 = 23.11.19.2^3.3^2$ (finalement, seuls les exposants de 2 et de 3 nous intéressent).

On a 2^3 et 3, c'est suffisant pour construire le facteur 24.

Le binomial $\binom{24}{17}$ **est un multiple de** 24 (rapport : 3.11.19.23 pour ceux que ça intéresse mais je n'en fais pas partie).

MPSI 2	Le polynôme $(1+i).X^2-(7+i).X+14+2.i$.	**I.S.06**

On peut bien sûr chercher les deux racines avec le calcul du discriminant et les formules en $\dfrac{-b+\delta}{2.a}$.

Mais il faut savoir réfélchir avant d'agir (ce qui signifie quand même "réfléchir et agir" au final...). On nous dit que les deux racines ont la même partie réelle : $\alpha+i.\beta$ et $\alpha+i.\gamma$. Leur somme est donc $2.\alpha+i.(\beta+\gamma)$.

Or, la somme des racines vaut $\dfrac{7+i}{1+i}$ (ne pas oublier de diviser par le coefficient dominant, le polynôme est ici de la forme $(1+i).(X-z_1).(X-z_2)$).

On idenfitie : $2.\alpha = \Re e\Big(\frac{(7+i).(1-i)}{2}\Big)$. **La partie réelle commune vaut** 2.

On développe alors $(1+i).(2+i.\alpha)^2-(7+i).(2+i.\alpha)+14+2.i$ dont on annule partie réelle et partie imaginaire pour trouver α.

Ou alors on utilise encore somme et produit des racines pour trouver α et β. Bref, les deux racines cherchées sont $\boxed{2-4.i \text{ et } 2+i}$

Cela étant dit, on allait aussi vite en trouvant un discriminant égal à $-50.i$ *ayant pour racines* $5.(1-i)$ *et* $5.(i-1)$.

MPSI 2	Trois produits matriciels.	**I.S.06**

On pose donc : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule : $A.B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$,

puis $\boxed{A.B.C = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 13 & -9 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{A.C.B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}}$ et enfin $\boxed{C.A.B = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}}$

Voilà trois points vite et bien gagnés. On constate au passage : $Tr((A.B).C) = T(C.(A.B))$ *comme le dit le théorème "du saute mouton". On constate aussi* $Tr(A.B.C) \neq T(A.C.B)$ *car rien n'autorise dans le théorème à glisser* C *entre* A *et* B.

MPSI 2	Les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & . \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & . \end{pmatrix}$.	**I.S.06**

Les deux matrices sont liées par la relation $M = P.D.P^1$. En passant à la trace, ona $Tr(M) = Tr(P.D.P^1) = Tr(P^{-1}.P.D) = Tr(D)$. On n'a donc pas le choix pour D, afin d'avoir la même trace :

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Mais alors, le déterminant de D vaut 6.
Et la relation $\det(M) = \det(P.D.P^{-1}) = \det(P).\det(D).\det(P^{-1}) = \det(D)$ force à avoir égalité des déterminants, d'où $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Les deux matrices ont même trace et même déterminant, on peut partir à la recherche de P avec optimisme, sous la forme $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ . & . \end{pmatrix}$. On trouve par conditions nécessaires qui s'avèrent ensuite suffisantes : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie l'inversibilité de P en calculant son déterminant.

On utilise directement un résultat du cours : $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ pour tout n. Si on doit le prouver, c'est vrai pour n égal à 0 (pure logique) puis 1 (adfinition). Si c'est vrai au rang n, on calcule $D^{n+1} = D^n.D$ et on effectue $\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$, ce qui valide la formule au rang $n+1$.

Pour accéder à M^{17} on a deux chemins : calculer M^2 puis M^4, M^8 et M^{16} par de simples élévations au carré. On multiplie encore par M et on a $M^{17} = \begin{pmatrix} -128878019 & -258018182 \\ 129009091 & 258149254 \end{pmatrix}$. La probabilité de s'être trompé au moins une fois en cours de route étant quasiment égale à 1, je me dirai que l'élève me proposant cette réponse aura fort probablement fait usage de sa calculatrice...

Il vaut mieux donc diagonaliser et écrire : $M^n = P.D^n.P^{-1}$ avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. On aboutit cette fois à $M^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^{n+1} - 2.3^n \\ 3^n - 2^n & 2.3^n - 2^n \end{pmatrix}$.
Il suffit d'inviter le lecteur à conclure, en remplaçant n par 17 sans pousser le calcul plus avant.

Pour $Tr(M^{2012})$, on utlise juste $Tr(M^n) = Tr(D^n)$ et on trouve comme calculé : $Tr(M^{2012}) = 2^{2012} + 3^{2012}$ et on fait l'économie du calcul explicite et sans intérêt.

Comme quoi cette question se traitait même sans avoir explicité P et même M^n.

MPSI 2 | Les matrices $\begin{pmatrix} \sqrt{1+x^2} & x \\ x & \sqrt{1+x^2} \end{pmatrix}$. | **I.S.06**

Une remarque : ces matrices ont pour déterminant 1, et on les inverse en remplaçant x par $-x$.
On prend deux matrices de cette forme : $\begin{pmatrix} \sqrt{1+x^2} & x \\ x & \sqrt{1+x^2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sqrt{1+y^2} & y \\ y & \sqrt{1+y^2} \end{pmatrix}$ et on effectue leur produit. Déjà, dans le produit, on retrouve une structure "croisée" du type $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ en l'occurence :
$\begin{pmatrix} x.y + \sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2} & x.\sqrt{1+y^2} + y.\sqrt{1+x^2} \\ x.\sqrt{1+y^2} + y.\sqrt{1+x^2} & x.y + \sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2} \end{pmatrix}$, que l'on effectue le produit dans un sens ou dans l'autre.
Mais a-t-on la forme exigée pour être dans S, c'est à dire, en posant $z = x.\sqrt{1+y^2} + y.\sqrt{1+x^2}$, a-t-on bien $\sqrt{1+z^2} = x.y + \sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}$.
On calcule donc $1+z^2$ et on trouve $x^2.(1+y^2) + y^2.(1+x^2) + 2.\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}$.
On compare : $(x.y + \sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2})^2 = x^2.y^2 + (1 + x^2 + y^2 + x^2.y^2) + 2.\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}$.
On a donc : $\left(\sqrt{1+z^2}\right)^2 = \left(x.y + \sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}\right)^2$, sachant que $1+z^2$ est déjà assurément positif.
Pour vraiment conclure à l'égalité de $\sqrt{1+z^2}$ et $x.y + \sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}$, il faut encore prouver que

ces deux réels ont le même signe.
On écrit juste : $\sqrt{1+x^2} \geqslant \sqrt{x^2} = |x|$ et $\sqrt{1+y^2} \geqslant \sqrt{y^2} = |y|$ et on multiplie terme à terme es inégalités entre réels positifs : $\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2} \geqslant |x.y|$.
On a juste à compléter avec $|x.y| \geqslant -x.y$ et en bascalant de l'autre côté, on a exactement $x.y + \sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2} \geqslant 0$.
Les deux réels sont positifs et ont le même carré, ils sont égaux.
$\begin{pmatrix} x.y+\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2} & x.\sqrt{1+y^2}+y.\sqrt{1+x^2} \\ x.\sqrt{1+y^2}+y.\sqrt{1+x^2} & x.y+\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2} \end{pmatrix}$ est bien de la forme $\begin{pmatrix} \sqrt{1+z^2} & z \\ z & \sqrt{1+z^2} \end{pmatrix}$.

La vraie difficulté est déjà de se demander ce qu'il fallait vraiment prouver.

On note donc $*$ la loi définie par $a*b = a.\sqrt{1+b^2}+b.\sqrt{1+a^2}$,et on pose : $S_a = \begin{pmatrix} \sqrt{1+a^2} & a \\ a & \sqrt{1+a^2} \end{pmatrix}$ pour tout a. On a prouvé : $S_a.S_b = S_{a*b}$.
On prend alors a, b et c et on calcule deux produits :
$(S_a.S_b).S_c = S_{(a*b)}.S_c = S_{(a*b)*c}$ et $S_a.(S_b.S_c) = S_a.S_{(b*c)} = S_{a*(b*c)}$
Comme le produit matriciel est associatif, on a $S_{(a*b)*c} = S_a.S_b.S_c = S_{a*(b*c)}$ sans parenthèses sur le produit du milieu.
On identifie : $\boxed{(a*b)*c = a*(b*c)}$

MPSI 2	Les suites de périodes 153 et 24.	**I.S.06**

Il s'agit de suites a vérifiant $a_{153+n} = a_n$ _et aussi $a_{n+24} = a_n$ pour tou n. On veut montrer : $a_{n+3} = a_n$ pour tout n.
On écrit une identité de Bézout entre 123 et 24 : $\boxed{3 = 3.153 - 19.24}$
D'où vient elle ? De $153 = 6.24 + 9$, $24 = 2.9 + 6$ et $9 = 1.6 + 3$ que l'on remonte.
On écrit alors : $a_{n+3} = a_{n+3.153-19.24} = a_{n+3.153} = a_n$ en utilisant la période 24 et la période 153.
La suite est périodique de période 3.

MPSI 2	L'application $x \longrightarrow (\sqrt{3}.x + \sqrt{1-x^2})/2$.	**I.S.06**

Le domaine de définition D de cette application est $[-1, 1]$ puisqu'il faut que $1 - x^2$ reste positif.
Sur ce domaine, l'application est continue, dérivable, sauf quand $1 - x^2$ s'annule (car la racine carrée n'est pas dérivable en 0. En dérivant $x \longrightarrow \sqrt{1-x^2}$ sous la forme $x \longrightarrow (1-x^2)^{1/2}$ on trouve $x \longrightarrow \dfrac{1}{2}.\dfrac{-2.x}{\sqrt{1-x^2}}$ et on a finalement $\varphi' = x \longrightarrow \dfrac{\sqrt{3}.\sqrt{1-x^2} - x}{2.\sqrt{1-x^2}}$.
La dérivée s'annule et change de signe pour x solution de l'équation $x = \sqrt{3.(1-x^2)}$. Ce x est positif, et solution de $x^2 = 3 - 3.x^2$. C'est donc $\sqrt{3}/2$ (la positivité de x est due à sa coïncidence avec une racine carrée et elle élimine $-\sqrt{3}/2$).
La valeur en $\sqrt{3}/2$ est 1, on a de la chance.
Le tableau de variations donne donc une application d'abord croissante, puis décroissante.
- **croissante de** $[-1, \sqrt{3}/2]$ **dans** $[-\sqrt{3}/2, 1]$
- **décroissante de** $[\sqrt{3}/2, 1]$ **dans** $[1, 1/2]$**.**

L'ensemble image est $[-\sqrt{3}/2, 1]$ par le tableau de variations.
L'application n'est pas injective, puisque la valeur $\sqrt{3}/2$ par exemple est atteinte deux fois *(voir tableau, ou comparer $\varphi(1)$ et $\varphi(1/2)$)*.

Le tableau de variations *(encore lui)* nous dit combien l'équation $\varphi(x) = b$ a *(pour b donné)* de solutions *(suivant la valeur de b)* :

a	$]-\infty, -\sqrt{3}/2[$	$[-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2[$	$[\sqrt{3}/2, 1[$	1	$]1, +\infty[$
nombre de solution(s)	0	1	2	1	0

On dérive ensuite une composée : $x \longrightarrow \varphi(x) \longrightarrow Arcsin(\varphi(x))$. On va avoir le produit de $\varphi'(x)$ et de $\dfrac{1}{\sqrt{1+(\varphi(x))^2}}$. Il nous faut donc élever $\varphi(x)$ au carré. On trouve $\dfrac{3.x^2+1-x^2+2.x.\sqrt{3.(1-x^2)}}{4}$.
On soustrait à 1 et on a $\dfrac{3-2.x^2-2.x.\sqrt{3.(1-x^2)}}{4}$ qu'il faudra encore mettre sous une racine.
Le produit avec $\varphi'(x)$ donne au final $\dfrac{\sqrt{3.(1-x^2)}-x}{2.\sqrt{1-x^2}}.\dfrac{2}{\sqrt{3-2.x^2-2.x.\sqrt{3.(1-x^2)}}}$.
Et l'énoncé prétend que ceci se simplifie ?
Oui ! $\sqrt{3-2.x^2-2.x.\sqrt{3.(1-x^2)}}$ est bien égal à $\sqrt{3.(1-x^2)}-x$ au signe près.
Il suffit de comparer leurs carrés. Pour l'un : $3-2.x^2-2.x.\sqrt{3.(1-x^2)}$ et pour l'autre $3.(1-x^2)+x^2-2.x.\sqrt{3}.\sqrt{1-x^2}$.
On aura donc bien $(Arcsin \circ \varphi)'(x)$ égal à $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ au signe près.

En regardant les variations, on comprend qu'il va y avoir égalité sur $[-1, \sqrt{3}/2]$ puis changement de signe sur $[\sqrt{3}/2, 1]$.

Attention, ne confondez pas $Arcsin'(\varphi(x))$, $Arcsin(\varphi'(x))$ et $(Arcsin \circ \varphi)'(x)$. Et rappelons que $(Arcsin(\varphi(x))'$ ne veut rien dire. Vous aurez beau être douze, quinze, quarante à l'écrire comme des ânes, ça ne voudra rien dire...

Que peut on conclure ? Que $Arcsin \circ \varphi$ est égale à $Arcsin$ puisque les deux ont la même dérivée sur $[-1, \sqrt{3}/2]$?
Non.
Deux fonctions qui ont la même dérivée sur un intervalle ne sont pas forcément égales. Elles diffèrent d'une constante...

En fait, posez $x = \sin(\theta)$ et vous avez alors $\varphi(x) = \sin(\theta + \pi/6)$, ce qui peut expliquer bien des choses, si on a le recul que vous n'avez pas en trigonométrie...

MPSI 2	Une fonction faite d'indicatrices.	**I.S.06**

Rien de difficile pour le graphe de $1_{[-1,3]} + 2.1_{[0,2[} + 1_{\mathbb{Z}}$. Il suffit de regarder les trois graphes et de les additionner.
Deux graphes faits de "rectangles" ayant une partie commune qui fera monter la fonction jusqu'à 3 et un graphe fait de points suspendus en l'air.
Encore une fois, c'est avec un tabeau qu'on explique le mieux les choses. On regarde déjà pour les points non entiers et on s'occupe des entiers ensuite :

x	$]-2,-1[$	$]-1,0[$	$]0,2[$	$]2,3[$	$]3,4[$
$1_{[-1,3]}(x)$	0	1	1	1	0
$1_{[0,2[}(x)$	0	0	1	0	0
$f(x)$	0	1	3	1	0

On ajoute à celà $1_{\mathbb{Z}}$ qui fait remonter d'une unité les entiers. On donne donc la liste des images des entiers de notre intervalle :

-2	-1	0	1	2	3	4
1	2	4	4	2	2	1

La valeur en 2 n'est que de 2 car l'intervalle $[0, 2[$ est ouvert en 2. Ensemble image : $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

$I.S.06$	MPSI2	215 points	Année 2012/13	$I.S.06$

$I.S.07$	CHARLEMAGNE MPSI**2**	Mardi 23 octobre	ANNEE **12/13**	$I.S.07$

$< \heartsuit(23) >$ Rappelez la définition de α est le plus petit élément de A pour une relation d'ordre notée $\leqslant$ sur un ensemble E. 1 pt.
Démontrez l'unicité (en cas d'existence) du plus petit élément d'une partie A. 1 pt.

$< \heartsuit(24) >$ Déterminez l'équation de la droite passant par $A(2,6)$ et $B(-2,13)$, en utilisant la nullité du déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$. 1 pt.

$< \heartsuit(25) >$ Calculez la partie réelle de $\displaystyle\sum_{k=5}^{k=15}(1+i)^k$. 3 pt.

$< \diamondsuit(22) >$ On note T l'ensemble des matrices carrées de taille 2 à coefficients entiers entre -3 et 3. Déterminez le nombre d'éléments de T. 1 pt.
$< \diamondsuit(23) >$ Donnez le maximum et le minimum de l'application déterminant et de l'application trace de T dans $\mathbb{R}$. 3 pt.
$< \diamondsuit(24) >$ On note A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, déterminez le maximum et le minimum sur T des applications $M \longrightarrow \det(M.A)$, $M \longrightarrow Tr(M.A)$, $M \longrightarrow \det(A.M - M.A)$ et $M \longrightarrow Tr(A.M - M.A)$. 5 pt.
Vous avez le droit de laisser de côté une de ces questions.

$< \spadesuit(14) >$ $\dbinom{43}{17}$ est il un multiple de 33 ? 2 pt.

$< \heartsuit(26) >$ Triez les réels suivants par ordre croissant : $\tan(21.\pi/13)$, $\tan(43.\pi/7)$, $\tan(121.\pi/15)$, $\tan(143.\pi/15)$ et $\tan(252.\pi/7)$. 3 pt.

$< \diamondsuit(25) >$ Calculez $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x.\big(1+\ln(x^{\ln(x)})\big)}$. 3 pt.

$< \clubsuit(9) >$ Avec combien de chiffres s'écrit l'entier $\displaystyle\prod_{k=-50}^{k=50} 3.k$? 1 pt.

$< \clubsuit(10) >$ Quel est le signe de $\displaystyle\prod_{k=-20}^{k=20}(3.k-1)$? 1 pt. Quel est son chiffre des unités en écriture décimale ? Quel est l'exposant de 5 dans son écriture en produit de facteurs premiers ? 3 pt.

$< \diamondsuit(26) >$ On définit la suite a par $a_0 = a_1 = 2$ et $a_{n+2} = 3.a_{n+1} + 10.a_n - 12$ pour tout n. On pose alors $a_n = b_n + 1$ pour tout n. Quelle est la relation vérifiée par la suite b ? 1 pt.
On pose alors : $B_n = \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$ pour tout n. Trouvez la matrice M vérifiant $B_{n+1} = M.B_n$. 1 pt.
Calculez sa trace et son déterminant. 1 pt. Trouvez D matrice diagonale de taille 2 ayant même trace et même déterminant que M. 1 pt.
Trouvez P de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ . & . \end{pmatrix}$ vérifiant $M.P = P.D$. 1 pt.
Calculez alors M^n pour tout entier naturel n et déduisez la forme de a_n pour tout n. 2 pt.

$I.S.07$	CHARLEMAGNE — Correction — ANNEE **2012/13**	$I.S.07$

MPSI 2	Question de cours : plus petit élément.	**I.S.07**

Définition de α est le plus petit élément de A :
$\alpha \in A$ et $\forall a \in A, \alpha \leqslant a$ *(il est dans A et les autres sont plus grands que lui)*

On suppose qu'il y a deux plus petit élément : α et β. On traduit :

$\alpha \in A$	$\forall a \in A, \beta \leqslant a$	donc $\beta \leqslant \alpha$
$\forall a \in A, \alpha \leqslant a$	$\beta \in A$	donc $\alpha \leqslant \beta$

par antisymétrie de l'ordre : $\alpha = \beta$.

Je vous ai déjà dit que les tableaux c'était fort pratique pour présenter des résultats et même des raisonnements ?

MPSI 2	Question de cours : une droite et une série géométrique.	**I.S.07**

Un point M est sur la droite (AB) si et seulement si les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Ceci revient à annuler l'aire du parallélogramme construit à partir de ces trois points, c'est à dire à annuler le déterminant $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$. On annule donc $\begin{vmatrix} x-2 & -2-2 \\ y-6 & 13-6 \end{vmatrix}$. On trouve $\boxed{7.x + 4.y = 38}$

Et pour montrer qu'on n'est pas crétin, on vérifie en A $(7.2 + 4.6 = 38)$ et en B $(7.(-2) + 4.13 = 38)$
On pouvait aussi trouver le coefficient directeur par théorème de Thalès, ce que les physiciens écrivent $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{13-6}{-2-2}$.

La quantité $\displaystyle\sum_{k=5}^{15}(1+i)^k$ est une série géométrique de premier terme écrit $(1+i)^5$ et de premier terme à venir $(1+i)^{16}$ *(et de raison $(1+i)$ différente de 1).*
Sa somme vaut donc $\dfrac{(1+i)^5 - (1+i)^{16}}{1-(1+i)}$. On trouve donc $\dfrac{(1+i)^{16} - (1+i)^5}{i}$.
Il faut ecore extraire la partie imaginaire du numérateur (puisque on divise par i).
Mais le complexe $(1+i)$ n'est autre que $\sqrt{2}.e^{i.\pi/4}$.
Le numérateur devient $2^8.e^{4.i.\pi} - 4.\sqrt{2}.e^{i.5.\pi/4}$. On trouve 2^8 *(de partie imaginaire nulle)* et $4.\sqrt{2}.e^{i.\pi/4}$ *(de partie imaginaire 4).*
La partie réelle demandée vaut donc $\boxed{4}$
Pour les masochistes (ou les non-physiciens qui n'auraient pas le réflexe de convertir les complexes en amplitude et phase) : la somme vaut $4 - 260.i$ tous calculs faits.

MPSI 2	Les matrices à coefficients entre -3 et 3.	**I.S.07**

Il s'agit donc des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c et d dans $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. On a donc sept choix pour a, sept choix pour b, sept choix pour c et sept choix pour d. Ces choix sont indépendants, d'où $\boxed{7^4}$ matrices. De tête : 2401.

• L'application trace calcule des sommes du type $a + d$, qui peuvent aller de -6 à 6 *(valeurs atteintes).*
• L'application déterminant calcule des combinaisons du type $a.d - b.c$ avec $a.d$ et $b.c$ entre -9 et 9. On optimise avec $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.
• L'application trace calcule des sommes du type $a + d$ qui peuvent varier entre -6 et 6 *(valeurs atteintes).*
• Pour le déterminant de $A.M$, on rappelle la formule : $\det(A.M) = \det(A).\det(M)$, qui donne ici

$-13.\det(M)$. Comme $\det(M)$ varie entre -18 et 18, ce produit varie entre -234 et 234 *(valeurs atteintes pour les matrices qui optimisent déjà le déterminant, mais en renversant les rôles).*
• La trace de $A.M$ se calcule et vaut $a+5.b+3.c+2.d$. On la maximise en prenant a, b, c et d égaux à 3 *(valeur atteinte : 33)*. On la maximise en prenant a, b, c et d tous égaux à -3 *(valeur atteinte : -33).*
• Le déterminant de $A.M-M.A$ est une horreur de polynôme du second degré en quatre variables a, b, c et d : $15.a^2-25.b^2-9.c^2+15.d^2+5.a.b+3.a.c+30.a.d+31.b.c-5.b.d+3.c.d$ pour ceux que ça intéresse *(je doute qu'il y en ait, ceux là devraient être en P.T.S.I.).* Trouver le maximum et le minimum ne semble pas simple. On laisse donc cette question de côté, grâce au Joker.
Toutefois, une recherche avec Maple me permet de vous donner le maximum et le minimum : 659 et -585.
• Bien plus simple est le cas de la trace de $A.M-M.A$: elle est nulle, puisque c'est $Tr(A.M)-Tr(M.A)$ par linéarité, et la propriété classique de la trace permet de conclure.

On résume avec un tableau *(tiens, je n'y aurais pas pensé...).*

	det	Tr	$M\longrightarrow\det(A.M)$	$M\longrightarrow Tr(A.M)$	$\det(A.M-M.A)$	$Tr(A.M-M.A)$
Max.	18	6	234	33	659	0
	$\begin{pmatrix}3&-3\\3&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&.\\.&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3&3\\3&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}$	?	toutes
Min.	-18	-6	-234	-33	-585	0
	$\begin{pmatrix}-3&3\\3&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3&.\\.&-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&-3\\3&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3&-3\\-3&-3\end{pmatrix}$	?	toutes

MPSI 2 | Le coefficient binomial $\binom{43}{17}$. | **I.S.07**

Par définition, ce coefficient est le quotient de $43.42.41\dots27$ (dix sept termes) par $17!$ (là aussi dix sept termes).
On va y pourchasser simplement les facteurs 3 et les facteurs 11.

Au numérateur, il y a des 3

dans	27	30	33	36	39	42	
exposant	3	1	1	2	1	1	total : 9

Au dénominateur, il y a des 3

dans	3	6	9	12	15	
exposant	1	1	2	1	1	total : 6

Il reste 3^3, c'est bon, mais il faut chercher de même les facteurs 11 (on auraît dû commencer par eux).
Au numérateur : le seul 11 est dans 33. Et au dénominateur, il y a aussi 11.
Au final, il ne reste aucun facteur 11, donc pas de 33 dans $\begin{pmatrix}43\\17\end{pmatrix}$.

Et pour ceux qui se seront inutilement fatigué à tout calculer : $2.3^3.7.19.29.31.37.41.43$, juste pour vérifier.
Enfin, ceux qui auront écrit : "$\begin{pmatrix}43\\17\end{pmatrix}$ vaut 421171648758 et n'est donc (?) pas un multiple de 33", je dirai juste "vous avez raison, mais vous avez du utiliser votre machine, quel est l'intérêt pédagogique ?

MPSI 2 | Cinq tangentes à trier. | **I.S.07**

Toutes les tangentes à calculer existent, on ne tombe pas sur des réels de la forme $\frac{\pi}{2}+k.\pi$ avec k entier.
Globalement sur $\mathbb{R}$ la tangente n'est pas monotone, mais elle l'est sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. On va donc ramener toutes les valeurs dans cet intervalle par π-périodicité *(posez de simples divisions euclidiennes comme à l'école élémentaire)*

$21.\pi/13$	$43.\pi/7$	$121.\pi/15$	$143.\pi/15$	$252.\pi/7$	angle
2	$6.\pi$	$8.\pi$	$10.\pi$	$36.\pi$	$k.\pi$
$-5.\pi/13$	$\pi/7$	$\pi/15$	$-7.\pi/15$	0	réduit

Déjà, on dit merci. L'un des réels sera nul, deux seront négatifs et deux positifs. Ensuite, $tan(\pi/15)$ est évidemment plus petit que $\tan(\pi/7)$. Enfin, il faut trier $\frac{5}{13}<\frac{7}{15}$ par produit en croix, puis tenir compte du signe moins...

$-7.\pi/15$	$-5.\pi/13$	0	$\pi/15$	$\pi/7$
$\tan(143.\pi/15)<$	$\tan(21.\pi/13)<$	$\tan(252.\pi/7)=0$	$<\tan(\pi/15)$	$<\tan(43.\pi/7)$

Avouez qu'avec un tableau, les résultats se lisent facilement, et même le raisonnement se perçoit bien...

MPSI 2	L'intégrale $\int_1^2 \frac{dx}{x.\left(1+\ln(x^{\ln(x)})\right)}$.	**I.S.07**

L'intégrale ne pose pas de problème d'existence, puisque la fonction *(très laide)* existe *(x strictement positif)* et est continue sur le segment $[1,2]$. Mais quand même, on se demande qui a bien pu inventer cette intégrale, et surtout estimer que son calcul était de votre niveau. Jusqu'à ce qu'on comprenne : $\ln(x^{\ln(x)})$ n'est autre que $(\ln(x))^2$ (par $\ln(x^a) = a.\ln(x)$). Et on est donc face à un simple $\dfrac{u'}{1+u^2}$!

On calcule donc : $\boxed{\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x.(1+\ln(x^{\ln(x)}))} = \Big[Arctan(\ln(x))\Big]_{x=1}^{x=2} = Arctan(\ln(2))}$

Il est assez étrange de confier alors pour vérification ce calcul à $Xcas$ (une version libre de $Maple$) ; la réponse ne tarde pas : $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\ln(1+\ln(2)) - \ln(\ln(2)-1)}{2}$. Ce qui est rassurant, c'est de constater, avec une approche et un esprit Bac+3, que c'est bien aussi $Arctan(\ln(2))$. J'aimerais bien savoir ce que $Maple$ répond pour sa part.

MPSI 2	Deux entiers du type $\prod_{k=-50}^{50}(3.k)$.	**I.S.07**

Le premier de ces produits est $(-150).(-147).(-143)\dots 143.147.150$ *(produit des entiers multiples de 3)*. Facile, **ce nombre est nul** *(il y a un facteur 0 dans le produit)*. Il s'écrit donc avec un seul chiffre : 0.

L'éntier $\displaystyle\prod_{k=-20}^{20}(3.k+1)$ est le produit $(-59).(-56).(-53)\dots 55.58.61$. Il est fait de quarante et un termes, dont les premiers sont négatifs et les derniers positifs. Il faut donc connaître le nombre de facteurs négatifs. Il correspondent à k de -20 à -1. Il y en a vingt. **Le produit est donc positif**.

Ensuite, dans cette liste, peu sont des multiples de 5. Un sur cinq...
En voici la liste : $[-50, -35, -20, -5, 10, 25, 40, 55]$. Chacun apporte un facteur 5 dans le produit. Sauf -50 et 25 qui en apportent chacun deux.
L'exposant total de 5 est donc $8+2$ c'est à dire 10.

A part ça, ce nombre n'a aucun intérêt.

MPSI 2	La suite $a_{n+2} = 3.a_{n+1} + 10.a_n - 12$.	**I.S.07**

On doit pouvoir calculer de proche en proche les termes de (a_n).
On remplace les a_k par b_k+1 : $b_{n+2}+1 = 3.(b_{n+1}+1) + 10.(b_n+1) - 12$. Il reste $b_{n+2}+1 = 3.b_{n+1} + 10.b_n + 1$ soit encore $b_{n+2} = 3.b_{n+1} + 10.b_n$.
On a une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

On calcule : $B_{n+1} = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ 3.b_{n+1} + 10.b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$
La matrice M est celle que l'on voit ci dessus.

Sa trace vaut 3 et son déterminant vaut -10.
Pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ait même trace et même déterminant, il faut : $a+b=3$ et $a.b=-10$.
Les deux nombres a et b sont les racines de $X^2 - 3.X - 10$, de discriminant 49. Les réels a et b valent

5 et -2. On choisit $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ (ou $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$).

On trouve la matrice P sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ indiquée en résolvant un système de quatre équations à seulement deux inconnues *(on trouve donc a et b grâce à deux équations, et on reporte dans les deux autres pour vérifier)* :
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Quitte à multiplier par P^{-1} à droite, on a $M = P.D.P^{-1}$ et $M^n = P.D^n.P^{-1}$ par récurrence sur n et $D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ par une autre récurrence.

On effectue le calcul : $\boxed{M^n = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2.5^n + 5.(-2)^n & 5^n - (-2)^n \\ 10.5^n - 10.(-2)^n & 5^{n+1} + +2.(-2)^n \end{pmatrix}}$ La relation $M.B_0 = B_n$ permet d'extraire b_n par lecture de la première composante : $\boxed{b_n = \frac{3.5^n + 4.(-2)^n}{7}}$

Pour avoir a_n on ajoute 1.

$I.S.08$	CHARLEMAGNE MPSI**2**	Mardi 13 novembre	ANNEE **12/13**	$I.S.08$

$<\heartsuit(27)>$ Rappelez la définition de "(a_n) converge vers α" et montrez que la somme de deux suites convergentes converge aussi. 2 pt.

Calculez explicitement pour ε donné un N_ε pour la convergence de la suite $\left(\dfrac{2.n-3}{4.n+1}\right)$ vers sa limite (que vous devrez préciser). 2 pt.

Calculez explicitement pour ε donné un N_ε pour la convergence de la suite $\left(\dfrac{2.n+3}{4.n^2+1}\right)$ vers sa limite (que vous devrez préciser). 2 pt.

$<\diamondsuit(27)>$ Résolvez sur $\mathbb{R}^+$: $Arctan'(2.x-1)=\ln'(3.x+1)$. 2 pt.

$<\spadesuit(15)>$ Pouvez vous compléter : $M=\begin{pmatrix}2 & .\\ . & .\end{pmatrix}$ sachant : $Tr(M)=4$, $Tr(A.M)=-1$ et $Tr(A^2.M)=-14$ avec $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. 3 pt. Calculez $Tr(A.M.A)$. 1 pt.

$<\spadesuit(16)>$ Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. dérivez $x\longrightarrow\displaystyle\int_0^x f(t).e^{x-t}.dt$. 3 pt.

$<\diamondsuit(28)>$ Sachant que $\sin(\theta)$ est entre $2/3$ et $13/19$, encadrez finement $\sin^2(2.\theta)$. 2 pt.

$<\diamondsuit(29)>$ Déterminez le signe de la dérivée seconde de $t\longrightarrow\ln(1+e^t)$. 1 pt. Montrez alors $\ln(1+e^t)\geqslant\dfrac{t+\ln(4)}{2}$ pour tout t. 2 pt.

$<\diamondsuit(30)>$ On définit : $f=x\longrightarrow Arctan(2.x-1)$ et $g=x\longrightarrow\ln(3.x+1)$.
Résolvez sur $\mathbb{R}^+$: $f'(x)=g'(x)$. 2 pt.

$<\heartsuit(28)>$ Déterminez $Sup(\{\cos^2(x)+\sin^2(x)|x\in\mathbb{R}\})$ ainsi que $Sup(\{\cos^2(x)+\sin^2(\theta)|(x,\theta)\in\mathbb{R}^2\})$ et $Sup(\{\cos^2(x)+\sin^2(\theta)|x\in\mathbb{R}\})$. 4 pt.

$<\spadesuit(17)>$ On définit la suite récurrente u par $u_0=2$ et $u_4=5$ donnés et $u_{n+2}=4.u_{n+1}+5.u_n$ pour tout n. On pose alors $U_n=\begin{pmatrix}u_n\\ u_{n+1}\end{pmatrix}$ pour tout n. Trouvez la matrice M vérifiant $U_{n+1}=M.U_n$ pour tout n. 1 pt. Montrez que M se diagonalise en $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ avec l'aide de la matrice de passage $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$. 1 pt. Exprimez alors u_n comme fonction de n. 2 pt. Calculez u_1. 1 pt.

MPSI 2 | Question de cours : somme de suites convergentes. Exemples explicites de convergence. | **I.S.08**

On part de la convergence de (a_n) vers α et de (b_n) vers β *(pas de raison que ce soit la même limite)* et on vise la convergence de $(a_n + b_n)$ vers $\alpha + \beta$:

• $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \Big(n \geqslant N_\varepsilon \ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| \leqslant \varepsilon\Big)$

• $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists\, M_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \Big(n \geqslant N_\varepsilon \ \Rightarrow\ |b_n - \beta| \leqslant \varepsilon\Big)$

∘ $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists\, S_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \Big(n \geqslant S_\varepsilon \ \Rightarrow\ |a_n + b_n - \alpha - \beta| \leqslant \varepsilon\Big)$

Pour ε donné, on veut $|a_n - \alpha + b_n - \beta| \leqslant \varepsilon$, pour n “assez grand”.
On écrit juste : $|a_n + b_n - \alpha - \beta| \leqslant |a_n - \alpha| + |b_n - \beta|$ et on exige $n \geqslant N_{\varepsilon/2}$ et $n \geqslant M_{\varepsilon/2}$. On a alors $|a_n - \alpha| \leqslant \varepsilon/2$ et $|b_n - \beta| \leqslant \varepsilon/2$. En mettant tout bout à bout, on a alors $|a_n - \alpha + b_n - \beta| \leqslant 2.\varepsilon/2 = \varepsilon$ comme requis.
On trouve donc un S_ε convenable, et c'est $\boxed{Max(N_{\varepsilon/2}, M_{\varepsilon/2})}$ (indice pour garantir à la fois $n \geqslant N_{\varepsilon/2}$ **et** $n \geqslant M_{\varepsilon/2}$).

On prend un exemple explicite : $u_n = \dfrac{2.n - 3}{4.n + 1}$. On va montrer qu'elle converge. Mais vers quoi ? Vers $\dfrac{1}{2}$. On a alors $u_n - \dfrac{1}{2}| = |\dfrac{2.(2.n - 3) - (4.n + 1)}{2.(4.n + 1)}| = |\dfrac{5}{8.n + 2}|$.
On veut alors, pour ε donné, rendre $\dfrac{5}{8.n + 2}$ plus petit que ε. Par simple calcul algébrique sur les inéquations *(tout est positif)*, on arrive à $n \geq \dfrac{5 - 2.\varepsilon}{8.\varepsilon}$ *(ε est strictement positif)*. On posera donc $N_\varepsilon = \frac{5-2.\varepsilon}{8.\varepsilon}$ (ou même $\boxed{N_\varepsilon = \left[\frac{5-2.\varepsilon}{8.\varepsilon}\right] + 1}$ si on tient à avoir un entier). Et on rédige dans le sens $n \geqslant N_\varepsilon \ \Rightarrow\ \ldots\ \Rightarrow\ \ldots\ \Rightarrow\ |u_n - 1/2| \leqslant \varepsilon$.

Cette fois, la suite est définie par $u_n = \dfrac{2.n + 3}{4.n^2 + 1}$. Sa limite est 0. On veut donc, pour ε donné, avoir $|u_n - 0| \leqslant \varepsilon$, ce qui se réduit à $2.n + 3 \leqslant 4.n^2.\varepsilon + \varepsilon$. Par passage de l'autre côté, on demande que le trinôme $4.\varepsilon.n^2 - 2.n + \varepsilon - 3$ soit positif. Ceci revient à se placer à l'extérieur des racines *(parabole orientée vers “le haut”)*. Comme l'exigence est du type “n est plus grand que”, on demande donc à n de dépasser la plus grande des deux racines : $\dfrac{2 + \sqrt{1 + 16.(3 - \varepsilon)}}{4.\varepsilon}$. C'est ce nombre là qui va s'appeler N_ε. Ou l'arrondi à l'entier supérieur : $\boxed{1 + \left[\dfrac{2 + \sqrt{1 + 16.(3 - \varepsilon)}}{4.\varepsilon}\right]}$

MPSI 2 | Deux équations qui se ressemblent beaucoup, avec $Arctan'(2.x - 1)$. | **I.S.08**

• Première équation : $Arctan'(2.x - 1) = \ln'(3.x + 1)$. Sur $\mathbb{R}^+$, tout existe sans problème. On rappelle : $Arctan' = t \longrightarrow \dfrac{1}{1 + t^2}$ et $\ln' = t \longrightarrow \dfrac{1}{t}$. L'équation s'écrit donc $\dfrac{1}{1 + (2.x - 1)^2} = \dfrac{1}{3.x + 1}$. On effectue des produits en croix : $(2.x - 1)^2 + 1 = 3.x + 1$, on développe, on a une équation du second degré : $4.x^2 - 7.x + 1 = 0$. On calcule discriminant : $\Delta = 49 - 16 = 33$ on pose donc $\delta = \sqrt{33}$. Des deux racines : $\boxed{S = \left\{\frac{7-\sqrt{33}}{8}, \frac{7+\sqrt{33}}{8}\right\}}$

• L'autre équation. On dérive la composée $x \longrightarrow 2.x-1 \longrightarrow Arctan(2.x-1)$ en $x \longrightarrow \dfrac{2}{1+(2.x-1)^2}$.

On dérive l'autre composée $x \longrightarrow 3.x+1 \longrightarrow \ln(3.x+1)$ en $x \longrightarrow \dfrac{3}{3.x+1}$.

L'équation devient $\dfrac{2}{1+(2.x-1)^2} = \dfrac{3}{3.x+1}$ et on trouve cette fois $\boxed{S = \left\{\frac{9-\sqrt{33}}{12}, \frac{9+\sqrt{33}}{12}\right\}}$

Cet exercice vous permet il enfin de comprendre la différence entre $f'(u(x))$ et $(x \longrightarrow f(u(x)))'$ (et l'absence de signification de vos $(f(u(x)))'$) ?
Si vous ne comprenez toujours pas : $f'(u(x))$ consiste à calculer d'abord f' (en une variable libre x, t ou y, c'est comme ous voulez) puis à la calculer en $u(x)$. Pour $f \circ u'(x)$, on détermine $f(u(x))$ et on dérive par rapport à x.

MPSI 2	La matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.	**I.S.08**

L'intitulé de notre question donne déjà la forme de la matrice ? Non, on ne peut pas deviner au premier coup d'oeil.

Toutefois, la forme $\begin{pmatrix} 2 & . \\ . & . \end{pmatrix}$ et l'information $Tr(M) = 4$ donne déjà $\begin{pmatrix} 2 & . \\ . & 2 \end{pmatrix}$.

On pose alors $\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$ et on calcule : $A.M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-b & \\ . & 2.a+2 \end{pmatrix}$. On égalise la trace à -1 : $2.a - b + 2 = -1$.

Attention, on n'écrit pas $Tr(A.M) = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}\right) = Tr\begin{pmatrix} 2-b & \\ . & 2.a+2 \end{pmatrix} = 2.a - b + 4 = -1.$
C'est une erreur de logique grossière. Je la tolèrerai dans les premiers devoirs, mais je finirai vite par m'énerver si vous persistez à écrire des choses de ce niveau.
Où est l'erreur ? Mais elle est énorme, alors même que vos professeurs de Terminable aient pu écrire des incohérences pareilles, et alors que vous croiserez même des professeurs de mathématiques écrivant cette ineptie.
Je m'explique : les premiers signes "égale" ont valeur de calcul. Ce sont des affirmations toujours vraies ; le dernier signe "égale" est une équation, une condition qui n'est vraie que si a et b sont bien choisis...
Votre phrase commence comme des descriptions/affirmations et finit sur le mode question.

On complète même le calcul :
$Tr(A^2.M) = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2-b & a-2 \\ 4+b & 2.a+2 \end{pmatrix}\right) = Tr\begin{pmatrix} -2-2.b & \\ . & 4.a-2 \end{pmatrix} = 4.a - 2.b - 4.$

On a donc un système : $\begin{cases} 2.a & -b & +4 & = -1 \\ 4.a & -2.b & -4 & = -14 \end{cases}$.

Mais ce système est dégénéré. On a finalement deux fois la même équation.
Alors, on peut calculer M ?
Pas forcément. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est une des possibilités.
Mais toutes les matrices de la forme $\boxed{\begin{pmatrix} 2 & a \\ 2.a+5 & 2 \end{pmatrix}}$ conviennent aussi, comme $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

On a une infinité de solutions. Et il fallait non seulement calculer, mais aussi prendre une initiative.

Peut on quand même calculer rapidement $Tr(A.M.A)$? Oui, grâce à la formule connue $Tr(U.V) = Tr(V.U)$, on a $\boxed{Tr(A.M.A) = Tr(A.(A.M)) = Tr(A^2.M) = -14}$

MPSI 2	L'intégrale $x \longrightarrow \int_0^x f(t).e^{x-t}.dt$.	**I.S.08**

Pour chaque valeur de x donné, l'intégrale se calcule, par continuité de l'application $t \longrightarrow f(t).e^{x-t}$ sur le segment $[0, x]$ *(qui est éventuelement présenté dans le mauvais sens).*
On ne peut pas dériver si simplement, car x est caché à de multiples emplacements plus ou moins accessibles dans cette intégrale.
Mais écrivons la $e^x.\displaystyle\int_0^x f(t).e^{-t}.dt$ *(par propriété de l'exponentielle et linéarité de l'intégrale)* et dérivons la comme un produit d'applications dérivables.
On trouve alors $x \longrightarrow e^x.\displaystyle\int_0^x e^{-t}.f(t).dt + e^x.e^{-x}.f(x)$ en rappelant que $x \longrightarrow \displaystyle\int_0^x g(t).dt$ se dérive en $x \longrightarrow g(x)$ et pas autre chose.
On recompacte en $\boxed{x \longrightarrow f(x) + \displaystyle\int_0^x e^{x-t}.f(t).dt}$

Vous aurez l'occasion cette année et l'an prochain de recroiser des intégrales de ce type, comme solutions d'équations différentielles. Peut être même ensore plus tard, suivant le type d'études que vous ferez.

MPSI 2	L'encadrement $2/3 < \sin(\theta) < 13/19$.	**I.S.08**

On part de l'encadrement $\dfrac{2}{3} < \sin(\theta) < \dfrac{13}{19}$ *(cohérent).* On élève au carré et on soustrait à 1 : $\dfrac{5}{9} > \cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta) > \dfrac{192}{361}$ *(pour* 19^2*, je prends* $20^2 - 2.20 + 1^2$*).* On garde au passage la forme élevée au carré : $\dfrac{169}{361} > \sin^2(\theta) > \dfrac{4}{9}$.
On mutiplie terme à terme ces inégalités entre réels positifs : $\boxed{\dfrac{3380}{3249} > 4.\sin^2(\theta).\cos^2(\theta) > \dfrac{1024}{1083}}$
Et le terme du milieu n'est autre que $\sin^2(2.\theta)$.
C'est un encadrement pris sans trop de risques. Et un peu idiot car le majorant est plus grand que 1.

Mais peut on faire mieux ?
On sait qu'avec nos notations habituelles, on a $\sin^2(2.\theta) = (2.s.c)^2 = 4.s^2.(1 - s^2)$. Or, s est entre $2/3$ et $13/19$. Si l'application $s \longrightarrow 4.s^2.(1 - s^2)$ est monotone sur cet intervalle, les deux valeurs aux bornes feront l'affire comme encadrement le plus fin qui soit. Par "chance", c'est le cas. On a donc mieux : $\boxed{\dfrac{80}{81} < \sin^2(2.\theta) < \dfrac{129792}{130321}}$
Mais il faut être prudent. Entre $2/3$ et $4/5$ on n'aurait pas pu se contenter des deux valeurs aux bornes...

MPSI 2	L'application $t \longrightarrow \ln(1 + e^t)$.	**I.S.08**

Cette application est définie sur tout $\mathbb{R}$ et dérivable autant de fois qu'on veut :

$f(x)$	$f'(x)$	$f"(x)$
$\ln(1 + e^x)$	$\dfrac{e^x}{1 + e^x}$	$\dfrac{e^x.(1 + e^x) - e^x.(0 + e^x)}{(1 + e^x)^2}$

(tiens un tableau)

La dérivée seconde $x \longrightarrow \dfrac{e^x}{(1 + e^x)^2}$ est positive.
On traduit en langage simple : cette application est convexe.
On sait alors que son graphe est partout au dessus de ses tangentes.

Explication : $f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+h.\int_{t=0}^{t=1}(1-t).f"(a+t.h).dt$ *par la formule de Taylor, dans laquelle le reste est positif.*
En particulier, pour a nul, on a $\ln(1+e^x)=f(0+x)\geqslant f(0)+x.f'(0)=\ln(2)+\dfrac{x}{2}$.

MPSI 2	Trois bornes supérieures.	**I.S.08**

On a trois parties de $\mathbb{R}$ non vides, majorées *(par 2 si on y va vite)*. Chacune a une borne supérieure, qui est ici un maximum, atteint en un point à expliciter :

ensemble	$\{\cos^2(x)+\sin^2(x)\|x\in\mathbb{R}\}$	$\{\cos^2(x)+\sin^2(\theta)\|(x,\theta)\in\mathbb{R}^2\}$	$\{\cos^2(x)+\sin^2(\theta)\|x\in\mathbb{R}\}$
borne supérieure	1	2	$1+\sin^2(\theta)$
atteinte en	partout	$(x,\theta)=(0,\pi/2)$	$x=0$

MPSI 2	La suite $u_{n+2}=4.u_{n+1}+5.u_n$ avec u_0 et u_5 donnés.	**I.S.08**

On écrit sans tarder : $U_{n+1}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\5.u_n+4.u_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\5&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\end{pmatrix}$. La matrice cherchée est donc $\begin{pmatrix}0&1\\5&4\end{pmatrix}$.
On vérifie ;: $\begin{pmatrix}0&1\\5&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1\\-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&5\\1&25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1&0\\0&5\end{pmatrix}$ de la forme $M.P=P.D$.
C'est bien une diagonalisation.
On montre alors par concaténation : $M^n=P.D^n.P^{-1}$ et $D^n=\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}$ par récurrence sur n.
On effectue alors
$M^n=\begin{pmatrix}1&1\\-1&5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5&-1\\1&1\end{pmatrix}\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}.\begin{pmatrix}5.(-1)^n+5^n&5^n-(-1)^n\\5.(-1)^{n+1}+5^{n+1}&5^{n+1}+(-1)^n\end{pmatrix}$.
On multiplie : $U_n=M.U_n$ (suite géométrique de raison à gauche M). On ne garde que le terme du haut : $\boxed{u_n=\dfrac{(-1)^n.(5.u_0-u_1)+5^n.(u_0+u_1)}{6}}$ (validé d'ailleurs pour n nul et n égal à 1).
On déduit alors par exemple : $\dfrac{(-1)^4.(10-u_1)+5^4.(2+u_1)}{6}=u_4=5$. En résolvant, on trouve : $\boxed{u_1=-205/104}$

A part ça, on y parvenait aussi en écrivant :
$u_4=4.u_3+5.u_2=4.(4.u_2+5.u_1)+5.(4.u_1+5.u_0)=16.(4.u_1+5.u_0)+40.u_1+25.u_0$
conduisant à la même équation en u_1 : $u_4=104.u_1+210$.

$<\heartsuit(29)>$ On rappelle : $sh = t \longrightarrow \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$. Simplifiez $sh\big(\ln(x+\sqrt{1+x^2})\big)$. 2 pt.

$<\heartsuit(30)>$ Dérivez $x \longrightarrow \ln(x+\sqrt{1+x^2})$. 2 pt.

$<\heartsuit(31)>$ Simplifiez $\ln(sh(x)+\sqrt{1+(sh(x))^2}$. 2 pt.

$<\diamondsuit(31)>$ Calculez $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\0\leq j\leq n}} i.j^2$ ainsi que $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\0\leq j\leq n}} (i+j^2)$. 5 pt.

$<\clubsuit(11)>$ On fait l'hypothèse *(étrange)* que la fonction factorielle est définie sur tout $\mathbb{R}^+$, affine par morceaux sur chaque intervalle $[n, n+1]$ pour n dans $\mathbb{N}$ (c'est ainsi qu'on aura $x! = 18.x - 48$ pour x entre 3 et 4, vérifiez en 3 et 4). Résolvez alors l'équation $x! = 13$ d'inconnue réelle x. 2 pt.

$<\clubsuit(12)>$ Résolvez aussi l'équation $x! = 2012$ d'inconnue réelle x. 2 pt.

$<\diamondsuit(32)>$ On définit : $f = x \longrightarrow \cos(2.x)$. Calculez $f^{(10)}(\pi/12)$. 2 pt.

$<\spadesuit(18)>$ On définit : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ a-1 & (2.a-1)/2 \end{pmatrix}$. Calculez sa trace, son déterminant et ses deux valeurs propres. 2 pt. Diagonalisez la pour a différent de $1/2$ *(la diagonalisation s'arrête à "trouver D et P et ne demande pas le calcul de M^n).* 2 pt.
Montrez que pour a égal à $1/2$, il est impossible de trouver P inversible vérifiant $M.P = P.D$. 1 pt.
Montrez que pour a dans $]-1, 1/2[$, la matrice M^n tend vers la matrice nulle quand n l'infini. 2 pt.

$<\spadesuit(19)>$ Montrez que l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 4-3.a & 2.a-2 \\ 6-6.a & 4.a-3 \end{pmatrix}$ avec a décrivant $\mathbb{R}$ est stable par multiplication. 2 pt.
Est ce un groupe multiplicatif ? 1 pt.

$<\heartsuit(32)>$ Rappelez la définition de $u_n \underset{n\mapsto+\infty}{\longrightarrow} 0$. 1 pt.

$<\diamondsuit(33)>$ Montrez que si une suite décroissante converge vers 0, alors tous ses termes sont positifs ou nuls (indication : supposer qu'il y a un terme u_{n_0} strictement négatif et prendre $\varepsilon = |u_{n_0}|/2$). 3 pt.

$<\diamondsuit(34)>$ Montrez que la suite $\left(\frac{1}{(n+1)^{2+(-1)^n}}\right)$ est strictement positive, tend vers 0 mais n'est pas monotone (même à partir d'un certain rang). 3 pt.

$<\heartsuit(33)>$ Calculez les quatre premières dérivées de $x \longrightarrow \sqrt[3]{x}$ et calculez leur valeur en 1. 2 pt.
Ecrivez la formule de Taylor qui exprime $\sqrt[3]{1+x}$ comme somme d'un polynôme en x de degré 3 et d'une intégrale. 2 pt. Montrez que le reste intégrale se majore par pour x entre $-1/2$ et $1/2$. 2 pt.

Ca n'a rien à voir. Savez vous pourquoi chez le tripier cannibale le cerveau de physicien couté dix fois plus cher au kilo que le cerveau de mathématicien alors qu'il est bien moins riche ?

I.S.09	CHARLEMAGNE — Correction — ANNEE **2012/13**	I.S.09

MPSI 2	Le sinus hyperbolique et sa réciproque.	**I.S.09**

On a donc défini : $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Quand on remplace x par $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$, les deux logarithmes deviennent $x + \sqrt{1+x^2}$ et $\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$, de différence $\dfrac{(x+\sqrt{1+x^2})^2 - 1}{x+\sqrt{1+x^2}}$. Après développement du carré et simplification, il reste $\dfrac{2.x + 2.x.\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$. La simlification se poursuit, de même que la division par 2 et il reste : $\boxed{sh(\ln(x + \sqrt{1+x^2})) = x}$

Pour le calcul dans l'autre sens, on y va pas à pas : $1 + sh^2(x) = \dfrac{4 + (e^x - e^{-x})^2}{4} = \dfrac{e^{2.x} + e^{-2.x} + 2}{4}$.
Toute l'astuce consiste à y retrouver $\dfrac{(e^x + e^{-x})^2}{4}$ *(c'est $ch^2 - sh^2 = 1$ croisé en D.S.).*
On passe à la racine carrée sans ambigüité de signe : $\sqrt{1 + sh^2(x)} = ch(x)$.
On somme et on passe au logarithme : $\ln(sh(x) + ch(x)) = \ln(e^x) = x$.
On résule : $\boxed{\ln(sh(x) + \sqrt{1 + sh^2(x)} = x}$

L'application $x \longrightarrow \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ est l'application réciproque du sinus hyperbolique. valable à droite comme à gauche, sur $\mathbb{R}$ tout entier.
On va la noter Argsh et l'appeler argument sinus hyperbolique.

On dérive comme une composée. On trouve $x \longrightarrow \dfrac{1 + \dfrac{0 + 2.x}{2.\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}}$.
On simplifie les 2, on réduit le numérateur à son dénominateur commun $\sqrt{1+x^2}$ et on simplifie finalement $x + \sqrt{1+x^2}$.
On trouve $\boxed{\Big(x \longrightarrow \ln(x + \sqrt{1+x^2})\Big)' = \Big(x \longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Big)}$
C'est une formule à retenir.

MPSI 2	Les somme $\sum_{i \leq n j \leq n} (i.j^2)$ et $\sum_{i \leq n j \leq n} (i.j^2)$.	**I.S.09**

Chacune de ces deux sommes est faite de $(n+1)^2$ termes.
La première est de la forme $\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \alpha_i.\beta_j$, et se sépare en produit de deux sommes : $\sum_{\substack{i \leq n \\ j \leq n}} i.j^2 = \Big(\sum_{i \leq n} i\Big).\Big(\sum_{j \leq n} j^2\Big)$ (somme de tous les termes du tableau des $i.j^2$).

Pour qui en a vraiment besoin :

	1	2	3	...	n	somme
1	1.1^2	1.2^2	1.3^2	...	$1.n^2$	$1.B_n$
2	2.1^2	2.2^2	2.3^2	...	$2.n^2$	$2.B_n$
3	3.1^2	3.2^2	3.3^2	...	$3.n^2$	$3.B_n$
...	...	...	...	...	...	...
n	$n.1^2$	$n.2^2$	$n.3^2$	...	$n.n^2$	$n.B_n$
somme	$A_n.1^2$	$A_n.2^2$	$A_n.3^2$	...	$A_n.n^2$	$A_n.B_n$

La somme vaut donc $\frac{n.(n+1)}{2}.\frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$ c'est à dire $\boxed{\sum_{\substack{i\leq n\\ j\leq n}} i.j^2 = \frac{n^2.(n+1)^2.(2.n+1)}{12}}$

L'autre somme se sépare par linéarité :
$\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} (i+j^2) = \Big(\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} i\Big) + \Big(\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} j^2\Big)$, et ensuite, il faut prendre garde :
$\Big(\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} i\Big) = (n+1).\Big(\sum_{0\leq i\leq n} i\Big)$ et $\Big(\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} j^2\Big) = (n+1).\Big(\sum_{0\leq j\leq n} j\Big)$.
En effet, la variable j intervient dans la première somme comme un compteur et c'est i qui joue ce rôle dans la seconde.
Dans la première, chaque terme i est présent $n+1$ fois (une fois pour chaque j).

On a au final $\boxed{\sum_{\substack{i\leq n\\ j\leq n}} (i+j^2) = \frac{n.(n+1)^2.(n+2)}{3}}$

MPSI 2	Equations $x! = 13$ et $x! = 2012$.	**I.S.09**

Le graphe devient une sorte de jeu à points du type "reliez les points de 1 à 30 pour voir ce qui fait si peur à Dora l'exploratrice *(où à Clover, ou à Mickey, à San-Gô-Ku ou à Hubert Reeves suivant vos lectures)*.
Déjà, la fonction obtenue est constante sur $[0, 1]$, puis strictement croissante.
Comme 13 est entre 3! et 4! c'est entre 3 et 4 qu'on cherche l'unique solution. L'application y est alors de la forme $x \longrightarrow 18.x - 48$ comme indiqué *(coefficient directeur $\frac{4!-3!}{4-3}$ et ordonnée à l'origine à ajuster)*.

La solution est alors $\boxed{\frac{61}{18}}$ *(qui est bien entre 3 et 4)*.

Ensuite, 2012 est entre 6! et 7!. On écrit donc notre définition de la factorielle sur cet intervlle $[6, 7]$:
$x \longrightarrow \frac{7!-6!}{7-6}.(x-6) + 6!$. On trouve $\boxed{x = \frac{6803}{1080}}$ *(tous calculs immondes faits)*

MPSI 2	L'application $x \longrightarrow \cos(2.x)$.	**I.S.09**

Déjà, cette application est de classe C^∞. A chaque dérivation, un 2 "sort", et un déphasage de $\pi/2$ suivient. Après dix dérivations, on a un 2^{10} et la dérivée dixième du cosinus donne un $-\cos$.
On a donc $f^{(10)} = x \longrightarrow -2^{10}.\cos(2.x)$. En $\pi/12$, on a $\boxed{-2^9.\sqrt{3}}$

MPSI 2	Les matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ a-1 & (2.a-1)/2 \end{pmatrix}$.	**I.S.09**

La trace de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ a-1 & (2.a-1)/2 \end{pmatrix}$ vaut $a + \frac{1}{2}$ et son déterminant vaut $\frac{a}{2}$. Son polynôme caractéristique $X^2 - \frac{2.a+1}{2}.X + \frac{a}{2}$ a pour discriminant $(a-1/2)^2 - 2.a$ c'est à dire $\Delta = (a+1/2)^2$ (on pose donc $\delta = (a+1/2)$ en se moquant pas mal de son signe). Les deux racines en sont $1/2$ et a.

Même si je vous ai prévenus en début d'année, je suis sûr que je vais croiser des copies avec $\dfrac{2.a+1}{2} \pm \sqrt{a^2 - a + \dfrac{1}{4}}$ ou même $\dfrac{2.a+1}{2} \pm \dfrac{|2.a-1|}{2}$.

Une matrice D est alors $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. On cherche P sous la forme "des huns en première ligne" comme lors des conquêtes d'Attila. On trouve $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2.a-2 & -1 \end{pmatrix}}$ Son déterminant est $1-2.a$.

tant que a est différent de $1/2$, la matrice P est inversible, et on est heureux.

Pour a égal à $1/2$, la matrice P n'est pas inversible. Mais peut être que quand même on peut trouver P inversible avec $M = P.D.P^{-1}$. Seulement, voilà, on aura impérativement $D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et donc $M = P.\dfrac{I_2}{2}.P^{-1} = \dfrac{I_2}{2}$, ce qui est contradictoire.
On aura beau faire, il est donc impossible de diagonaliser M pour a égal à $1/2$.

On prend a dans $]-1, 1/2[$ et on diagonalise M en $M = P.D.P^{-1}$ avec D de la forme $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
On élève à la puissance n : $M^n = P.D^n.P^{-1}$ avec D^n de la forme $\begin{pmatrix} 1/2^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$. Quand n tend vers l'infini, a^n et $(1/2)^n$ tendent vers 0. La matrice D^n tend vers la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et le produit $P.D^n.P^{-1}$ tend aussi vers cette matrice nulle *(sans effectuer tous les produits, puisque ils ne vont contenir que des a^n et des $1/2^n$).*

MPSI 2	Matrices de la forme $\begin{pmatrix} 4-3.a & 2.a-2 \\ 6-6.a & 4.a-3 \end{pmatrix}$.	**I.S.09**

C'est cadeau, une fois qu'on ne démontre pas n'importe quoi.
On prend deux matrices de cette forme : $\begin{pmatrix} 4-3.a & 2.a-2 \\ 6-6.a & 4.a-3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4-3.b & 2.b-2 \\ 6-6.b & 4.b-3 \end{pmatrix}$ et on en effectue le produit avec les règles classiques :
$\boxed{\begin{pmatrix} 4-3.a & 2.a-2 \\ 6-6.a & 4.a-3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4-3.b & 2.b-2 \\ 6-6.b & 4.b-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3.a.b & 2.a.b-2 \\ 6-6.a.b & 4.a.b-3 \end{pmatrix}}$ à l'issue de calculs même pas laborieux.
La matrice obtenue est restée dans l'ensemble, avec nouveau paramètre $a.b$ *(on sent le morphisme entre les réels et ces matrices, pour la multiplication).*
Avec des notations fort compréhensibles : $M_a.M_b = M_{a.b}$ et c'est aussi $M_b.M_a$.

L'ensemble $\{M_a | a \in \mathbb{R}\}$ est stable par multiplication. On y trouve le neutre I_2 pour a égal à 1. La multiplication y est associative, puisqu'elle l'est partout.
Mais il y a dans cet ensemble une matrice non inversible : c'est I_0 dont le déterminant est nul *(le déterminant de M_a vaut a).*
On n'a pas un groupe multiplicatif.

On montrerait en revanche que $\Big(\{M_a | a \in \mathbb{R}^*\}, .\Big)$ est un groupe commutatif.

MPSI 2	Suites de limite nulle.	**I.S.09**

La définition : $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists\, N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \Big((n \geqslant N_\epsilon)\ \Rightarrow\ (|u_n| \leqslant \varepsilon)\Big)$.
On suppose la suite décroissante : $u_{n+p} \leqslant u_n$ pour tout couple (n,p) de $\mathbb{N}^2$.
On suppose (à tort) qu'il y a un terme strictement négatif : $u_{n_0} < 0$.
Pour tout n plus grand que n_0, on a alors $u_n \leqslant u_{n_0} < 0$.
En version rapide, on passe à la limite quand n tend vers l'infini (compatible avec la condition $n \geqslant n_0$), on trouve $0 \leqslant u_{n_0} < 0$ ce qui pose problème.
Plus terre à terre, on prend ε égal à $|u_{n_0}|/2$ (strictement positif).
A partir du rang $N_{|u_{n_0}|/2}$ on a $-\dfrac{|u_{n_0}|}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{|u_{n_0}|}{2}$.
En tenant compte des signes : $\dfrac{u_{n_0}}{2} \leqslant u_n \leqslant -\dfrac{u_{n_0}}{2}$ pour n plus grand que $N_{|u_{n_0}|/2}$.
Pour n plus grand que $Max(n_0, N_{|u_{n_0}|/2})$ on a à la fois $u_n \leqslant u_{n_0}$ et $\dfrac{u_{n_0}}{2} \leqslant u_n$. Ces deux inégalités sont incompatibles, on tient notre contradiction.

La suite proposée est en $\dfrac{1}{n}$ ou $\dfrac{1}{n^3}$ suivant la parité de n. Explicitement : $\Big(\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{125}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{343}, \dfrac{1}{8}, \ldots\Big)$.
Pour prouver qu'elle tend vers 0 : $0 \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^{1ou3}} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ (avec une notation tout juste digne d'être utilisée en cours de physique). On termine avec le théorème de l'encadrement. Ou même, on termine en écrivant $N_\varepsilon = \Big\{\dfrac{1}{\varepsilon}\Big]$ et en vérifiant $n \geqslant N_\varepsilon\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{(n+1)^{2+(-1)^n}} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon$.

Pour ce qui est de sa non monotonie, on le fait par l'absurde. Si elle était croissante, on ne pourrait pas avoir $u_{3.n} \leqslant u_n$ alors qu'on l'a pour tout n. Si elle était décroissante, on ne pourrait pas avoir $u_{2.p+1} > u_{2.p}$ alors qu'on l'a pour tout n.

Réponse : vous savez combien de physiciens il faut pour faire un kilo de cerveau ?

MPSI 2	La formule de Taylor avec reste intégrale.	**I.S.09**

On dérive en formule exposant 1/3 :

n	0	1	2	3	4
$f^{(n)}(x)$	$x^{1/3}$	$x^{-2/3}/3$	$-2.x^{-5/3}/9$	$10.x^{-8/3}/27$	$-80.x^{-11/3}/81$
$f^{(n)}(1)$	1	1/3	−2/9	10/27	−80/81
$f^{(n)}(1)/n!$	1	1/3	−1/9	5/81	−10/243

On écrit la formule de Taylor à l'ordre 3 :

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5.x^3}{81} + reste \text{ avec } reste = -\frac{x^4}{6}.\int_{t=0}^{t=1} (1-t)^3.\frac{80}{81.(1+x.t)^{11/3}}.dt.$$

Comme x est en valeur absolue plus petit que 1/2, le terme $(1+x.t)$ est entre 1/2 et 3/2. Sa puissance 11/3 est entre $(1/2)^{11/3}$ et $(3/2)^{11/3}$ et l'inverse de celle ci est entre $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{11/3}$ et $(2)^{11/3}$.
Le reste intégrale est alors entre $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{11/3}.x^4/24$ et $(2)^{11/3}.x^4/24$ (ou $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{11/3}.x^4/6$ et $(2)^{11/3}.x^4/6$ si on se contente de majorer le $(1-t)^3$ par 1).

$< \heartsuit(34) >$ α est un réel entre $-\pi$ et π. Calculez module et argument de $1+e^{i.\alpha}$ *(en pensant à factoriser par* $e^{i.\alpha/2}$*).* 2 pt.

$< \heartsuit(35) >$ Donnez la dérivée d'ordre n de $x \longrightarrow (x^3+3.x+1).e^{2.x}$. 3 pt.

$< \heartsuit(36) >$ Complétez : $2.sh(2) = ch(\dots)$ *(le résultat ne sera pas forcément joli).* 2 pt.

$< \heartsuit(37) >$ Calculez le déterminant de la matrice de taille 3 de terme $(i+j)^2$ en ligne i et colonne j. 2 pt.

$< \diamondsuit(35) >$ Résolvez l'équation $z^4 = i-1$ d'inconnue complexe z. 2 pt.

$< \clubsuit(13) >$ On fait encore l'hypothèse que la fonction factorielle est définie sur tout $\mathbb{R}^+$, affine par morceaux sur chaque intervalle $[n, n+1]$ pour n dans $\mathbb{N}$. Calculez alors $\displaystyle\int_0^{7,5} x!.dx$. 3 pt.

Si a est une suite, on définit sa suite "dérivée" a' et la série associée $\overline{a}$ par $(a')_n = a_n - a_{n-1}$ pour n non nul et $a'_0 = a_0$ et $\overline{a}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ (attention, on écrit et pas $\overline{a_n}$ car pour calculer ce terme $\overline{a}_n$ il faut connaître beaucoup de termes de la suite et pas juste le terme d'indice n [1]).

$< \diamondsuit(36) >$ Déterminez a', $\overline{a}$ si a est la suite arithmétique définie par $a_n = n$ pour tout n. Explicitez aussi $(a')'$ et $\overline{\overline{a}}$, ainsi que $\overline{a'}$ et $\overline{a}'$. 4 pt.

$< \diamondsuit(37) >$ Montrez que si a est une suite géométrique, alors a' est une suite géométrique. $\overline{a}$ est elle aussi géométrique ? 2 pt.

$< \diamondsuit(38) >$ Par combien de 0 se termine l'écriture décimale de $\dbinom{35}{11}$? 2 pt.

$< \spadesuit(20) >$ Calculez les sommes suivantes :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.(1+x)^k.(1-x)^{n-k}$, • $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.(1+x)^p.(1-x)^{n-p}$
- $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{k}.(1+x)^p.(1-x)^{n-p}$, • $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ 0\leq p\leq n}} \binom{n}{k}.(1+x)^p.(1-x)^{n-p}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\Big(\sum_{p=0}^{n}(1+x)^p.(1-x)^{n-p}\Big)$, • $\displaystyle\sum_{0\leq p<k\leq n} \binom{n}{k}.(1+x)^p.(1-x)^{k-p}$. 8 pt.

[1] par exemple, que signifierait $\overline{4_1}$? Serait on en train de regarder la valeur en 1 de la série associée à suite constante $(4,4,4,\dots)$, à la suite géométrique $(1,4,16,64,\dots)$, à la suite géométrique $(2,4,8,16,\dots)$, à la suite aritmétique $(0,4,8,12,\dots)$?

$I.S.10$	CHARLEMAGNE — Correction — ANNEE **2012/13**	$I.S.10$

MPSI 2	Module et argument de $1+e^{i.\alpha}$.	**I.S.10**

Géométriquement, ça se voit bien. On a un losange de sommets (O, I, M, R) où M est le point d'affixe $1+e^{i.\alpha}$ et R le point d'affixe $e^{i.\alpha}$sur le cercle trigonométrique. L'angle IOM est donc la moitié de l'angle IOR, c'est à dire $\alpha/2$. Et le module se calcule dans le triangle isocèle OIM.
Sinon, plus obrement, on factorise : $1+e^{i.\alpha} = e^{i.\alpha/2}.(e^{-i.\alpha/2}+e^{i.\alpha/2}) = 2.\cos(\alpha/2).e^{i.\alpha/2}$.
On reconnaît une forme en $\rho.e^{i.\theta}$ avec ρ réel positif (en effet, $\alpha/2$ est entre $-\pi/2$ et $\pi/2$).
On répond donc à la question : $\boxed{1+e^{i.\alpha} \text{ a pour module } 2.\cos(\alpha/2) \text{ et pour argument } \alpha/2}$

MPSI 2	Dérivation de $x \longrightarrow (x^3+3.x+1).e^{2.x}$.	**I.S.10**

Les deux fonctions en jeu ici *(exponentielle et polynômes)* sont dérivables autant de fois qu'o veut. On peut faire usage de la formule de Leibniz. On note $u = x \longrightarrow x^3+3.x+1$ *(de dérivées successives $x \longrightarrow 3.x^2+3$, $x \longrightarrow 6.x$ et $x \longrightarrow 6$)* et $v = x \longrightarrow e^{2.x}$ *(de dérivées en $x \longrightarrow 2^k.e^{2.x}$)*. La formule en $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.u^{(k)}.v^{(n-k)}$ ne contient finalement que quatre termes, avec des coefficients qui ne sont que 1, n, $n.(n-1)/2$ et $n.(n-1).(n-2)/6$ et leur somme est :
$x \longrightarrow \Big((x^3+3.x+1).2^n + n.(3.x^2+3).2^{n-1} + n.(n-1).(3.x).2^{n-2} + n.(n-1).(n-2).2^{n-3}\Big).e^{2.x}$
que j'espère arranger en

$$\boxed{x \longrightarrow 2^{n-3}.\Big(8.x^3+12.n.x^2+(6.n^2-6.n+24).x+(n^3-3.n^2+14.n+8)\Big)}$$

MPSI 2	Un déterminant.	**I.S.10**

L'exercice est simple : on remplit la matrice, et on calcule le déterminant en développant par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 \end{vmatrix} = 4.\begin{vmatrix} 3^2 & 4^2 \\ 4^2 & 5^2 \end{vmatrix} - 3^2.\begin{vmatrix} 3^2 & 4^2 \\ 5^2 & 6^2 \end{vmatrix} + 4^2.\begin{vmatrix} 3^2 & 4^2 \\ 4^2 & 5^2 \end{vmatrix} = \ldots = -8$$

MPSI 2	Compléter $2.sh(2) = ch(\ldots)$.	**I.S.10**

On résout $ch(\underline{x}) = y$ d'inconnue x et de parmètre y et on va l'appliquer avec y égal à $2.sh(2)$ après avoir vérifié que $2.sh(2)$ dépasse bien 1.
La résolution passe par le changement d'inconnue : $X = e^x$ qui donne $X+X^{-1} = 2.y$ puis $X^2-2.y.X+1 = 0$ qui donne $X = y+\sqrt{y^2-1}$(l'autre racine conduit à l'inverse de X (voir le produit des racines), qui conduira à un simple changement de signe sur x.
On trouve donc : $x = \ln(y+\sqrt{y^2-1})$ou son opposé.
On remplace comme promis y par $2.sh(2)$ (c'est à dire e^2+e^{-2}) :

$$\boxed{2.sh(2) = ch\Big(\ln(e^2-e^{-2}+\sqrt{e^4+e^{-4}+1})\Big)}$$

MPSI 2	Résolution de $z^4 = i-1$.	**I.S.10**

L'équation est de la forme $z^4 = a$. On sait que si on trouve une racine *(nommée α)*, les autres se déduiront par rotations : $\{\alpha, i.\alpha, i^2.\alpha, i^3.\alpha\}$.
On cherche sous forme polaire et on finit par résoudre $\rho^4 = \sqrt{2}$ et $4.\theta = 3.\pi/4 (\mod 2.\pi)$.
On trouve $\boxed{\sqrt[8]{2}.e^{i.\pi/3.\pi/16} \text{ et ses produits par } i, -1 \text{et } -i}$

MPSI 2	Dérivée et série d'une suite.	**I.S.10**

Il suffit d'appliquer les définitions et de connaître son cours.
On commence par la suite $(0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$.
La suite de ses accroissements est constate ou presque : $(0, 1, 1, 1, \ldots)$.
La série associée est classique : $\Big(\dfrac{n.(n+1)}{2}\Big)$.

On "rédérive" et on trouve $(0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$.
On réintère et on trouve $\Big(\dfrac{n^3+3.n^2+2.n}{6}\Big)$.

On calcule la série associée à $(0, 1, 1, 1, \ldots)$ et on retrouve : $(\overline{a'})_n = n$.

On calcules les accroissements de la suite de terme général $(n.(n+1)/2)$ et on retrouve $\overline{a}'_n = n$.

Si on part de la suite géométrique de la forme $(a_0.\rho^n)$ et on trouve les accoissements : $a_0.\rho^n.\Big(1-\dfrac{1}{\rho}\Big)$, suite géometrique de raison ρ et de premier terme $a_0.\dfrac{\rho-1}{\rho}$.

En revanche, la série associée est de la forme $\dfrac{1-\rho^n}{1-\rho}$ et elle est de la forme "suite constante plus suite géométrique".

Je suis sûr que j'aurai l'occasion *(hélàs forcé par votre maladresse)* de vous mettre des mentions "pas de sens" pour des notations où l'indice de la suite sera mal placé.

MPSI 2	L'intégrale $\int_0^{7,5} x!.dx$.	**I.S.10**

L'application est continue par construction, on peur donc bien calculer son intégrale. Mais mieux encore, son intégrale est une aire qui se lit directement en utilisant la relation de Chasles *(et non en allant chercher une prétendue primitive crétine et inutile, rappelons que le calcul d'intégrales ne se réduit surtout pas à de la recherche de primitives)*.

Sur chaque intervalle $[n, n+1]$ avec n entier, on a l'aire d'un trapèze de largeur 1 et de hauteur moyenne $\dfrac{n!+(n+1)!}{2}$.

Le découpage donne donc $1+\dfrac{1!+2!}{2}+\dfrac{2!+3!}{2}+\dfrac{3!+4!}{2}+\dfrac{4!+5!}{2}+\dfrac{5!+6!}{2}+\dfrac{6!+7!}{2}+\displaystyle\int_7^{7,5} x!.dx$.
Les termes de "trapèzes de largeur 1" donnent une somme cumulée de $\dfrac{3}{2}+2!+3!+4!+5!+6!+\dfrac{7!}{2}$ *(c'est à dire* $6787/2$*)*. Le dernier terme intégrale donne par "largeur fois hauteur moyenne" là encore : $\dfrac{1}{2}.\dfrac{3.7!+1.8!}{4}$. La valeur finale est $\boxed{\displaystyle\int_0^{7,5} x!.dx = \frac{20647}{2}}$

MPSI 2	L'entier $\binom{35}{11}$.	**I.S.10**

Par définition, c'est $\dfrac{35.34.33.32.31.30.29.28.27.26.25}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}$.
On cherche les facteurs 2 et 5 au numérateur et au dénominateur :

	facteurs 2	facteurs 5	écriture décimale
numérateur	2^{10}	5^4	$\overline{\ldots a0000}_{10}$
dénominateur	2^8	5^2	$\overline{\ldots b00}_{10}$
quotient	2^2	5^2	$\overline{\ldots c00}_{10}$

(il est sous entendu que les chiffres a, b et c sont non nuls)
Notre coefficient binomial se termine par deux 0.
Pour ceux qui l'auront calculé : $2^2.3.5^2.7.13.17.29.31$.
Pour ceux qui l'auront transformé en objet physique *(c'est à dire en un calcul bourrin qui ne sert à rien, à part à justifier sa note)* : 417225900.

MPSI 2	Les sommes de la famille de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.(1+x)^k.(1-x)^{n-k}$.	**I.S.10**

La première somme ($\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.(1+x)^k.(1-x)^{n-k}$) est une formule du binôme, elle vaut $\Big((1+x)+(1-x)\Big)^n$ c'est à dire 2^n. Si vous y tenez écrivez la $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.(1+x)^p.(1-x)^{n-p}$ dépend de n et p et vaut $\Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big).(1+x)^p.(1-x)^{n-p}$ c'est à dire $2^n.(1+x)^p.(1-x)^{n-p}$.

La somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{k}.(1+x)^p.(1-x)^{n-p}$ dépend de n et k et cache une série géométrique de raison $(1+x)/(1-x)$ (premier terme $(1-x)^n$, terme à venir $(1+x)^{n+1}/(1-x)$). On trouve au final $\displaystyle\binom{n}{k}.\frac{(1-x)^n-\frac{(1+x)^{n+1}}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}}$ et on "simplifie" en $\displaystyle\binom{n}{k}.\frac{(1+x)^{n+1}-(1-x)^{n+1}}{2.x}$.
On peut en développer le numérateur par la formule du binôme, éliminer lmoitié des termes par conjugaison (notamment si x est imaginaire pur) et simplifier par $2.x$. Bref, pour qui le souhaite, l'exercice n'est pas fini...

Les deux sommes $\displaystyle\sum_{\substack{0\le k\le n\\0\le p\le n}}\binom{n}{k}.(1+x)^p.(1-x)^{n-p}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\Big(\sum_{p=0}^{n}(1+x)^p.(1-x)^{n-p}\Big)$ sont égales et valent $2^n.\dfrac{(1+x)^{n+1}-(1-x)^{n+1}}{2.x}$ en exploitant tous les résultats qui précèdent.

Plus intéressante est la somme $\displaystyle\sum_{0\le p<k\le n}\binom{n}{k}.(1+x)^p.(1-x)^{n-p}$ qui peut s'écrire
$\displaystyle\sum_{0\le k\le n}\Big(\sum_{p=0}^{k-1}\binom{n}{k}.(1+x)^p.(1-x)^{k-p}\Big)$ puis même $\displaystyle\sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}.\Big(\sum_{p=0}^{k-1}(1+x)^p.(1-x)^{k-p}\Big)$.
On a déjà (presque) estimé la somme entre parenthèses : $\displaystyle\sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}.(1-x).\frac{(1+x)^k-(1-x)^k}{2.x}$ (en tout cas pour x non nul).
On sort le $\dfrac{1-x}{2.x}$ et on encore deux formules du binôme :

$$\boxed{(1-x).\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.(1+x)^k-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.(1-x)^k}{2.x}=(1-x).\frac{(1+1+x)^n-(1+1-x)^n}{2.x}}$$

$<\diamondsuit(39)>$ Un élève prétend avoir trouvé une belle relation : $1 + 2.T_2 + 2.T_4 + \ldots + 2.T_{2.n} = T'_{2.n+1}/(2.n+1)$ où les T_p sont les polynômes de Tchebitchev. Montrez qu'il a raison, mais montrez lui aussi qu'il n'a pas vraiment découvert quelquechose d'inédit. [4 pt.]

$<\diamondsuit(40)>$ On pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(\theta).d\theta$. Montrez, en intégrant par parties et en remplaçant $\cos^2$ par $1-\sin^2$: $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}.W_{n-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. [2 pt.] Calculez W_7. [1 pt.]

Ecrivez une instruction `Maple` pour calculer les douze premières intégrales de la série. [2 pt.]

$<\heartsuit(38)>$ t est un réel. Déterminez partie réelle et partie imaginaire de $\dfrac{1+i.t}{1-i.t}$ après avoir multiplié numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée. [1 pt.]

Ecrivez t sous la forme $\tan(\theta/2)$ et montrez : $\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = e^{i.\theta}$. [1 pt.]

Retrouvez les formules donnant $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ en fonction de $t = \tan(\theta/2)$. [1 pt.]

$<\diamondsuit(41)>$ On pose : $f = t \longrightarrow \dfrac{2.t+1}{(t+1).(t-2).(t+3)}$. Décomposez f en éléments simples (combinaison linéaire de $t \longrightarrow \dfrac{1}{t+1}$, $t \longrightarrow \dfrac{1}{t-2}$ et $t \longrightarrow \dfrac{1}{t+3}$). [2 pt.] Calculez alors $f^{(5)}(0)$. [2 pt.]

$<\heartsuit(39)>$ Résolvez $5.y"_t - 6.y'_t + y_t = 0$ d'inconnue y fonction de t avec condition initiale $y_0 = 1$ et $y'_0 = 2$. [2 pt.]

$<\heartsuit(40)>$ Calculez $\displaystyle\prod_{k=2}^{200}\left(1-\frac{1}{k}\right)$. [2 pt.]

$<\heartsuit(41)>$ Résolvez l'équation $2.T_8(x) + 1 = 0$ d'inconnue réelle x. [3 pt.]

$<\diamondsuit(42)>$ Résolvez l'équation $T_8(x) + 2 = 0$ d'inconnue réelle x. [2 pt.]

$<\heartsuit(42)>$ Résolvez l'équation différentielle $y"_t - 4.y'_t + 5.y_t = 1 + sh(t)$ d'inconnue y fonction de t avec condition initiale $y_0 = 2$. [2 pt.]

$<\clubsuit(14)>$ On définit la suite u suivante :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	
1	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	...

(pas de 0, un 1, deux 2, trois 3, quatre 4, et ainsi de suite).

Déterminez u_{100}. [2 pt.] Résolvez l'équation $u_n = 100$ d'inconnue entière n. [2 pt.]

$<\spadesuit(21)>$ On donne : $\cos(\alpha+\beta) = 4/5$ et $\cos(\alpha+2.\beta) = 1/5$. Quelles sont les valeurs possibles de $\cos(\alpha+3.\beta)$? (pensez à écrire $\alpha+3.\beta$ comme combinaison de $\alpha+\beta$ et $\alpha+2.\beta$). [3 pt.]

MPSI 2	La relation $1+2.t_2+2.T_4+\ldots+T_{2.n}=S_{2.n+1}$	**I.S.11**

On peut vérifier pour de petites valeurs de n. On peut effectuer une récurrence qui s'initialise facilement.
On peut aussi poser $x=\cos(\theta)$ *(attention, on ne cherche ainsi que sur* $[-1,1]$*)*.
Le premier membre devient $1+2.T_2(\cos(\theta))+2.T_4(\cos(\theta))+\ldots+T_{2.n}(\cos(\theta))$. Il devient $1+2.\cos(2.\theta)+2.\cos(4.\theta)+\ldots+2.\cos(2.n.\theta)$. On y reconnaît un noyau de Dirichlet, avec $2.\theta$ à la place de θ et un multiplicateur égal à 2.
La bonne connaissance du cours conduit alors à $\boxed{2.\dfrac{\sin\left(\dfrac{2.n+1}{2}.2.\theta\right)}{2.\sin\left(\dfrac{2.\theta}{2}\right)}}$ qu'on simplifie en $\dfrac{\sin((2.n+1).\theta)}{\sin(\theta)}$.
On y reconnaît la définition même de $S_{2.n+1}$.
Mais le cours *(en version étendue)* nous dit aussi : $k.S_k=(T_k)'$ obtenue en dérivant la relation $T_k(\cos(\theta))=\cos(k.\theta)$.
On remplace donc : $1+2.T_2(\cos(\theta))+2.T_4(\cos(\theta))+\ldots+T_{2.n}(\cos(\theta))=\dfrac{T'_{2.n+1}(\cos(\theta))}{2.n+1}$.
Ce résultat est valable pour tout θ. On a donc $1+2.T_2(x)+2.T_4(x)+\ldots+T_{2.n}(x)=\dfrac{T'_{2.n+1}(x)}{2.n+1}$ pour tout x de $]-1,1[$ (ouvert à cause des divisions par $\sin(\theta)$). Le principe d'élargissement *(deux polynômes égaux en une infinité de points sont égaux)* conduit à la formule de l'élève.

Mais finalement, il n'a rien inventé. On pourrait appeler sa formule du nom de Dirichlet et Tchebitchev.

MPSI 2	Les intégrales $\int_0^{\pi/2}\sin^n(t).dt$.	**I.S.11**

Toutes ces intégrales existent par continuité de la fonction sous le signe somme. Ces fonctions sont même dérivables à dérivée continue, ce qui autorise à calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n(t).\sin(t).dt$ en intégrant par parties : $W_{n+1}=\Big[\sin^n(t).\cos(t)\Big]_{t=0}^{\pi/2}+\displaystyle\int_{t=0}^{\pi/2}n.\sin^{n-1}(t).\cos(t).\cos(t).dt$ en tenant bien compte des signes moins *(on a dérivé* $\sin^n$ *et intégré* $\sin$*)*.
Le crochet est nul, une fois grâce au sinus en 0 et une fois grâce au cosinus en $\pi/2$. On remplace ensuite $\cos^2(t)$ par $1-\sin^2(t)$ dans la nouvelle intégrale. On sépare par linéarité en $W_{n+1}=n.(W_{n-1}-W_{n+1})$.
On réunit d'un même côté : $(n+1).W_{n+1}=n.W_{n-1}$ et on divise par $n+1$ pour arriver à la formule de l'énoncé.

On exploite la formule en $n=6$: $W_7=\dfrac{6}{7}.W_5=\dfrac{6.4}{7.5}.W_3=\dfrac{6.4.2}{7.5.3}.W_1$ et on calcule W_1 avec la simple primitive : le cosinus. On trouve $\boxed{W_7=\dfrac{6.4.2}{7.5.3}=\dfrac{16}{35}}$

Pour calculer les douze premières intégrales de Wallis *(puisque c'est elles)* :
on va intégrer par la formule `int(...,t=0..Pi/2)` en n'oubliant pas la majuscule à `Pi`
On va mettre en séquence : `seq(int((sin(t)^n,t=0..Pi/2),n=0..11)`
en n'oubliant pas le point virgule.

MPSI 2	Formules en $\tan(\theta/2)$.	**I.S.11**

On prend le complexe $\dfrac{1+i.t}{1-i.t}$ et on multiplie "haut et bas" par $1+i.t$ (puisque t est réel). On trouve

$\dfrac{(1+i.t)^2}{1+t^2}$, qu'on développe et sépare en $\boxed{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+i.\dfrac{2.t}{1+t^2}}$

Dans le même temps, si on pose $t=\tan(\theta/2)$ (c'est à dire $\theta=2.Arctan(t)$), on constate que notre complexe n'est autre que $\dfrac{1+i.\dfrac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}}{1-i.\dfrac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}}$. On multiplie "haut et bas" par $\cos(\theta/2)$. On est arrivé à $\dfrac{c+i.s}{c-i.s}$.

Les formules de Moivre et Euler permettent de remplacer par $e^{i.\theta/2}/e^{-i.\theta/2}$ et donc par $e^{i.2.\theta/2}$.

En gardant la notation $t=\tan(\theta/2)$ on a donc : $e^{i.\theta}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+i.\dfrac{2.t}{1+t^2}$. Il ne reste plus qu'à identifier partie réelle et partie imaginaire et on dispose des formules en arc moitié.

Cette méthode simple ne me satisfait pas trop pourtant, car je n'y perçois pas assez facilement la vision géométrique de ce qu'il s'y passe.

MPSI 2	L'application $t\longrightarrow\frac{2.t+1}{(t+1).(t-2).(t+3)}$.	**I.S.11**

Pour décomposer en éléments simples, c'est à dire écrire : $\dfrac{2.t+1}{(t+1).(t-2).(t+3)}=\dfrac{a}{t+1}+\dfrac{b}{t-2}+\dfrac{c}{t+3}$ on utilise la méthode des pôles (pour trouver a, b et c par condition nécessaire).

On multiplie par $t+1$ et on fait tendre t vers -1 : $\dfrac{-1}{(-3).(2)}=a+0$.

De même : $b=\dfrac{5}{15}$ et $c=\dfrac{-5}{(-2).(-5)}$. On trouve : $\boxed{\dfrac{2.t+1}{(t+1).(t-2).(t+3)}=\dfrac{1/6}{t+1}+\dfrac{1/3}{t-2}-\dfrac{1/2}{t+3}}$

On n'en est pas peu fier, et on encadre.

Pour dériver cinq fois, il suffit de savoir dériver une application telle que $t\longrightarrow\dfrac{1}{t+a}$, qu'on écrit $t\longrightarrow(t+a)^{-1}$. On trouve dans l'ordre $t\longrightarrow-(t+a)^{-2}$, $t\longrightarrow 2.(t+a)^{-3}$, $t\longrightarrow-6.(t+a)^{-4}$, $t\longrightarrow 24.(t+a)^{-5}$, jusqu'à $t\longrightarrow 120.(t+a)^{-6}$ pour la dérivée d'ordre 5.

Oui, on peut établir une forme générale.

La dérivée demandée est donc :

$$\left(\frac{2.t+1}{(t+1).(t-2).(t+3)}\right)^{(5)}=\left(t\longrightarrow 120.\left(\frac{1/6}{(t+1)^5}+\frac{1/3}{(t-2)^5}-\frac{1/2}{(t+3)^5}\right)\right)$$

sa valeur en 0 se calcule : $f^{(5)}(0)=\dfrac{39935}{1944}$. *Oui, elle se calcule, mais ça n'a strictement aucun intérêt... contrairement aux calculs de physique qui sont tout aussi peu ragoûtant mais conduisent au moins à des résultats exploitables.*

MPSI 2	L'équation différentielle $5.y"_t-6.y'_t+y_t=0$.	**I.S.11**

On a affaire à une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, à second membre identiquement nul, avec condition initiale, à résoudre sur $\mathbb{R}$.

On doit d'abord diviser pour revenir à la forme habituelle. L'équation caractéristique est alors $\lambda^2-\dfrac{6}{5}.\lambda+\dfrac{1}{6}=0$ d'inconnue λ réelle ou complexe. Les deux valeurs propres sont 1 et 1/5. Les solutions sont de la forme $t\longrightarrow a.e^t+b.e^{t/5}$.

La condition initiale donne $a+b=1$ et $a+b/5=0$. On trouve $\boxed{t \longrightarrow \frac{5.e^{t/5}-e^t}{4}}$ valable sur $\mathbb{R}$.

Pour l'autre équation $y"_t - 4.y'_t - 5.y_t = 1 + sh(t)$, le spectre est $\{5, -1\}$. Les solutions homogènes sont en $t \longrightarrow a.e^{-t} + b.e^{5.t}$. Une solution particulière est $-1/5$ pour que le second membre soit 1. Pour le terme $e^t/2$, une solution particulière est $e^t/16$.
Pour le second membre $e^{-t}/2$, il faut incrémenter le degré à cause du noyau. On tente donc $t \longrightarrow t.e^{-t}$ qui devient $t \longrightarrow -6.e^{-t}$. On divise donc par 12, et il ne reste plus qu'à sommer :
$\boxed{t \longrightarrow a.e^{-t} + b.e^{5.t} - \frac{1}{5} + \frac{e^t}{16} + \frac{t.e^{-t}}{12}}$ avec a et b dépendant des conditions initiales. La solution est valable sur $\mathbb{R}$.

MPSI 2 | Le produit $\prod_{k=2}^{200}(1-\frac{1}{k})$. | **I.S.11**

On écrit simplement qu'il s'agit de $\prod_{k=2}^{200}\frac{k-1}{k}$. On sépare en $\boxed{\frac{\prod_{k=2}^{200}(k-1)}{\prod_{k=2}^{200}k} = \frac{\prod_{h=1}^{199}h}{\prod_{k=2}^{200}k} = \frac{1}{200}}$ et c'est déjà fini.

MPSI 2 | Equations avec T_8. | **I.S.11**

On veut résoudre $2.T_8(x)+1=0$ c'est à dire $T_8(x)=-1/2$.
On cherche d'abord les solutions sur $[-1,1]$ en changeant de variable : $x=\cos(t)$. L'équation devient $\cos(8.t)=\cos(2.\pi/3)$.

Attention, ne m'écrivez pas $T_8(x)=\cos(8.x)$ c'est totalement crétin. Ce qu'on a c'est $T_8(\cos(x))=\cos(8.x)$. De même, arrêtez d'écrire des choses comme $\cos(8.t) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2.\pi}{3}\right)$. Ca ne peut pas avoir de sens. Le premier signe égale est une question d'inconnue x et le second est un calcul. Le premier n'est vrai que pour les quelques x qui sont solutions de l'équation, tandis que le second est toujours vrai.

On passe par les deux cas d'égalité des cosinus :
• $\exists\ k \in \mathbb{Z},\ 8.t = \frac{2.\pi}{3} + 2.k.\pi$ et • $\exists\ k \in \mathbb{Z},\ 8.t = -\frac{2.\pi}{3} + 2.k.\pi$
On trouve pour t deux ensembles de solutions : $\left\{\frac{\pi}{6} + k.\frac{\pi}{4} | k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $\left\{-\frac{\pi}{6} + k.\frac{\pi}{4} | k \in \mathbb{Z}\right\}$
On revient à la variable x en passant au cosinus.
On semble avoir deux familles infinies : celle des $\cos\left(\frac{\pi}{6} + k.\frac{\pi}{4}\right)$ et celle des $\cos\left(-\frac{\pi}{6} + p.\frac{\pi}{4}\right)$. Mais par parité du cosinus, c'est deux fois la même *(remplacezp par $-k$ qui décrit aussi $\mathbb{Z}$)*.
Ensuite, on se demande si cela donne une infinité de réels.
Mais par périodicité du cosinus, on n'en a que huit :
$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \frac{1}{2}, \cos\left(\frac{5.\pi}{12}\right), \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et leurs opposés}}$ par symétrie sur le cercle trigonométique.
Ensuite, il reste un autre gros problème à évoquer : a-t-on trouvé toutes les racines ? On ne les a cherchées qu'entre -1 et 1 par notre changement de variable.
Mais le polynôme T_8 est de degré 8 *(c'est du cours)*. Il ne peut pas avoir plus de huit racines *(factorisation)*. C'est donc la liste de ses racines qui figure ci dessus.
On note que c'est la parité de T_8 qui donne une liste symétrique par rapport à 0.

L'équation $T_8(x) = -2$ en revanche n'a **pas de racine réelle**. En effet, pour x entre -1 et 1, on pose $x = \cos(t)$ et l'équation devient $\cos(8.t) = -2$, sans racine. Pour x plus grand que 1, on pose $x = ch(t)$ et l'équation devient $ch(8.t) = -2$ toujours sans racine. Et par parité, il ne peut pas y avoir de racine dans $]-\infty, -1]$.
Finalement, la chose se voit graphiquement assez bien.

MPSI 2	La suite $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, \ldots)$.	**I.S.11**

Cette suite est parfaitement définie, même si il n'est pas simple d'en expliciter le terme d'indice n. Ce qu'on peut expliciter, c'est les valeurs de l'indice n pour lesquelles la suite change de valeur : 0, 1, 3, 6, 10, 15 et ainsi de suite. Comme à chaque fois la "plage de constance" est plus longue d'une unité, on voit apparaître ce qu'on appelle les nombres triangulaires de la forme $1 + 2 + 3 + \ldots + k$.
Or, ces nombres sont bien connus, et leur valeur explicite est $k.(k+1)/2$ *(de l'ordre de grandeur de $k^2/2$ pour être simpliste et cerner les choses).*
Pour calculer u_{100}, il faut savoir à quelle plage correspond le 100.
On l'encadre donc par deux nombres triangulaires : $\dfrac{13.14}{2}$ et $\dfrac{14.15}{2}$ *(obtenus par recherche assez systématique ou estimation "à la louche" de $k^2/2 \simeq 100$).*
Sur toute la plage de u_{91} à u_{104}, on a la valeur 14. On déduit donc : $\boxed{u_{100} = 14}$
Pour vous confirmer ou aider :

plage	u_0	$u_1 - u_2$	$u_3 - u_5$	$u_6 - u_9$	$u_{10} - u_{14}$	$u_{15} - u_{20}$	$u_{21} - u_{27}$	$u_{28} - u_{35}$						
valeur	1	2	3	4	5	6	7	8						

									$u_{36} - u_{44}$	$u_{45} - u_{54}$	$u_{55} - u_{65}$	$u_{66} - u_{77}$	$u_{78} - u_{90}$	$u_{91} - u_{104}$
									9	10	11	12	13	14

On poursuit, et on cherche le long de quelle plage cette fois on aura $u_n = 100$. Il aura fallu épuiser déjà quatre vingt dix neuf termes de valeur 99, et quatre vingt dix huit termes de valeur 98 et ainsi de suite. En bref, on n'y arrivera que pour n égal à $1 + 2 + \ldots + 99$.
C'est donc à partir du rang $n = 4950$ qu'on a $u_n = 100$.
Et ça dure... pendant cent entiers successifs, c'est à dire jusqu'à $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$ (exclu), c'est à dire 5049.
On écrit proprement : $\boxed{S = [4950, 5050[\cap \mathbb{N}}$ (ouvert à droite).
Je vous laisse réfléchir à la possibilité de trouver une formule explicite pour u_n pour tout n entier naturel. Ou déjà pour $u_{(k.(k+1)+2.p)/2}$ si vous comprennez pourquoi j'envisage un tel indice...

MPSI 2	$\cos(\alpha + \beta) = 4/5$ et $\cos(\alpha + 2.\beta) = 1/5$	**I.S.11**

On peut positionner les deux angles $\alpha + \beta$ et $\alpha + 2.\beta$ sur le cercle trigonométrique, chacun "à un signe près". On a donc déjà quatre possibilités au total pour placer le couple $(\alpha+\beta, \alpha+2.\beta)$. Quand le cosinus est connu, le sinus l'est au signe près. C'est ainsi qu'on a $\sin(\alpha + \beta) = 3/5$ ou $\sin(\alpha + \beta) = -3/5$.
Dans chacun des cas, on va pouvoir extraire $\alpha + 3.\beta$ et ses deux lignes trigonométriques grâce à la formule $\alpha + 3.\beta = 2.(\alpha + 2.\beta) - (\alpha + \beta)$.
En développant donc $\cos(2.a - b) = \cos(2.\alpha).\cos(b) + \sin(2.a).\sin(b)$ on trouve $\cos(\alpha + 3.\beta) = (2.\cos^2(\alpha + \beta) - 1).\cos(\alpha + 2.\beta) + 2.\sin(\alpha + \beta).\cos(\alpha + \beta).\sin(\alpha + 2.\beta)$.
On n'aura donc au final que deux valeurs possibles, car seul le signe global du second produit peut changer. Ces deux cosinus sont :

- $\Big(2.\Big(\dfrac{1}{5}\Big)^2 - 1\Big).\Big(\dfrac{4}{5}\Big) + 2.\Big(\dfrac{1}{5}.\dfrac{\sqrt{24}}{5}\Big).\Big(\dfrac{3}{5}\Big)$ et
- $\Big(2.\Big(\dfrac{1}{5}\Big)^2 - 1\Big).\Big(\dfrac{4}{5}\Big) + 2.\Big(\dfrac{1}{5}.\dfrac{\sqrt{24}}{5}\Big).\Big(\dfrac{3}{5}\Big)$ de valeurs respectives $\boxed{\dfrac{-92 + 6.\sqrt{24}}{125} \text{ et } \dfrac{-92 - 6.\sqrt{24}}{125}}$

$<\diamondsuit(43)>$ On donne : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculez $A.B$ et $B.A$ ainsi que leurs déterminants. [4 pt.]

$<\heartsuit(43)>$ On donnee $A(1,3)$, $B(3,0)$, $C(5,7)$ et $D(2,8)$.
Calculez l'aire du quadrilatère (A,B,C,D). [2 pt.]

$<\diamondsuit(44)>$ On note F le point de coordonnées $(1,4)$ et Δ la droite d'équation $\ldots.x + 3.y - 11 = 0$.
Ajustez le coefficient sous la tache pour que le point F soit à distance de 1 de Δ. [2 pt.]
Déterminez alors l'équation de l'ensemble des points à égale distance de F et de Δ. [2 pt.] Mettez la sous la forme ${}^tX.S.X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ avec S matrice carrée symétrique de taille 3 (symétrique : $s_i^j = s_j^i$). [2 pt.]

$<\heartsuit(44)>$ Résolvez $y"_t - 7.y'_t + 10.y_t = 20 + e^{2.t}$ d'inconnue y fonction de t. [4 pt.]

$<\heartsuit(45)>$ Résolvez $t.y'_t + \sin(\ln(t)).y'_t = 0$ d'inconnue y fonction de t strictement positif. Quelle solution a une limite en 0 *(par valeur supérieure)*. [2 pt.]

$<\spadesuit(22)>$ Pour quelles valeurs du réel a l'équation $x^2 + (8 - 6.a).x + 8.a^2 - 22.a = 0$ d'inconnue x admet elle des racines réelles ? [2 pt.]

$<\spadesuit(23)>$ Pour quelles valeurs du réel a l'équation $x^2 + (8 - 6.a).x + 8.a^2 - 22.a = 0$ d'inconnue x admet elle des racines réelles toutes deux positives ? [2 pt.]

$<\diamondsuit(45)>$ Soit A une matrice carrée de taille 7 de terme général a_i^k. Complétez les deux petits points pour que le terme $a_3^1.a_4^2.a_5^3.a_6^4.a_*^5.a_*^6.a_1^7$ intervienne avec signe moins dans le déterminant de A *(expliquez, évidemment, y'a écrit maths, et pas formation E.O.R.)* [2 pt.]

$<\clubsuit(15)>$ Les α_i^k sont des entiers pairs, les β^k sont des entiers impairs et les γ_i^k sont des entiers. Montrez que la matrice $\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \beta_1^2 & \gamma_1^3 \\ \beta_2^1 & \gamma_2^2 & \gamma_2^3 \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \beta_3^3 \end{pmatrix}$ est inversible *(étudiez la parité de son déterminant)*. [2 pt.]

$<\diamondsuit(46)>$ Dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ de base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u} = 2.\vec{i} + 3.\vec{j}$. Résolvez l'équation $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 5$ et $|\vec{v}| = 5$ d'inconnue vectorielle $\vec{v}$. [2 pt.]

$<\clubsuit(16)>$ Décomposez en produit de facteurs premiers $\prod_{k=1}^{11} (-k)^{(-1)^k+1}$. [2 pt.]

MPSI 2	L'aire d'un quadrilatère.	**I.S.12**

On a la liste des sommets : $A(1,3)$, $B(3,0)$, $C(5,7)$ et $D(2,8)$. On déduit les vecteurs utiles : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

On trouve les aires des deux triangles : $Aire(A,B,C) = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}$ et $Aire(A,C,D) = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$.

La somme des aires vaut $9 + \frac{17}{2}$ ce qui fait un total de $\boxed{\frac{35}{2} \text{ unités d'aire}}$

MPSI 2	Deux matrices.	**I.S.12**

On effectue les deux produits matriciels demandés, en observant que les formats sont compatibles (alors que A^2 ne peut exister) :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ de déterminant 10

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ de déterminant nul.

A part ça, les deux matrices ont quand même la même trace.

MPSI 2	Le point $F(1,4)$ et la droite $4.x + 3.y = 11$.	**I.S.12**

On mesure la distance du point à la droite par la formule du cours : $\frac{|a.x + 3.y - 11|}{\sqrt{a^2 + 9}}$. On y "pose" le point F : $\frac{|a + 12 - 11|}{\sqrt{a^2 + 9}} = 1$. On élève au carré pour éliminer les valeurs absolues : $(a+1)^2 = a^2 + 9$. L'équation est du premier degré, d'unique solution 4. La droite a donc pour équation $4.x + 3.y = 11$.

L'ensemble des points à égale distance de F et de Δ a pour équation $\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = \frac{|4.x + 3.y - 11|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$. On élève au carré en raisonnant donc par équivalence puisqu'il y a une valeur absolue :

$25.\big((x-1)^2 + (y-4)^2\big) = (4.x + 3.y - 11)^2$.

On développe et on trouve $\boxed{9.x^2 + 16.y^2 - 24.x.y + 38.x - 134.y + 304 = 0}$ ***(rien moins que ça !)***

On identifie avec $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est bien un réel.

On identifie les coefficients de la matrice par condition suffisante : $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 9 & -12 & 19 \\ -12 & 16 & -67 \\ 19 & -67 & 304 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

On montrera que l'ensemble cherché est une parabole, et on verra comment la placer dans le bon repère pour la reconnaître sous la forme $Y = \alpha.X^2$.

MPSI 2	Une équation du second degré.	**I.S.12**

Il faut bien comprendre l'énoncé. On a une équation du second degré en x. Son discriminant vaut

$(8-6.a)^2-4.(8.a^2-22.a)$, c'est à dire $4.a^2-8.a+64$.
Comme ses coefficients sont réels, ses racines sont réelles si et seulement si son discriminant est un réel positif. Et ce discriminant, c'est $4.(a-1)^2+60$. Il est positif pour tout a de $\mathbb{R}$.
On peut conclure : **pour tout a réel, les racines de $x^2+(8-6.a).x+8.a^2-22.a=0$ sont réelles.**

On veut ensuite que les racines soient réelles et positives. On sait que la plus petite est la moitié de $6.a-8-\sqrt{4.(a-1)^2+60}$. Elles seront donc toutes deux positives si et seulement si ce réel ci est lui même positif.

On résout donc $\sqrt{4.(a-1)^2+60}\leqslant(6.a-8)$. Pour a plus petit que $4/3$, c'est perdu, puisque $6.a-8$ est négatif. Sinon, on élève au carré, et on arrive à la condition $4.a^2-8.a+64\leqslant 36.a^2-96.a+64$ qui donne $a.(4.a-11)\geqslant 0$. Comme on n'envisage que le cas où a est plus grand que $4/3$, il est positif, et on veut donc que $4.a$ soit plus grand que 11.
On exige donc à la fois $a\geqslant 11/4$ et $a\geqslant 4/3$.

On peut conclure : **les racines de $x^2+(8-6.a).x+8.a^2-22.a=0$ sont réelles et positives si et seulement si le réel a est plus grand que $11/4$.**

MPSI 2	L'équation $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=5$ et $|\overrightarrow{v}|=5$.	**I.S.12**

On note x et y es deux composantes du vecteur inconnu. On résout alors le système $2.x-3.y=5$ et $x^2+y^2=25$. Pour une fois, on est efficace en remplaçant y par $(2.x-5)/3$ dans la seconde équation. On aboutit à une équation du second degré, et on résout. On a deux solutions :

$$\boxed{\left(\frac{10-30.\sqrt{3}}{13},\frac{-15-20.\sqrt{3}}{13}\right)\text{ et }\left(\frac{10+30.\sqrt{3}}{13},\frac{-15+20.\sqrt{3}}{13}\right)}$$

MPSI 2	Un déterminant à coefficients entiers.	**I.S.12**

On s'intéresse au déterminant de $\begin{pmatrix}\alpha_1^1 & \beta_1^2 & \gamma_1^3\\ \beta_2^1 & \gamma_2^2 & \gamma_2^3\\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \beta_3^3\end{pmatrix}$.
On développe par rapport à la première colonne :
$\alpha_1^1.\begin{vmatrix}\gamma_2^2 & \gamma_2^3\\ \alpha_3^2 & \beta_3^3\end{vmatrix}-\beta_2^1.\begin{vmatrix}\beta_1^2 & \gamma_1^3\\ \alpha_3^2 & \beta_3^3\end{vmatrix}+\alpha_3^1.\begin{vmatrix}\beta_1^2 & \gamma_1^3\\ \gamma_2^2 & \gamma_2^3\end{vmatrix}$
Par parité des α, deux des termes sont pairs *("entier pair fois entier")*, il reste celui du milieu : $\beta_2^1.(\beta_1^2.\beta_3^3-\gamma_1^3.\alpha_3^2$.
Il est la somme de $\beta_2^1.\beta_1^2.\beta_3^3$ *(impair)* et $\beta_2^1.\gamma_1^3.\alpha_3^2$ *(pair grâce à α_3^2)*. Il est impair.
Au total, le déterminant est un entier impair *(impair+pair+pair)*.
Il ne peut donc pas être nul, puisque 0 est pair.

Au fait, on raisonne avec des phrases et non avec des $2.k+1$ et $2.k$ qui alourdissent tout... On est en maths, pas en chimie moléculaire avec de longues chaînes de lettres.

MPSI 2	Le produit $\prod_{k=1}^{11}(-k)^{(-1)^k+1}$.	**I.S.12**

Il n'y a pas trop d'efforts à faire, puisqu'il n'y a que onze termes. Et encore. Les exposants sont des 2 et des 0 suivant la parité de k.
Il ne reste que les termes avec k pair. Si si, $(-1)^0.(-2)^2.(-3)^0.(-4)^2\ldots(-11)^0$, c'est simple !
En plus, les signes moins s'en vont car chaque terme qui reste est un carré.
On a donc le carré de 2.4.6.8.10. On décompose en $2.(2^2).(2.3).(2^3).(2.5)$.

On fusionne et on termine : $\boxed{\prod_{k=1}^{11}(-k)^{(-1)^k+1} = 2^{16}.3^2.5^2}$

Pour ceux qui calculent d'abord, réfléchissent ensuite, puis recalculent après (et j'en connais) le nombre vaut 14745600.

MPSI 2	Equation différentielle $y"_t - 7.y'_t + 10.y_t = 20 + e^{2.t}$.	**I.S.12**

L'équation différentielle est linéaire, du second ordre à coefficients constants (noyau en exponentielles réelles ou complexes), avec second membre continu, simple. Comme il n'y a pas de condition initiale, l'espace des solutions sera un espace affine de dimension 2 (deux quantités numériques dépendant des conditions initiales).
D'avance, merci à celles (et ceux ?) qui auront pensé à baliser ainsi le terrain.
L'équation caractéristique est $\lambda^2 - 7.\lambda + 10 = 0$ d'inconnue λ. Le spectre est $\{5, 2\}$, les solutions homogènes sont de la forme $t \longrightarrow ae^{5.t} + b.e^{2.t}$ avec a et b réels à déterminer (plus tard) en fonction des conditions initiales.
On tient compte du second membre en le coupant en tranches :
• pour 20 une solution est $y_t = 2$.
• pour $e^{2.t}$ il faut augmenter le degré, par principe énoncé en cours, car $t \longrightarrow e^{2.t}$ est dans le noyau ; on teste donc $t \longrightarrow t.e^{2.t}$ dont les dérivées sont $t \longrightarrow (1 + 2.t).e^{2.t}$ puis $t \longrightarrow (4 + 4.t).e^{2.t}$; quand on le porte dans l'opérateur, les $t.e^{2.t}$ disparaissent, et il reste $-3.e^{2.t}$.
On tient solution générale : $\boxed{t \longrightarrow \Big(a - \frac{t}{3}).e^{2.t} + b.e^{5.t} + 2}$ avec a et b à déterminer seulement maintenant.

MPSI 2	Equation différentielle $t.y'_t + \sin(\ln(t)).y_t = 0$.	**I.S.12**

C'est une équation du premier ordre à coefficient continu pas encore sous forme de Cauchy-Lipschitz, avec second memebre identiquement nul. Les solutions forment un espace vectoriel de dimension 1.
On note a l'application $t \longrightarrow \frac{\sin(\ln(t))}{t}$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. On en trouve une primitive : $t \longrightarrow -\cos(\ln(t))$ (forme en $u'.\sin(u)$). Il n'est pas utile de choisir la primitive nulle en un point particulier, puisque l'on n'a pas de condition initiale.
Les solutions sont de la forme $\boxed{t \longrightarrow A.e^{\cos(\ln(t))}}$ avec A à déteminer.

MPSI 2	Le terme $a_3^1.a_4^2.a_5^3.a_6^4.a_*^5.a_*^6.a_1^7$ dans un déterminant de taille 7.	**I.S.12**

Ce terme est bien homogène, de degré 7.
Chaque colonne intervient une fois et une seule. Pour que chaque ligne intervienne une fois et une seule, il faut que les deux petites étoiles vaillent 2 et 7. On a donc deux choix, qu'on va étudier toutes deux, en regardant la permutation σ associée, et en choisissant celle (celles ?) ayant une signature -1 :

terme	σ		signature	choix
$a_3^1.a_4^2.a_5^3.a_6^4.a_2^5.a_7^6.a_1^7$	$[3, 4, 5, 6, 2, 7, 1]$	$\overrightarrow{(1, 3, 5, 2, 4, 6, 7)}$	1	non
$a_3^1.a_4^2.a_5^3.a_6^4.a_7^5.a_2^6.a_1^7$	$[3, 4, 5, 6, 7, 2, 1]$	$\overrightarrow{(1, 3, 5, 7)} \circ \overrightarrow{(2, 4, 6)}$	-1	oui

Et une fois de plus, c'est avec un tableau que tout est rédigé, synthétisé.

$<\diamondsuit(47)>$ On définit de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ les deux applications γ et σ par $\gamma(t) = t.\cos(\ln(t))$ et $\sigma(t) = t.\sin(\ln(t))$. Calculez les deux premières dérivées de chacune. [2 pt.] Déterminez l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont l'espace des solutions est l'espace engendré par γ et σ. [2 pt.] Montrez que $t \longrightarrow \sigma(\mu.t)$ est solution de cette équation pour tout réel strictement positif μ. [1 pt.]

$<\heartsuit(46)>$ Quantifiez (u_n) converge, mais pas vers 0. [2 pt.]

$<\heartsuit(47)>$ Mesurez la distance du point $(2, 1, 0)$ à la droite (AB) avec $A(2, 2, 3)$ et $B(1, 4, 0)$. [2 pt.]

$<\heartsuit(48)>$ Simplifiez $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w})$ quand $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont trois vecteurs de l'espace vectoriel euclidien usuel $\mathbb{R}^3$. [2 pt.]

$<\heartsuit(49)>$ Rappelez la définition de "f est surjective de A dans B". [1 pt.]

$<\spadesuit(24)>$ Pour tout a dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation $(1-i).z^2+(3-i-2.a).z+(1+i).(a^2+2)+(i-1).a = 0$ d'inconnue complexe z (notée E_a). Calculez son discriminant noté Δ_a. Montrez que Δ_a peut s'écrire $(\alpha.a+\beta)^2$ avec α et β complexes (pas trop compliqués). [2 pt.] Résolvez l'équation E_a. [2 pt.] Pour quelles valeurs du paramètre a les deux solutions de E_a sont elles réelles ? [2 pt.]

$<\diamondsuit(48)>$ a, b et c sont trois réels distincts. On veut décomposer $\dfrac{X^2 - s.X + p}{(X-a).(X-b).(X-c)}$ en éléments simples : $\dfrac{\alpha}{X-a} + \dfrac{\beta}{X-b} + \dfrac{\gamma}{X-c}$.
Ecrivez le système obtenu par réduction au dénominateur commun et écrivez le sous la forme $M.U = P$ avec M matrice à préciser, $U = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ vecteur inconnu et $P = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ p \end{pmatrix}$ vecteur paramètre. [2 pt.]
Ajustez le coefficient sous la tache de café de T pour que le produit $T.M$ soit la matrice de VanDer-Monde avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b+c & 1 & 0 \\ * & a+b+c & 1 \end{pmatrix}$. [2 pt.]
Calculez le déterminant de la matrice V sous la forme la plus factorisée qui soit, et inversez V. [3 pt.]
Retrouvez les valeurs de α, β et γ et comparez au résultat trouvé par la méthode des pôles. [1 pt.]

$<\heartsuit(50)>$ On donne : $sh(a) = 7$. Choisissez β pour avoir $sh(a+\beta) = 8$. [2 pt.]

$<\heartsuit(51)>$ Dérivez quatre fois $t \longrightarrow \dfrac{1}{\sin(t)}$. [2 pt.]

$<\diamondsuit(49)>$ Résolvez $(1+t^4).y'_t+t.y_t = 0$ d'inconnue y fonction de t avec condition initiale $y_1 = 2$. [2 pt.]

MPSI 2	Une équation du second degré dans $\mathbb{C}$: $(1-i).z^2+(3-i-2.a).z+(1+i).(a^2+2)+(i-1).a=0$	**I.S.13**

On calcule le discriminant $(3-i-2.a)^2-4.(1+i).(1-i).(a^2+2)-4.(1-i)^2.a$, sachant que $(1+i).(1-i)$ vaut 2. On trouve après développement $\boxed{-4.a^2-12.a-4.i.a-8-6.i}$ que l'on note donc Δ_a.

Puisqu'on nous le dit, ce doit être le carré d'un certain $(\alpha.a+\beta)$. On trouve que α vaut $2.i$ pour que $\alpha^2.a^2$ soit égal à $-4.a^2$. Ensuite, pour que le double produit $2.\alpha.\beta$ soit égal à $-4.i-12.a$, on trouve que β vaut $3.i-1$.
Il ne reste qu'à vérifier : $(3.i-1)^2=-8-6.i$.
Tout se passe bien : $\boxed{\Delta=(2.i.a+3.i-1)^2}$

On peut donc résoudre l'équation, puisqu'on a une racine carrée du discriminant : $\delta=2.i.a+3.i-1$.
On a donc deux racines : $\dfrac{i+2.a-3+(2.i.a-1+3.i)}{2.(1-i)}$ et $\dfrac{i+2.a-3-(2.i.a+3.i-1)}{2.(1-i)}$ (qui en aucun cas ou presque n'est son conjugué).

On simplifie en $\dfrac{(1+i).a-2+2.i}{1-i}$ et $a-i$ (belle simplification). En multipliant la première racine en haut et en bas par la quantité conjuguée, on trouve donc les deux racines de E_a : $\boxed{a-i \text{ et } i.a-2}$

Dernière étape du parcours : on veut que ces deux racines soient toutes deux réelles. Ceci revient à demander que déjà $a-i$ soit un réel r. On aboutit à $a=r+i$ avec r réel. Mais en reportant dans l'autre condition, on arrive à $i.r-1-2$ est réel : r est nul.
L'unique possibilité est donc $a=i$.
On vérifie alors : E_i est l'équation $(1-i).z^2+(3-i-2.i).z+0=0$. Une racine évidente est 0 et l'autre est -3. Ce sont bien deux racines réelles. Mais l'équation n'est pas à coefficients réels...

MPSI 2	$\gamma(t)=t.\cos(\ln(t))$ et $\sigma(t)=t.\cos(\ln(t))$.	**I.S.13**

On dérive effectivement deux fois car ces applications sont de classe C^∞ et on synthétise par un tableau *(qui aura eu ce bon réflexe de présentation ?)*

$f(t)$	$f'(t)$	$f"(t)$
$t.\cos(\ln(t))$	$\cos(\ln(t))-\sin(\ln(t))$	$-\dfrac{\sin(\ln(t))+\cos(\ln(t))}{t}$
$t.\sin(\ln(t))$	$\sin(\ln(t))+\cos(\ln(t))$	$\dfrac{\cos(\ln(t))-\sin(\ln(t))}{t}$

Il faut ensuite trouver les coefficients continus *(pas forcément constants)* a, b et c pour que nos deux applications soient solutions de $a_t.y"_t+b_t.y'_t+c_t.y_t=0$ *(si les deux le sont, leurs combinaisons linéaires le seront encore par linéarité)*. On sent qu'avec $\alpha.t^2.y"_t+\beta.t.y'_t+\gamma.y_t$ on doit pouvoir y arriver *(avec juste alors des cosinus et sinus à éliminer)*.

On propose finalement *(et on vérifie)* : $\boxed{t^2.y"_t-t.y'_t+2.y_t=0}$ est l'équation cherchée *(ce type d'équation en $\alpha.t^2.y"_t+\beta.t.y'_t+\gamma.y_t=0$ est appelé "homogène au sens d'Euler)*.

Pour prouver que $t\longrightarrow\sigma(\mu.t)$ est bien solution de cette équation, il suffit de prouver que cette application est combinaison linéaire des deux applications γ et σ. Il nous suffit de remplacer $\ln(\mu.t)$ par $\ln(t)+\ln(\mu)$ et de développer le sinus : $(\mu.t).\sin(\ln(\mu.t))=\mu.t.\sin(\ln(\mu)).\cos(\ln(t))+\mu.t.\cos(\ln(\mu)).\sin(\ln(t))$ pour tout t. Les coefficients de la combinaison sont $\mu.\sin(\ln(\mu))$ et $\mu.\cos(\ln(\mu))$.

On notera qu'on peut écrire que nos solutions sont aussi combinaisons linéaires de $t \longrightarrow t.e^{i.\ln(t)}$ et $t \longrightarrow t.e^{-i.\ln(t)}$, que l'on ira jusqu'à écrire $t \longrightarrow e^{\ln(t)+i.\ln(t)}$ et $t \longrightarrow e^{\ln(t)+i.\ln(t)}$. On ne poussera pas le bouchon jusqu'à les écrire $t \longrightarrow t^{1+i}$ et $t \longrightarrow t^{1+i}$.

MPSI 2	Eléments simples $\frac{X^2-s.X+p}{(X-a).(X-b).(X-c)}$	**I.S.13**

On réduit $\dfrac{\alpha}{X-a}+\dfrac{\beta}{X-b}+\dfrac{\gamma}{X-c}$ au dénominateur commun : $\dfrac{\alpha.(X-b).(X-c)+\beta.(X-a).(X-c)+\gamma.(X-a).(X-b)}{(X-a).(X-b).(X-c)}$; on développe même le numérateur et on doit identifier $(\alpha+\beta+\gamma).X^2-(\alpha.(b+c)+\beta.(a+c)+\gamma.(a+b)).X+(\alpha.b.c+\beta.a.c+\gamma.a.b)$ avec $X^2-s.X+p$.

On traduit le système matriciellement : $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -(b+c) & -(a+c) & -(a+b) \\ b.c & a.c & a.b \end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -s\\ p\end{pmatrix}}$

On effectue $T.M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b+c & 1 & 0 \\ ? & a+b+c & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -(b+c) & -(a+c) & -(a+b) \\ b.c & a.c & a.b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

Le coefficient caché est $(a+b+c)^2-(a.b+a.c+b.c)$ ou encore $\boxed{a^2+b^2+c^2+a.b+a.c+b.c}$ *(je vous sers, Viète ?)*.

On passe au déterminant : $\det(T).\det(M)=\det(T.M)=\det(V)$. Le déterminant de T vaut 1 (matrice triangulaire de diagonale 1). Celui de V est connu : $(b-a).(c-a).(c-b)$.

On déduit : $\boxed{\det(M)=(b-a).(c-a).(c-b)}$

On y accédait aussi par simple calcul.

Les trois réels a, b et c sont distincts, le déterminant est non nul, la matrice est inversible. On l'inverse en calculant juste les trois vecteurs colonne $\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ avec des notations naturelles et en les écrivant en ligne. On trouve donc :

$$M^{-1}=\frac{1}{(b-a).(c-a).(c-b)}.\begin{pmatrix} a^2.(c-b) & a.(c-b) & c-b \\ b^2.(a-c) & b.(a-c) & a-c \\ c^2.(b-a) & c.(b-a) & b-a \end{pmatrix}.$$

On passe de $M.X=P$ à $X=M^{-1}.P$ par simple multiplication à gauche par M^{-1} (formats compatibles). On trouve : $\boxed{\alpha=\dfrac{a^2-s.a+p}{(a-b).(a-c)},\ \beta=\dfrac{b^2-s.b+p}{(b-a).(b-c)},\ \gamma=\dfrac{c^2-s.c+p}{(c-a).(c-b)}}$

On l'a d'ailleurs obtenu par la méthode des pôles.

La seule différence avec la méthode des pôles : on a raisonné ici par équivalences.
En revanche, la méthode des pôles ne raisonne que par conditions nécessaires : si il y a une décomposition, ce ne peut être que celle ci..."

MPSI 2	De $sh(a)=7$ à $sh(a+\beta)=8$.	**I.S.13**

On sait déjà : $a=\ln(7+\sqrt{50})$ par la formule en $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ qui figure dans le cours. On veut : $a+\beta=\ln(8+\sqrt{65})$ par la même formule.

On demande donc juste : $\beta=\ln(8+\sqrt{65})-\ln(7+\sqrt{50})$.

Si on y tient : $\beta=\ln\left(\dfrac{8+\sqrt{65}}{1+\sqrt{50}}\right)$ et même pire par les quantités conjuguées, mais je me demande si on va vraiment se fatiguer à cela...

MPSI 2	Dérivation de $t \longrightarrow \frac{1}{\sin(t)}$.	**I.S.13**

J'appelle f cette application, et je dérive une fois : $f' = t \longrightarrow -\dfrac{\cos(t)}{\sin^2(t)}$.

Je dérive deux fois : $f' = t \longrightarrow -\dfrac{\cos(t)}{\sin^2(t)}$.

Je dérive trois fois : $f' = t \longrightarrow -\dfrac{\cos(t)}{\sin^2(t)}$.

Je dérive quatre fois : $f' = t \longrightarrow -\dfrac{\cos(t)}{\sin^2(t)}$.

Pardon ? J'ai bien dérivé quatre fois. Mais peut être fallait il plutôt dérivée jusqu'à la dérivée quatrième...

Alors j'écris : $f' = t \longrightarrow -\cos(t).\sin(t)^{-2}$ et je redérive : $f" = t \longrightarrow \sin(t)^{-1} + 2.\cos^2(t).\sin(t)^{-3}$.

Je dérive encore sous cette forme :

$f^{(3)} = t \longrightarrow -\cos(t).\sin(t)^{-2} + 2.\Big(-2.\cos(t).\sin(t)^{-2} - 3.\cos^3(t).\sin(t)^{-4}\Big)$ que j'arrange en $\dfrac{-5.c}{s^2} - \dfrac{6.c^3}{s^4}$.

Je redérive : $f^{(4)} = -5.\Big(-\dfrac{1}{s} + \dfrac{2.c^2}{s^3}\Big) - 6.\Big(\dfrac{-3.c^2}{s^3} - \dfrac{4.c^4}{s^5}\Big)$.

On réduit au dénominateur commun $\boxed{f^{(4)} = t \longrightarrow \dfrac{5.\sin^4(t) + 28.\sin^2(t).\cos^2(t) + 24.\cos^4(t)}{\sin^5(t)}}$

On peut encore remplacer c^2 par $1 - s^2$ et arriver à une fraction en s.

Comment se planter dans cet exercice ? En écrivant des formules au mauvais étage. Et surtout, en utilisant des formules en $-\dfrac{u'}{u^2}$ *ou même* $\dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$ *qui conduisent sans tarder à des dénominateurs aux exposants délirants que les élèves ne simplifient pas, ou simplifient mal...*

MPSI 2	Questions de cours.	**I.S.13**

La suite (u_n) converge vers λ, c'est :

$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_\epsilon) \Rightarrow (|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon)$

On affine en "converge, mais pas vers 0" :

$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^*,\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_\epsilon) \Rightarrow (|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon)$

La distance d'un point à une droite de $\mathbb{R}^3$ se mesure par quotient de l'aire d'un parallélogramme par sa longueur. Comme dans le plan, on a en effet : aire du parallélogramme="longueur fois hauteur", et la hauteur, c'est bien la distance du point à la "base" du parallélogramme, laquelle est sur la droite.

Il reste à rappeler que l'aire d'un parallélogramme de $\mathbb{R}^3$, c'est la norme d'un produit vectoriel.

On va donc calculer $\dfrac{|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AB}|}$ qui donne ici $\dfrac{\sqrt{(-6-3)^2 + (0-3)^2 + (1-0)^2}}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2}}$ et on simplifie en $\sqrt{91/14}$ et même $\sqrt{13/2}$.

Les erreurs de calcul seront excusées en I.S. de ma part, du moment que vous avez la bonne formule.

On va simplifier $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w})$ (vecteur noté $\overrightarrow{r}$) en utilisant la formule du double produit vectoriel que je rappelle ici : $(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{a}$.

On a donc : $\overrightarrow{r} = (\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w})) \times \overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v}.(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w})) \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} - (\overrightarrow{v}.(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w})) \times \overrightarrow{u}$.

On revient à la définition du produit vectoriel par le déterminant (et l'antisymétrie de ce dernier) :

$\boxed{(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}).\overrightarrow{u}}$

Comme $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{u}$, il est normal que le résultat soit colinéaire à $\overrightarrow{u}$.

Définition de f est surjective de E dans F :
$\forall\ y\in F,\ \exists\ x\in E,\ y=f(x)$ *(tous les y de F sont atteints et sont donc de la forme $f(x)$ pour au moins un x de E).*

MPSI 2	Equation différentielle $(1+t^4).y'_t+t.y_t=0$	**I.S.13**

On identifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus, presque sous forme de Cauchy-Lipschitz, à second membre nul *(espace vectoriel de dimension 1)* avec une condition initiale *(une unique solution finalement).*

On la met sous forme de Cauchy-Lipschitz $y'_t+a_t.y_t=0$ avec $a=t\longrightarrow\dfrac{t}{1+t^4}$, qu'on lit $t\longrightarrow\dfrac{2.t}{2.(1+(t^2)^2)}$ afin de trouver aisément une primitive. On intègre en $t\longrightarrow Arctan(t^2)/2$.

On opte directement pour $t\longrightarrow\dfrac{Arctan(t^2)}{2}-\dfrac{\pi}{8}$ pour avoir la primitive nulle en 1.

La connaissance de la valeur en 1 donne directement : $\boxed{y_t=2.e^{\frac{\pi}{8}-\frac{Arctan(t^2)}{2}}}$ valable sur $\mathbb{R}$.

Le pire, c'est que vous allez encore être terriblement nuls. Je me prépare à villipender les imbéciles qui rédigeront avec $C^{te}.e^{-\frac{Arctan(t^2)}{2}}$ et qui détermineront ensuite leur connerie de constante par la condition initiale en 1 (au lieu de prendre directement la primitive nulle en 1 comme prescrit dans tout cours de mathématiques et de physique). Et dans la pratique, il faudra que je félicite les rares élèves qui auront trouvé la bonne primitive.

$I.S.13$	MPSI2	447 points	Année 2012/13	$I.S.13$

$\overline{<\diamondsuit(50)>}$ Complétez $(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}-3.\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})$ en base de $\mathbb{R}^3$ pour que $\overrightarrow{i}$ ait pour composantes $(1,2,1)$ sur cette base. [1 pt.]

Décomposez alors $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sur cette base. [3 pt.]

$\overline{<\heartsuit(52)>}$ Donnez dans $\mathbb{R}^3$ un jeu d'équations cartésiennes de la droite passant par $(1,3,2)$ et par $(2,1,-2)$. [2 pt.]

$\overline{<\heartsuit(53)>}$ Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normé de $\mathbb{R}^3$. On définit : $f = \overrightarrow{u} \longrightarrow \overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{u}$. Explicitez $f\circ f\circ f$. [2 pt.]
Qui est f^{100} *(au sens de la loi de composition)*. [1 pt.]

$\overline{<\heartsuit(54)>}$ Si f est une application linéaire d'un espace vectoriel $(E,+,.)$ dans lui même, on note $Ker(f)$ l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est nulle. Montrez que $Ker(f)$ est stable par addition et multiplication par un réel. [1 pt.]

Montrez : $Ker(f)\subset Ker(g\circ f)$ si g est aussi linéaire de E dans E. [2 pt.]

$\overline{<\diamondsuit(51)>}$ Hughes n'arrête pas de réclamer des SuDoKu. On va lui faire plaisir : combien peut on créer de carrés de taille 3 sur 3 remplis en utilisant une fois et une seule chacun des chiffres de 1 à 9 ? [1 pt.] Calculez la somme des déterminants de toutes ces petites matrices de taille 3. [2 pt.]

$\overline{<\spadesuit(25)>}$ On note A l'ensemble des nombres de la forme $p+q.\sqrt{3}$ avec p et q rationnels. Montrez que $(A,+,.)$ est un anneau. [2 pt.]

On note T l'ensemble des mesures angulaires dont le sinus et le cosinus sont dans A. Montrez que $(T,+)$ est un groupe. [2 pt.]

Est ce vrai : si θ est dans T alors $tan(\theta)$ est dans A. [1 pt.]

$\overline{<\clubsuit(17)>}$ Trois carrés sont tracés côté à côte dans un triangle rectangle. Montrez que le côté du carré du milieu est la moyenne géométrique des longueurs des deux carrés extrêmes. [2 pt.]

Si je n'ai pas mis de dessin dans la marge, pensez à me réclamer un croquis au tableau. Sinon, je vous décris : un triangle rectangle (A,B,C) d'hypothénuse $[AC]$. Sur le côté $[A,B]$: quatre points E, F, G et H, et trois carrés : (E,F,F',E'), $(F,G,G',F")$ et $(G,H,H',G")$ tels que E', $F"$ et $G"$ soient sur $[A,C]$.

$\overline{<\diamondsuit(52)>}$ Calculez le déterminant de la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 7 & -5 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, et inversez la par la méthode du pivot de Gauss avec "domino" qui passe de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} . & . & . & | & 1 & 0 & 0 \\ . & . & . & | & 0 & 1 & 0 \\ . & . & . & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. [4 pt.]

$\overline{<\diamondsuit(53)>}$ On note σ la permutation $\overrightarrow{(1,3,6,7,8)}\circ\overrightarrow{(2,4,5,10,9)}$. Décomposez la en cycles de taille 2. [2 pt.] Décomposez la en quatre cycles de taille 3. [2 pt.]

Complétez : $\overrightarrow{(1,5,3,\dots)}$ a pour carré σ. [2 pt.]

$I.S.14$	CHARLEMAGNE — Correction — ANNEE **2012/13**	$I.S.14$

MPSI 2	La base qui commence par $(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}-3.\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})$.	**I.S.14**

Deux vecteurs, c'est un bon début pour une base, d'autant qu'ils ne sont pas colinéaires. Mais il en manque un pour faire une base de $\mathbb{R}^3$. On le note $\overrightarrow{w}$. On exploite alors l'autre information : $\overrightarrow{i}=1.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})+2.(\overrightarrow{i}-3.\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})+1.\overrightarrow{w}$.

On a donc le troisième vecteur : $\boxed{\overrightarrow{w}=-2.\overrightarrow{i}+5.\overrightarrow{j}-2.\overrightarrow{k}}$

On écrit alors la matrice de passage : $\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -3 & 5\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$. On vérifie que son déterminant est non nul *(il vaut 1)*.

On en profite pour l'inverser *(méthode des cofacteurs pondérés par exemple)*. On trouve $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -2 & -7\\ 1 & -1 & -4\end{pmatrix}$

(la première colonne était déjà connue, non ?)

On a donc les composantes de $\overrightarrow{i}$: $(1,2,1)$, celles de $\overrightarrow{j}$: $(0,-2,-1)$ et celles de $\overrightarrow{k}$: $(-1,-7,-4)$.
On peut le vérifier si on n'a pas confiance.

MPSI 2	La droite passant par les deux points $(1,3,2)$ et $(2,1,-2)$.	**I.S.14**

On a un vecteur directeur : $\begin{pmatrix}1\\ -2\\ -4\end{pmatrix}$ *(obtenu par soustraction)*. On exprime sa colonéarité avec $\begin{pmatrix}x-1\\ y-3\\ z-2\end{pmatrix}$ en annulant un produit vectoriel.

On obtient trois équations : $2.x+y=5$, $2.y-z=4$ et $4.x+z=6$.

On ne garde pas les trois équations de plan ci dessus car l'une est combinaison linéaire des autres.

On prend les temps de vérifier que nos deux points vérifient ce jeu d'équations...

MPSI 2	L'application $\overrightarrow{u}\longrightarrow\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{u}$.	**I.S.14**

Elle va bien de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. On peut donc composer : $f\circ f=\overrightarrow{u}\longrightarrow\overrightarrow{n}\wedge(\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{u})$. Par la formule du double produit vectoriel, on trouve $\overrightarrow{u}\longrightarrow(\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u})\times\overrightarrow{n}-(\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n})\times\overrightarrow{u}$. Cette formule est linéaire, et le produit $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}$ vaut 1 *(vecteur de norme 1)*.

On recommence : $f\circ f\circ f=\overrightarrow{u}\longrightarrow\overrightarrow{n}\wedge((\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u})\times\overrightarrow{n}-\overrightarrow{u})$. Par linéarité, on trouve deux termes, mais l'un est e $\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n}$, il est donc nul. Il reste $\overrightarrow{u}\longrightarrow-\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{u}$.

On a donc sans effort : $\boxed{f\circ f\circ f=-f}$

On réitère : $f^5=f^3\circ f^2=-f\circ f^2=-f^3=f$. On poursuit ainsi jusqu'à $f^{99}=-f$ et $f^{100}=-f^2$.

MPSI 2	Noyaux d'endomorphismes.	**I.S.14**

On prend $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le noyau de f. On regarde si leur somme est encore dans le noyau en calculant son image : $f(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=f(\overrightarrow{u})+f(\overrightarrow{v})=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$ *(on a utlisé la linéarité)*.

De même, avec un vecteur du noyau et un réel : $f(\lambda.\overrightarrow{u})=\lambda.f(\overrightarrow{u})=\lambda.\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$. On reconnaît : $\lambda.\overrightarrow{u}\in Ker(f)$.

On prend un vecteur $\overrightarrow{u}$ dans $Ker(f)$. On veut montrer qu'il est aussi dans $Ker(g\circ f)$. On calcule donc $g\circ f(\overrightarrow{u})=g(f(\overrightarrow{u}))=g(\overrightarrow{0})=\overrightarrow{0}$. On reconnaît : $\overrightarrow{u}\in Ker(g\circ f)$.

Mais au fait, on a utilisé $g(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$ pour g linéaire. Est-ce légitime ?
Il suffit d'écrire $g(\overrightarrow{0}) = g(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}) = g(\overrightarrow{0}) + g(\overrightarrow{0})$ et de simplifier par $g(\overrightarrow{0})$.

MPSI 2	Des matrices de SuDoKu.	**I.S.14**

On a neuf choix pour remplir la première case. Puis seulement huit pour la seconde puisque un chiffre est déjà pris. Et ainsi de suite.

Ce dénombrement conduit classiquement à 9! matrices dont par exemple $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 9 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

On ne va pas calculer les près de 363.000 déterminants et les sommer. D'autant qu'on trouve plusieurs fois les mêmes.
Mais surtout, chaque fois qu'on a un déterminant, on a son opposé, en échangeant les deux premières colonnes *(dans notre exemple : $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \\ 8 & 3 & 6 \end{pmatrix}$).*
Les déterminants s'annulent deux à deux.
La grande somme est nulle.

MPSI 2	Ensemble des nombres de la forme $p + q.\sqrt{3}$.	**I.S.14**

A est une partie de $\mathbb{R}$ (plus grande que $\mathbb{Q}$ puisqu'on y trouve déjà les $p+0.\sqrt{3}$). L'addition y est donc commutative et associative, de même que la multiplication, et la multiplication est distributive sur l'addition.
Passons à la stabilité. On prend deux éléments de A z et z' s'écrivant respectueusement $p + q.\sqrt{3}$ et $p' + q'.\sqrt{3}$. On calcule alors leur somme et leur produit qu'on met sous les deux formes suivantes :
$z + z' = (p + p') + (q + q').\sqrt{3}$ et $z.z' = (p.p' + 3.q.q') + (p.q' + q.p').\sqrt{3}$.
Les quatre quantités entre parenthèses sont des rationnels. On a donc : $(z + z') \in A$ et $z.z' \in A$. On a la stabilité par addition et par multiplication.
Le neutre additif et le neutre multiplicatif s'écrivent $0 + 0.\sqrt{3}$ et $1 + 0.\sqrt{3}$

La mutilipcation est tout aussi intègre que dans $\mathbb{R}$.

On prend ensuite deux mesures angulaires α et β dans T.
On calcule alors : $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) - \sin(\alpha).\sin(\beta)$ et $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha).\sin(\beta) + \sin(\alpha).\cos(\beta)$. Ces nombres sont encore dans A comme sommes et produits d'éléments de A.
L'ensemble T est donc stable par addition (et par soustraction).

On y trouve un neutre : 0 dont le sinus et le cosinus valent $0 + 0.\sqrt{3}$ et $1 + 0.\sqrt{3}$.
Et le passage à l'opposé ne pose pas de problème.

Enfin, si on a quatre rationnels a, b, c et d vérifiant $\cos(\alpha) = a + b.\sqrt{3}$ et $\sin(\alpha) = c + d.\sqrt{3}$, alors on a $\tan(\alpha) = \dfrac{c + d.\sqrt{3}}{a + b.\sqrt{3}} = \dfrac{(a.c - 3.b.d) + (a.d - b.c).\sqrt{3}}{a^2 - 3.b}$ en ayant fait usage de la quantité conjuguée. On peut répartir le rationnel $a^2 - 3.b$ pour avoir une forme en $p + q.\sqrt{3}$ avec p et q rationnel.
On confirme : si α est dans T alors $\tan(\alpha)$ est dans A... si cette tangente existe...

MPSI 2	Un triangle rectangle et trois carrés.	**I.S.14**

On suit les notations de l'énoncé pour se comprendre.
Je propose une solution. Elle est rapide, même si elle algébrise quelque peu le problème de géométrie.
On considère les deux triangles $(E', F', F")$ et $(F", G', G")$: ils sont tous deux rectangles et ont le même angle : $(F'E'F") = (G'F"G")$ *(d'ailleurs égal à (CAB)).*
On écrit une identité de Thalès *(ou l'égalité des tangentes)* : $\dfrac{F'F"}{E'F'} = \dfrac{G'G"}{F"G'}$.

En fait, je n'ai pas fâché Thalès.

On se ramène à $\dfrac{FG-EF}{EF}=\dfrac{GH-FG}{FG}$ *(trois carrés)*. On effectue un produit en croix : $FG^2 - EF.FG = EF.GH - EF.EG$. On simplifie : $FG=\sqrt{EF.GH}$, de la forme $y=\sqrt{x.z}$.

MPSI 2	Inversion de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 7 & -5 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.	**I.S.14**

Quelle que soit la méthode par laquelle on calcule son déterminant, on trouve 1. Cette matrice est inversible. Mais on va faire d'une pierre deux coups, en calculant à la fois le déterminant et l'inverse par la méthode du pivot de Gauss, en n'effectuant que des combinaisons sur les lignes. On commence par $L_2 := L_2 - 2.L_1$ et $L_3 := L_3 + 2.L_1$: on passe de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & | & 0 & 11 & -10 \end{pmatrix}$.

On continue avec $L_3 := L_3 - 11.L_2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 24 & -11 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le déterminant se confirme comme égal à 1.

On remonte maintenant avec $L_2 := L_2 + L_3$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 3 & -2 \\ 22 & -10 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 24 & -11 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 49 & -22 & 2 & | & 1 & 3 & 0 \\ 22 & -10 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 24 & -11 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par $L_1 := L_1 + 2.L_3$.

On termine : $L_1 := L_1 - 3.L_2$ $\begin{pmatrix} -17 & 8 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 22 & -10 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 24 & -11 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'inverse est $\boxed{\begin{pmatrix} -17 & 8 & -1 \\ 22 & -10 & 1 \\ 24 & -11 & 1 \end{pmatrix}}$

MPSI 2	La permutation $\overrightarrow{(1,3,6,7,8)} \circ \overrightarrow{(2,4,5,10,9)}$.	**I.S.14**

On décompose chacun des cycles de taille 5 en quatre cycles de taille 2 :

$$\overrightarrow{(1,3,6,7,8)} \circ \overrightarrow{(2,4,5,10,9)} = \Big(\tau_{1,8}\circ\tau_{1,7}\circ\tau_{1,6}\circ\tau_{1,3}\Big)\circ\Big(\tau_{2,9}\circ\tau_{2,10}\circ\tau_{2,5}\circ\tau_{2,4}\Big)$$

C'est une des façons de faire, mais c'est loin d'être la seule. J'ai choisi de noter ici $\tau_{i,j}$ le cycle de taille 2 qui échange i et j.

Pour avoir des cycles de taille 3, je regroupe les cycles de taille 2 entre eux : $\tau_{i,j}\circ\tau_{i,k}=\overrightarrow{(i,k,j)}$. On a donc :

$$\overrightarrow{(1,3,6,7,8)} \circ \overrightarrow{(2,4,5,10,9)} = \overrightarrow{(1,7,8)} \circ \overrightarrow{(1,3,6)} \circ \overrightarrow{(2,10,9)} \circ \overrightarrow{(2,4,5)}$$

Mais ce n'est pas la seule solution...

Attention, cette fois, les cycles de taille 3 n'ont pas des supports disjoints, on ne peut pas les permuter.

Le carré d'un "grand" cycle de taille 10 est fait de deux cycles de taille 5. La séparation se faisant en prenant un terme sur deux dans le grand cycle initial *(c'est ce qui arrive au carré d'un cycle de taille paire)*. On a donc ici *(sans avoir le choix)* :

$$\overrightarrow{(1,3,6,7,8)} \circ \overrightarrow{(2,4,5,10,9)} = \overrightarrow{(1,5,3,10,6,9,7,2,8,4)}$$

<(55)> Montrez que l'image d'une famille liée de $(E,+,.)$ par une application linéaire f de E dans F est une famille liée. [1 pt.]

<◇(54)> Dans $(\mathbb{R}^3,+,)$, on définit les deux sous-espaces vectoriels E et F par leurs équations respectives : $2.x-y+z=0$ pour E et $3.x+y-z=0$ pour F.
Donnez une base de $E\cap F$. [2 pt.] Agrandissez la d'une part en base de E et d' autre part en base de F. [2 pt.]

<◇(55)> Montrez que les quatre matrices suivantes forment une famille liée dans $M_2(\mathbb{R})$:
$\left(\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right)$. [2 pt.] Donnez la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces matrices. [2 pt.]
Trouvez une matrice A pour que le sous-espace engendré par ces matrices ait pour équation $Tr(A.M)=0$. [2 pt.]

<♣(18)> Calculez le déterminant suivant : $\begin{vmatrix}1&\log_a(b)&\log_a(c)\\\log_b(a)&1&\log_b(c)\\\log_c(a)&\log_c(b)&1\end{vmatrix}$ où a, b et c sont trois réels strictement positifs, différents de 1. [2 pt.]

<◇(56)> Inversez la matrice suivante par méthode du pivot de Gauss (calculs en lignes) : $\begin{pmatrix}1&4&1\\2&4&3\\1&2&1\end{pmatrix}$
Attention, l'ensemble est fait des entiers de 0 à 4 pour l'addition et la multiplication modulo 5. [3 pt.]

<♣(19)> Soit A une matrice réelle symétrique de taille 4. Montrez que toutes les A^k pour k dans $\mathbb{N}$ sont réelles symétriques. [2 pt.] Déduisez qu'il existe des α_k non tous nuls vérifiant $\alpha_0.I_4+\alpha_1.A+\alpha_2.A^2+\ldots+\alpha_{10}.A^{10}=0$ (matrice nulle). [2 pt.]

<♠(26)> Complétez $(5.\overrightarrow{i}+4.\overrightarrow{j})$ en base de $\mathbb{R}^2$ de manère à ce que $\overrightarrow{j}$ ait pour composantes $\begin{pmatrix}2/3\\5/3\end{pmatrix}$ sur cette nouvelle base. Est elle alors directe ? [2 pt.]
Trouvez alors les vecteurs qui gardent le même jeu de composantes sur ces deux bases. [2 pt.]

<♡(56)> Rappeler la formule faite de produits scalaires et produits vectoriels pour la rotation de $\mathbb{R}^3$ autour d'un axe orienté par un vecteur $\overrightarrow{n}$ normé, d'angle $\pi/4$ (huitième de tour). [2 pt.] Vérifiez pour cette application notée r : $\forall\ \overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^3,\ r(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})=r(\overrightarrow{u})\wedge r(\overrightarrow{v})$. [2 pt.]

<♣(20)> Créez une matrice de taille 4 sur 4 à coefficients entiers strictement positifs, de déterminant 126, en expliquant votre démarche, avec si possible le moins de calculs possibles. [3 pt.]

I.S.15	CHARLEMAGNE — Correction — ANNEE **2012/13**	I.S.15

MPSI 2	Image d'une famille liée par un morphisme.	**I.S.15**

On prend dans E une famille liée $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$. L'un des vecteurs est combinaison linaire des autres : $\overrightarrow{u_k} = \sum_{i \leq p i \neq k} \alpha_i.\overrightarrow{u_i}$. On applique f linéaire : $f(\overrightarrow{u_k}) = \sum_{i \leq p i \neq k} \alpha_i.f(\overrightarrow{u_i})$. On reconnaît que l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. C'est une famille liée.

MPSI 2	Deux plans, une droite : $2.x - y + z = 0$ et $3.x + y - z = 0$.	**I.S.15**

Il s'agit bien de deux équations de plans *(on choisit x et y comme on veut et on trouve z)*. L'intersection est une droite, faite de vecteurs dans lesquels le choix d'une composante permet de retrouver les autres, par résolution du système $\left\{\begin{array}{llll} 2.x & -y & +z & = 0 \\ 3.x & +y & -z & = 0 \end{array}\right.$. On trouve les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}$. Une base est $(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ ou, si vous préférez : $\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ *(pourquoi selon vous me suis-je contenté de calculer le produit vectoriel des deux vecteurs de coefficients)*.

Ensuite, pour agrandir en base de E, il suffit d'adjoindre un vecteur de E qui ne lui soit pas colinéaire, par exemple : $(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$

Pour G, on fait de même, avec là aussi le choix : $(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix})$.

On notera que $(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ comme le prévoit la formule de Grassman.

MPSI 2	quatre matrices.	**I.S.15**

Pour qu'une famille de quatre matrices soit liée, il suffit que l'un de ses éléments soit combinaison linéaire des autres. Lequel ? Peu importe. On tente d'exprimer la dernière matrice comme combinaison des trois autres. Et on y parvient : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = 1.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Evidemment, on en trouve d'autres par échange des rôles...

En revanche, si on suppose $a.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on aboutit à la seule conclusion : a, b et c sont nuls. La famille est dite de rang 3.
Ses combiaisons linéaires sont faites de matrices de la forme $a.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Elles ont toutes en commun ce point : $a_1^1 = a_2^2$. C'est l'équation du sous-espace engendré par ces matrices.
Avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, la condition est bien $Tr(A.M) = 0$.

MPSI 2	Un déterminant avec des logarithmes.	**I.S.15**

On rappelle la définition : $\log_a(b) = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$, puisque la définition est $a^{\ln_a(b)} = b$.
On remplace dans la matrice qui a alors une forme assez simple, avec uniquement des $\ln(y)/\ln(x)$. On calcule le déterminant. Et on trouve 0.

MPSI 2	Une inversion par pivot de Gauss.	**I.S.15**

On rappelle que l'opposé de 1 est 4 et l'opposé de 2 est 3 (et vice versa). 2 et 3 sont aussi mulutellement inverses, tandis que 3 et 4 sont chacun leur opposé. On part du dominao de Gauss et on annule ce qu'on peut en colonne 1 par $L_2 := L_2 + 3.L_1$et $L_3 := L_3 + 4.L_1$:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & | & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

On finit de nettoyer "sous la diagonale" avec $L_3 := L_3 + 2.L_2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
On note au passage que la matrice est inversible, de déterminant 2.
On divise la dernière ligne par 2 *(pardon, on la multiple par 3)* : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Il est temps de remonter en annulant les termes de la troisième colonne par $L_2 := L_2 - L_3$ *(pardon : $L_2 := L_2 + 4.L_3$)* et $L_1 := L_1 - L_3$: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Il n'y en plus qu'un à éliminer, par addition $L_1 + L_2$: $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
L'inverse cherché est $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

MPSI 2	Matrice réelle symétrique de taille 4.	**I.S.15**

On prend A vérifiant ${}^tA = A$. On multiplie cette formule par elle même : ${}^tA.{}^tA = A.A$. On utilise la formule ${}^t(A.B) ={}^t B.{}^tA$: ${}^t(A.A) = A.A$. On reconnaît que A^2 est symétrique.
Supposons pour un k donné que A^k le soit. On traduit, et on multiplie par l'hypothèse, à droite : ${}^t(A^k).{}^tA = A^k.A$.
Toujours par "transposée du produit", on trouve ${}^t(A.A^k) = A^k.A$. On reconnaît A^{k+1} est symétrique.

Attention, on n'invente pas de stabilité multiplicative de l'ensemble des matrices symétriques. Elle n'a pas lieu. Ici, tout joue sur $A^{k+1} = A^{1+k}$ au bon moment de la récurrence.

On part de A symétique. Les onze matrices I_4 à A^{10} sont dans l'espace des matrices réelles symétriques de taille 4. Or, cet espace est de dimension 10 *(résultat du cours : $4+3+2+1$)*.
Dans un espace de dimension d toute famille de $d+1$ vecteurs est liée. Et c'est précisément écrire que cette famille est liée que d'écrire $\sum_{i=1}^{10} \alpha_i.A^i = 0$ avec au moins un des α_i non nuls.

MPSI 2	La famille qui commence par $5.\overrightarrow{i} - 4.\overrightarrow{j}$.	**I.S.15**

On note $\overrightarrow{e_1}$ ce premier vecteur. Le second sera noté $\overrightarrow{e_2}$, et on veut : $2.\overrightarrow{e_1} + 5.\overrightarrow{e_2} = 3.\overrightarrow{j}$.
On trouve donc : $\overrightarrow{e_2} = -2.\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.
On en prodfite pour vérifier que la matrice de changement de base est bien inversible : $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3$.

Le changement de base est directe.

On cherche ensuite des vecteurs de composantes (x, y) sur les deux bases. On traduit : $x.\overrightarrow{e_1} + y.\overrightarrow{e_2} = x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j}$. On trouve un système linéaire : $5.x - 2.y = x$ et $4.x - y = y$. Il est dégénéré.
On confirme : les multiples de $\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j}$ s'écrivent $\begin{pmatrix} x \\ 2.x \end{pmatrix}$ sur les deux bases de notre exercice.

MPSI 2	Une matrice en kit de déterminant 126.	**I.S.15**

Comment la créer ? Pas avec des coefficients au hasard...
Mais en profitant du fait que le déterminant du produit est le produit des déterminants.
J'en crée une de déterminant 7, une de déterminant 9 et une de déterminant 2. Des matrices triangulaires font l'affaire. Il ne reste plus qu'à les multiplier entre elles.
Pour que les coefficients soient entiers, prenons des coefficiets entiers sur chacune. Et pour qu'il n'y ait pas de coefficients nul, prenons les triangulaires, mais pas de même sens...
$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une possibilité. J'obtiens $\begin{pmatrix} 17 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
J'attends avec impatience vos idées dont certaines seront sans doutes très jolies *(et d'autres auront la grâce ankylose du physicien).*

MPSI 2	Une rotation d'un huitième de tour.	**I.S.15**

La formule est dans le cours (limite cours) :
$\overrightarrow{u} \longrightarrow \cos(\theta).\overrightarrow{u} + (1 - \cos(\theta)).(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}) \times \overrightarrow{n} + \sin(\theta).\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{u}$
Ici, il faut imposer $\cos(\theta) = \sin(\theta) = \sqrt{2}/2$.

Mais la comparaison de $f(\overrightarrow{u}) \wedge f(\overrightarrow{v})$ et $f(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ ne pose pas de problème, quelle que soit la valeur de c et s.
Ce n'est que calcul, avec formule du double produit vectoriel.

$<\heartsuit(57)>$ Montrez que toute suite croissante à partir d'un certain rang est minorée. [1 pt.]

$<\heartsuit(58)>$ Rappelez la quantification de "$\overrightarrow{u_1}, \dots \overrightarrow{u_p}$) est libre" dans un espace vectoriel $(E, +, .)$. [1 pt.]
Montrez que si f est linéaire et injective, alors $(f(\overrightarrow{u_1}), \dots, f(\overrightarrow{u_p}))$ est aussi libre. [1 pt.]

$<\heartsuit(59)>$ Ls gns ntllgnts n'nt ps bsn ds vlls pr cmprndr. [1 pt.]

$<\diamondsuit(57)>$ Trouvez l'équation différentielle linéaire du premier ordre dont les solutions sont les fonctions de la forme $y_t = y_0.\dfrac{3.t+1}{t+2} + t$. [3 pt.]

$<\spadesuit(27)>$ Dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ on note P le plan d'équation $x+y-z=0$. On définit f, application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par $f(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} + 3.\overrightarrow{k}$ et $f(\overrightarrow{u}) = 2.\overrightarrow{u}$ pour $\overrightarrow{u}$ dans P.
Décomposez $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ comme somme d'un vecteur de P et d'un multiple de $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. [3 pt.]
Déterminez $f(\overrightarrow{i})$, $f(\overrightarrow{j})$ et $f(\overrightarrow{k})$. [2 pt.]

$<\diamondsuit(58)>$ Complétez $(X.(X-1), X^2-1)$ en base de $\mathbb{R}_2[X]$ pour que le polynôme P de racines 2 et 3 et valant 1 en 0 ait pour composantes $(2, 1-1)$.

$<\diamondsuit(59)>$ On définit la matrice D de format 6 de terme général $d_i^j = i+j+1 \quad mod \quad 2$. Calculez sa trace, son déterminant, son carré. [3 pt.]

$<\spadesuit(28)>$ Donnez une base de l'espace vectoriel E des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ d'équation $2.x+y-z+t=0$ dans $\mathbb{R}^4$. [1 pt.] Donnez une base de l'espace vectoriel F des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ d'équation $x+y+3.z+t=0$ dans $\mathbb{R}^4$. [1 pt.] Donnez la dimension de $E \cap F$. [1 pt.] Décomposez $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme somme d'un vecteur de E et d'un vecteur de F. [1 pt.]

$<\diamondsuit(60)>$ On définit $A(1,1,2)$, $B(2,4,5)$, $C(3,2,3)$ et $D(0,1,4)$ dans l'espace affine euclidien usuel $\mathbb{R}^3$. Laquelle des quatre faces du tétraèdre (A, B, C, D) est la plus grande ? [3 pt.]

$<\spadesuit(29)>$ On définit $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Calculez le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Vérifiez que f n'est pas bijective. [2 pt.] Montrez que son ensemble image est un plan P de $\mathbb{R}^3$ dont vous donnerez une base et une équation cartésienne. [2 pt.]
Montrez que l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ d'image nulle est une droite D dont vous donnerez un vecteur directeur et un jeu d'équations cartésiennes. [2 pt.] Déterminez l'intersection de D et P. [1 pt.] Déterminez aussi $D+P$. [1 pt.]

$I.S.16$	CHARLEMAGNE — Correction	ANNEE **2012/13**	$I.S.16$

MPSI 2 — Toute suite croissante à partir d'un certain rang est minorée. — **I.S.16**

On prend une suite u croissante à partir du rang K : pour tout n plus grand que K, on a $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant u_K$ (la dernière inégalité est obtenue par récurrence sur n à partir du rang K.
Avant le rang K il n'y a qu'un nombre fini de termes ; on en prend le plus bas : $Min(u_0, u_1, \dots u_K)$.
Globalement, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant Min(u_0, u_1, \dots u_K)$.

MPSI 2 — Image d'une famille libre par une application linéaire injective. — **I.S.16**

La famille est libre si aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres. Plus simplement : si la seule façon d'obtenir $\overrightarrow{0}$ est en prenant la combinaison linéaire triviale. On quantifie :

$$\forall\ (\lambda_1, \dots \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ \Big(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\overrightarrow{u_k} = \overrightarrow{0}\ \Rightarrow\ \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0\Big).$$

On regarde maintenant la famille image. On suppose pour elle qu'il existe une combinaison linéaire nulle : $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i.f(\overrightarrow{u_i}) = \overrightarrow{0}$ *(objectif : c'est la faute aux λ_i).*

Par linéarité, on obtient : $f\Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i.\overrightarrow{u_i}\Big) = \overrightarrow{0}$. On remplace aussi par linéarité : $f\Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i.\overrightarrow{u_i}\Big) = f(\overrightarrow{0})$.
On rappelle en effet : $f(\overrightarrow{0}) = f(0.\overrightarrow{0}) = 0.f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$.
On utilise l'injectivité de f *(deux éléments qui ont la même image sont égaux)* : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{0}$.
Il reste à utiliser la dernière hypothèse : "la famille initiale est libre" et on aboutit à $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$.

On a donc montré que l'image d'une famille liée par une application linéaire reste liée *(semaine dernière)*, puis que l'image d'une famille libre par une application injective est libre.

MPSI 2 — Une équation différentielle dont les solutions sont connues. — **I.S.16**

L'espace des solutions est fait des $y_t = y_0.\dfrac{3.t+1}{t+1} + t$. C'est donc que les solutions homogènes sont les multiples de $\dfrac{3.t+1}{t+2}$ et dont une solution particulière est t.
On travaille sur l'équation homogène sous forme de Cauchy-Lipschitz : $y'_t + a_t.y_t = 0$. C'est donc que la primitive A de a nulle en 0 est $t \longrightarrow -\ln\Big(\dfrac{3.t+1}{t+2}\Big)$.
On la dérive, après l'avoir séparée en $t \longrightarrow \ln(t+2) - \ln(3.t+1)$ et on trouve : $a_t = \dfrac{1}{t+2} - \dfrac{3}{3.t+1}$.
On écrit l'équation différentielle : $(t+2).(3.t+1).y'_t - 5.y_t = 0$.

Mais il s'agit ici de l'équation homogène. On adjoint un second membre pour que t soit solution particulière : $(t+2).(3.t+1).y'_t - 5.y_t = (t+2).(3.t+1).1 - 5.t$.

<u>Bilan :</u> l'équation était $\boxed{(3.t^2 + 7.t + 2).y'_t - 5.y_t = 3.t^2 + 2.t + 2}$ *(sous forme de Cauchy-Lipschitz sur* $]-1/3, +\infty[$*).*

Les gens intelligents n'ont pas besoin des voyelles pour comprendre.

MPSI 2 | Un plan P, une application linéaire f définie par sections. | **I.S.16**

On dispose du plan P d'équation $x+y-z=0$. Ses vecteurs sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}$ et on a une base : $(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}-\overrightarrow{k})$ qu'on note $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On nous donne un autre vecteur de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$. A eux trois, ils forment une base de $\mathbb{R}^3$, puisque le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ est non nul : il vaut 2. On en profite pour inverser la matrice : $\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
On sait donc décomposer $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sur cette base :

- $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}}{2} + \dfrac{\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}}{2}$,
- $\overrightarrow{j} = \dfrac{-\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}{2} + \dfrac{\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}}{2}$,
- $\overrightarrow{k} = \dfrac{-\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}}{2} + \dfrac{\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}}{2}$.

On leur applique f, par définition linéaire. Le vecteur du plan est doublé, et le vecteur $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ est transformé en $\overrightarrow{i}+3.\overrightarrow{k}$:

- $f(\overrightarrow{i}) = 2.\dfrac{\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}}{2} + \dfrac{\overrightarrow{i}+3.\overrightarrow{k}}{2} = \dfrac{3.\overrightarrow{i}-2.\overrightarrow{j}+3.\overrightarrow{k}}{2}$,
- $f(\overrightarrow{j}) = 2.\dfrac{-\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}{2} + \dfrac{\overrightarrow{i}+3.\overrightarrow{k}}{2} = \dfrac{-\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j}+3.\overrightarrow{k}}{2}$,
- $f(\overrightarrow{k}) = 2.\dfrac{-\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}}{2} + \dfrac{\overrightarrow{i}+3.\overrightarrow{k}}{2} = \dfrac{-\overrightarrow{i}-2.\overrightarrow{j}+7.\overrightarrow{k}}{2}$.

MPSI 2 | Une base de $\mathbb{R}_2[X]$ à compléter. | **I.S.16**

Déjà la famille dont on part est libre (vecteurs non colinéaires) et n'est pas encore une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (il lui manque pour cela un vecteur).
En termes de dimensions, il ne manque plus qu'un vecteur, qu'on va appeler Q. La base cherchée est (X^2-X, X^2-1, Q) avec Q à déterminer. Le vecteur à décomposer est $(X-2).(X-3)/6$.
On impose pour composantes $(2,1,-1)$ c'est à dire : $(X-2).(X-3)/6 = 2.(X^2-X)+(X^2-1)-Q$.
On isole : $\boxed{Q = \dfrac{17.X^2}{6} - \dfrac{7.X}{6} - 2}$

MPSI 2 | La matrice en damier D. | **I.S.16**

Les termes de D valent 0 ou 1.
Ceux de la diagonale valent 1. Ils sont six, la trace vaut 6.
Les colonnes sont, en alternance $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Eles sont coplanaires. Le déterminant est nul.

Pour le carré D^2, visuellement, on a des 0 qui tombent sur des 1 et vice versa, d'où des termes nuls. Et on a aussi des 1 qui tombent sur des 1 et des 0 sur des 0, d'où des 3. Au final, on retrouve : $D^2 = 3.D$.
Proprement : le terme de ligne i colonne k de D^2 est $\delta_i^k = \sum_{j=1}^{6} d_i^j.d_j^k$. Pour i et j de même parité, seuls les j de même parité que i et j interviennent, et on a $\delta_i^k = \sum_{\substack{j\leq 6 \\ j=i \mod 2}} 1.1 = 3$. Pour i et k de

parités opposées, chaque j est soit de parité opposée à i, soit de parité opposée à k ; chaque terme de la somme est nul ; la somme est nulle.

On détermine le commutant de D en calculant $D.M$ et $M.D$, puis en égalisant ces deux matrices *(condition nécessaire et suffisante)* :

$$\begin{pmatrix} 1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_1&a_2&a_3&a_4&a_5&a_6\\ b_1&b_2&b_3&b_4&b_5&b_6\\ c_1&c_2&c_3&c_4&c_5&c_6\\ d_1&d_2&d_3&d_4&d_5&d_6\\ e_1&e_2&e_3&e_4&e_5&e_6\\ f_1&f_2&f_3&f_4&f_5&f_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+c_1+e_1 & a_2+c_2+e_2 & a_3+c_3+e_3 & a_4+c_4+e_4 & \dots\\ b_1+d_1+f_1 & b_2+d_2+f_2 & b_3+d_3+f_3 & b_4+d_4+f_4 & \dots\\ a_1+c_1+e_1 & a_2+c_2+e_2 & a_3+c_3+e_3 & a_4+c_4+e_4 & \dots\\ b_1+d_1+f_1 & b_2+d_2+f_2 & b_3+d_3+f_3 & b_4+d_4+f_4 & \dots\\ a_1+c_1+e_1 & a_2+c_2+e_2 & a_3+c_3+e_3 & a_4+c_4+e_4 & \dots\\ b_1+d_1+f_1 & b_2+d_2+f_2 & b_3+d_3+f_3 & b_4+d_4+f_4 & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1+a_3+a_5 & a_2+a_4+a_6 & a_1+a_3+a_5 & a_2+a_4+a_6 & \dots\\ b_1+b_3+b_5 & b_2+b_4+b_6 & b_1+b_3+b_5 & b_2+b_4+b_6 & \dots\\ c_1+c_3+c_5 & c_2+c_4+c_6 & c_1+c_3+c_5 & c_2+c_4+c_6 & \dots\\ d_1+d_3+d_5 & d_2+d_4+d_6 & d_1+d_3+d_5 & d_2+d_4+d_6 & \dots\\ e_1+e_3+b_5 & e_2+e_4+e_6 & e_1+e_3+e_5 & e_2+e_4+e_6 & \dots\\ f_1+f_3+f_5 & f_2+f_4+f_6 & f_1+f_3+f_5 & f_2+f_4+f_6 & \dots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1&a_2&a_3&a_4&a_5&a_6\\ b_1&b_2&b_3&b_4&b_5&b_6\\ c_1&c_2&c_3&c_4&c_5&c_6\\ d_1&d_2&d_3&d_4&d_5&d_6\\ e_1&e_2&e_3&e_4&e_5&e_6\\ f_1&f_2&f_3&f_4&f_5&f_6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1 \end{pmatrix}$$

J'ai finalement renoncé à cette question... Comprenez vous pourquoi ?

MPSI 2	Deux sous-espaces E et F dans $\mathbb{R}^4$.	**I.S.16**

Le premier ensemble a pour équation $2.x+y-z+t=0$ et ses vecteurs sont de la forme $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ -2.x-y+z \end{pmatrix}$

et on décompose à l'aide des vecteurs suivants *(décomposition unique)* : $(\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix})$. C'est ce qu'on appelle une base. E est de dimension 3.

Pour F on procède de même et on tient une base : $(\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\-3 \end{pmatrix})$

La formule de Grassmann donne : $\dim(E+F)=3+3-\dim(E\cap F)$. Pour que cette dimension totale ne dépasse par 4 (on est dans $\mathbb{R}^4$), $E\cap F$ est au moins de dimension 2.
Comme E et F ne sont pas égaux, $E\cap F$ est exactement de dimension 2.

On trouve donc : $E+F=\mathbb{R}^4$ *(somme non directe)*. On peut décomposer $\overrightarrow{i}$ *(premier vecteur de la base canonique)*. Mais il n'y a pas unicité. Je propose $\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-2 \end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}$

MPSI 2	Les quatre faces d'un tétraèdre.	**I.S.16**

On a bien un tétraèdre (A,B,C,D) *(et tant pis si par malchance il se trouvait être applati, ce que je ne peux voir par avance)*.
Le programme est simple : il y a quatre faces. On calcule les aires de chacune *(demi-norme du produit vectoriel)*

face	(A,B,C)	(A,C,D)	(A,D,B)	(B,C,D)
vecteurs	$\begin{pmatrix} 1\\3\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\1\\1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1\\0\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\1\\1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1\\3\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1\\-2\\-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\\-3\\-1 \end{pmatrix}$
produit	$\begin{pmatrix} 0\\5\\-5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2\\5\\-1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6\\-5\\3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4\\5\\-7 \end{pmatrix}$
norme	$\sqrt{0+25+25}/2$	$\sqrt{4+25+1}/2$	$\sqrt{36+25+9}/2$	$\sqrt{36+25+49}/2$

C'est (B, C, D) qui est la plus grande face.
Le statisticien avait une chance sur quatre de donner la bonne. Le physicien aurait trouvé la bonne tout de suite, non pas en les visualisant, mais en mesurant mentalement le flux qui traverse chaque face par le théorème de Gauss. L'ingénieur aurait commencé à fabriquer un prototype du tétraèdre pour en mesurer ensuite les faces avec un télémètre, mais se serait arrêté faute de crédits.

MPSI 2	Autour de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.	**I.S.16**

Cette matrice a un déterminant nul (calcul librement mené).
Si elle avait été bijective, la matrice aurait été inversible (condition d'ailleurs nécessaire et suffisante), et sa réciproque aurait été $U \longrightarrow M^{-1}.U$.
Les vecteurs images de $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont d'ailleurs les trois colonnes de cette matrice. Ils sont donc coplanaires. L'application n'est pas surjective. C'est encore un argument.

Les images sont les vecteurs de la forme $f(x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k})$. Ce sont donc les combinaisons linéaires de $f(\overrightarrow{i})$, $f(\overrightarrow{j})$ et $f(\overrightarrow{k})$. Il s'agit des trois vecteurs colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cette famille n'est pas de rang 1 (vecteurs non colinéaires), mais pas non plus de rang 3 (déterminant nul). Elle est de rang 2 et deux vecteurs suffisent à la décrire (d'ailleurs, $f(\overrightarrow{k}) = f(\overrightarrow{i}) - 2.f(\overrightarrow{j})$). On a une base avec $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
Les vecteurs de l'image sont les combinaisons de ces deux vecteurs, c'est à dire ceux qui leurs sont complanaires. On annule donc le déterminant pour avoir une équation cartésienne : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$.
On arrive à $2.x + y - z = 0$, vérifiée d'ailleurs à vue de nez par chacun des trois vecteurs, et donc par leurs combinaisons.

Pour ce qu'on va appeler le noyau *(droite des vecteurs dont l'image est nulle)*, elle est faite des multiples de $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ qui en fait une base.
Pour ce qui est de la colinéarité avec ce vecteur, elle se traduit par le jeu d'équations $2.x + y = 0$ et $x + z = 0$ *(deux équations pour une droite de $\mathbb{R}^3$)*.

La droite D n'est pas incluse dans le plan. Leur intersection se réduit au seul vecteur nul. Une base en est vide (je dis bien vide et surtout pas le vecteur nul).

La formule de Grassmann donne alors $\dim(P + D) = 2 + 1 - 0 = 3$. On déduit $P + D = \mathbb{R}^3$. D'ailleurs, avec la base de P et le vecteur de D, j'ai une base de $\mathbb{R}^3$ (confirmé par calcul de déterminant).

$<\heartsuit(60)>$ Montrez qu'une suite périodique et monotone est constante. $\boxed{\text{1 pt.}}$

$<\diamondsuit(61)>$ On définit la matrice carrée de taille n de terme général $a_i^k = |i-k|$. Calculez son déterminant et inversez la pour n de 2 à 4. $\boxed{\text{1 pt.}}+\boxed{\text{2 pt.}}+\boxed{\text{4 pt.}}$

$<\diamondsuit(62)>$ On remplit des matrices sur le modèle suivant : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{pmatrix}$.

Donnez une formule pour le terme général de la matrice de taille n. $\boxed{\text{1 pt.}}$
Calculez le déterminant de ces matrices pour n de 1 à 4. $\boxed{\text{2 pt.}}$
Conjecturez une formule pour le déterminant de la matrice de taille n, avec si possible des $\sum$ et des $\prod$ et pas des points de suspension. $\boxed{\text{2 pt.}}$
Démontrez la. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$<\heartsuit(61)>$ On appelle extraction toute application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Démontrez, pour φ extraction : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$ ("lemme d'extraction"). $\boxed{\text{2 pt.}}$

$<\spadesuit(30)>$ On note E l'espace vectoriel des matrices carrées de format 2. On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. On pose : $F = \{M \in E | M.U = O_2\}$ et $G = \{M \in E | {}^tM.U = 0_2\}$. Donnez une base et la dimension de F, de G, de $F\ \cap\ G$ et de $E+G$ (s'agit il de $E \oplus F$?). $\boxed{\text{4 pt.}}$
Le professeur définit f linéaire de E dans E par $f(M) = 2.M$ si M est dans E et $f(M) = 3.M$ si M est dans F et vous demande de calculer $f(I_2)$. Que faites vous ? $\boxed{\text{2 pt.}}$

$<\spadesuit(31)>$ Montrez qu'une suite réelle strictement positive qui tend vers 0 à l'infini a un plus grand terme, une borne inférieure, mais pas de plus petit terme. $\boxed{\text{2 pt.}}$
Donnez un exemple de suite réelle strictement positive qui tend vers 0 à l'infini, mais n'est pas décroissante, même à partir d'un certain rang *(et prouvez le, évidemment)*. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$<\diamondsuit(63)>$ On définit : $c = \theta \longrightarrow |\cos(\theta)|$, $s = \theta \longrightarrow |\sin(\theta)|$. Montrez que (c, s, c^2, s^2) est une famille libre. $\boxed{\text{3 pt.}}$ On note E l'espace vectoriel engendré par cette famille que l'on prend alors comme base. Si les applications suivantes sont dans E, décomposez les sur cette base, sinon, justifiez qu'elle n'y sont pas : $\theta \longrightarrow \cos(2.\theta)$, $\theta \longrightarrow \sin(2.\theta)$, $x \longrightarrow 1$, $\theta \longrightarrow \cos(\theta)$, $\theta \longrightarrow |\cos(\theta+\pi/3)|$. $\boxed{\text{5 pt.}}$

$<\heartsuit(62)>$ Montrez que si la suite a est croissante, alors sa moyenne de Cesaro est aussi croissante. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$<\diamondsuit(64)>$ Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on note P le plan engendré par $\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$. Donnez en une équation cartésienne. $\boxed{\text{1 pt.}}$
On note D la droite d'équations $2.x+y-z = x+y+z = 0$. Donnez en une base. $\boxed{\text{1 pt.}}$
Décomposez $\overrightarrow{i}$ en somme d'un vecteur de P et d'un vecteur de D. $\boxed{\text{2 pt.}}$

MPSI 2	Suites périodiques monotones.	I.S.17

On va traiter le cas d'une suite périodique de période p et croissante *(quitte à changer le signes)*. On a alors pour tout n :
$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant a_{n+p} = a_n$.
Par antisymétrie de l'ordre : $a_{n+1} = a_n$, et ce pour tout n. La suite est constante. Donc convergente, mais on s'en moque.

MPSI 2	Matrices de terme général $\vert i-j\vert$.	I.S.17

Heureusement qu'on ne nous demande pas de l'inverser pour n égal à 1. En taille 2, on prend les formules toutes prêtes, en taille 3 on calcule la transposée de la comatrice. En taille 4, on va assez vite avec le pivot de Gauss :

dimension	matrice	déterminant	inverse
2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\frac{1}{4}.\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	-12	$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

MPSI 2	$M_2(\mathbb{R})$ et les matrices vérifiant $M.U = 0_2$ ou ${}^tM.U = 0_2$.	I.S.17

Les matrices de F vérifient $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et sont de la forme $\begin{pmatrix} -2.b & b \\ -2.d & d \end{pmatrix}$. Elles se décomposent d'une façon unique comme combinaisons linéaires de $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, qui sont dans F et en forment une base.
F est de dimension 2.

Pour G, on demande $\begin{pmatrix} a & c \\ d & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on trouve les combinaisons de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
La dimension est encore de 2.

Pour $F \cap G$, on trouve les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 4.d & 2.d \\ 2.d & d \end{pmatrix}$. Elles forment un espace vectoriel de dimension 1.

La formule de Grassmann fait de $F+G$ un espace de dimension 3. Le fait que l'intersection ne soit pas réduite à la seule matrice nulle fait que l'on n'a pas le droit d'écrire $F+G = F \oplus G$.
Pour en avoir une base, on part d'une base de $F \cap G$ et on lui ajoute un vecteur indépendant dans F et un vecteur indépendant dans G.

F	G	$F \cap G$	$F+G$
2	2	1	3
$(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix})$	$(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$	$(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix})$	$(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$

Pour ce qui est du professeur qui demande de calculer $f(I_2)$ avec F linéaire de E dans E définie par $f(M) = 2.M$ pour M dans F et $f(M) = 3.M$ pour M dans G, il faut faire preuve de tact. **Il faut en effet annoncer au professeur que son énoncé est incohérent**. En effet, que fait il pour les éléments de $F \ \cap\ G$?
Ensuite, il faut lui annoncer aussi que de toutes façons, vous ne pourriez pas calculer $f(I_2)$ car I_2 n'est pas dans $F + G$.
Bref, la réponse peut être "j'attends que l'heure passe, je suis en colle avec un professeur de physique qui se met à poser des exercices qu'il croit être de mathématiques".

MPSI 2	Des déterminants comme $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 \end{vmatrix}$.	I.S.17

Une formule générale ? On calcule le terme de ligne i et colonne k avec la formule suivante $\begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \text{ ou } (i,k) = (1,n) \text{ ou } k = i-1 \\ a_{i-1} & \text{si } i = k > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On calcule les premiers :

1	2	3	4
1	$a_1 - 1$	$a_1.a_2 - a_1 + 1$	$a_1.a_2.a_3 - a_1.a_2 + a_1 - 1$

On en trouve un de plus s'il le faut : $a_1.a_2.a_3.a_4 - a_1.a_2.a_3 + a_1.a_2 + -a + 1$.

On conjecture vite une formule avec des produits de plus en plus courts et une alternance de signes.
En version malpropre : $a_1 \dots a_{n-1} - a_1 \dots a_{n-2} + a_1 \dots a_{n-3} - \dots + (-1)^{n-1}$.
En version plus propre : $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}.a_1.a_2 \dots a_{n-k}$ avec la convention selon laquelle le produit vide vaut 1.
En version encore plus propre, mais non compréhensible par le profane : $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}.\prod_{i=1}^{n-k} a_i$.

Pour ce qui est de la démonstration, un développement par rapport à la première colonne me semble la solution la plus judicieuse. On a pour premier terme $1.a_1 \dots a_{n-1}$ *(simple cofacteur)*, puis une alternance de termes du type $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 \end{vmatrix}$ *(avec alternance de signes)*. Un tel terme se développe par rapport à la première ligne et donne un produit tronqué en $\prod_{i=1}^{n-k} a_i$.

MPSI 2	Les suites réelles strictement positives qui tendent vers 0 à l'infini.	I.S.17

On note (a_n) une telle suite. On sait déjà qu'à partir d'un certain rang N_1 tous les termes sont proches de 0 à 1 près *(cas $\varepsilon = 1$ dans la quantification)*. On encadre $0 < a_n \leqslant 1$ à partir de ce rang N_1. Comme il n'y a qu'un nombre fini de termes avant, la suite est majorée (par $Max(a_0, a_1, \dots a_{N_1}, 1)$) dans sa globalité.
L'ensemble $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ est donc une partie de $\mathbb{R}$ non vide, bornée.
Il admet donc une borne supérieure et une borne inférieure.
Si sa bornes supérieure n'est pas atteinte, alors il existe une suite d'éléments de A qui converge vers cette borne supérieure. On arrange en suite extraite de la suite (a_n) qui converge vers ceette borne supérieure. Mais en tant que suite extraite de (a_n), elle doit aussi tendre vers 0 d'où contradiction.
Par élimination, la borne supérieure de A est atteinte et coïncide avec la notation de maximum.

Si il y avait un plus petit élément dans A, il serait strictement positif, puisque ce serait un des a_K. La suite (a_n) serait minorée par ce a_K. Par passage à la limite, on arriverait à la contradiction

$0 = \lim_{n \mapsto +\infty} (a_n) \geqslant a_k > 0$.
La borne inférieure est 0, non atteinte.

Pour ce qui est d'avoir une suite de limite nulle sans monotonie, même à partir d'un certain rang, il suffit de construire deux suites qui tendent vers 0 à des vitesses distinctes, et de les fusionner en une : $a_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ pair} \\ 1/n^3 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.
On peut synthétiser en une seule formule avec $\dfrac{1}{n^{2-(-1)^n}}$.
cette suite a bien une limite nulle, car elle est encadrée par 0 et $\dfrac{1}{n}$, de limite nulle *(explicitement, pour ε donné, on se contente de $N_\epsilon = [1/\varepsilon] + 1$).*
Elle n'est jamais décroissante, même à partir d'un certain rang N puisque l'on a $a_{2.N+2} > a_{2.N+1}$, par construction même.
La négation de décroissante n'est pas croissante, mais "il existe au moins un rang pour lequel j'ai $a_{q+1} > a_q$"

MPSI 2	Le lemme d'extraction.	**I.S.17**

On le prouve par récurrence sur n : $\varphi(n) \geqslant n$ si φ permet de construire des suites extraites.
On initialise : $\varphi(0) \geqslant 0$ par définition même d'une extraction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$).
On suppose, pour un n donné quelconque : $\varphi(n) \geqslant n$.
On écrit $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$ par croissance stricte de φ.
Mais $\varphi(n+1)$ est un entier. Le premier entier strictement plus grand que n est $n+1$: $\varphi(n+1) \geqslant n+1$.
La propriété à établir est bien héréditaire.
Une extraction grimpe au moins aussi vite que Id.

MPSI 2	L'espace vectoriel engendré par les applications $\theta \longrightarrow |\cos(\theta)|$, $\theta \longrightarrow |\sin(\theta)|$...	**I.S.17**

On doit montrer que la seule façon de construire la fonction nulle comme combinaison linéaire des quatre application (c, s, c^2, s^2) est la combinaison nulle, triviale.
En termes quantifiés : $\forall\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4,\ \Big(\alpha.c + \beta.s + \gamma.c^2 + \delta.s^2 = 0\Big) \Rightarrow \Big(\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0\Big)\Big)$.
On prend donc un quadruplet vérifiant $\alpha.c+\beta.s+\gamma.c^2+\delta.s^2 = 0$. On traduit : $\alpha.|\cos(\theta)|+\beta.|\sin(\theta)|+\gamma.\cos^2(\theta) + \delta.\sin^2(\theta) = 0$.
On tente d'obtenir le maximum d'informations sur α, β, γ et δ.
En 0, on trouve déjà : $\alpha + \gamma = 0$.
En $\pi/2$, on trouve aussi : $\beta + \gamma = 0$.
En $\pi/4$: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\alpha + \beta) + \dfrac{\gamma + \delta}{2} = 0$.
En $\pi/3$: $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\sqrt{3}.\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{4} + \dfrac{3.\delta}{4} = 0$.
On en fait un système matriciel : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 2 & 2.\sqrt{3} & 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le déterminant de cette matrice est laid mais non nul. En multipliant par son inverse, on trouve que α, β, γ et δ sont nuls.

Une variante pour gagner du temps : on regarde en 0 après avoir isolé : $-\beta.|\sin(\theta)| = \beta.|\cos(\theta)| + \gamma.\cos^2(\theta) + \delta.\sin^2(\theta)$. Le membre de droite est continu, dérivable. Il faut que celui de gauche le soit aussi. La seule façon pour que celui de gauche le soit aussi est que β soit nul.
Une fois acquis $\beta = 0$, on reporte dans les autres équations, et on arrive vite à la nullité de tous.

E est donc de dimension 4.

• On décompose sans effort : $(\theta \longrightarrow \cos(2.\theta)) = c^2 - s^2$ d'où l'appartenance à E avec composantes $(0, 0, 1, -1)$ sur cette base.

• L'application constante 1 a pour composantes $(0, 0, 1, 1)$.
Si vous avez refusé $x \longrightarrow 1$ sous prétexte que la variable est appelée x au lieu de θ, c'est que vous n'avez toujours pas compris ce qu'est une variable. Je ne peux plus rien pour vous.

• L'application $\theta \longrightarrow \sin(2.\theta)$ est impaire et ne peut pas se décomposer avec les fonctions de E qui sont toutes paires.

• De même, $\theta \longrightarrow |\cos(\theta + \pi/3)|$ n'est pas paire *(valeur en $\pi/6$ et $-\pi/6$)*, elle n'est donc pas dans E, on ne la décomposera pas.

• Pour le cosinus, c'est plus délicat. On sent qu'il n'est pas non plus de la forme $\theta \longrightarrow \alpha.|\cos(\theta)| + \beta.|\sin(\theta)| + \gamma.\cos^2(\theta) + \delta.\sin^2(\theta)$ mais il faut encore le prouver sans affirmation du type "ça ne pourrait être que de la forme...".
On raisonne par l'absurde, en supposant $\cos(\theta) = \alpha.|\cos(\theta)| + \beta.|\sin(\theta)| + \gamma.\cos^2(\theta) + \delta.\sin^2(\theta)$ pour tout θ. En isolant : $-\beta.|\sin(\theta)| = \alpha.|\cos(\theta)| - \cos(\theta) + \gamma.\cos^2(\theta) + \delta.\sin^2(\theta)$. Le membre de droite est dérivable en 0, il faut que celui de gauche le soit. La seule possibilité est déjà $\beta = 0$.
On en serait à $\cos(\theta) = \alpha.|\cos(\theta)| + \gamma.\cos^2(\theta) + \delta.\sin^2(\theta)$. On isole : $-\alpha.|\cos(\theta)| = \cos(\theta) + \gamma.\cos^2(\theta) + \delta.\sin^2(\theta)$. Le membre de droite est dérivable en $\pi/2$, pour que celui de gauche le soit : $\alpha = 0$.
On a maintenant $\cos(\theta) = \gamma.\cos^2(\theta) + \delta.\sin^2(\theta)$ pour tout θ. Mais le second membre est périodique de période π, ce que le premier n'est pas.
Bref, le cosinus n'est pas dans E.

MPSI 2	De la géométrie dans $\mathbb{R}^3$.	**I.S.17**

On cherce un vecteur normal au plan engendré par $\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ par produit vectoriel. On trouve $2.\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 3.\overrightarrow{k}$.
Le plan P a pour équation vectorielle $2.x - y - 3.z = 0$ *(vérifié par les deux vecteurs de base, donc par toutes leurs combinaisons)*.
La droite a pour équation $2.x + y - z = x + y + z = 0$. On combine : $3.x + 2.y = 0$ et on garde une des deux équations. On trouve des vecteurs de la forme $\frac{x}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ . \end{pmatrix}$ puis $\frac{x}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une base de cette droite est donc $2.\overrightarrow{i} - 3.\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ *(qui vérifie les deux équations du système)*.
On doit ensuite écrire $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $2.x - y - 3.z = 0$. On isole : $x = 1 - 2.\lambda$, $y = 3.\lambda$ et $z = -\lambda$. On combine : $2.(1 - 2.\lambda) - 3.\lambda - 3.(-\lambda) = 0$. On trouve $\lambda = 1/2$.
On reporte : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

MPSI 2	Moyennes de Cesaro.	**I.S.17**

On calcule : $A_{n+1} - A_n = \dfrac{(n+1).(a_0 + \ldots + a_{n+1}) - (n+2).(a_0 + \ldots + a_n)}{(n+2).(n+1)}$. Au numérateur, il reste $(n+1).a_{n+1} - (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$ qu'on remet en forme : $(a_{n+1} - a_0) + (a_{n+1} - a_1) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)$. Toutes ces différences sont positives par croissance de a.

I.S.17	MPSI2	581 points	Année 2012/13	*I.S.17*

$<\heartsuit(63)>$ Soit f et g deux applications lipschitziennes de $[\alpha, \beta]$ dans $\mathbb{R}$. Quantifiez "f est lipschitzienne". Montrez que f et g sont bornées. [2 pt.]
Déduisez que $f \times g$ est lipschitzienne. [3 pt.]

$<\heartsuit(64)>$ Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un réel. Quantifiez "f est continue en a" puis "f n'est pas continue en a". [2 pt.]
On prend comme hypothèse cette non continuité. Construisez alors une suite (α_n) qui converge vers a dont la suite image $(f(\alpha_n))$ ne converge pas vers $f(a)$. [2 pt.]

$<\diamondsuit(65)>$ Montrez que l'ensemble des matrices M carrées de format 3 vérifiant $Vect(U) \subset Ker(M)$ et $Im(M) \subset P$ est un espace vectoriel et donnez sa dimension. [5 pt.]
Notations de l'exercice : $Ker(M) = \{X \in \mathbb{R}^3 | M.X = 0_3\}$, $Im(M) = \{M.X | X \in \mathbb{R}^3\}$, P est le plan d'équation $3.x + y - z = 0$ et U est le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$<\diamondsuit(66)>$ Montrez que la suite $(\sin(\sqrt{n^2+1}.\pi)$ converge vers 0 en pensant à écrire $\sqrt{n^2+1} = n + (\sqrt{n^2+1} - n)$ et en utilisant les quantités conjuguées. [3 pt.]

$<\spadesuit(32)>$ La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} . \\ 2 \\ 2 \\ . \end{pmatrix}\right)$ peut elle être de rang 2 ? [2 pt.]

$<\diamondsuit(67)>$ Pour f et g applications linéaires de $(E, +, .)$ dans lui même, montrez : $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$, $Ker(f) \cap Ker(g) \subset Ker(f+g)$. [2 pt.]
Montrez, pour g injective : $Ker(f) = Ker(g \circ f)$. [1 pt.]

$<\diamondsuit(68)>$ Calculez $Card\{n \in \mathbb{N} | n \leqslant 1000 \sim et \sim \exists a \in \mathbb{R}, n = a.Arctan(a)\}$. [2 pt.]

$<\diamondsuit(69)>$ Résolvez $\Re e(z) = 2$ et $\Re e((1+i).z^2) = 2$ d'inconnue complexe z. [2 pt.]

$<\heartsuit(65)>$ Explicitez les deux propriétés appelées "séparation" et "inégalité triangulaire" pour une norme N sur un espace vectoriel $(E, +, .)$. [2 pt.]

$<\spadesuit(33)>$ Calculez le déterminant de la matrice carrée de format 4 de "terme général" (ligne i colonne k) $(i+k-1) \quad mod \quad 4$. [2 pt.]

$<\clubsuit(21)>$ Construisez une suite réelle a telle que ni a ni sa moyenne de Cesaro A ne convergent, mais dont la moyenne de Cesaro de A converge. [4 pt.]

$IS18$	CHARLEMAGNE — Correction — ANNEE **2012/13**	$IS18$	

MPSI 2 | Produit d'applications lipschitziennes. | **IS18**

Deux des hypothèses : $\exists\ k\in\mathbb{R}^+,\ \forall\ (a,b)\in[\alpha,\beta]^2,\ |f(b)-f(a)|\leqslant k.|b-a|$ et $\exists\ k'\in\mathbb{R}^+,\ \forall\ (a,b)\in[\alpha,\beta]^2,\ |g(b)-g(a)|\leqslant k'.|b-a|$.
Comme f et g sont lipschiziennes elles sont continues. Etant continues sur un segment, elles sont bornées.

sans faire appel à de grands théorèmes :
$|f(x)|=|f(x)-f(\alpha)+f(\alpha)|\leqslant|f(x)-f(\alpha)|+|f(\alpha)|\leqslant k.|x-\alpha|+|f(\alpha)|\leqslant k.|\beta-\alpha|+|f(\alpha)|$
et le majorant ne dépend pas de x entre α et β.

On a alors une quadruple hypothèse :
$\forall\ (a,b)\in[\alpha,\beta]^2,\ |f(b)-f(a)|\leqslant k.|b-a|, |g(b)-g(a)|\leqslant k'.|b-a|, |f(a)|\leqslant M, |g(b)|\leqslant M'$
et on calcule et majore :
$|f(b).g(b)-f(a).g(a)|\leqslant|f(b).(g(b)-g(a))+g(a).(f(b)-f(a))|\leqslant|f(b)|.|g(b)-g(a)|.+|g(a)|.|f(b)-f(a)|\leqslant M.k'.|b-a|+M'.k.|b-a|\leqslant(M.k'+M'.k).|b-a|$
et on reconnaît le caractère lipschitzien du produit.

MPSI 2 | Non continuité en un point. | **IS18**

On quantifie continuité et non continuité de f en a :
$\forall\ \varepsilon\in\mathbb{R}^{+*},\ \exists\ \eta_\epsilon\in\mathbb{R}^{+*},\ \forall\ x\in\mathbb{R},\ |x-a|\leqslant\eta_\epsilon\ \Rightarrow\ |f(x)-f(a)|\leqslant\varepsilon$ et
$\exists\ \varepsilon_0\in\mathbb{R}^{+*},\ \forall\ \eta\in\mathbb{R}^{+*},\ \exists\ x_\eta\in\mathbb{R},\ |x-a|\leqslant\eta\ et\ |f(x)-f(a)|>\varepsilon_0$.
On prend comme hypothèse cette dernière ligne. On ne peut pas jouer sur ε_0, mais on peut jouer sur η. On le prend égal à $1/n$. Il existe alors x qu'on va nommer α_n vérifiant $|\alpha_n-a|\leqslant1/n$ et *(pourtant)* $|f(\alpha_n)-f(a)|>\varepsilon_0$.
On a donc construit une suite (α_n). Par encadrement $|\alpha_n-a|\leqslant1/n$ elle converge vers a (simplement : $N_\epsilon=[1/\varepsilon]$).
Par $|f(\alpha_n)-f(a)|>\varepsilon_0$, la suite image $(f(\alpha_n))$ refuse de converger vers $f(a)$.

MPSI 2 | Matrices vérifiant $Vect(U)\subset Ker(M)$ et $Im(M)\subset P$. | **IS18**

On va montrer que ces matrices forment un sous-espace vectoriel de $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$. L'inclusion est dans la définition même.
On prend la matrice nulle : son noyau est $\mathbb{R}^3$, qui contient $Vect(U)$ et son image est réduite à 0_3, qui est dans P.
On prend deux matrices de cet espace : M et N. On a alors pour tout $\alpha.U$ de $Vect(U)$: $M.\alpha.U=0_3$ et $N.\alpha.U=0_3$; en sommant, on a $(M+N).\alpha.U=0_3$. On reconnaît : $Vect(U)\subset Ker(M+N)$.
On prend un vecteur de $Im(M+N)$; il s'écrit $(M+N).X$ et est la somme de $M.X$ et $N.X$. Ces deux vecteurs sont dans P ; leur somme y est aussi. On a bien $Im(M+N)\subset P$.

On passe ensuite de $M.\alpha.U=0_3$ à $(\lambda.M).\alpha.U=0_3$ donc $Vect(U)\subset Ker(\lambda.M)$.
On prend un vecteur de $Im(\lambda.M)$, il s'écrit $\lambda.M.X$, et est dans P *(en tant que multiple de $M.X$, qui est déjà dans P)* : $Im(\lambda.M)\subset P$.

On descend maintenant au niveau des coefficients, avec une matrice de la forme $\begin{pmatrix}a&b&c\\a'&b'&c'\\a"&b"&c"\end{pmatrix}$.
Conseil : pour les matrices de petites taille, prenez des prime et des secondes, pas encore des a_i^j, trop

compliqués.

On traduit déjà le critère sur le noyau : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a" & b" & c" \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

La matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & a+2.b \\ a' & b' & a'+2.b' \\ a" & b" & a"+2.b" \end{pmatrix}$

Le critère sur l'image donne que, colonne par colonne, on a la relation $z = 3.x + y$:

$\begin{pmatrix} a & b & a+2.b \\ a' & b' & a'+2.b' \\ 3.a+a' & 3.b+b' & 3.a+6.b+a'+2.b' \end{pmatrix}$

On travaille à partir de quatre coefficients ? La dimension est donc 4.

Pour être sûr, on donne une base avec les quatre matrices suivantes :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(critère : tout élément de l'ensemble se décompose de façon unique à l'aide de ces quatre là).

MPSI 2	La suite $(\sin(\sqrt{n^2+1}.\pi))$.	**IS18**

Pas de précipitation du type $\sqrt{n^2+1}.\pi \mapsto_{n\mapsto+\infty} n.\pi$ qui est une monstruosité (comment n peut il être encore dans la limite, alors qu'il est parti à l'infini ?).

On écrit comme proposé : $\sqrt{n^2+1} = n + \sqrt{n^2+1} - n = n + \dfrac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

On multiplie par π, et on exploite la demi-période du sinus :

$\sin(\sqrt{n^2+1}.\pi) = \sin\Big(n.\pi + \dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\Big) = (-1)^n.\sin\Big(\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\Big)$

Le contenu de la parenthèse tend vers 0, son sinus tend vers 0, et le $(-1)^n$ reste borné. Tout s'assemble bien.

Si vous prenez le temps d'écrire $\sin(n.\pi + a) = \sin(n.\pi).\cos(a) + \cos(n.\pi).\sin(a)$, *je vous prendrai pour un élève de première, tant pis... La propriété* $\cos(n.\pi + a) = (-1)^n.\cos(a)$ *est directement dans le cours...*

MPSI 2	La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} . \\ 2 \\ 2 \\ . \end{pmatrix}\right)$.	**IS18**

Cette famille est formée de trois vecteurs. Le premier est non nul, son rang vaut vaut au moins 1. Le deuxième n'est pas colinéaire au premier, la famille est au moins de rang 2.

Si le troisième est indépendant des deux premiers, elle sera de rang 3 (et pas plus, puisqu'elle est faite de trois vecteurs.

Pour qu'elle ne soit que de rang 2, il faut et il suffit que le dernier soit combinaison des premiers.

On force déjà le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ à être nul : $a = -2$. On force aussi le déterminant $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix}$ à s'annuler : $b = 2$.

Mais la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est elle vraiment de rang 2 (deux déterminants suffisent ils ?). On cherche à exprimer vraiment C_3 comme combinaison linéaire de C_1 et C_2 et on trouve : $C_3 = 2.C_1 - 2.C_2$. Et c'est bon, elle est de rang 2.

MPSI 2	Des noyaux.	**IS18**

On prend $\overrightarrow{u}$ dans $Ker(f)$ (on traduit : $f(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$). On compose par g : $g(f(\overrightarrow{u}))=g(\overrightarrow{0})=g(0.\overrightarrow{0})=0.g(\overrightarrow{0})=\overrightarrow{0}$. On reconnaît : $\overrightarrow{u}\in Ker(g\circ f)$. On tient la première inclusion : $Ker(f)\subset Ker(g\circ f)$.

On ajoute l'hypothèse "g injective". On prend $\overrightarrow{u}$ dans $Ker(g\circ f)$ (et on veut prouver que $\overrightarrow{u}$ est dans $Ker(f)$). On traduit : $g(f(\overrightarrow{u}))=\overrightarrow{0}=g(\overrightarrow{0})$. Par injectivité de g on efface : $f(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$. On reconnaît que $\overrightarrow{u}$ est dans $Ker(f)$.

On prend $\overrightarrow{u}$ dans l'intersection des deux noyaux. On somme alors : $(f+g)(\overrightarrow{u})=f(\overrightarrow{u})+g(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$. On est arrivé à $\overrightarrow{u}\in Ker(f+g)$. C'est l'inclusion de l'unique sens demandé et même envisagé.

MPSI 2	Les entiers s'écrivant $a.Arctan(a)$.	**IS18**

La question $Card\{n\in\mathbb{N}|n\leqslant 1000\sim et\sim\exists a\in\mathbb{R}, n=a.Arctan(a)\}$ nous invite à compter combien il y a d'entiers entre 0 et 1000 pouvant s'écrire $a.Arctan(a)$ pour un réel a bien choisi (je me demande finalement ce que serait un réel mal choisi).
Mais si on y regarde de près, l'application $x\longrightarrow x.Arctan(x)$ est strictement croissante sur $[0,+\backslash infty[$ de valeur nulle en 0 et de limite infinie à l'infini. Elle réalise donc un homéomorphisme de $[0,+\infty[$ sur lui même. Tout entier s'écrit donc $a.Arctan(a)$ pour au moins un réel a.
La réponse à la question posée est donc 1001.

MPSI 2	L'équation $\Re e(z)=\Re e((1+i).z)=2$.	**IS18**

C'est cadeau. On écrit $z=2+i.y$ avec y réel. On développe : $(1+i).z^2=(1+i).(4-y^2+4.i.y)=(4-y^2-4.y)+i.(4-y^2+4.y)$. On exige alors $-y^2-4.y+4=2$, que l'on résout sur $\mathbb{R}$.
On trouve deux solutions pour z : $2+i.(\sqrt{6}-2)$ et $2-i.(\sqrt{6}+2)$.

MPSI 2	Un déterminant.	**IS18**

Là aussi, c'est cadeau : $\begin{vmatrix}1&2&3&0\\2&3&0&1\\3&0&1&2\\0&1&2&3\end{vmatrix}$. On somme toutes les lignes sur la première, le déterminant ne change pas. On factorise alors $6.\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&0&1\\3&0&1&2\\0&1&2&3\end{vmatrix}$.

On soustrait la première colonne à chacune des autres : $6.\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&-1&0\\3&-3&-2&-1\\0&1&2&3\end{vmatrix}=6.\begin{vmatrix}1&-1&0\\-3&-2&-1\\1&2&3\end{vmatrix}$.

On développe par rapport à une colonne et on trouve -96.

MPSI 2	Une suite, sa moyenne de Cesaro et la moyenne de Cesaro de celle ci.	**IS18**

On a un exemple classique de suite divergente dont la moyenne de Cesaro converge : $((-1)^n)$. En effet, sa moyenne de Cesaro est donnée par $c_{2.n}=1/(2.n+1)$ et $c_{2.n+1}=0$. Par l'encadrement $0\leqslant c_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$, cette moyenne de Cesaro converge vers 0.
Il suffit alors de trouver a dont la moyenne de Cesaro soit $((-1)^n)$.
On veut donc $\dfrac{a_0+\ldots+a_n}{n+1}=(-1)^n$ pour tout n et donc aussi $\dfrac{a_0+\ldots+a_{n-1}}{n}=(-1)^{n-1}$. On effectue donc un produit en croix $a_0+\ldots+a_n=(n+1).(-1)^n$ et $a_0+\ldots+a_{n-1}=n.(-1)^{n-1}$.
On soustrait : $a_n=(-1)^n.(2.n+1)$.

En liste : $(1, -3, 5, -7, 9, -11, 13, -15\dots)$.

$IS18$	$\mathbb{MPSI}2$	615 points	Année 2012/13	$IS18$

< ♡(66) > Définition de la somme de Riemann gauche pour une application f sur un segment $[a,b]$ pour une équisubdivision en n morceaux. 1 pt.

< ♢(70) > Soit f une application lipschitzienne de rapport k^- sur $]-\infty, 0]$ et lipschitzienne de rapport k^+ sur $[0, +\infty[$. Montrez que f est lipschitzienne de rapport k (à préciser) sur $]-\infty, +\infty[$ (en pensant à écrire $f(x)-f(y) = f(x)-f(0)+f(0)-f(y)$ dans un des cas de votre démonstration). 3 pt.

< ♢(71) > On définit f de $\mathbb{R}^3$ (base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$) dans $\mathbb{R}^3$ par $f(a.\overrightarrow{i} + b.\overrightarrow{j} + c.\overrightarrow{k}) = (a+b+c).\overrightarrow{i} + (a-2.b).\overrightarrow{j} + (a+b+c).\overrightarrow{k}$ (pour tout triplet (a,b,c)). Montrez que la famille $(2.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ est libre mais que la famille image est liée. 3 pt.

< ♠(34) > On définit la suite u par $u_0 = 1$, $u_1 = \alpha$ et $u_{n+2} = 3.u_{n+1} + 10.u_n + 6.4^n$. On pose alors $v_n = u_n + \beta.4^n$. Ajustez β pour que v soit une suite récurrente linéaire du type $v_{n+1} = a.v_{n+1} + b.v_n$. 1 pt.

Calculez alors v_n pour tout n (en fonction de α). 3 pt.

Calculez u_n pour tout n. 1 pt.

Quelle valeur faut il donner à α pour que u_n soit un $o(5^n)$ quand n tend vers l'infini ? 1 pt. Donnez alors un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini, de la forme $k.n^p$. 1 pt.

< ♢(72) > Calculez $\displaystyle\int_0^1 \frac{2.t+2}{\sqrt{t^2+4.t+5}}.dt$ en pensant à écrire $t^2+4.t+5$ sous forme “canonique”. 3 pt.

< ♢(73) > Construisez une homographie de points fixes 2 et 3 et de limite 1 à l'infini, que vous noterez h. 3 pt.

Représentez graphiquement h. 1 pt.

On définit alors la suite récurrente u par $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout n.
On pose : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 3}$. Donnez la relation de récurrence vérifiée par (v_n). 1 pt. Exprimez v_n et u_n pour tout n en fonction de u_0. 2 pt.

Pouvez vous choisir u_0 pour que la suite u s'arrête au centième terme ? 1 pt.

< ♢(74) > Montrez que $t \longrightarrow \dfrac{1}{t^2+5.t+7}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. 2 pt.
Déduisez que $x \longrightarrow \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t^2+5.t+7}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. 2 pt.

$IS19$	CHARLEMAGNE — Correction — ANNEE **2012/13**		$IS19$

MPSI 2	Sommes de Riemann.	**IS19**

On doit découper l'intervalle par des points de a à b qui avancent de $(b-a)/n$ à chaque fois, d'où des $a+k.\dfrac{b-a}{n}$. On doit ensuite multiplier par la largeur des rectangles *(qu'on met en facteur)* et sommer :

$\boxed{\dfrac{b-a}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a+k.\dfrac{b-a}{n}\Big)}$ *(de 0 à $n-1$ car Riemann gauche).*

MPSI 2	Application lipschitzienne sur $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$.	**IS19**

Il est évident que le rapport de Lipschitz sera le maximum de k^- et k^+ qu'on va noter k. Il reste à le vérifier, en prenant deux réels a et b et en majorant $|f(b)-f(a)|$ par $k.|b-a|$.
- si a et b sont tous deux négatifs : $|f(b)-f(a)| \leqslant k^-.|b-a| \leqslant k.|b-a|$,
- si a et b sont tous deux positifs : $|f(b)-f(a)| \leqslant k^+.|b-a| \leqslant k.|b-a|$
- Mais il y a bien sûr le cas où l'un est positif (disons b) et l'autre négatif (disons a par symétrie des rôles). On écrit alors :

$$\begin{aligned}|f(b)-f(a)| = |f(b)-f(0)+f(0)-f(a)| &\leqslant |f(b)-f(0)|+|f(0)-f(a)|\\ &\leqslant k^+.(b-0)+k^-.|a-0| \leqslant k.b+k.|a| = .|b-a|\end{aligned}$$

la dernière égalité étant due au fait que 0 est entre a et b.
Ayant la majoration dans tous les cas, on peut donc bien écrire $\forall\ (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ |f(b)-f(a)| \leqslant k.|b-a|$.

MPSI 2	La famille de vecteurs $(2.\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})$.	**IS19**

On écrit la matrice de cette famille de vecteurs sur la base canonique : $\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$ et on en calcule le déterminant : 2. Il est non nul, cette famille est une base, donc elle est libre.
Nul ne vous interdisait de partir de $a.\overrightarrow{u}+b.\overrightarrow{v}+c.\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$ pour arriver à $a=b=c$ par résolution d'un système, mais c'est du temps gâché.

On regarde la famille image :
- $f(2.\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}) = (2+1-1).\overrightarrow{i}+(2-2.1).\overrightarrow{j}+(2+1-1).\overrightarrow{k} = 2.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k})$
- $f(\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}) = (0+1+1).\overrightarrow{i}+(0-2.1).\overrightarrow{j}+(0+1+1).\overrightarrow{k} = 2.(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})$
- $f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) = (1+1+1).\overrightarrow{i}+(1-2.1).\overrightarrow{j}+(1+1-1).\overrightarrow{k} = 3.\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+3.\overrightarrow{k})$

On calcule le déterminant relatif à la base canonique de cette nouvelle famille : $\begin{vmatrix}2&2&3\\0&-2&-1\\2&2&3\end{vmatrix}=0$ à cause des deux lignes égales. La famille n'est pas libre.

Mais suis-je bête !

Il suffisait d'observer que les vecteurs images étaient tous de la forme $\begin{pmatrix}x\\y\\x\end{pmatrix}$ *(deux composantes égales).*

Ils sont donc tous dans un même plan (d'équation $x=z$). Comme on a trois vecteurs images dans ce plan, ils forment assurément une famille liée.

MPSI 2	La suite $u_{n+2}=3.u_{n+1}+10.u_n+6.4^n$.	**IS19**

On a un terme de perturbation en 4^n. On va donc l'éliminer par "une solution particulière".
On remplace u_n par $v_n - 4^n.\beta$ *(et on fait de même aux rangs $n+1$ et $n+2$) :*
$(v_{n+2} - 16.4^n.\beta) = 3.(v_{n+1} - 4.4^n.\beta) + 10.(v_n - 4^n.\beta) + 6.4^n$
On voit qu'en prenant $\boxed{\beta = 1}$ on élimine les termes en 4^n.
C'est ce qu'on fait.

La suite v est alors du type $v_{n+2} = 3.v_{n+1} + 10.v_n$ pour tout n *(équation homogène associée)*. On résout l'équation caractéristique *($\lambda^2 = 3.\lambda + 10$)* et on trouve le spectre *(5 et -2)*. Les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2 fait des combinaisons linéaires des deux suites géométriques (5^n) et $(-2)^n$.
On déduit l'existence de deux réels A et B *(dépendant des conditions initiales)* vérifiant $v_n = A.(-2)^n + B.5^n$ pour tout n. On les calcule à l'aide du système : $A + B = 0$ et $-2.A + 5.B = a - 4$. On trouve $A = \dfrac{4-a}{7}$ et $B = \dfrac{a-4}{7}$.
On écrit finalement $v_n = \dfrac{1-a}{7}((-2)^n - 5^n)$ puis $\boxed{u_n = \dfrac{4-a}{7}((-2)^n - 5^n) + 4^n}$ pour tout n.

On veut que la suite soit un $o(5^n)$ *(visuellement : s'écrase devant 5^n)*. Or, elle contient du 5^n. Il faut l'éliminer en choisissant $a = 4$.
Plus proprement, on demande que $u_n/5^n$ tende vers 0 à l'infini. Or, $u_n/5^n$ est égal à $\dfrac{4-a}{7}((-\dfrac{2}{5})^n - 1) + \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ qui tend déjà vers $(4-a)/7$. Par unicité de la limite : $\dfrac{4-a}{7} = 0$.

Il reste alors $u_n = 4^n$ qui est équivalent à 1.4^n quand n tend vers l'infini *(ne me demandez pas mieux !)*.

MPSI 2	L'intégrale $\int_0^1 \frac{2.t+2}{\sqrt{t^2+4.t+5}}.dt$.	**IS19**

La mise sous forme canonique $\sqrt{(t+2)^2+1}$ et la continuité nous garantissent déjà l'existence de l'intégrale *(pas de racines de négatif, pas d'annulation de dénominateur)*.
Ensuite, on détecte presque une forme en $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$. On sépare donc en deux termes :
$$\int_0^1 \frac{2.t+4}{\sqrt{t^2+4.t+5}}.dt - \int_0^1 \frac{2.t+4}{\sqrt{t^2+4.t+5}}.dt$$
On intègre le premier en $\left[2.\sqrt{t^2+4.t+5}\right]_{t=0}^{t=1}$ (de valeur $2.\sqrt{10} - 2.\sqrt{5}$) et on utilise la forme canonique pour le second $\displaystyle\int_0^1 \frac{2.dt}{\sqrt{(t+2)^2+1}}.dt$.
On se retient d'intégrer en $Argsh$ (cette application ayant disparu des programmes), mais on fait appel à $\ln\left(t+2+\sqrt{(t+2)^2+1}\right)$.

La valeur après sommation est $\boxed{2.\left(\sqrt{10} - \sqrt{5} - \ln\left(\dfrac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{10}}\right)\right)}$

MPSI 2	Homographie de limite 1 et de points fixes 2 et 3.	**IS19**

On demande une homographie : $h = x \longrightarrow \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$.
La limite à l'infini vaut 1 : $a/c = 1$.
Les points fixes sont 2 et 3 : le polynôme $c.x^2 + (d-a).x - b$ est multiple de $(x-2).(x-3)$.
On demande donc : $d - a = -5.c$ et $-b = 6.c$.
L'homographie est de la forme $x \longrightarrow \dfrac{c.x - 6.c}{c.x - 4.c.x}$. On simplifie par c et on tient $\boxed{x \longrightarrow \dfrac{x-6}{x-4}}$

pour unique solution.

L'asymptote verticale est en $x=4$. L'asymptote horizontale est en $y=1$. L'application est croissante sur $]-\infty, 4[$ puis sur $]4, +\infty[$ (mais pas sur $\mathbb{R}-\{4\}$, attention !).
Et en bonus, on connaît les deux points fixes.

Si l'on pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 3}$, on pose aussi
$v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-3} = \dfrac{\frac{u_n-6}{u_n-4}-2}{\frac{u_n-6}{u_n-4}-3} = \dfrac{u_n - 6 - 2.u_n + 8}{u_n - 6 - 3.u_n + 12} = \dfrac{2-u_n}{6-2.u_n} = \dfrac{v_n}{2}$.
On généralise par récurrence : $v_n = \dfrac{v_0}{2^n} = \dfrac{u_0 - 2}{2^n.(u_0-3)}$.
On reporte : $u_n = \dfrac{2-3.v_n}{1-v_n} = \dfrac{2 - \dfrac{3.(u_0-2)}{2^n.(u_0-3)}}{1 - \dfrac{u_0-2}{2^n.(u_0-3)}} = \boxed{\dfrac{(2^{n+1}-3).u_0 + (6-3.2^{n+1})}{(2^n-1).u_0 + (2-3.2^n)} = u_n}$
(qu'on vérifie pour $n=0$ et $n=1$).

On veut qu'il n'existe que cent termes *(de u_0 à u_{99})*. Il faut et il suffit que le dénominateur de u_{100} soit nul : $u_0 = \dfrac{3.2^{100}-2}{2^{100}-1}$ *(très proche du point fixe instable 3).*

MPSI 2	L'application $x \longrightarrow \int_1^x \frac{dt}{t^2+5.t+7}$.	**IS19**

On met le polynôme sous forme canonique : $\left(t+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ et on le minore donc par $\dfrac{3}{4}$. On passe aux inverses par positivité : $\dfrac{1}{t^2+5.t+7}$ existe pour tout t et se majore par $\dfrac{4}{3}$. Et il se minore par 0 d'où encadrement comme demandé.
On se donne ensuite a et b réels, en supposant $a \leqslant b$ par symétrie des rôles.
On a alors $\displaystyle\int_1^b \frac{dt}{t^2+5.t+7} - \int_1^b \frac{dt}{t^2+5.t+7} = \int_a^b \frac{dt}{t^2+5.t+7}$.
On minore par 0 et on majore par $4.(b-a)/3$.
On reconnaît la définition du caractère lipschitzien avec rapport $4/3$.

$<\heartsuit(67)>$ Donnez la formule explicite qui calcule le terme de position “ligne i, colonne k” de la matrice produit $A.B$, sachant que A est à p lignes et q colonnes, et B à q lignes et r colonnes. $\boxed{\text{1 pt.}}$

$<\heartsuit(68)>$ On définit $a_n = n^2 + n$ et $b_n = n^2 - 15$. Montrez que a_n est équivalent à $b_n$quand n tend vers l’infini, mais que e^{a_n} n’est pas équivalent à e^{b_n} quand n tend vers l’infini. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$<\diamondsuit(75)>$ x est un réel donné. Donnez une formule propre pour le terme de position “ligne i colonne k” de la matrice de taille 6 suivante et calculez ensuite son déterminant : $\begin{pmatrix} 1 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x \\ x & 1 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 \\ x^2 & x & 1 & x^5 & x^4 & x^3 \\ . & . & . & . & . & . \\ x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{4 pt.}}$

$<\diamondsuit(76)>$ Soient f et g deux applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g ont la même borne supérieure α *(pas forcément atteinte au même point)*. Justifiez : $\exists\ (a, b) \in [0, 1]^2,\ f(a) = g(b) = \alpha$. $\boxed{\text{1 pt.}}$
Déduisez, en étudiant le signe de $f - g$: les graphes de f et g se croisent. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$<\heartsuit(69)>$ Rappelez la limite de $\left(\left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n\right)$ quand n tend vers l’infini pour a réel *(démonstration comprise)*. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$<\clubsuit(22)>$ Soit z un complexe. Mettez le module de $|1 + \frac{z}{n}|$ sous la forme $\sqrt{1 + \varepsilon_n}$ avec ε_n de limite nulle quand n tend vers l’infini. $\boxed{\text{1 pt.}}$ Calculez la limite du module de $|1 + \frac{z}{n}|^n$ quand n tend vers l’infini, en repassant par la forme $\alpha^\beta = e^{\beta.\ln(\alpha)}$. $\boxed{\text{1 pt.}}$
Exprimez pour n plus grand que $|z|$ l’argument de $(1 + \frac{z}{n})$ et de $(1 + \frac{z}{n})^n$ et donnez sa limite quand n tend vers l’infini. $\boxed{\text{2 pt.}}$
Concluez : quelle est la limite de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ quand n tend vers l’infini. $\boxed{\text{1 pt.}}$

$<\spadesuit(35)>$ Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = f\Big(\dfrac{2.x - 5}{3}\Big)$ pour tout x. On définit $g := x \longrightarrow \dfrac{2.x - 5}{3}$. Quels sont ses points fixes ? $\boxed{\text{1 pt.}}$ Montrez : $f \circ g^n = f$ pour tout n *(où g^n désigne $g \circ g \circ g \ldots \circ g$)*. $\boxed{\text{1 pt.}}$ Montrez que pour tout réel x la suite $(g^n(x))_n$ converge (et explicitez son terme général). $\boxed{\text{3 pt.}}$ Déduisez que f est constante. $\boxed{\text{1 pt.}}$

$<\diamondsuit(77)>$ Soit une suite récurrente “$u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n”. Montrez que si f est croissante, alors u est monotone. $\boxed{\text{2 pt.}}$ Donnez une exemple où f est croissante et u décroissante. $\boxed{\text{1 pt.}}$

$<\spadesuit(36)>$ Montrez que pour tout n l’équation $\cos^n(x) = x$ admet une unique solution entre 0 et $\pi/2$, que l’on va noter a_n. (on pourra définir $g_n = x \longrightarrow x - \cos^n(x)$) $\boxed{\text{2 pt.}}$
Montrez que la suite a est décroissante.(on pourra “calculer” $g_{n+1}(a_n) - g_{n+1}(a_{n+1})$) $\boxed{\text{2 pt.}}$
La suite a converge-t-elle ? $\boxed{\text{1 pt.}}$

$<\diamondsuit(78)>$ On définit la permutation σ : $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l \\ c & e & d & f & l & h & i & a & b & k & . & g \end{pmatrix}$. Complétez : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \sigma^n(c) = h \ \Rightarrow\ \sigma^n(b) = *$ puis $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \sigma^n(b) = f \ \Rightarrow\ \sigma^n(g) = *$. $\boxed{\text{3 pt.}}$

MPSI 2	Terme général d'une matrice produit.	**IS20**

Le terme général est $\boxed{c_i^k = \sum_{j=1}^{q} a_i^j.b_j^k}$ sachant que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

MPSI 2	Deux suites équivalentes dont les exponentielles ne le sont pas.	**IS20**

On calcule le quotient $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2+n}{n^2-15} = \frac{1+1/n}{1-15/n^2}$, et il a pour limite 1.
Quant au quotient des exponentielles, c'est $\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = e^{a_n-b_n} = e^{n+15}$ qui tend vers l'infini, et nullement vers 1.

MPSI 2	Un déterminant.	**IS20**

Les termes de la matrice sont des puissances de a entre 0 et 5. Sur une ligne, les exposants diminuent plutôt, d'où un terme en $-k$. En revanche, de ligne en ligne, il a plutôt tendance à augmenter, d'où un terme en i. On tente $\boxed{a^{(i-k)mod6}}$ et on le vérifie :
première ligne : $a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5}$ et on réduit l'exposant modulo 6 en ajoutant 6 : $1, a^5, a^4, a^3, a^2, a$.
La formule est correcte aussi pour la seconde ligne, avec décalage.

Pour calculer le déterminant, on utilise le pivot de Gauss : $L_6 \hookleftarrow L_6 - X.L_5$. Tous les termes de la dernière ligne sont nul *(sauf le terme diagonal de valeur $1-X^6$)*.
On continue : $L_5 \hookleftarrow L_5 - X.L_4$. On annule encore des termes sous la diagonale, et oon crée un $1-X^6$ sur la diagonale. On continue avec à chaque fois $L_k \hookleftarrow L_k - X.L_{k-1}$ sans modifier la première ligne.
On aboutit à une matrice presque diagonale : la première ligne est restée celle de la matrice initiale, mais sinon, on n'a que des $1-X^6$ sur la diagonale.
Son déterminant vaut $\boxed{(1-X^6)^5}$

Si vous avez tout développé brutalement sans chercher de simplifications, vous avez $-X^{30}+5.X^{24}-10.X^{18}+10.X^{12}-5.X^6+1$.

En taille 4 pour comprendre nos $L_k \hookleftarrow L_k - X.L_{k-1}$ *:*

$$\begin{vmatrix} 1 & X^3 & X^2 & X \\ X & 1 & X^3 & X^2 \\ X^2 & X & 1 & X^3 \\ X^3 & X^2 & X & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & X^3 & X^2 & X \\ X & 1 & X^3 & X^2 \\ X^2 & X & 1 & X^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-X^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & X^3 & X^2 & X \\ X & 1 & X^3 & X^2 \\ 0 & 0 & 1-X^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-X^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & X^3 & X^2 & X \\ 0 & 1-X^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-X^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-X^4 \end{vmatrix}$$

MPSI 2	Deux fonctions de même borne supérieure.	**IS20**

f et g sont continues sur le segment $[0,1]$. Elles sont donc bornées et atteignent leurs bornes :
• $\exists\ a \in [0,\ 1],\ f(a) = Sup(f(t)|t \in [0,\ 1]) = \alpha$
• $\exists\ b \in [0,\ 1],\ g(b) = Sup(g(t)|t \in [0,\ 1]) = \alpha$.

On étudie alors l'application $f-g$ sur l'intervalle $[0,\ 1]$. Elle y est continue. En a elle vaut $f(a)-g(a)$ c'est à dire $\alpha - g(a)$. On ne connapit pas $g(a)$, mais on sait qu'il est plus petit que α. On a donc $(f-g)(a) \geqslant 0$.
En b elle vaut $f(b)-g(b)$ c'est à dire $f(b)-\alpha$. On ne connapit pas $f(b)$, mais on sait qu'il est plus

petit que α. On a donc $(f-g)(b) \leqslant 0$.
L'application continue $f-g$ change de signe sur l'intervalle, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule et change de signe au moins une fois. C'est en ce point d'annulation que les deux graphes se croisent.

C'est au morceau de phrase "s'annule et change de signe" que je détecterai les futurs professeurs possibles, par rapport à la seule formulation "s'annule" qui me permettra de détecter les futurs ingénieurs (voire les futurs physiciens, puisque j'ai droit à dix pour cent d'échecs).

MPSI 2	Limite de $(1+a/n)^n$. Module et argument de $(1+z/n)^n$.	**IS20**

On commence par $(1+a/n)^n$ que l'on écrit $\exp\Big(n.\ln\Big(1+\frac{a}{n}\Big)\Big)$. On le dégrade en $\exp\Big(n.\Big(\frac{a}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)$ de limite $\boxed{e^a}$

Il pourra être exigé que n soit plus grand que $|a|$ avant de commencer le moindre calcul, afin que $(1+a/n)$ soit strictement positif.
Mais cette contrainte est pleinement compatible avec "n tend vers l'infini".

En écrivant donc z sous la forme $a+i.b$ avec a et b réels, on a :
$\Big|1+\dfrac{a+i.b}{n}\Big| = \sqrt{\Big(1+\dfrac{a}{n}\Big)^2+\Big(\dfrac{b}{n}\Big)^2} = \sqrt{1+\Big(\dfrac{2.a}{n}+\dfrac{a^2+b^2}{n^2}\Big)}$.

On élève à la puissance n (entière) : $\Big|1+\dfrac{z}{n}\Big|^n = \Big(1+\Big(\dfrac{2.a}{n}+\dfrac{a^2+b^2}{n^2}\Big)\Big)^{n/2}$.

On se ramène à $\exp\Bigg(\dfrac{\ln\Big(1+\Big(\frac{2.a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\Big)\Big)}{2.n}\Bigg)$.
On se concentre sur la forme indéterminée dans l'exponentielle, que l'on lève en faisant appel au développement limité d'ordre 1 du logarithme en 1 : $\ln(1+u) = u+o(u)$.

On trouve $\dfrac{\frac{2.a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)}{2.n}$, de limite a.

On a donc $\boxed{\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\Big|1+\dfrac{z}{n}\Big|^n = e^{\Re e(z)}}$

On passe à l'argument de $\Big(1+\dfrac{a}{n}\Big)+i.\Big(\dfrac{b}{n}\Big)$ qui se trouve dans les quadrants "Est" du plan complexe.
On est dans la zone favorable pour l'extraire par *Arctangente* : $Arctan\Big(\frac{b/n}{1+\frac{a}{n}}\Big)$.
On élève à la puissance n : $n.Arctan\Big(\frac{b/n}{1+\frac{a}{n}}\Big)$.
Encore une forme indéterminée, mais on a là aussi un équivalent : $Arctan(u) = u+o(u)$ quand u tend vers 0.
On lève alors l'indétermination $\dfrac{b}{1+\dfrac{a}{n}}+o\Big(\dfrac{b}{n}\Big)$ a pour limite b.

$\boxed{\text{L'argument de } \Big(1+\dfrac{z}{n}\Big)^n \text{ tend vers } \Im m(z).}$

On fusionne ce qu'on sait avec module et argument : $\Big(1+\dfrac{z}{n}\Big)^n$ tend vers $e^{\Re e(z)}.e^{i.\Im m(z)}$, c'est à dire e^z.

MPSI 2	L'équation fonctionnelle $f(x) = f(\frac{2.x-5}{3})$.	**IS20**

Avec $g = x \longrightarrow (2.x-5)/3$, l'hypothèse est "$f\circ g(x) = f(x)$ pour tout x" c'est à dire $f\circ g = f$ (et pas

$f(g) = f$ puisque ça se passe entre fonctions).
Par récurrence sur n on montre alors $f \circ g \circ g \circ \ldots g = f$.
On initialise pour n nul et n égal à 1.
On suppose $f \circ g^n = f$ et on compose à droite (en amont) par g : $f \circ g^n \circ g = f \circ g$. Par hypothèse le second membre est f, et par définition, celui de gauche est $f \circ g^{n+1}$. La récurrence s'achève.

On se donne x et on définit la suite récurrente $x_n = g^n(x)$ *(définition équivalente* $x_{n+1} = g(x_n) = \frac{2}{3}.x_n - \frac{5}{3}$*)*. Elle est quasi géométrique.
C'est du cours. On doit ajuster α pour que $x_n - \alpha$ soit géométrique de raison $2/3$: $y_{n+1} + \alpha = \frac{2}{3}.(y_n + \alpha) - \frac{5}{3}$. Il faut et il suffit de prendre $\alpha = -5$. On conclus alors : $y_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n.y_0$ *(vérifiable pour n petit)*.

On a la formule définitive : $\boxed{x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n.(x+5) - 5 = \frac{2^n.x + (2^n - 3^n).5}{3^n}}$ *(choisissez celle que vous voulez)*.

Quand n tend vers l'infini, la suite géométrique $((2/3)^n)_n$ tend vers 0, et (x_n) converge vers -5.

Tiens, sans efforts : l'application g est contractante *(rapport 2/3)*, la suite "$x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout n" converge vers le point fixe de g.
Encore faut il ne pas oublier d'indiquer le théorème utilisé et de bien vérifier le caractère contractant de g.

La relation $f \circ g^n = f$ permet d'écrire $f(x_n) = f(x_0)$ pour tout n.
Mais la suite (x_n) converge vers -5. Par combinaison de limites : $f(x_n)$ tend vers $f(-5)$ quand n tend vers l'infini.
Par unicité de la limite, $f(x)$ est égal à $f(-5)$. Pour tout x.
f est donc constate, égale à $f(-5)$.

On notera que pour montrer que f est constante, on ne dérive pas forcément. Les réflexes de Terminable sont à oublier.

Au fait, comment écrit on mathématiquement "f est constante" ?
On n'écrit pas $f = C^{te}$ qui n'est digne que d'une mauvaise copie de physique.
On n'écrit pas $f' = 0$.
On peut écrire : $\exists\ \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha$.
On n'écrit pas $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \exists\ \alpha \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha$.
On écrit "f est constante" (c'est la meilleure façon de faire).
Et la formule $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(a)$ est fort judicieuse aussi.

MPSI 2	Suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante.	**IS20**

On suppose juste que f est croissante. On distingue deux cas :
- $u_0 \leqslant u_1$: alors, par récurrence sur n, on a $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n, et u est croissante.
- $u_0 \geqslant u_1$: alors, par récurrence sur n, on a $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout n, et u est décroissante.

On voit que le sens de variation dépend juste de la position des deux termes initiaux.

On trouve un exemple très simple avec $f = Arctan$ étudié dans le cours. f est croissante.
Si u_0 est positif, (u_n) est décroissante.

Si u_0 est négatif, (u_n) est croissante.

Sinon, j'ai aussi $f = x \longrightarrow x - 1$. L'application est croissante. Mais la suite est alors $u_n = u_0 - n$, suite arithmétique qui décroît.

MPSI 2	La suite des solutions de $x = \cos^n(x)$.	**IS20**

Pour n donné, on pose : $g_n = x \longrightarrow x - \cos^n(x)$.
Cette application est continue sur $[0, \pi/2]$. En 0 elle vaut -1 et en $\pi/2$ elle vaut $\pi/2$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule au moins une fois.
Mieux encore, sa dérivée g'_n est positive. On peut donc être plus précis et parler d'homéomorphisme, ce qui va garantir l'unicité de la solution.

Pour n donné, on a $g_n(a_n) = 0$ et $g_{n+1}(a_{n+1}) = 0$. On calcule :
$g_{n+1}(a_n) - g_{n+1}(a_{n+1}) = \big(a_n - \cos^{n+1}(a_n)\big) - 0 = \cos^n(a_n) - \cos^{n+1}(a_n) = \cos(a_n).(1 - \cos(a_n))$
Cette différence est positive *(cosinus entre* 0 *et* 1*)*.
On a donc $a_n \geqslant a$ par croissance de g_n.

La suite a est décroissante, minorée *(par* 0*)*, elle tend vers son plus grand minorant.
On pourrait montrer qu'il vaut 0.

MPSI 2	Une permutation.	**IS20**

On complète par bijectivité : $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l \\ c & e & d & f & l & h & i & a & b & k & j & g \end{pmatrix}$ et on décompose en cycles :
$\sigma = \overrightarrow{(acdfh)} \circ \overrightarrow{(belgi)} \circ \overrightarrow{(jk)}$.

Pour n donné, l'hypothèse $\sigma(c) = h$ implique $n = 3 \quad mod \quad 5$, qui lui même entraîne $\sigma^n(b) = g$.

Ensuite, $\sigma^{2.n}(b) = f$ est impossible. On déduit alors ce qu'on veut pour la dernière étoile, que ce soit ou non dans le cycle de g.

< ♡(70) > Des élèves utilisent souvent $(a \leqslant b) \Rightarrow \left(\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}\right)$. Prouvez qu'ils ont tort. [1 pt.]

< ♣(23) > Montrez : $C_3(\mathbb{R}, \mathbb{Z}) = C_4(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$. [3 pt.]

< ♢(79) > Calculer $A_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} j$ pour tout n de $\mathbb{N}$. [3 pt.]

Donnez un équivalent de $B_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} k$ de la forme $a.n^\alpha$ quand n tend vers l'infini. [3 pt.]

Calculez $C_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\Big(\prod_{p=-n}^{p=n}(-1)^{k+p}2^p\Big)$ pour tout n de $\mathbb{N}$. [4 pt.]

< ♢(80) > La formule de Taylor avec reste de Lagrange à l'ordre 2 entre a et $a+h$ s'écrit $\exists\theta \in]0,1[, f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \dfrac{h^2}{2}.f"(a+\theta.h)$ (pour f de classe C_2 sur $[a, a+h]$).
Calculez θ dans le cas $f = \exp$, puis dans le cas $f = x \longrightarrow x^3$. [3 pt.]
On revient au cas général, avec f de classe C_3. Ecrivez la formule de Taylor à l'ordre 3 entre a et $a+h$ (preuve non demandée). [1 pt.]
En comparant les deux formules, montrez $\dfrac{f"(a+\theta.h) - f"(a)}{h} = \dfrac{f^{(3)}(a+\delta.h)}{3}$ pour un δ de $]0,1[$. [1 pt.] Trouvez la limite de θ quand h tend vers 0 en supposant $f^{(3)}(a) \neq 0$. [2 pt.]

< ♠(37) > On définit $f(x) = (3^x - 2^x)^{1/\ln(x)}$. Vérifiez que f est C^∞ sur $]0,1[$. [1 pt.]
On veut prouver que $f(x)$ tend vers $27/4$ quand x tend vers 1. On pose donc $x = 1+h$. Faites un développement limité de $3^{1+h} - 2^{1+h}$ sous la forme $a + b.h + c.h^2 + o(h^2)$ quand h tend vers 0 en pensant à revenir aux exponentielles. [2 pt.] Trouvez alors la limite de f en 1. [2 pt.]

< ♠(38) > On définit : $g = x \longrightarrow \tan(x)^{\tan(2.x)}$. Montrez que la limite de g en $\pi/4$ est une forme indéterminée. Trouvez quand même la limite en $\pi/4$ de g en posant $t = \tan(x)$ et en revenant à la forme exponentielle. [3 pt.]

< ♡(71) > Donnez une primitive de $x \longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{4.x^2 - 4.x + 2}}$ sous une forme logarithmique *(ou, à l'extrême rigueur sous forme d'argument)*. [2 pt.]

MPSI 2 | Le passage de $a \leqslant b$ à $1/a \geqslant 1/b$. | **IS21**

Cette implication est correcte sur $\mathbb{R}^{+*}$ par décroissance de l'application "passage à l'inverse" *(quitte à dériver, mais quel gâchis d'énergie et de théorèmes).*
Elle est vraie aussi sur $]-\infty, 0[$.
Mais globalement, elle ne l'est pas.
Et on donne un contre-exemple à l'élève qui a besoin d'être convaincu :
$-1 \leqslant 2$ mais $\dfrac{1}{-1} \not\geqslant \dfrac{1}{2}$ *(on garde le "même ordre" :* $\dfrac{1}{-1} \leqslant \dfrac{1}{2}$*).*

Donc, en devoir, quand vous passez par exemple de $k.(k-1) \leqslant k^2$ à $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k.(k-1)}$, citez l'argument de positivité.

MPSI 2 | Egalité de $C_3(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ et $C_4(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$. | **IS21**

On a déjà $C_4(\mathbb{R}, \mathbb{Z}) \subset C_3(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ car toute application quatre fois dérivable l'est au moins troiss fois.
Oui, je sais, je mets deux s à "trois", c'est pour tous ceux qui en mettent un à quatre.

Mais l'autre sens ? Il est étrange non ?
Mais en fait, il se justifie : Les seules applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont constantes.
En effet, une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ qui ne serait pas constante prendrait au moins deux valeurs différentes p et q, disons en a et b. Mais alors, par application du théorème des valeurs intermdiaires, la valeur $\dfrac{\sqrt{2}.p + (2-\sqrt{2}).q}{2}$ *(comprise entre p et q)* devrait être atteinte au moins une fois entre a et b *(mots clefs continuité et intervalle).*
Or, cette valeur est irrationnelle et donc même pas entière, d'où contradiction.

Maintenant que l'on sait que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ est constante, on comprend qu'elle est même indéfiniment dérivable.
On a donc $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{Z}) = C_1(\mathbb{R}, \mathbb{Z}) = C_2(\mathbb{R}, \mathbb{Z}) = \ldots = C_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ *(et cet ensemble peut être mis en bijection avec $\mathbb{Z}$).* Et dans ce flot d'égalités, on a celle de $C_3(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ et $C_4(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$.

MPSI 2 | Des sommes barbares comme $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n j$. | **IS21**

L'entier n est fixé. La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} j$ est faite de n termes tous égaux à j *(le pauvre k n'est qu'un compteur).*
Elle vaut $n.j$.
On a donc : $A_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Big(n.\sum_{j=1}^{n} j\Big)$ après factorisation. On utilise sa connaissance du cours : $A_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} n.\frac{n.(n+1)}{2}$.
On termine le calcul : $A_n = \dfrac{n^3.(n+1)}{2}$.

La somme B_n est plus compliquée, puisque les sommes ne vont plus de 1 à n. La somme "la plus profonde" $\displaystyle\sum_{k=1}^{j} k$ vaut $\dfrac{j.(j+1)}{2}$. On somme pour j de 1 à i en séparant en deux sommes : celle des

demi carrés, de valeur $\dfrac{i.(i+1).(2.i+1)}{12}$ et celle des demi-entiers, de valeur $\dfrac{i.(i+1)}{4}$. Leur somme est en $\dfrac{i.(i+1).(2.i+1+3)}{12}$ et peut encore se simplifier en $\dfrac{i.(i+1).(i+2)}{6}$ (dans lequel on peut identifier $\binom{i+2}{3}$ si on a envie.
Il ne reste plus qu'à sommer de 1 à n.
On peut utiliser la formule de Zhu-Shizie et trouver $\binom{n+3}{4}$.
On peut aussi mener le calcul de trois sommes et additionner $\dfrac{n^2.(n+1)^2}{24}+\dfrac{n.(n+1).(2.n+1)}{18}+\dfrac{n.(n+1)}{4}$.
On peut aussi voir que seul le terme de plus haut degré va nous intéresser, puisque l'on cherche un équivalent en $+\infty$.
La somme des $i^3/6$ va donner un terme polynômial équivalent à $\dfrac{n^4}{24}$.
C'est ce que confirment les autres méthodes donnant la valeur exacte $\dfrac{n.(n+1).(n+2).(n+3)}{24}$.
Pour être sûr de conclure conformément à l'énoncé, on donne donc $B_n \simeq_{n\mapsto+\infty} \dfrac{n^4}{24}$.

Le produit C_n est plus simple qu'il n'en a l'air.
On ne regarde pas le signe dans un premier temps et on observe juste $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\Big(\prod_{p=-n}^{p=n} 2^p\Big)$ qu'on va juste noter c_n.
Pour chaque valeur de k, on a le produit $\displaystyle\prod_{p=-n}^{n} 2^p$, qui est fait d'entiers *(puissances positives de* 2*)* et d'inverses d'entiers *(puissances négatives de* 2*)*.
Chaque entier 2^p rencontre son inverse 2^{-p}. Et au milieu, il ne reste que 2^0. Bref, le produit vaut 1.
On ne fait que multiplier ensuite des 1 : $|C_n| = c_n = 1$.

Il ne reste plus qu'à avoir le signe, avec tous ces $(-1)^{k+p}$ et autres.
Mais là encore, dans $\displaystyle\prod_{p=-n}^{p=n}(-1)^{k+p}2^p$ chaque $(-1)^{k+p}$ rencontre "son" $(-1)^{k-p}$ et ils se simplifien en 1.
Seul survit le terme du milieu : $(-1)^k$.
On a donc : $C_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(-1)^k$. C'est donc $(-1)^{1+2+\ldots+n}$ ce qui fait $(-1)^{n.(n+1)/2}$.
Tout va donc se jouer dans la parité de cet exposant, classique nombre triangulaire.

On travaille suivant la valeur de n modulo 4, avec un tableau :

n	$4.q$	$4.q+1$	$4.q+2$	$4.q+3$
$n.(n+1)/2$	$8.q^2+2.q$	$8.q^2+6.q+1$	$8.q^2+10.q+3$	$8.q^2+14.q+6$
$n.(n+1)/2$ mod 2	0	1	1	0
C_n	1	-1	-1	1

La suite (C_n) est périodique de période 4 de motif $(1,-1,-1,1)$ qui se répète indéfiniment.

MPSI 2	Formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2.	**IS21**

On écrit donc $f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + h^2.f"(a+\theta.h)/2$ pour l'exponentielle : $e^{a+h} = e^a + h.e^a + h^2.e^{a+\theta.h}/2$. On simplifie par e^a : $e^h = 1 + h + h^2.e^{\theta.h}/2$ et on extrait $e^{\theta.h} = 2.\dfrac{e^h-1-h}{h^2}$. On termine

avec $\theta = \dfrac{\ln(e^h - 1 - h) + \ln(2) - 2.\ln(h)}{h}$.
Il était peu prévisible que cette quantité soit entre 0 et 1.
Et quand h tend vers 0, c'est une forme indéterminée de grande résistance *(il faut faire des développements d'ordre 3)*.

Pour le polynôme de la parabole cubique, on trouve plus aisément :
$a^3 + 3.a^2.h + 3.a.h^2 + h^3 = (a^3) + h.(3.a^2) + \dfrac{h^2.6.(a+\theta.h)}{2}$.
On extrait cette fois : $\theta = \dfrac{1}{3}$, ce qui est quand même plus simple.

Sans démonstration, pour f trois fois dérivable sur $[a, a+h]$:
il existe un Θ entre 0 et 1 vérifiant $f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \dfrac{h^2.f"(a)}{2} + \dfrac{h^3.f^{(3)}(a+\Theta.h)}{6}$ (on notera la différence de notation Θ puisqu'il n'y a pas de raison qu'il s'agisse du même θ).

On compare les deux formules : $\dfrac{h^2}{2}.f"(a+\theta.h) = \dfrac{h^2}{2}.f"(a) + \dfrac{h^3.f^{(3)}(a+\Theta.h)}{6}$.
On divise par $h^2/2$, non nul : $f"(a+\theta.h) - f"(a) = \dfrac{h.f^{(3)}(a+\Theta.h)}{3}$.
Il ne reste plus qu'à diviser par h pour arriver à la formule demandée.

Le "presque taux d'accroissement" $\dfrac{f"(a+\theta.h) - f"(a)}{h}$ s'écrit même $\dfrac{f"(a+\theta.h) - f"(a)}{\theta.h}.\theta$ (avec θ entre 0 et 1, dépendant de h, a et f).
Si h tend vers 0, alors par encadrement, $\theta.h$ en fait de même, et le terme $\dfrac{f"(a+\theta.h) - f"(a)}{\theta.h}$ tend vers $f^{(3)}(a)$ *(on redérive $f"$, en a)*.
De même, $f^{(3)}(a+\delta.h)$ tend vers $f^{(3)}(a)$ par encadrement et composition des limites.
En comparant les deux formules *(faire un quotient)*, il vient que θ, égal à $\dfrac{f^{(3)}(a+\delta.h)}{3.\dfrac{f"(a+\theta.h) - f"(a)}{\theta.h}}$, tend vers $\frac{1}{3}$.

Il importe ici que $f^{(3)}(a)$ soit non nul, pour ne pas obtenir une forme indéterminée du type $o(1)/o(1)$ *(comme on doit dire, en proscrivant l'absurde histoire de $0/0$ qui n'a aucun sens)*.

MPSI 2	Limite de $(3^x - 2^x)^{1/\ln(x)}$ en 1.	**IS21**

La vraie forme de 3^x, c'est $e^{x.\ln(3)}$ puisque l'exposant x n'a même pas la vertu d'être entier ou rationnel.
On a donc $e^{x.\ln(3)} - e^{x.\ln(2)}$, qui doit être élevé à une puissance non entière. Il faut en revenir aux logarithmes.
On étudie donc $x \longrightarrow e^{\dfrac{\ln(e^{x.\ln(3)} - e^{x.\ln(2)})}{\ln(x)}}$, qui existe et est de classe C^∞ par composition dès lors que l'on reste dans $]0, +\infty[$ et que $e^{x.\ln(3)} - e^{x.\ln(2)}$ est strictement positif *(toujours correct sur $]0, +\infty[$)*.

Pour la limite en 1, on pose $x = 1 + h$ et on calcule d'abord efficacement : $3^x = 3^1.3^h = 3.e^{h.\ln(3)} = 3.\Big(1 + h.\ln(3) + \dfrac{h^2.(\ln(3))^2}{2} + o(h^2)\Big)$.
De même, $2^x = 2^1.2^h = 2.e^{h.\ln(2)} = 2.\Big(1 + h.\ln(2) + \dfrac{h^2.(\ln(2))^2}{2} + o(h^2)\Big)$ quand h tend vers 0.

On soustrait : $3^{1+h}-2^{1+h}=1+h.(3.\ln(3)-2.\ln(2))+\dfrac{h^2}{2}.\big(3.(\ln(3))^2-2.(\ln(2))^2\big)+o(h^2)$.

Comme je ne suis pas enclin à trainer trop de termes, je tronque à l'ordre 1 : $3^{1+h}-2^{1+h}=1+h.\ln(3^3/2^2)+o(h)$ quand h tend vers 0 *(les calculs exacts avec les petits o, ça se fait tout seul).*

Il ne nous reste plus qu'à élever cette quantité à la puissance $1/\ln(1+h)$, en revenant à la définition par les exponentielles *(encore ! vont penser ceux qui croient qu'une indication ne sert qu'une fois)* :
$(3^{1+h}-2^{1+h})^{1/\ln(1+h)}=\exp\Big(\dfrac{\ln\big(1+h.\ln(27/4)+o(h)\big)}{\ln(1+h)}\Big)$.
Le quotient est encore une forme indéterminée vont estimer ceux qui ont oublié : $\ln(1+t)=t+o(t)$ quand t tend vers 0.
Le contenu de l'exponentielle est alors de la forme $\Big(\dfrac{h.\ln(27/4)+o(h)}{h+o(h)}\Big)$.
Alors, après simplification, on obtient un quotient de limite $\ln(27/4)$.
Par composition de limites, *exp* et ln se simplifient et il reste juste une limite qui existe *(on vient de prouver son existence par calcul)* et vaut $\dfrac{27}{4}$ comme promis.

MPSI 2	Limite avec deux tangentes.	**IS21**

Quand x tend vers $\pi/4$, le terme $\tan(x)$ tend vers 1.
Quand x tend vers $\pi/4$, le terme $\tan(2.x)$ tend vers ∞ (avec un signe qui dépend de “avant ou après”).
Or, la forme 1^∞ est la nouvelle forme indéterminée de Sup, quitte à repasser par le logarithme (pour voir alors $\exp(\infty.\ln(1))$ si j'ose écr*ire, et je n'ose pas).*
On revient à la forme exponentielle : $e^{\tan(2.x).\ln(\tan(x))}$.
Comme proposé, on change de variable et on a $\exp\Big(\dfrac{2.t}{1-t^2}.\ln(t)$ avec t qui tend vers 1. Quitte à séparer en $\dfrac{2.t}{1+t}.\dfrac{\ln(t)}{(1-t)}$.
Quand t tend vers 1, c'est le retour d'un taux d'accroissement : $\dfrac{\ln(t)-\ln(1)}{t-1}$ tend vers 1.
Quant à $\dfrac{2.t}{1+t}$, il tend vers 1 sans aucune indétermination.
Le contenu de l'exponentielle tend vers -1 (surveillez les signes de ce qu'on a factorisé).
Par continuité de celle ci, la limite cherchée vaut e^{-1}, appelé aussi $1/e$.

MPSI 2	Primitive de $x\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{4.x^2-4.x+2}}$.	**IS21**

Le trinôme du second degré ne s'annule jamais ni ne change de signe. L'application est continue sur $\mathbb{R}$ et admet des primitives.
Si on l'écrit sous forme canonique, c'est $x\longrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{(2.x-1)^2+1}}$.
La forme en $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ rappelle la famille des Arc et Arg. Ici, le domaine est $\mathbb{R}$, c'est donc celle définie sur $\mathbb{R}$ qui doit intervenir : *Argsh*.
Et on rappelle pour la cohérence du programme : $Argsh(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.
La réponse finale est donc : $x\longrightarrow\dfrac{\ln(2.x-1+\sqrt{4.x^2-4.x+2})}{2}$ (on n'oublie pas le 1/2 et si on y tient, on écrit même $\ln\Big(\sqrt{2.x-1+\sqrt{4.x^2-4.x+2}}\Big)$, histoire que ça ne serve à rien.

$<\heartsuit(72)>$ Donnez le développement limité de $x \longrightarrow \ln(1+e^x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3, en utilisant la formule de Taylor-Young. 3 pt.

$<\diamondsuit(81)>$ Soit f quatre fois dérivable sur $[a, a+h]$.

On définit : $\varphi := t \longrightarrow f(a+t.h)+(1-t).h.f'(a+t.h)+\dfrac{(1-t)^2.h^2.f"(a+t.h)}{2}+\dfrac{(1-t)^3.h^3.f^{(3)}(a+t.h)}{6}$.

Calculez $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$. Déterminez φ'. Quel résultat retrouvez vous alors en une ligne ? 4 pt.

$<\spadesuit(39)>$ Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui même, muni de la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On suppose $Vect(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k}) = Ker(f-Id)$ et $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+2.y-z\} = Ker(f-3.Id)$.
Montrez alors $Ker(f-3.Id) \oplus Ker(f-Id) = \mathbb{R}^3$. Calculez $f(\overrightarrow{i})$ et $f(\overrightarrow{j})$. 5 pt.

$<\diamondsuit(82)>$ Soit f une application de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f(1)=1$ et $f'(1)=0$ (qui modélise une course, départ et arrivée à vitesse nulle).
Exprimez $f(1/2)$ à l'aide d'une formule de Taylor Lagrange entre 0 et 1/2. Exprimez $f(1/2)$ à l'aide d'une formule de Taylor Lagrange entre 1 et 1/2.
Déduisez en distinguant les deux cas possibles : $f(1/2) \leqslant 1/2$ et $f(1/2) \geqslant 1/2$: $\exists\, a \in [0,\ 1],\ |f"(a)| \geqslant 4$ (au moins une fois l'accélération a été au moins de 4). 4 pt.

$<\spadesuit(40)>$ Ajustez a et b pour que $x \longrightarrow \begin{cases} e^x.\ln(x).(a.x+b) & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ \ln(x)/x & \text{si } 1 < x \end{cases}$ soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$ tout entier. 4 pt.

$<\clubsuit(24)>$ On prend une matrice A de taille n sur n dont le terme général (ligne i colonne k) est nul pour $i+k$ strictement plus grand que $n+1$, et du signe de $(-1)^{i+k}$ sinon.
Quel est le signe du déterminant de A pour n de 1 à 6 ? 3 pt. Si vous avez du temps, une formule générale en taille n ?

$<\heartsuit(73)>$ Trouvez une équation différentielle linéaire d'ordre 3 dont les solutions sont les applications de la forme $t \longrightarrow a.e^t + b.e^t.\cos(t) + c.e^t.\sin(t) + \cos(2.t)$ avec a, b et c dépendant des conditions initiales. 3 pt.

$<\heartsuit(74)>$ Rappelez la formule du double produit vectoriel. 1 pt.

$<\diamondsuit(83)>$ Donnez le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel $x \longrightarrow \displaystyle\int_0^x \cos(t^2).e^t.dt$ soit un difféomorphisme. 2 pt.

$IS22$	CHARLEMAGNE — Correction — ANNEE **2012/13**	$IS22$

MPSI 2	Développement limité de $x \longrightarrow \ln(1+e^x)$.	**IS22**

Cette application est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et admet donc un développement limité en tout point à n'importe quel ordre. On a juste besoin de dériver trois fois :

n	0	1	2	3
$f^{(n)}(x)$	$\ln(1+e^x)$	$\dfrac{e^x}{1+e^x}$	$\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$	$\dfrac{e^x-e^{2.x}}{(1+e^x)^3}$
$f^{(n)}(0)$	$\ln(2)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	0
$f^{(n)}(0)/n!$	$\ln(2)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{8}$	0

On déduit le développement limité : $\boxed{f(0+h) = \ln(2) + \dfrac{h}{2} + \dfrac{h^2}{8} + 0.h^3 + o(h^3)}$ quand h tend vers 0.

MPSI 2	La formule de Taylor avec φ bien choisie.	**IS22**

L'application $\varphi := t \longrightarrow f(a+t.h)+(1-t).h.f'(a+t.h)+\dfrac{(1-t)^2.h^2.f"(a+t.h)}{2}+\dfrac{(1-t)^3.h^3.f^{(3)}(a+t.h)}{6}$ est définie, puisque tout se passe entre a et $a+h$. La valeur en 1 est $f(a+h)$ et la valeur en 0 est $f(a)+h.f'(a)+\dfrac{h^2.f"(a)}{2}+\dfrac{h^3.f^{(3)}(a)}{6}$. Quand on dérive φ on a beaucoup de termes :

$f(a+t.h)$	$(1-t).h.f'(a+t.h)$	$(1-t)^2.h^2.f"(a+t.h)/2$	$(1-t)^3.h^3.f^{(3)}(a+t.h)/6$
	$-h.f'(a+t.h)$	$-(1-t).h^2.f"(a+t.h)$	$-(1-t)^2.h^3.f^{(3)}(a+t.h)/2$
$h.f'(a+t.h)$	$(1-t).h^2.f"(a+t.h)$	$(1-t)^2.h^3.f^{(3)}(a+t.h)$	$(1-t)^3.h^4.f^{(4)}(a+t.h)/6$

Presque tout se simplifie et il reste juste $\boxed{\varphi' = t \longrightarrow \dfrac{h^4}{3!}.(1-t)^3.f^{(4)}(a+t.h)}$

On écrit alors juste : $\varphi(1)-\varphi(0) = \displaystyle\int_{t=0}^{t=1} \varphi'(t).dt$ et on a la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 4.

MPSI 2	L'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par deux noyaux.	**IS22**

On nous donne finalement deux sous-espaces vectoriels. Le premier est de dimension 1 et a pour base $(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k})$ et le second a pour base $(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k})$ (écrire $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x+2.y \end{pmatrix} = x.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$).

On calcule le déterminant de cette famille relativement à la base canonique : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$. Il est non nul. Cette famille est une base. Tout vecteur se décompose d'une façon unique sous la forme $\Big(\ldots(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k})\Big) + \Big(\ldots(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}) + \ldots(\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k})\Big)$. Le contenu de la première parenthèse est dans $Ker(f-Id)$ et le contenu de la seconde dans $Ker(f-3.Id)$. Et la décomposition est unique. On a en une fois la somme directe.

Sinon, en cadeau, une jolie démonstration du fait que $Ker(f-Id) \cap Ker(f-3.Id)$ ne contient que le vecteur nul : un vecteur $\overrightarrow{u}$ dans cette intersection vérifierait $f(\overrightarrow{u})-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $f(\overrightarrow{u})-3.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, donc par soustraction $2.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Tant qu'on y est, on inverse la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On lit alors sur la première colonne :
$\overrightarrow{i} = \Big(1.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k})\Big) + \Big(0.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}) - 1.(\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k})\Big)$ et on applique f (linéaire) :
$f(\overrightarrow{i}) = f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k}) - f.(\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k}) = (\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k}) - 3.(\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k})$.
En effet, les vecteurs de la droite $Ker(f-Id)$ vérifient $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ et ceux du plan $Ker(f-3.Id)$ vérifient $f(\overrightarrow{u}) = 3.\overrightarrow{u}$.

On fait de même avec la deuxième colonne : $\overrightarrow{j} = \Big(2.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k})\Big) + \Big(-2.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}) - 1.(\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k})\Big)$ puis
$f(\overrightarrow{j}) = 2.f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k}) - 2.f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}) - f(\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k}) = 2.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k}) - 6.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}) - 3.(\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k})$
On résume : $\boxed{f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j} - 3.\overrightarrow{k} \text{ et } f(\overrightarrow{j}) = -4.\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 8.\overrightarrow{k}}$ à de pardonnables erreurs de calculs près.

MPSI 2	Une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et sa dérivée seconde.	**IS22**

On peut écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 (f est de classe D^2) entre 0 et 1/2 (vraie égalité) :

- $f(1/2) = f(0) + \dfrac{1}{2}.f'(0) + \dfrac{(1/2)^2}{2}.f"(0+t/2) = \dfrac{f"(t/2)}{8}$ pour au moins un t de $]0,1[$
- $f(1/2) = f(1) + \Big(-\dfrac{1}{2}\Big).f'(0) + \dfrac{(-1/2)^2}{2}.f"(1+\theta/2) = 1 + \dfrac{f"(1+\theta/2)}{8}$ pour au moins un θ de $]0,1[$

On étudie comme promis deux cas :

$f(1/2) \geqslant 1/2$	$f"(t/2)/8 \geqslant 1/2$	$a = t/2$
$f(1/2) \leqslant 1/2$	$1 + f"(1+\theta/2)/8 \leqslant 1/2$	$a = 1-\theta/2$

pour la première ligne : $f"(a) \geqslant 4$ et pour la seconde : $f"(a) \leqslant -4$.

MPSI 2	L'application $x \longrightarrow \begin{cases} e^x.\ln(x).(a.x+b) & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ \ln(x)/x & \text{si } 1 < x \end{cases}$.	**IS22**

Cette application est définie sans problème sur tout $]0,+\infty[$. Elle est de classe C^∞ partout... sauf en 1. Cependant, elle se raccorde continuement en 1 (même limite nulle des deux côtés).
Il faut encore raccorder les dérivées première et seconde. On dérive donc les deux formules deux fois et on calcule leurs valeurs en 1 :

$x \leq 1$	$f'(x) = e^x.\ln(x).(a.x+b+a) + \dfrac{e^x.(a.x+b)}{x}$	$e.(a+b)$
$x > 1$	$f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$	1

et aussi

$x \leq 1$	$f"(x) = e^x.\ln(x).(a.x+b+2.a) + \dfrac{e^x.(2.a.x^2+(a+2.b).x-b)}{x^2}$	$e.(3.a+b)$
$x > 1$	$f"(x) = \dfrac{2.\ln(x)-3}{x^3}$	-3

On aboutit à un système de deux équations à deux inconnues. Les solutions sont $\boxed{a = -\dfrac{2}{e} \text{ et } b = \dfrac{3}{e}}$

Au fait, on pouvait trouver les deux dérivées en effectuant des développements limités :
$f(1-h) = e^{1-h}.\ln(1-h).(b+a-a.h) = e.\Big(1-h-\dfrac{h^2}{2}\Big).\Big(-h-\dfrac{h^2}{2}\Big).(a+b-a.h) + o(h^2) = \dots$
$f(1+h) = \dfrac{\ln(1+h)}{1+h} = \Big(h - \dfrac{h^2}{2} + o(h^2)\Big).\Big(1-h+h^2+o(h^2)\Big) = h - \dfrac{3.h^2}{2} + o(h^2)$
Il ne reste qu'à identifier les termes en h et en h^2.

MPSI 2	Le signe d'un déterminant.	**IS22**

Comment interpréter la condition $a_i^k = 0$ pour $i+k > n+1$? Les termes "sous la diagonale montante" sont nuls. La diagonale est celle qui va de a_1^n à a_n^1. La matrice est en quelque sorte "triangulaire". Son déterminant est le produit des termes "antidiagonaux", à un signe près.
Il faut encore connaître le signe de ces termes. Et ce signe, c'est le même que celui de la pondération des cofacteurs...
Quand on va donc développer par rapport à la dernière ligne, on n'aura qu'un terme, et son coefficient sera positif. Pour mieux saisir :

$|+|$ puis $\begin{vmatrix} + & - \\ - & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & 0 \\ + & 0 & 0 \end{vmatrix}$, puis $\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & 0 \\ + & - & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & 0 \\ + & - & + & 0 & 0 \\ - & + & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ et enfin $\begin{vmatrix} + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & 0 \\ + & - & + & - & 0 & 0 \\ - & + & - & 0 & 0 & 0 \\ + & - & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

On dresse le bilan :

1	2	3	4	5	6
$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$

Tient on la règle générale ? On note s_n le signe (1 *ou* -1) d'une matrice du type indiqué en taille n. On la tranforme déjà en matrice vraiment qualifiée de triangulaire, c'est à dire par rapport à la "vraie diagonale", celle des a_i^i. Il faut $[n/2]$ échanges de colonnes *(plus précisément : $n/2$ échanges du type $C_k <-> C_{n+1-k}$ si n pair et $(n-1)/2$ échanges du même type si n impair).* Ensuite, on a une diagonale de n termes, tous du même signe. Ce signe : $+$ si n est impair et $-$ si n est pair. Mais justement, c'est bien fait. Si n est impair, ce produit diagonal est positif. Et si n est pair, on a un nombre pair de signes moins, d'où un signe $+$.

Le déterminant dépend donc uniquement du nombre d'échanges de colonnes : $\boxed{(-1)^{[n/2]}}$

MPSI 2	Une équation différentielle dont on a les solutions.	**IS22**

L'espace affine des solutions est fait de la solution particulière $t \longrightarrow \cos(2.t)$ et de l'espace vectoriel $Vect\Big(t \longrightarrow e^t, t \longrightarrow e^t.\cos(t), t \longrightarrow e^t.\sin(t)\Big)$.
On reconnaît les solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont le spectre serait $[1, 1+i, 1-i]$.
C'est donc que l'équation caractéristique en est $(\lambda-1).(\lambda-1+i).(\lambda-1-i) = 0$.
On simplifie en $(\lambda-1).(\lambda^2-2.\lambda+2) = 0$ soit encore $\lambda^3 - 3.\lambda^2 + 4.\lambda - 2 = 0$.
On remonte de l'équation caractéristique à l'équations différentielle linéaire $y^{(3)} - 3.y" + 4.y' - 2.y = 0$.
Et pour tenir compte de la solution particulière, on la porte dans l'équation linéaire et elle nous livre le second membre : $\boxed{y_t^{(3)} - 3.y"_t + 4.y'_t - 2.y_t = 10.\cos(2.t)}$

MPSI 2	Un difféomorphisme avec $x \longrightarrow \int_0^x \cos(t^2).e^t.dt$.	**IS22**

De prime abord, la question est peut être délicate.
Il faudrait calculer cette application, et demander à ce qu'elle soit strictement croissante, dérivable, bijective, à réciproque aussi dérivable.
Mais en fait, il est inutile de chercher à la calculer (ce qui d'ailleurs ne se fait pas). Mais on sait qu'elle est dérivable (donc continue), de dérivée $x \longrightarrow e^x.\cos(x^2)$. Cette dérivée est positive en 0 et elle le reste tant que le cosinus est positif.
Le changement de signe de la dérivée de cette application se fait en $\sqrt{\pi/2}$ et $-\sqrt{\pi/2}$. En ces points, la bijectivité se perd, ainsi que la dérivabilité de la réciproque.
On peut donc donner l'intervalle $\boxed{]-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}[}$ qui est le plus grand possible. Et on le prend ouvert, pour que la réciproque soit dérivable.
On notera qu'on ne connaît guère que la dérivée de l'application, mais pas l'application, encore moins sa réciproque, et encore moins la dérivée de sa réciproque.

CHARLEMAGNE **EXERCICES** 2012/13 $I.S.23$

$<\heartsuit(75)>$ Développement limité d'ordre 3 en 4 de $x \longrightarrow \sqrt{7+\sqrt{x}}$, allure locale du graphe (tangente, position par rapport à celle ci). 3 pt.

$<\diamondsuit(84)>$ Déterminez les limites suivantes en 0 (par valeur supérieure) : $x \longrightarrow x^{\sqrt{x}}$, $x \longrightarrow \sqrt{x}^x$. 2 pt.

$<\diamondsuit(85)>$ En quels points de $[-2.\pi, 2.\pi]\times[-2.\pi, 2.\pi]$ le plan tangent au graphe de la nappe paramétrée $z = \cos(x).\sin(y)$ est il horizontal ? 3 pt.

$<\diamondsuit(86)>$ Donnez le développement limité en $\pi/2$ de $\sin(\cos(x))$ à l'ordre 5 et tracez localement le graphe. 3 pt.

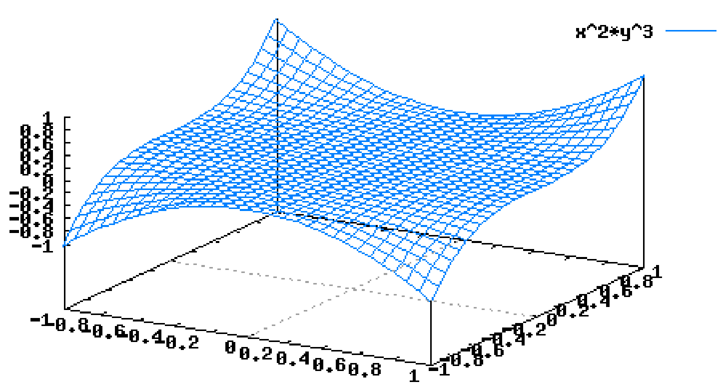
$<\diamondsuit(87)>$ En quel point du graphe de $t \longrightarrow (\cos(t), \sin(t), t^2)$ la (tangente à la) courbe fait elle un angle $\pi/4$ avec l'horizontale ? 3 pt.

$<\diamondsuit(88)>$ Où sont les points d'inflexion de la courbe paramétrée $M_t(t+\sin(t), t+\cos(t))$. 3 pt.

$<\spadesuit(41)>$ Calculez $\left(x \longrightarrow \int_{y=1}^{y=2} x^y.dy\right)'$ sur $]1, +\infty[$. 3 pt.

$<\clubsuit(25)>$ Complétez la matrice $\begin{pmatrix} 2 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$ pour qu'elle soit solution de $M^2 = M$. Diagonalisez la alors, puis élevez la à la puissance 2013. 3 pt.

$<\diamondsuit(89)>$ De quelle fonction est ce le graphe sur $[-1,1]\times[-1,1]$?



x^2+y^3, $x^2\times y^3$, x^3+y^3, $x^3\times y^3$, $e^{x^2}.e^y$. Justifiez votre réponse. 2 pt.

MPSI 2 | Développement limité de $x \longrightarrow \sqrt{7+\sqrt{x}}$ en 4. | **I.S.23**

Il n'y a pas de problème d'existence de la fonction ni même de caractère C^∞ au voisinage du point 4. On a donc l'existence du développement assuré par la formule de Taylor-Young. Mais le calcul va se faire de manière judicieuse en utilisant le développement de la racine carrée. En quel point ? Empressons nous de poser $x = 4+h$.

On a alors déjà : $\sqrt{x} = \sqrt{4+h} = 2.\left(1+\dfrac{h}{4}\right)^{1/2} = 2.\left(1+\dfrac{h}{8}-\dfrac{h^2}{128}+\dfrac{h^3}{1024}+o(h^3)\right)$ quand h tend vers 0 (en utilisant $(1+u)^{1/2} = 1+\dfrac{1}{2}.\dfrac{u}{1}+\left(\dfrac{1}{2}.\dfrac{-1}{2}\right).\dfrac{u^2}{2}+\left(\dfrac{1}{2}.\dfrac{-1}{2}.\dfrac{-3}{2}\right).\dfrac{u^3}{6}+o(u^3)$).

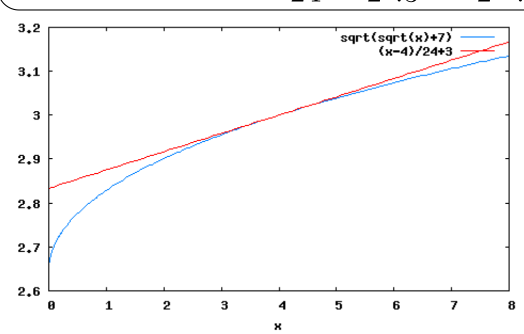
On remplace : $7+\sqrt{4+h} = 9+\dfrac{h}{4}-\dfrac{h^2}{64}+\dfrac{h^3}{512}+o(h^3)$ quand h tend vers 0.

On factorise par 9 et on pose : $u = \dfrac{\dfrac{h}{4}-\dfrac{h^2}{64}+\dfrac{h^3}{512}+o(h^3)}{9}$ qui tend vers 0 quand h tend vers 0.

On utilise encore $(1+u)^{1/2} = 1+\dfrac{1}{2}.\dfrac{u}{1}+\left(\dfrac{1}{2}.\dfrac{-1}{2}\right).\dfrac{u^2}{2}+\left(\dfrac{1}{2}.\dfrac{-1}{2}.\dfrac{-3}{2}\right).\dfrac{u^3}{6}+o(u^3)$ avec cette fois $u^2 = \dfrac{\dfrac{h^2}{16}-\dfrac{h^3}{128}+o(h^3)}{9}$ et $u^3 = \dfrac{\dfrac{h^3}{64}+o(h^3)}{729}$.

Si ensuite on ne trouve pas l'exercice mille fois plus stérile qu'un calcul final dans un devoir de chimie *(car au moins en physique ou chimie, le résultat même approximatif peut et doit s'interpréter)*, on effectue la combinaison définitive et on trouve

$\boxed{\sqrt{7+\sqrt{4+h}} = 3+\dfrac{h}{24}-\dfrac{5.h^2}{2^6.3^3}+\dfrac{91.h^3}{2^{10}.3^5}+o(h^3)}$ quand h tend vers 0.



Et surtout, on ne revient pas à la variable x, ici égale à $4+h$.

MPSI 2 | Limites de $x^{\sqrt{x}}$ et $\sqrt{x}^x$. | **I.S.23**

Ces fonctions ne sont définies que sur $]0,\ +\infty[$, et on peut donc regarder leur limite en 0 par valeur supérieure.

On reformule : $x^{\sqrt{x}} = \exp(\sqrt{x}.\ln(x)) = \exp(2.\sqrt{x}.\ln(\sqrt{x}))$. Quitte à changer de variable, on est face à la limite de $t.\ln(t)$ en 0, et elle vaut 0.

Par composition avec l'exponentielle *(continue en 0)*, la limite de $x^{\sqrt{x}}$ vaut 1.

On reformule aussi : $\sqrt{x}^x = \exp(x.\ln(\sqrt{x})) = \exp\left(\dfrac{x.\ln(x)}{2}\right)$ et la limite vaut aussi 0.

MPSI 2 | Plan tangent à $z = \cos(x).\sin(y)$. | **I.S.23**

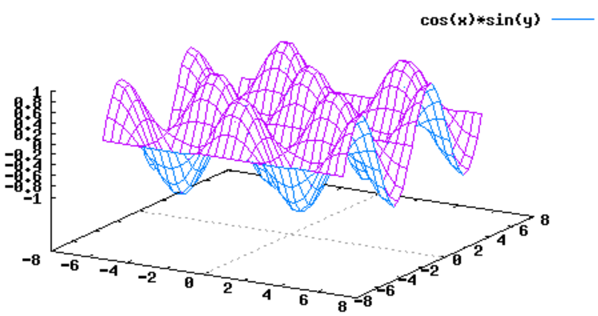
Cette nappe est de classe C^∞. On la dérive, avec les notations de Monge : $p(x,y) = -\sin(x).\sin(y)$ et $q(x,y) = \cos(x).\cos(y)$.
Pour que le plan tangent *(d'équation $z = p(a,b).(x-a)+q(a,b).(y-b)$)* soit horizontal il faut et il suffit que $p(a,b)$ et $q(a,b)$ soient tous deux nuls. Par intégrité de la multiplication réelle, on a quatre possibilités

$\sin(a) = \cos(a) = 0$	$\sin(a) = \cos(b) = 0$
$\sin(b) = \cos(a) = 0$	$\sin(b) = \cos(b) = 0$

On élimine les deux possibilités de la diagonale car on ne peut annuler simultanément deux nombres dont la somme des carrés vaut 1.
Il nous reste deux cas symétriques :

- a décrit $\{-2.\pi, -\pi, 0, \pi, 2.\pi\}$ et b décrit $\{-\frac{3.\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3.\pi}{2}\}$ (total : 20 points)
- a décrit $\{-\frac{3.\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3.\pi}{2}\}$et b décrit $\{-2.\pi, -\pi, 0, \pi, 2.\pi\}$ *(total : 20 points)*

On place donc quarante points dans le plan.

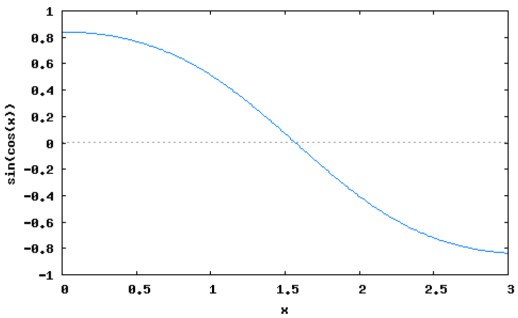


Certains correspondant à des maximums, d'autres à des minimums, d'autres à des points dans le plan $z = 0$ où le plan tangent est quand même horizontal.

MPSI 2 | Développement limité en $\pi/2$ de $\sin(\cos(x))$ à l'ordre 5. | **I.S.23**

Pas de problème d'existence par le caractère C^∞. On ne dérive pas cinq fois... On écrit $x = \frac{\pi}{2} + h$ avec h qui tend vers 0. On remplace $\cos(h + \pi/2)$ par $-\sin(h)$ puis par $h - \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120} + o(h^5)$.
On reporte dans le sinus en 0 : $\sin(-u) = -u + \frac{u^3}{6} - \frac{u^5}{120} + o(u^5)$ avec $u = h - \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120} + o(h^5)$, $u^3 = h^3 - 3.h^2\frac{h^3}{6} + o(h^5)$ et $u^5 = h^5 + o(h^5)$.

On combine et il reste $\boxed{\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\right) = -h+\frac{h^3}{3}-\frac{h^5}{10}+o(h^5)}$ quand h tend vers 0.



La fonction est nulle, sa tangente est la deuxième bissectrice, on a un point d'inflexion.

MPSI 2 | L'"hélice" $(\cos(t), \sin(t), t^2)$. | **I.S.23**

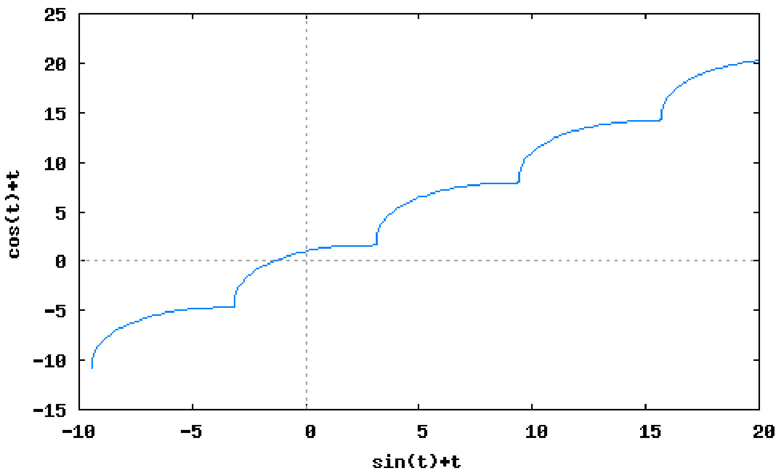
C'est effectivement une sorte d'hélice qui tourne par $(\cos(t), \sin(t))$ et grimpe de plus en plus vite avec sa cote $z_t = t^2$.
On détermine le vecteur tangent : $(-\sin(t), \cos(t), 2.t)$. On veut qu'il fasse un angle $\pi/4$ avec le plan horizontal *(c'est comme ça qu'on interprète l'angle entre le graphe et le plan, en confondant localement le graphe et sa tangente)*.
Ceci revint à demander que l'angle entre ce vecteur tangent et le vecteur vertical $\overrightarrow{k}$ *(orthogonal au plan horizontal) soit égal à* $\pi/4$).
Le produit scalaire de ces deux vecteurs est $2.t$ et le produit des normes est $\sqrt{1+4.t^2}.1$. On exige donc : $2.t = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+4.t^2}$ et on trouve assez naturellement : $t = 1/2$ ou $t = -1/2$ (que l'on pouvait demander dès le début en décomposant $\overrightarrow{V} = (\cos(t).\overrightarrow{j} - \sin(t).\overrightarrow{i}) + 2.t.\overrightarrow{k})$.
On trouve les deux points : $(\cos(1/2), \sin(1/2), 1/4)$ et $(\cos(1/2), -\sin(1/2), -1/4)$.

MPSI 2 | L'arc paramétré $(t + \sin(t), t + \cos(t))$ et ses points d'inflexion. | **I.S.23**

On a un arc de classe C^∞. On détermine le vecteur vitesse, le vecteur accélération : $\overrightarrow{V_t} = \begin{pmatrix} 1+\cos(t) \\ 1-\sin(t) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{a_t} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$. On demande qu'ils soient colinéaires, afin d'avoir (à peu près surement) des points d'inflexion.
On demande la nullité de leur déterminant $\begin{vmatrix} 1+c & -s \\ 1-s & -c \end{vmatrix}$, qui vaut $-c-c^2+s-s^2$. On démande donc : $s - c = 1$.
Comment résoudre ? Facile : $\sin(t) - \cos(t) = \sqrt{2}.\sin(t-\pi/4)$ *(en développant le second membre)*. On demande donc : $\sqrt{2}.\sin(t-\pi/4) = 1$ c'est à dire $\sin(t-\pi/4) = \sin(\pi/4)$.
On trouve deux familles de solutions :
• $\exists\ k \in \mathbb{Z},\ t = \frac{\pi}{2} + 2.k.\pi$ et • $\exists\ k \in \mathbb{Z},\ t = \pi + 2.k.\pi$
(facile à vérifier).
On vérifie qu'en ces points, l'annulation du déterminant n'est pas due à l'annulation de la vitesse.
On vérifie qu'en ces points, la dérivée suivante $\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à la vitesse et l'accélération.

On place ensuite ces différents points dans le plan :

$(\pi + 2.k.\pi, \pi - 1 + 2.k.\pi)$ et $\left(\frac{\pi}{2} + 1 + 2.k.\pi, \frac{\pi}{2} + 2.k.\pi\right)$
avec k décrivant $\mathbb{Z}$



MPSI 2	Calcul de $(x \longrightarrow \int_{y=1}^{y=2} x^y.dy)'$.	I.S.23

On va commencer par calculer, à x fixé chaque intégrale $\displaystyle\int_{y=1}^{y=2} x^y.dy$. Il faut l'écrire $\displaystyle\int_{y=1}^{y=2} e^{y.\ln(x)}.dy$.

On intègre cette exponentielle : $\left[\frac{1}{\ln(x)}e^{y.\ln(x)}\right]_{y=1}^{y=2}$ et on trouve $\dfrac{x^2}{\ln(x)} - \dfrac{x}{\ln(x)}$.

Il ne reste plus qu'à dériver par rapport à x : $\dfrac{2.x}{\ln(x)} - \dfrac{x^2}{x.(\ln(x))^2} - \dfrac{1}{\ln(x)} + \dfrac{x}{x.(\ln(x))^2}$.

On simplifie de son mieux : $\boxed{\dfrac{(2.x-1).\ln(x)+1-x}{(\ln(x))^2}}$

MPSI 2	La matrice $\begin{pmatrix} 2 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$.	I.S.23

On nomme a et b les deux coefficiens qui manquent. On effectue le produit $M.M$ et on l'égalise à M. Les quatre équations se simplifient et n'en donnent plus que deux. L'unique matrice solution est alors $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est $X^2 - X$ de racines 0 et 1.

On prend alors $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On trouve aisément $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

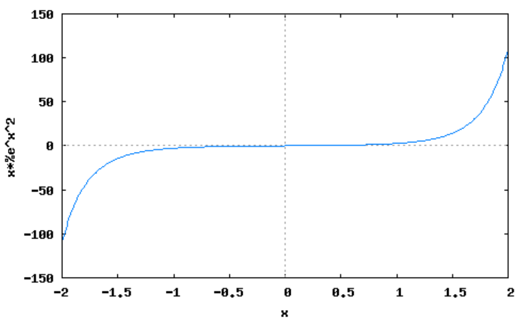
Sans effort, par récurrence directe à partir de $M^2 = M$, on a $M^n = M$ pour tout n à partir de $n = 1$. On a donc : $M^{2013} = M$ et c'est tout. Même *(et surtout)* sans diagonaliser...

$<\heartsuit(76)>$ Montrer que le maximum de deux applications convexes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est encore une application convexe. 2 pt.

$<\diamondsuit(90)>$ Pour quelles valeurs du réels a l'application $x \longrightarrow \sin(a+\ln(x))$ est elle convexe de $[1,2]$ dans $\mathbb{R}$? 5 pt.

$<\spadesuit(42)>$ On définit la suite u par $n.u_n = \sqrt[n]{\dfrac{(2.n)!}{n!}}$. Montrez que pour tout n, $\ln(u_n)$ est la somme de Riemann sur un segment à préciser de l'application logarithme. 2 pt. Déduisez la valeur de la limite de u_n quand n tend vers l'infini. 2 pt.

$<\spadesuit(43)>$ On définit : $f := x \longrightarrow x.e^{(x^2)}$. Montrez que f est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. 2 pt.
Donnez le développement limité d'ordre $2.n$ de f en 0. 2 pt.



Donnez le développement limité de f d'ordre 4 en 1, l'allure locale du graphe en 1 et calculez $f^{(4)}(1)$. 4 pt.
Montrez que le développement limité d'ordre 6 de f^{-1} en 0 est de la forme $f^{-1}(h) = h+\alpha.h^3+\beta.h^5+o(h^6)$ puis calculez α et β. 3 pt.

$<\diamondsuit(91)>$ Pour quelles valeurs du réel a la suite $\left(\dfrac{n.\ln(n+2)-2.(n+1).\ln(n+1)+(n+2).\ln(n)}{n^a}\right)$ admet elle une limite non nulle en $+\infty$. 3 pt. Conseil : écrivez $\ln(n+1) = \ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

$<\diamondsuit(92)>$ Décomposez en éléments simples $\dfrac{X+3}{(X+1).(X+2).(X+4)}$. 2 pt.

Calculez la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k+3}{(k+1).(k+2).(k+4)}$ puis sa limite lorsque n tend vers l'infini. 3 pt.

$<\diamondsuit(93)>$ On définit : $A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculez A^2 et A^3. 1 pt. Calculez A^{100} (ne pas achever les calculs ni le correcteur). 3 pt.

MPSI 2 | Maximum de deux applications convexes. | **I.S.24**

On prend f et g convexes, et on note φ leur maximum (défini point par point). On traduit les hypothèses :
•$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0,1], f((1-t).x+t.y) \leqslant (1-t).f(x)+t.f(y)$
•$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0,1], g((1-t).x+t.y) \leqslant (1-t).g(x)+t.g(y)$
On majore $f(x)$ et $g(x)$ par $\varphi(x)$ et on tient compte de la positivité de $(1-t)$. On majore $f(y)$ et $g(y)$ par $\varphi(y)$ et on tient compte de la positivité de t :
•$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0,1], f((1-t).x+t.y) \leqslant (1-t).f(x)+t.f(y) \leqslant (1-t).\varphi(x)+t.\varphi(y)$
•$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0,1], g((1-t).x+t.y) \leqslant (1-t).g(x)+t.g(y) \leqslant (1-t).\varphi(x)+t.\varphi(y)$
Le réel $(1-t).\varphi(x)+t.\varphi(y)$ majore à la fois $f((1-t).x+t.y)$ et $g((1-t).x+t.y)$. Il majore leur maximum $\varphi((1-t).x+t.y)$. Et c'est la majoration attendue.

MPSI 2 | La suite ($\sqrt[n]{\frac{(2.n)!}{n!}}/n$. | **I.S.24**

Déjà, tous les termes de la suite existent, et sont strictement positifs. On peut calculer le logarithme de u_n pour n fixé, après avoir fait passer le n de l'autre côté. On utilise ensuite la propriété du logarithme qui transforme les exposants en multiplicateurs : $\ln(u_n) = \dfrac{\ln((2.n)!/n!)}{n} - \ln(n)$.

On voit dans le quotient $\dfrac{(2.n)!}{n!}$ un produit de n termes : $\dfrac{(2.n)!}{n!} = \displaystyle\prod_{p=n+1}^{n} p = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$.

Par passage au logarithme, on commence à voir la somme pas encore de Riemann : $\ln(u_n) = \dfrac{1}{n}.\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k)\Big) - \ln(n)$. On transforme $\ln(n)$ en $\dfrac{n.\ln(n)}{n}$ qu'on distribue dans la somme :

$\ln(u_n) = \dfrac{1}{n}.\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) - \ln(n)\Big)$ sit $\boxed{\ln(u_n) == \dfrac{1}{n}.\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)}$

On identifie la somme de Riemann droite du logarithme sur $[1,2]$.

Par continuité du logarithme, la somme de Riemann tend vers $\displaystyle\int_{t=1}^{t=2} \ln(t).dt$ qu'on intègre en $2.\ln(2)-1$.

Par continuité de l'exponentielle, $\exp(\ln(u_n))$ tend vers $e^{\ln(4)-1}$. On déduit que u_n tend vers $\boxed{\dfrac{4}{e}}$ quand n tend vers l'infini.

MPSI 2 | La somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{k+3}{(k+1).(k+2).(k+4)}$. | **I.S.24**

On commence par la décomposition en éléments simples, valable sur $]-\infty,-4[$ ou $]-4,-2[$ ou $]-2,-1[$ ou $]-1,+\infty[$:

$$\boxed{\frac{X+3}{(X+1).(X+2).(X+4)} = \frac{2/3}{X+1} + \frac{-1/2}{X+2} + \frac{-1/6}{X+4}}$$

On détermine les coefficients par la méthode des pôles *(conditon nécessaire)* et on les vérifie par réduction au dénominateur commun *(condition suffisante)*. Il n'y a pas de constante ou de polynôme à ajouter *(comportement à l'infini)*.

On somme alors et on sépare par linéarité :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k+3}{(k+1).(k+2).(k+4)} = \frac{2}{3}.\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}.\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{6}.\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+4}.$
On réindexe pour pouvoir les fusionner :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k+3}{(k+1).(k+2).(k+4)} = \frac{2}{3}.\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p} - \frac{1}{2}.\sum_{p=2}^{n+2} \frac{1}{p} - \frac{1}{6}.\sum_{p=4}^{n+4} \frac{1}{p}.$
La somme $\displaystyle\sum_{p=4}^{n+1} \frac{1}{p}$ est affectuée du coefficient $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$. Elle disparaît.
Il ne reste que $\frac{2}{3}.\Big(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big) - \frac{1}{2}.\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n+2}\Big) - \frac{1}{6}.\Big(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4}\Big).$
On effectue en $\boxed{\dfrac{29}{36} - \dfrac{6.n^2 + 39.n + 62}{6.(n+2).(n+3).(n+4)}}$ si il le faut vraiment. Sinon, la fraction avec ses $1/(n+1)$ et autres pouvait être gardée sous forme développée.

D'ailleurs c'est sous la forme développée qu'on voit facilement la limite. Il ne reste que le réel : $\boxed{\dfrac{29}{36}}$

MPSI 2	La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.	**I.S.24**

On calcule les premières puissances *(formats compatibles)* :
$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -5 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 22 & 0 & -14 \\ 0 & -1 & 0 \\ 9 & 0 & -13 \end{pmatrix}}$

On conjecture vite une forme en $A^2 = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}$, qui se démontre par récurrence sur n.
Ensuite, on voit qu'on travaille juste sur les quatre coefficients des coins, et une petite matrice de taille 2 : $M \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$.
On détermine sa trace, son déterminant, son polynôme caractéristique : $X^2 - 3.X + 2$, et son spectre : $\{1, 2\}$. Cette matrice se diagonalise en $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec la matrice de passage $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
On a donc, par conscaténation et récurrence : $M^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. On effectue, et on reporte dans la grande matrice : $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 & 0 & 2 - 2^{n+1} \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 3.2^n - 3 & 0 & 3 - 2^{n+1} \end{pmatrix}}$

MPSI 2	L'application $x \longrightarrow x.\exp(x^2)$.	**I.S.24**

Cette application *(impaire)* est définie sur tout $]-\infty, +\infty[$, de classe C^∞. Sa dérivée $x \longrightarrow (1+2.x^2).e^{x^2}$ est strictement positive partout.
f est strictement croissante et réalise une homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur son intervalle image.
Les limites en $+\infty$ (et $-\infty$ par imparité) permettent de dire que l'intervalle image est $]-\infty, +\infty[$.

La fonction réciproque f^{-1} est dérivable avec $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ comme l'indique le cours *(difféomorphisme)*. Par mise en boucle sur cette formule, f^{-1} est aussi C^∞.

On a rapidement le développement limité en 0 en remplaçant h par h^2 :

$\boxed{f(0+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{h^{2.k+1}}{k!} + o(h^{2.n})}$ quand h tend vers 0.

Pour le développement en 1 *(d'existence assurée par caractère C^∞)*, on pose $x = 1+h$ et séparons : $f(1+h) = (1+h).e^{1+2.h+h^2}$ puis $f(1+h) = e.(1+h).e^{2.h}.e^{h^2}$.

On remplace : $e^{2.h} = 1+2.h+\dfrac{4.h^2}{2}+\dfrac{8.h^3}{6}+\dfrac{16.h^4}{24}+o(h^4)$ et $e^{h^2} = 1+h^2++\dfrac{h^4}{2}+o(h^4)$ et on effectue le produit :

$\boxed{f(1+h) = e+3.e.h+5.e.h^2+\dfrac{19.e.h^3}{3}+\dfrac{13.e.h^4}{2}+o(h^4)}$ quand h tend vers 0.

Le graphe a pour tangente la droite d'équation $y = e+2.e.(x-1)$, et est au dessus de cette tangente *(convexité locale)*.

Par identification avec la formule de Taylor-Young, on a $\boxed{f^{(4)}(1) = 24.\dfrac{13.e}{2} = 156.e}$

Le caractère C^∞ garantit l'existence d'un développement limité d'ordre 6 en 0 de f^{-1}. Par imparité qui se transmet de f à f^{-1}, les coefficients d'exposant pair sont nuls : $f^{-1}(h) = a.h+b.h^3+c.h^5+o(h^6)$ *(pas de terme d'exposant 6 donc tout de suite un $o(h^6)$)*.

Ensuite, l'équivalence entre $f(x)$ et x *(la première bissectrice est tangente à l'origine)* donne l'équivalence entre h et $f^{-1}(h)$. Le coefficient a cherché vaut 1 *(l'équivalent est le premier terme non nul)*.

On écrit donc ensuite la composée des deux développements limités :

$f^{-1}(f(x)) = \Big(x+x^3+\frac{x^5}{2}+o(x^5)\Big)+\alpha.\Big(x+x^3+\frac{x^5}{2}+o(x^5)\Big)^3+\beta.\Big(x+x^3+\frac{x^5}{2}+o(x^5)\Big)^5+o(x^5)$

On tronque : $x = f^{-1}(f(x)) = \Big(x+x^3+\frac{x^5}{2}\Big)+\alpha.\Big(x+x^3\Big)^3+\beta.x^5+o(x^5)$.

On aboutit à l'identification par unicité du développement limité : $1+\alpha = 0$ et $\dfrac{1}{2}+3.\alpha+\beta = 0$. On résout et on reporte :

$\boxed{f^{-1}(h) = h-h^3+\dfrac{5.h^5}{2}+o(h^5)}$ quand h tend vers 0 (localement concave).

MPSI 2	la suite $\frac{n.\ln(n+2)-2.(n+1).\ln(n+1)+(n+2).\ln(n)}{n^a}$.	**I.S.24**

Il n'y a pas de problème d'existence pour cette suite. Mais on a une forme indéterminée. On va étudier le numérateur, qu'on va noter N_n.

On sépare : $N_n = n.\Big(\ln(n)+\ln\Big(1+\frac{2}{n}\Big)\Big)-2.(n+1).\Big(\ln(n)+\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big)-(n+2).\ln(n)$

On développe, les termes "explosifs" en $n.\ln(n)$ s'en vont et il reste juste :

$N_n = n.\ln\Big(1+\dfrac{2}{n}\Big)-2.(n+1).\ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)$

On effectue un développement limité de ces logarithmes de la forme $\ln(1+u)$ avec u qui tend vers 0 :

$N_n = n.\Big(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+o(1/n^2)\Big)-(2.n+2).\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{2.n^2}+o(1/n^2)\Big)$

Il nous reste $-\dfrac{3}{n}+o(1/n)$ quand n tend vers l'infini.

On garde juste l'équivalent $-3/n$.

Le quotient $\dfrac{N_n}{n^a}$ est équivalent à $-3.n^{-1-a}$. On peut conclure sur la limite éventuelle :

a	$a < -1$	-1	$-1 < a$
limite	$-\infty$	-3	0

Il faut donc bien viser avec $\boxed{a = -1}$

MPSI 2	La convexité de $x \longrightarrow \sin(a + \ln(x))$.	**I.S.24**

Cette application *(qui oscille de plus en plus lentement)* est définie sur $[1, 2]$, deux fois dérivable. On va donc passer par le critère suffisant et nécessaire portant sur la dérivée seconde :

$f(x)$	$f'(x)$	$f"(x)$
$\sin(a + \ln(x))$	$\dfrac{\cos(a + \ln(x))}{x}$	$-\dfrac{\cos(a + \ln(x)) + \sin(a + \ln(x))}{x^2}$

Cette dérivée seconde est du signe opposé à son numérateur qui se factorise en $\sqrt{2}.\sin\left(\frac{\pi}{4} + a + \ln(x)\right)$ *(amplitude et déphasage)*.

On va donc exiger *(par équivalences)* : $\exists k \in \mathbb{Z}, \forall x \in [0, 1], 2.k.\pi - \pi \leqslant \dfrac{\pi}{4} + a + \ln(x) \leqslant 2.k.\pi$

Pour chaque valeur de k on a une plage possible pour a :

$a \leqslant 2.k.\pi - \dfrac{\pi}{4} - \ln(x)$ et $2.k.\pi - \dfrac{5.\pi}{4} - \ln(x) \leqslant a$ pour tout x de $[1, 2]$.

On trouve $a \leqslant 2.k.\pi - \dfrac{\pi}{4} - \ln(2)$ et $2.k.\pi - \dfrac{5.\pi}{4} \leqslant a$.

et on peut donner à k toutes les valeurs entières que l'on veut.

Par exemple, pour k égal à 1, a reste entre $\dfrac{3.\pi}{4}$ et $\dfrac{7.\pi}{4} - \ln(2)$.

On a une liste d'intervalles possibles.

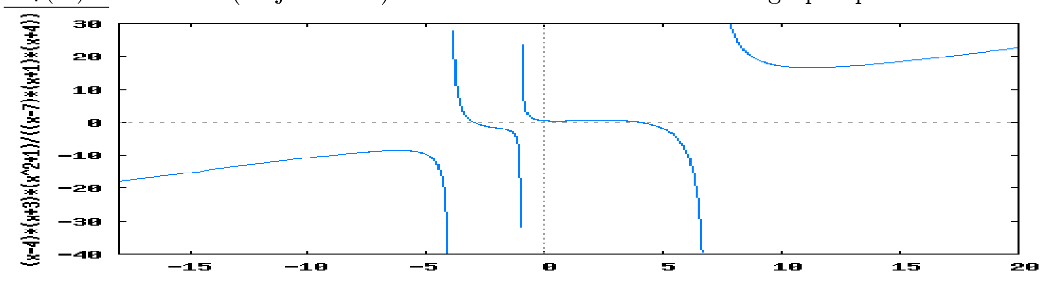
$< \heartsuit(77) >$ Calculez $\cos(143.\pi/4)$, $\sin^{(123)}(471.\pi/6)$, $ch^{(17)}(Argch(7))$ et $\tan^{(3)}(49.\pi/6)$. 4 pt.

$< \heartsuit(78) >$ α est un réel strictement positif. Montrez que $x \longrightarrow \dfrac{x^\alpha - x}{\ln(x)}$ se prolonge par continuité en 0 et en 1 et donnez son développement limité d'ordre 2 en 1, ainsi que l'allure locale du graphe. 4 pt.

$< \diamondsuit(94) >$ Calculez $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \Big(\int_{y=a}^{y=b} x^y.dy \Big).dx$ et $\displaystyle\int_{y=a}^{y=b} \Big(\int_{x=0}^{x=1} x^y.dx \Big).dy$. *L'une des deux intégrales doubles peut être totalement estimée, l'autre restera sous forme d'une intégrale simple.* 5 pt.

$< \spadesuit(44) >$ Sachant que $t \longrightarrow F(\cos(t), \sin(t))$ a pour dérivée 4 en 0 et que $t \longrightarrow F(e^t, t)$ a pour dérivée 3 en 0, calculez $p(1, 0)$ et $q(1, 0)$. 2 pt. Ajustez a pour que $t \longrightarrow F(ch(t) + \ln(1 + t), a.t)$ puisse admettre un extremum en 0. 2 pt.

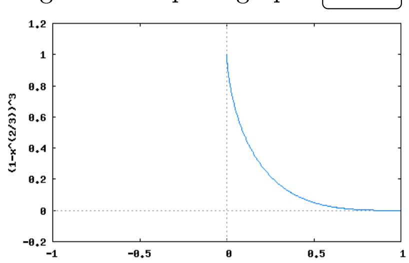
$< \spadesuit(45) >$ Donnez (en justifiant) une fraction rationnelle dont le graphe puisse être le suivant :



2 pt.

$< \diamondsuit(95) >$ Calculez $\displaystyle\int_1^9 [x]^2.dx$ et $\displaystyle\int_1^5 [x^2].dx$ (oui, une partie entière). 4 pt.

$< \spadesuit(46) >$ On considère la demi astroïde de paramétrage $t \longrightarrow (\cos^3(t), \sin^3(t))$, t décrivant $[0, \pi]$. Justifiez que $t = \pi/2$ donne un point de rebroussement. 1 pt. En quel point A le graphe recoupe-t-il la première bissectrice. 1 pt. Quelle est l'équation de la tangente en A ? 1 pt. Prouvez que cette tangente recoupe le graphe. 2 pt.



$< \spadesuit(47) >$ Donnez le noyau de $M \longrightarrow A.M$ (M matrice de taille 2 sur 2) ainsi que sa dimension sachant $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$. 2 pt. Calculez A^{2013}. 1 pt.

MPSI 2 | Des cosinus, sinus et tangentes. | **I.S.25**

• On utilise la $2.\pi$ périodicité : $\cos(143.\pi/4) = \cos(36.\pi - \pi/4) = \cos(-\pi/4) = \sqrt{2}/2$.
• Pour $\sin^{(123)}(471.\pi/6)$ on a déjà $\sin^{(123)} = \sin^{(3)} = -\cos$, et la valeur en $78.\pi + \dfrac{\pi}{2}$: 0.
• A chaque dérivation, ch et sh s'échangent. On a donc $ch^{(17)}(Argch(7)) = sh(Argch(7) = \sqrt{ch^2(Argch(7)) - 1} = \sqrt{48} = 4.\sqrt{3}$ (en utilisant la relation de Phyperbol-Thagore.
Pour $\tan^{(3)}(49.\pi/6)$, on réduit modulo π par périodicité : $\tan^{(3)}(\pi/6)$ et on dérive trois fois : $t \longrightarrow (1+t^2) \longrightarrow 2.t.(1+t^2) = 2.t + t^3 \longrightarrow (2+3.t^2).(1+t^2)$. Pour $t = 1/\sqrt{3}$ on trouve $16/3$.

$\cos(143.\pi/4)$	$\sin^{(123)}(471.\pi/6)$	$ch^{(17)}(Argch(7))$	$\tan^{(3)}(49.\pi/6)$
$\sqrt{2}/2$	0	$4.\sqrt{3}$	$16/3$

MPSI 2 | Fonction $x \longrightarrow (x^\alpha - x)/\ln(x)$. | **I.S.25**

Cette application n'est pas définie en 0 *(logarithme non défini)* ni en 1 *(logarithme nul)*.
• En 0 il n'y a finalement pas de problème, la forme est "surédterminée". Le numérateur tend vers 0 et le dénominateur tend vers l'infini. Le quotient a deux bonnes raisons de tendre vers 0.
• En 1, on remplace $(1+h)^a - (1+h)$ et $\ln(1+h)$ par leurs développements respectifs : $\dfrac{1 + a.h + o(h) - 1 - h}{h + o(h)}$. L'ensemble se simplifie en $\dfrac{(a-1) + o(1)}{1 + o(1)}$ de limite $a - 1$.
Le prolongement par continuité est donc possible.

On reprend avec un développement plus poussé :
$\dfrac{\left(1 + \alpha.h + \dfrac{\alpha.(\alpha-1)}{2}.h^2 + \dfrac{\alpha.(\alpha-1).(\alpha-2)}{6}.h^3 + o(h^3)\right) - 1 - h}{h - \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{3} + o(h^3)}$, qu'on transforme en
$\dfrac{(\alpha-1) + \dfrac{\alpha.(\alpha-1)}{2}.h + \dfrac{\alpha.(\alpha-1).(\alpha-2)}{6}.h^2 + o(h^2)}{1 - \dfrac{h}{2} + \dfrac{h^2}{3} + o(h^2)}$.
On remplace $(1 - \dfrac{h}{2} + \dfrac{h^2}{3} + o(h^2))^{-1}$ par $1 + \dfrac{h}{2} - \dfrac{h^2}{3} + \left(\dfrac{h}{2}\right)^2 + o(h^2)$, on développe et on trouve après avoir réordonné :
$\boxed{(\alpha - 1) + \dfrac{(\alpha^2-1).h}{2} + \dfrac{(\alpha-1)^2.(2.\alpha+1).h^3}{12} + o(h^3)}$ quand h tend vers 0.

MPSI 2 | Intégrale $\int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=a}^{y=b} x^y.dy\right).dx$. | **I.S.25**

On commence, à x fixé par $\left(\displaystyle\int_{y=a}^{y=b} x^y.dy\right)$ d'existence assurée par continuité, et de valeur $\left[\dfrac{e^{y.\ln(x)}}{\ln(x)}\right]_{y=a}^{y=b}$ qui se simplifie en $\dfrac{x^b - x^a}{\ln(x)}$.
On intègre ensuite pour x de 0 à 1. Si toutefois l'application sous le signe somme est bien continue, vue comme fonction de x. Et c'est justement l'exercice précédent *(ou une légère variante)* qui nous assure de la continuité après prolongement.

On a alors $\displaystyle\int_a^b \dfrac{x^b - x^a}{\ln(x)}.dx$ et on donne son joker pour dire "c'est celle là que je ne vais pas calculer".

On inverse les rôles. On fixe y et on calcule $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} x^y.dx = \Big[\frac{x^{y+1}}{y+1}\Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{y+1}$.

Il ne reste plus qu'à recommencer par $\displaystyle\int_{y=a}^{y=b} \frac{dy}{y+1} = \ln\Big(\frac{b+1}{a+1}\Big)$.

Si notre fonction de deux variables est continue, en appliquant le théorème de Fubini, on trouve donc :

$$\boxed{\int_a^b \frac{x^b - x^a}{\ln(x)}.dx = \ln\Big(\frac{b+1}{a+1}\Big)}$$

MPSI 2	Noyau de $M \longrightarrow M.A$.	**I.S.25**

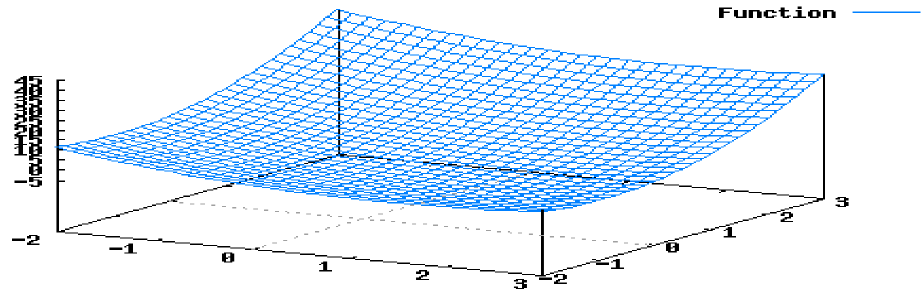
On résout $M.A = 0$ (matrice nulle de taille 2). Avec des notations compréhensibles, on a un système de quatre équation qui dégénère vite en simplement $a = 2.b$ et $c = 2.d$. Les matrices cherchées sont exactement de la forme $\begin{pmatrix} 2.b & b \\ 2.c & c \end{pmatrix}$. Il s'agit des combinaisons de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs forment une base du noyau, lequel est alors de dimension 2. Enfin, A^2 est nulle, donc A^{2013} aussi.

MPSI 2	Une fraction rationnelle de graphe imposé.	**I.S.25**

La fraction rationnelle est donc un quotient de deux polynômes.
Son dénominateur doit avoir trois racines pour qu'on puisse avoir les trois asymptotes visibles. On les place à vue de nez en -4, -1 et 7.
On a donc $\displaystyle\frac{P(x)}{(x+4).(x+1).(x-7)}$.
Son numérateur doit s'annuler en un point entre -4 et -1 (j'ai pris -3) et un entre 0 et 7 (j'ai pris 4, même si ce n'est pas très visible).
Peut on dire qu'on prend alors $\displaystyle\frac{(x+3).(x-4)}{(x+4).(x+1).(x-7)}$?
Non, car une telle fraction tend vers 0 à l'infini. Il faut augmenter le degré du numérateur, afin que le quotient ne tende pas vers 0 à l'infini, mais y soit même équivalent à x. Il faut donc un numérateur de degré 4. Aurais je perdu des racines ? En fait, l'ai augmenté le degré de deux unités, sans ajouter de nouvelle racine réelle : $\boxed{\dfrac{(x+3).(x-4).(x^2+1)}{(x+4).(x+1).(x-7)}}$
Toute réponse coïncidant pour la différence de degrés entre numérateur et dénominateur et nombre de pôles rapportera des points.

MPSI 2	Des dérivées sur une fonction de deux variables.	**I.S.25**

On dispose d'une fonction F de classe suffisante sur laquelle on va appliquer les notations de Monge.
On construit alors deux fonctions composées : $t \longrightarrow F(\cos(t), \sin(t))$ et $t \longrightarrow F(e^t, t)$ que l'on note f et g et dont on donne le développement limité en 0 :
•$f(0+t) = F\Big(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2), 0 + t + o(t^2)\Big) = F(1,0) + p(1,0).(-t^2/2) + q(1,0).t + o(t)$
Le coefficient du terme en t est la dérivée $f'(0)$ et elle vaut donc $q(1,0)$.
•$g(0+t) = F\Big(1 + t + o(t), 0 + t\Big) = F(1,0) + p(1,0).t + q(1,0).t + o(t)$
Cette fois, le coefficient de t est $p(1,0) + q(1,0)$.
Avec les valeurs $f'(0) = 4$ et $g'(0) = 3$ on déduit : $p(1,0) = -1$ et $q(1,0) = 4$ (et on ne connaît pas $F(1,0)$ je l'admets).

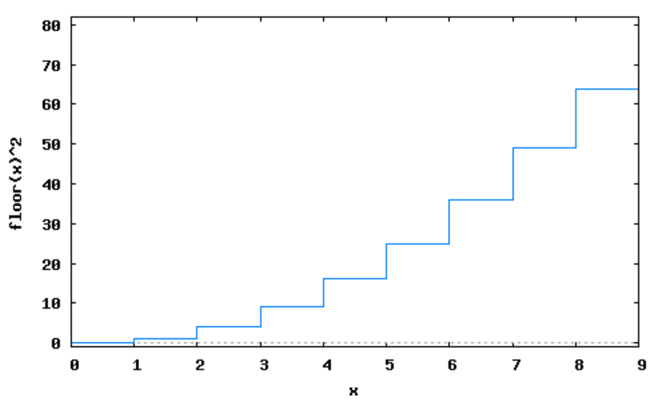


On a dérivé des composées $t \longrightarrow (\cos(t), \sin(t)) \longrightarrow F(\cos(t), \sin(t))$ *et* $t \longrightarrow (e^t, t) \longrightarrow F(e^t, t)$ *et on a utilisé selon certains la formule* $\dfrac{df(t)}{dt} = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}.\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}.\dfrac{dx}{dt}$ *qui s'écrit* $dF = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}.dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}.dy$ *dans tout cours de physique qui se respecte et tente de respecter les maths.*

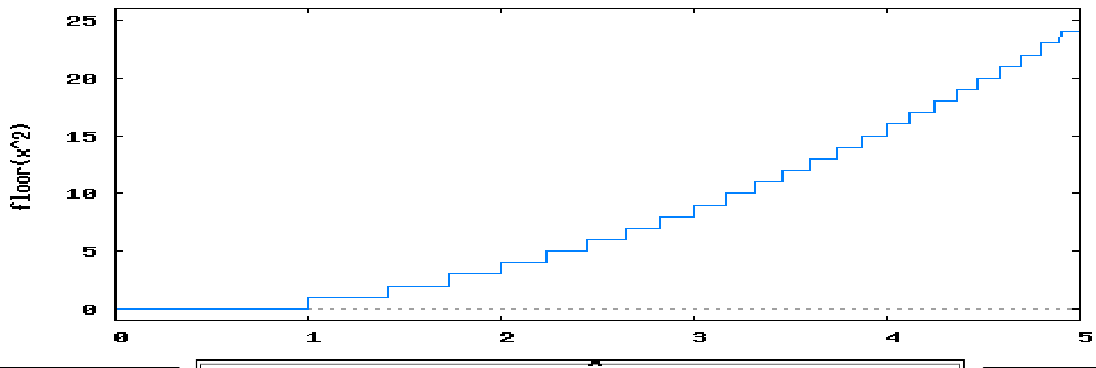
On étudie ensuite la nouvelle composée $t \longrightarrow F(ch(t) + \ln(1+t), a.t)$ dont le développement limité d'ordre 1 en 0 est $F(1 + o(t^2) + t + o(t), a.t) = F(1,0) + \Big(1.t.p(1,0) + a.t.q(1,0)\Big) + o(t)$.
On veut qu'il puisse y avoir un extremum. Il faut donc déjà que la dérivée en 0 s'annule (pour les malpropres : "la dérivée en $t = 0$").
On trouve donc : $-1 + a.4 = 0$. a vaut $1/4$.

MPSI 2	Intégrales $\int_1^9 [x]^2.dx$ et $\int_1^5 [x^2].dx$	**I.S.25**

Ce sont des intégrales à voir géométriquement. On a deux fonctions en escalier.
• Pour la première, les "nez de marche" sont pour x entier de 1 à 9, et les hauteurs de marches sont des carrés. On sépare donc par relation de Chasles en $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\int_k^{k+1} k^2.dx = \sum_{k=1}^{8} k^2 = \frac{8.9.17}{6} =$



204
Pour la seconde, il y a plus de nez de marches : 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ jusqu'à $\sqrt{25}$. A chacun d'entre eux, le saut est de une seule unité (des marches régulières en hauteur, mais de plus en plus étroites). La somme est alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{24}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}).k$. On la sépare en $\displaystyle\sum_{k=1}^{24} k.\sqrt{k+1} - \sum_{k=1}^{24} k.\sqrt{k}$. On réindexe en $\displaystyle\sum_{k=2}^{25}(k-1).\sqrt{k} - \sum_{k=1}^{24} k.\sqrt{k}$ et même $\displaystyle\sum_{k=1}^{25}(k-1).\sqrt{k} - \sum_{k=1}^{24} k.\sqrt{k}$. Il ne reste que $25.\sqrt{25} - \displaystyle\sum_{k=1}^{25}\sqrt{k}$. *Si on veut simplifier ce nombre, c'est* $110 - 6.\sqrt{2} - 3.\sqrt{3} - 3.\sqrt{5} - 3.\sqrt{6} - \sqrt{7} - \sqrt{10} - \sqrt{11} - \sqrt{13} - \sqrt{14} - \sqrt{15} - \sqrt{17} - \sqrt{21} - \sqrt{22} - \sqrt{23}$ *et il vaut à peu près* 40.



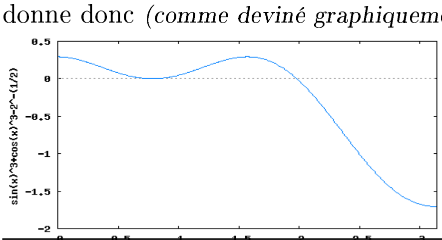
MPSI 2	La demi astroïde $(\cos^3(t), \sin^3(t))$.	**I.S.25**

On verra dans un cours ultérieur le tableau de variations à dresser pour un arc paramétré. D'ores et déjà, on détermine vitesse et accélération, ainsi que la dérivée suivante : $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3.c^2.s \\ 3.s^2.c \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -3.c^3 + 6.c.s^2 \\ -3.s^3 + 6.s.c^2 \end{pmatrix}$ et ainsi de suite. On calcule ces vecteurs en $\pi/2$ et on écrit le développement limité. Ou alors on on le calcule directement :

$M_{\pi/2+h} = \Big(\cos^3(h + \pi/2), \sin^3(h + \pi/2)\Big) = (0, 1) - \dfrac{h^2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - h^3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(h^3)$

On a une vitesse nulle. L'accélération donne la direction : positivement colinéaire à $-\overrightarrow{j}$. Le terme correctif en $-h^3.\overrightarrow{i}$ nous place "à droite" avant l'instant $\pi/2$ et "à gauche" après cet instant.
On reconnaît bien à $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ un point de rebroussement (ici de première espèce).

C'est pour t égal à $\pi/4$ qu'on a $x_t = y_t$ (intersection avec la bissectrice). On trouve alors même $\boxed{x_{\pi/4} = y_{\pi/4} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}}$ La tangente en ce point a un vecteur directeur colinéaire à $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Elle est parallèle à la deuxième bissectrice. Son équation est de la forme $y = -(x - x_{\pi/4}) + y_{\pi/4}$ ce qui donne ici $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - x$ *(vérifiez si vous ne me croyez pas)*. Cette tangente intersecte avec le graphe quand on a $\sin^3(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \cos^3(t)$. On s'inspire du graphe pour comprendre que c'est après $\pi/2$ que ceci a lieu.
On étudie donc $x \longrightarrow \cos^3(t) + \sin^3(t) - \sqrt{2}/2$ pour t décrivant $[\pi/2, \pi]$. La dérivée est $3.c.s.(-c + s)$, avec c négatif, s positif et $s - c$ positif. Cette dérivée est négative, cette application décroît. En $\pi/2$ elle vaut $1 - \sqrt{2}/2$ *(positif)* et en π elle vaut $-1 - \sqrt{2}/2$ *(négatif)*. Le théorème de l'homéomorphisme donne donc *(comme deviné graphiquement)* une unique solution.

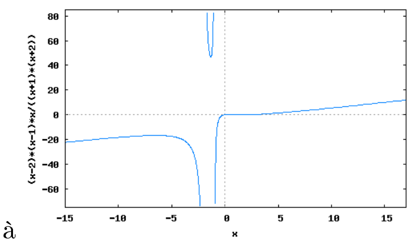


$<\heartsuit(79)>$ Déterminez pour a réel positif la limite quand n tend vers l'infini de $\sqrt[n]{a}$. 1 pt.

$<\diamondsuit(96)>$ Décomposez en éléments simples $\dfrac{a.x+1}{(x+1)^2.(x+2)}$ *(a réel donné)*. 2 pt.
Donnez une primitive de cette fraction sur $]-2,-1[$. 2 pt.
Peut on choisir a pour que la primitive nulle en 0 tende vers 0 à l'infini ? 2 pt.

$<\spadesuit(48)>$ La matrice A est une matrice carrée de taille n sur n dont le terme général est
- nul si $i > k+1$
- égal à -1 si $i = k+1$
- entier naturel sinon.

Montrez que son déterminant est un entier naturel. 3 pt.



$<\spadesuit(49)>$ Donnez une fraction rationnelle de graphe ressemblant à 2 pt.

$<\clubsuit(26)>$ On définit : $\varphi := (x \longrightarrow x.e^x)$. Montrez que φ est un C^1-difféomorphisme de $[0,+\infty[$ dans lui même. 2 pt. Calculez $\displaystyle\int_0^e \varphi^{-1}(t).dt$ à l'aide du changement de variable $u = \varphi^{-1}(t)$. 3 pt. Auriez vous une autre idée pour le calcul de cette intégrale ?

$<\diamondsuit(97)>$ On définit : $g := x \longrightarrow \dfrac{x^2+\sqrt[3]{1+2.x}}{x+\sqrt{1+2.x}}$. Donnez son domaine de définition. 1 pt.
Effectuez le changement de variable $u = (1+2.x)^{1/6}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^4 g(x).dx$ et indiquez la suite du calcul (valeurs numériques des constantes non demandées). 5 pt.

CHARLEMAGNE | **FAUTE DE FRAPPE** | 2012/13 | $I.S.26$

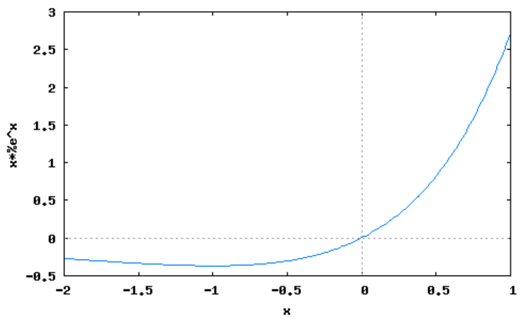
$<\clubsuit(27)>$ Voulant taper la formule *(connue)* $\sin(2.x) = 2.\cos(x).\sin(x)$, un élève tape la formule *(conne)* $\sin(2.x) = 2.\cos(x)^{\frac{1}{\sin(x)}}$. Pour quelles valeurs de x sa formule a-t-elle déjà un sens *(c'est à dire "domaine de définition du membre de droite")*. 1 pt. Indiquez des valeurs de x pour lesquelles elle est vraie. 1 pt.
On note $f(x)$ le membre de droite. Prolongez le par continuité en 0. 2 pt.
Donnez son développement limité en 0 à l'ordre 2 et l'allure locale du graphe. 3 pt.
$<\clubsuit(28)>$ Calculez $f(\pi/6)$ et donnez l'équation de la tangente en $\pi/6$. 2 pt.

MPSI 2 | Limite de $\sqrt[n]{a}$. | **I.S.26**

Il n'y a pas de problème d'existence de ces réels, s'écrivant $e^{\ln(a)/n}$. Quand n tend vers l'infini, $\ln(a)/n$ tend vers 0 et par continuité de l'exponentielle, la limite de $\sqrt[n]{a}$ vaut $\boxed{1}$. *On notera que ce résultat ne dépend pas de la position de a par rapport à 1, contrairement à a^n.*

MPSI 2 | L'intégrale $\int_0^e \varphi^{-1}(t).dt$. | **I.S.26**

L'application φ est continue, dérivable, de dérivée $u \longrightarrow (u+1).e^u$. Cette dérivée est strictement positive. L'application φ est strictement croissante et réalise donc un C^1-difféomorphisme entre $[0,+\infty[$ et son intervalle image. Mais les valeurs et limites aux bornes nous donnent comme intervalle image $[0,+\infty[$ à nouveau. Rappelons que la notion de difféomorphisme n'a de sens que si on dit de quoi dans



quoi, comme la notion de bijection.

L'intégration de $\displaystyle\int_{t=0}^{t=e} \varphi^{-1}(t).dt$ ne pose pas de problème et se traite même par changement de variable comme proposé. On suit la démarche habituelle en trois temps :
$\displaystyle\int_{u=0}^{u=1} \ldots$ puis $\displaystyle\int_{u=0}^{u=1} u\ldots$ et enfin $\displaystyle\int_{u=0}^{u=1} u.(u+1).e^u.du$.
Cette nouvelle intégrale se traite par parties ou par méthode a priori.
On propose comme primitive $u \longrightarrow (a.u^2+b.u+c).e^u$ que l'on dérive et dont on identifie la dérivée à $u \longrightarrow (u^2+u).e^u$. On trouve un système linéaire élémentaire et on valide la primitive $u \longrightarrow (u^2-u+1).e^u$ *(nécessaire et suffisante)*.

La variation de primitive donne pour intégrale : $\boxed{\displaystyle\int_{t=0}^{t=e} \varphi^{-1}(t).dt = \int_{u=0}^{u=1} u.(u+1).e^u.du = e-1}$

Géométriquement, on pouvait aussi "soustraire une aire de φ à celle d'un rectangle". Ou intégrer par parties.

MPSI 2 | La fraction $\frac{a.X+1}{(X+1)^2.(X+2)}$. | **I.S.26**

Cette fraction est définie, continue *(donc intégrable)* sur chacun des trois intervalles $]-\infty,-2[$, $]-2,-1[$ et $]-1,+\infty[$. On note deux pôles réels :

pôle	dimension		
-1	2	$\dfrac{\alpha_0}{(x+1)}$	$\dfrac{\alpha_1}{(x+1)^2}$
-2	1	$\dfrac{\beta_0}{(x+2)}$	

La somme des dimensions vaut 3 et le numérateur est dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ de dimension inférieure ou égale à 3, on n'a pas besoin d'ajouter de terme polynomial.

On décompose en $\dfrac{\alpha_0}{(x+1)}+\dfrac{\alpha_1}{(x+1)^2}+\dfrac{\beta_0}{(x+2)}$. On détermine β_0 et α_1 par la méthode des pôles :
$\alpha_1=\dfrac{a.x+1}{(x+2)}-\alpha_0.(x+1)+\dfrac{\beta_0.(x+1)^2}{(x+2)}$ et par la limite en -1 : $\alpha_1=1-a$
$\beta_0=\dfrac{a.x+1}{(x+1)^2}-\dfrac{\alpha_0.(x+2)}{x+1}-\dfrac{\alpha_1.(x+2)}{(x+2)^2}$ et par la limite en -2 : $\beta_0=1-2.a$
Le comportement à l'infini ou la valeur en 0 donnent le troisième réel.
On écrit donc : $\boxed{\dfrac{a.x+1}{(x+1)^2.(x+2)}=\dfrac{2.a-1}{(x+1)}+\dfrac{1-a}{(x+1)^2}+\dfrac{1-2.a}{(x+2)}}$

Pour intégrer ensuite sur $]-\infty,-2[$, on surveille les signes et on peut prendre
$\boxed{x\longrightarrow(2.a-1).\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)+\dfrac{a-1}{x+1}}$ On vérifie que la quantité dans le logarithme est bien positive *(deux termes négatifs)* sur l'intervalle proposé.

Pour la primitive nulle en 1, on prend la même *(dans le logarithme tout est cette fois positif)* et on "ajuste des constantes" : $x\longrightarrow(2.a-1).\ln\left(\dfrac{2.(x+1)}{x+2}\right)+\dfrac{a-1}{x+1}+1-a$ *(vérifiez, elle est nulle en* 0*)*. Sa limite en $+\infty$ est alors $(2.a-1).\ln(2)+1-a$. On la veut nulle. On peut choisir $\boxed{a=\dfrac{\ln(2)-1}{2.\ln(2)-1}}$

MPSI 2	Déterminant d'une matrice à coefficients entiers.	**I.S.26**

Une telle matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 \\ -1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ 0 & -1 & a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 \\ 0 & 0 & -1 & a_4^4 & a_4^5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_5^5 \end{pmatrix}$ si on la regarde en dimension 5.
En développant par rapport à la dernière ligne, on n'a que deux termes : $\det(A_{n+1})=a_{n+1}^{n+1}.\det(A_n)+\det(B_n)$ avec ici B_n égale à $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^5 \\ -1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^5 \\ 0 & -1 & a_3^3 & a_3^5 \\ 0 & 0 & -1 & a_4^5 \end{pmatrix}$. Quitte à changer l'indexation, elle est du type voulu. Il suffit donc de bien mener une récurrence.
Initialisation : $|\,a_1^1\,|$ est un entier naturel, de même que $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ -1 & a_2^2 \end{vmatrix}$.
On suppose qu'à un rang n donné, toutes les matrices de la forme voulue ont un déterminant dans $\mathbb{N}$.
On travaille en taille $n+1$ et on applique justement la formule $\det(A_{n+1})=a_{n+1}^{n+1}.\det(A_n)+\det(B_n)$.
Le nouveau déterminant est donc bien un entier naturel, comme somme et produit d'entiers naturels.
Et l'hérédité de la récurrence s'achève.

MPSI 2	La fonction $x\longrightarrow 2.cos(x)^(1/\sin(x))$.	**I.S.26**

Cette fonction ne peut que s'écrire $x\longrightarrow 2.\exp\left(\dfrac{\ln(\cos(x))}{\sin(x)}\right)$ puisque l'on est en présence d'une forme en a^b avec b variable non entière. On doit donc imposer $\cos(x)>0$.
Il faut ensuite pouvoir diviser par $\sin(x)$, ce qui, sur notre domaine nous prive des multiples de π *(et en fait uniquement des multiples de* $2.\pi$*)*.
Le domaine est donc $\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\dfrac{\pi}{2}+2.k.\pi,2.k.\pi\right[\cup\left]0,\dfrac{\pi}{2}+2.k.\pi\right[}$ On retient $]-\pi/2,0[\cup]0,\pi/2[$ et on profite de la $2.\pi$-périodicité.

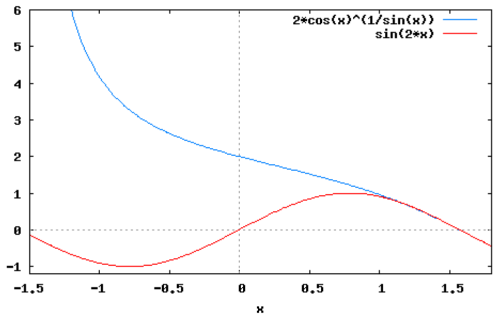
Remarque : je vous laisse réfléchir au domaine de définition de $x \longrightarrow \cos(x)^{\left[\dfrac{1}{\sin(x)}\right]}$.

Après simplification, on est conduit à résoudre $\cos(x).\sin(x) = \cos(x)^{1/\sin(x)}$ puis $\sin(x) = \cos(x)^{1/\sin(x)-1}$. En $\pi/2$ on peut la considérer comme correcte : $0 = 0^1$. Et j'ajouterai ensuite : $\{\frac{\pi}{2} + 2.k.\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Cette application n'est pas définie en 0. On va déjà devoir la prolonger par continuité. On va utiliser un développement limité de ce qu'il y a dans l'exponentielle :

$\dfrac{\ln(\cos(x))}{\sin(x)} = \dfrac{\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x + o(x^2)} = \dfrac{-\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}{x + o(x^2)} = -\dfrac{x}{2} + o(x)$ quand x tend vers 0

La limite est 0, par continuité de l'exponentielle et multiplication par 2, $f(x)$ tend vers 2 en 0.



On prolonge : $\boxed{f(0) = 2}$

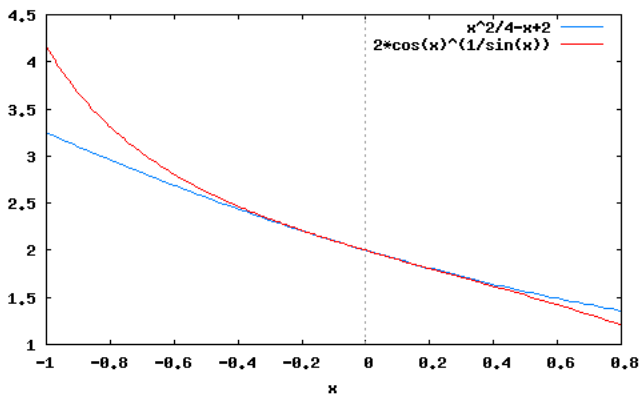
On reprend avec un peu plus de précision :

$\dfrac{\ln(\cos(x))}{\sin(x)} = \dfrac{\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)\right)}{x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)} = \dfrac{-\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24}\right) - \dfrac{x^4}{2.2^2} + o(x^4)}{x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)}$

Le numérateur devient $-\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + o(x^2)$. On simplifie haut et bas par x et on remplace $dsp\dfrac{1}{1 - \dfrac{x^2}{6} + o(x^3)}$ par $1 + \dfrac{x^2}{6} + o(x^3)$. On effectue le produit : $\dfrac{\ln(\cos(x))}{\sin(x)} = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et même $o(x^4)$ pour des raisons de "parité".

On passe à l'exponentielle : $1 + \left(-\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{x}{2}\right)^3 + o(x^3)$.

On a alors : $\boxed{\cos(x)^{1/\sin(x)} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{3.x^3}{16} + o(x^3)}$ On multiplie par 2, on a alors $f(0) = 2$, la tangente est parallèle à la deuxième bissectrice et le graphe est localement convexe.



<u>Remarque :</u> les élèves qui persistent à calculer le développement limité en dérivant deux ou trois fois sont juste de gros bourrins incapables de dépasser le stade banal de la seconde où la première méthode apprise est la seule, qu'on utilise dans quatorze exercices con-sécutifs. En plus, ici, comme la fonction (et ses dérivées) n'est pas définie en 0, ils remplacent la valeur de la dérivée en 0 par la limite en 0 de la valeur de la dérivée en x, faisant appel à un gros théorème de Sup, fort inutilement. Ce sont eux qui iront, en tant qu'ingénieurs payer le prix fort des machines outils fort chères, là où un simple travail d'atelier suffit. Ceux là ne seront donc jamais ingénieurs longtemps (ou alors ils travailleront comme "physiciens" au Cern, au Cea ou pour l'armée).

Pour le développement en $\pi/6$, on calcule la valeur : $\boxed{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\dfrac{1}{1/2}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}}$ *(déjà, ça se simplifie bien : $f(\pi/6) = 3/2$).*

Pour avoir le coefficient directeur de la tangente, je peux dériver une fois et estimer la dérivée en ce point :

$f'(x) = 2.\left(-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}.\ln(\cos(x)) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.\frac{1}{\sin(x)}\right).e^{\ln(\cos(x))/\sin(x)}$: $\boxed{f'(\pi/6) = -\sqrt{3} - 3.\sqrt{3}.\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

Je peux aussi effectuer un développement limité d'ordre 1 et ne garder que le premier terme si je ne veux pas me faire traiter de tous les noms par moi même.

Pour l'équation de la tangente : $y = \frac{3}{2} - \left(\sqrt{3} - 3.\sqrt{3}.\ln(\sqrt{3}/2)\right)\frac{6.x-\pi}{6}$.

MPSI 2 | L'application $x \longrightarrow \frac{x^2+\sqrt[3]{1+2.x}}{x+\sqrt{1+2.x}}$ | **I.S.26**

La continuité est acquise sur le domaine de définition. Il reste à s'assurer de l'existence de la racine ($x \geqslant -1/2$) et de la non nullité du dénominateur. Pour ce faire, on résout $x = -\sqrt{1+2.x}$ par élévation au carré (on perd le signe de chaque membre, on va créer des solutions en trop, il faudra vérifier). L'équation du second degré $x^2 = 1+2.x$ a pour racines $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$. On ne garde que la deuxième, puisqu'il nous faut x négatif *(égal à l'opposé d'une racine carrée)*.

Le domaine est donc $\boxed{\left[-\frac{1}{2}, 1-\sqrt{2}\right[\cup \left]1-\sqrt{2}, +\infty\right[}$

Les deux bornes sont dans un même intervalle du domaine, on peut donc calculer l'intégrale par continuité de la fonction sous le signe intégrale. On effectue le changement de variable :

$$\int_{x=0}^{x=4} \frac{x^2+\sqrt[3]{1+2.x}}{x+\sqrt{1+2.x}}.dx = \int_{u=1}^{u=3^{1/3}} \ldots = \int_1^{3^{1/3}} \frac{\left(\frac{u^6-1}{2}\right)^2 + u^2}{\left(\frac{u^6-1}{2}\right) + u^3} \ldots$$

On termine avec $dx=3.u^5.du$: $\boxed{\displaystyle\int_{x=0}^{x=4}\frac{x^2+\sqrt[3]{1+2.x}}{x+\sqrt{1+2.x}}.dx=3.\int_1^{3^{1/3}}\frac{\left(\frac{u^6-1}{2}\right)^2+u^2}{\left(\frac{u^6-1}{2}\right)+u^3}u^5.du}$

On doit ensuite décomposer en éléments simples la fraction sous le signe somme en trouvant les pôles.
On annule $u^6+2.u^3-1$ de racines $u^3=-1+\sqrt{2}$ et $u^3=-1-\sqrt{2}$.
On a donc deux pôles réels simples ($x=\sqrt[3]{-1-\sqrt{2}}$ et $x=\sqrt[3]{-1+\sqrt{2}}$) et quatre pôles complexes deux à deux conjugués (en mettant des j et j^2 devant les réels trouvés). On va donc factoriser le dénominateur avec $(x-\alpha).(x-\beta).(x^2-\gamma.x+\delta).(x^2-\gamma'.x+\delta')$
La dimension totale ne suffira pas, il faudra encore mettre devant la fraction $\dfrac{\ldots}{x-\alpha}+\dfrac{\ldots}{x-\beta}+\dfrac{\ldots x+\ldots}{x^2-\gamma.x+\delta}+\dfrac{\ldots x+\ldots}{x^2-\gamma'.x+\delta'}$ un polynôme.
Il ne restera plus qu'à intégrer en logarithmes, arctangentes et polynômes.
Telles sont les grandes lignes d'un travail laborieux et purement calculatoire qu'un matheux refusera de pousser jusqu'au bout sans astuce *(qu'il cherchera pendant une heure)* et qu'un physicien mènera jusqu'au bout en cinq minutes d'investissement énorme.

$<\heartsuit(80)>$ $(E,+,.)$, $(F,+,.)$ et $(G,+,.)$ sont trois espaces vectoriels. f et g sont deux applications linéaires *(f de E dans F et g de F dans G)*. Montrez que $(g\circ f=0)\Leftrightarrow(Im(f)\subset Ker(g))$. [2 pt.]
Montrez alors $(g\circ f=0)\ \Rightarrow\ (rg(f)+rg(g)\leq\dim(F))$. [2 pt.]

$<\diamondsuit(98)>$ Déterminez la limite de $(th(n.a))^n$ *(pour a réel strictement positif donné)* quand n tend vers l'infini. [2 pt.]

$<\heartsuit(81)>$ Un élève dérive : $x\longrightarrow\ln(x-\sqrt{x^2+1})'=\dfrac{1-\dfrac{2.x}{2.\sqrt{x^2+1}}}{x-\sqrt{x^2+1}}=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Il déduit : $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\ln(a-\sqrt{a^2+1})-\ln(b-\sqrt{b^2+1})$. Indiquez *(et corrigez ?)* les multiples erreurs dans ce qu'il a écrit. [3 pt.]

$<\heartsuit(82)>$ Dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$ muni de la base canonique $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, on note P le plan engendré par $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{i}-2.\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ et $2.\overrightarrow{i}+*.\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ *(où $*$ est une tache de café à compléter)*. Complétez la tache de café, donnez une équation de P. [2 pt.]
Donnez la matrice sur la base canonique de la projection sur P parallèlement à $Vect(\overrightarrow{i}+4.\overrightarrow{k})$ après en avoir prouvé l'existence. [2 pt.]

$<\spadesuit(50)>$ Soit f un endomorphisme de $(\mathbb{R}^4,+,.)$ vérifiant $f^2=2.f+15.Id$. Montrez que f est un automorphisme en trouvant f^{-1} de la forme $a.f+b.Id$. [1 pt.] Montrez que $\dfrac{f+3.Id}{8}$ est un projecteur. [2 pt.] Donnez comme combinaison de f et Id le projecteur et les deux symétries associées. [1 pt.] Déduisez : $Ker(f+3.Id)\oplus Ker(f-5.Id)$. [2 pt.]
Donnez la liste des valeurs possibles pour le couple $(Tr(f),\det(f))$. [4 pt.]

$<\diamondsuit(99)>$ Vérifiez que $z\longrightarrow a.z+b.\overline{z}$ est linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ *(vu comme $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2)*. [1 pt.] On prend $a=e^{i.\pi/3}$. Pouvez vous choisir b pour que cette application soit un projecteur ? [2 pt.]

$<\clubsuit(29)>$ On rappelle que $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ est un corps pour l'addition et la multiplication modulo 7, qu'on va noter K. On sait alors que K^2 est un espace vectoriel de dimension 2. Donnez les vecteurs de la droite vectorielle de vecteur directeur $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$. [1 pt.] Complétez $\begin{pmatrix}2&.\\4&.\end{pmatrix}$ pour que ce soit une matrice de projecteur. [2 pt.] Donnez alors les vecteurs du noyau. [2 pt.]

$<\diamondsuit(100)>$ Complétez la matrice M pour que ce soit la matrice d'un endomorphisme mais pas d'un isomorphisme : $M=\begin{pmatrix}1&2&4\\1&0&*\\1&3&1\end{pmatrix}$. [1 pt.] Déterminez alors le noyau, le rang, et montrez que l'image a pour équation $\begin{vmatrix}1&2&x\\1&0&y\\1&3&z\end{vmatrix}=0$. [3 pt.]

$I.S.27$	CHARLEMAGNE — Correction — ANNEE **2012/13**	$I.S.27$

MPSI 2	Morphismes vérifiant $g\circ f=0$.	**I.S.27**

• Première équivalence, sens direct.
On suppose $g\circ f=0$ *(application linéaire nulle de E dans G)*. On prend $\overrightarrow{v}$ dans $Im(f)$. On l'écrit par définition même $f(\overrightarrow{u})$ pour un $\overrightarrow{u}$ de E. On applique g : $g(\overrightarrow{v})=g(f(\overrightarrow{u}))=g\circ f(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$ *(vecteur nul de G)* par définition même de $g\circ f=0$. On reconnaît $\overrightarrow{v}\in Ker(g)$. On a bien obtenu $Im(f)\subset(Ker(g))$.

• Première équivalence, réciproque.
On suppose $Im(f)\subset Ker(g)$. On prend $\overrightarrow{u}$ dans E et on calcule $g\circ f(\overrightarrow{u})$. C'est $g(f(\overrightarrow{u}))$. Or, par définition, $f(\overrightarrow{u})$ est dans $Im(f)$ donc dans $Ker(g)$ par hypothèse. On a donc $g(f(\overrightarrow{u}))=\overrightarrow{0}$. Comme ceci est vrai pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on déduit $g\circ f=0$ *(morphisme nul)*.

• Deuxième implication.
On suppose $Im(f)\subset Ker(g)$. On passe alors aux dimensions : $\dim(Im(f))\leq\dim(Ker(g))$. On traduit avec le mot rang : $rg(f)\leqslant\dim(F)-rg(g)$. Il ne reste plus qu'à basculer.

MPSI 2	Limite de $(th(n.a))^n$ quand n tend vers l'infini.	**I.S.27**

Le terme $th(n.a)$ tend vers 1 et on a la forme indéterminée "1^∞". On revient donc à la définition en forçant même le 1 à venir :
$n.\ln(th(n.a))=n.\ln\Big(\dfrac{e^{n.a}-e^{-n.a}}{e^{n.a}+e^{-n.a}}\Big)=n.\ln\Big(1-\dfrac{2.e^{-n.a}}{e^{n.a}+e^{n.a}}\Big)$
On fait appel à un équivalent :
$n.\ln(th(n.a))=-n.\Big(\dfrac{2.e^{-n.a}}{e^{n.a}+e^{n.a}}\Big)+n.o(e^{-2.n.a})$ en rappelant que $\dfrac{2.e^{-n.a}}{e^{n.a}+e^{n.a}}$ est équivalent à $e^{-2.n.a}$ *(de limite nulle)*.
L'exponentielle l'emporte sur le n, et par continuité de l'exponentielle en 0, $e^{n.\ln(th(n.a))}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

MPSI 2	Les erreurs de l'élève qui dérive $x\longrightarrow\ln(x-\sqrt{x^2+1})$.	**I.S.27**

J'ai détecté diverses erreurs de niveaux variables. Pa s'erreur de calcul en soi, puisqu'il s'agit d'un élève de Sup ayant la moyenne en physique.

• Une erreur de variables : $(x\longrightarrow\ldots)'$ est une fonction, et ne peut donc pas être égale à un réel $\dfrac{1-\ldots}{x-\sqrt{x^2+1}}$. Il conviendrait donc d'écrire $(x\longrightarrow\ldots)'=(x\longrightarrow\ldots)=(x\longrightarrow\ldots)$.

• Une erreur de domaine : $x-\sqrt{x^2+1}$ est toujours négatif, et on ne peut donc pas en prendre le logarithme. En effet, si x est négatif, c'est la somme de deux réels négatifs et si x est positif, $\sqrt{x^2+1}$ dépasse quand même x.
On peut d'ailleurs aussi détecter que $x-\sqrt{x^2+1}$ est l'inverse du célèbre $x+\sqrt{x^2+1}$ par l'équation $t^2-2.x.t-1=0$ d'inconnue t.
De fait, c'est bien au signe près la dérivée de $x\longrightarrow\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

• Une erreur à l'intégration par un logarithme. L'élève persiste à intégrer avec une différence de deux logarithmes, alors qu'on intègre avec le logarithme d'un quotient *(indiqué dès le cours de première semaine, c'est une erreur que trop de lavettes usagées pour chimiste de laboratoire parmi vous trainent encore)*.
La formule $\displaystyle\int_a^b\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\ln\Big(\frac{a-\sqrt{a^2+1}}{b-\sqrt{b^2+1}}\Big)$ ne pose en effet plus aucun problème (ce n'est plus

$\ln(negatif) - \ln(negatif)$ mais $\ln\left(\frac{negatif}{negatif}\right)$). *Mais j'ai hélàs bien conscience de prêcher dans le désert de cerveaux asséchés qui se contentent de "ça marchait en Terminale je ne vois pas pourquoi ça ne marcherait plus". A ceux là, je dirai donc juste : l'an prochain, passez le bac, mais pas le concours de Mines...*

MPSI 2	Un projecteur de $\mathbb{R}^3$.	**I.S.27**

Dans l'énoncé, il y a un indice : on parle d'un certain plan P et on le dit engendré par trois vecteurs. Il faut et suffit donc que ces trois vecteurs $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et $2.\overrightarrow{i} + *.\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ forment une famille liée, de rang 2. On va donc annuler leur déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & * \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Le coefficient caché vaut $\boxed{-5/2}$

On peut même donner l'équation du plan : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & -2 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$, et c'est $x + 2.y + 3.z = 0$. On peut vérifier que les deux premiers vecteurs la vérifient, et retrouver l'exigence sur le dernier).

Le vecteur $\overrightarrow{i} + 4.\overrightarrow{k}$ ne vérifie pas cette équation, on va donc bien avoir un supplémentaire du plan dans $\mathbb{R}^3$.

On cherche la matrice du projecteur sur la droite parallèlement à plan : des colonnes toutes proportionnelles à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. On a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.a & 4.b & 4.c \end{pmatrix}$ et on sait que les vecteurs annulés par la forme $(x, y, z) \longrightarrow x + 2.y + 3.z$ sont absorbés. La matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a & 2.a & 3.a \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.a & 8.a & 12.a \end{pmatrix}$.

Encore faut il que $\overrightarrow{i} + 4.\overrightarrow{k}$ soit envoyé sur lui même : a vaut $1/13$.

Mais ce n'est pas cette matrice qu'on cherche, mais celle du projecteur de noyau $Vect(\overrightarrow{i} + 4.\overrightarrow{k})$ et d'image P. On y passe avec $I_3 - M$: $\boxed{\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 & -2 & -3 \\ 0 & 13 & 0 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}}$

MPSI 2	Endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f^2 = 2.f + 15.Id$.	**I.S.27**

On va directement construire f^{-1} en réfléchissant :

on part de $f^2 = 2.f + 15.Id$ qu'on déséquilibre en $15.Id = f^2 - 2.f$ puis $Id = \frac{f^2 - 2.f}{15}$ et même en $Id = f \circ \frac{f - 2.Id}{15} = \frac{f - 2.Id}{15} \circ f$; on a trouvé un inverse pour f valable à droite comme à gauche : $(f - 2.Id)/15$.

Rien ne vous interdisait bien sûr de poser a priori $f^{-1} = a.f + b.Id$ à composer par f et à identifier à l'équation. Qu'est ce qui autorisait à identifier ? Aucun argument d'unicité ! Mais pensez que c'est le sens $(a, b) = (1/15, -2/15) \Rightarrow f \circ (a.f + b.Id) = Id$ qui sert...

Je gagne un point sur les deux :

par linéarité, on compose : $p \circ p = \frac{(f + 3.Id) \circ (f + 3.Id)}{8^2} = \frac{f^2 + 3.Id \circ f + 3.f \circ Id + 9.Id}{8^2} = \frac{(2.f + 15.Id) + 6.f + 9.Id}{8.8} = \frac{8.(f + 3.Id)}{8.8} = p$

Je perds un point sur les deux :

j'oublie de préciser que p est bien un endomorphisme de $(E, +, .)$.

L'autre projecteur est $\frac{5.Id - f}{8}$. Les symétries sont $\frac{Id - f}{4}$ et $\frac{f - Id}{4}$.

Ayant un projecteur, on peut décomposer en somme directe : $E = Ker(p) \oplus Ker(Id - p)$ c'est à dire $E = Ker\Big(\dfrac{f+3.Id}{8}\Big) \oplus Ker\Big(\dfrac{5.Id - f}{8}\Big)$.
Or, pour tout morphisme φ et tout réel non nul α, on a $Ker(\alpha.f) = Ker(f)$ et $Im(\alpha.f) = Im(f)$.
On a alors la somme directe de deux noyaux : $Ker(f+3.Id) \oplus Ker(f-5.Id) = E$: tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E se décompose d'une façon unique sous la forme $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_{-3}} + \overrightarrow{u_5}$. On applique f : $f(\overrightarrow{u}) = -3.\overrightarrow{u_{-3}} + 5.\overrightarrow{u_5}$ puis $f^n(\overrightarrow{u}) = (-3)^n.\overrightarrow{u_{-3}} + 5^n.\overrightarrow{u_5}$.
Le fait que E soit $\mathbb{R}^4$ n'intervient pas encore.

On réfléchit à la valeur de $Tr(f)$ et $\det(f)$. Il suffit de les déterminer en trouvant la matrice de f sur une base de $\mathbb{R}^4$... bien choisie. Et laquelle choisir ? Une base construite à partir d'une base de chacun de ces sous-espaces : une base de $Ker(-3.Id)$ suivie d'une base de $Ker(f + 5.Id)$.
Prenons un cas particulier pour saisir : $Ker(f + 3.Id)$ est de dimension 3 et $Ker(f - 5.Id)$ est (donc) de dimension 1. On construit une base de $\mathbb{R}^4$: $(\overrightarrow{\epsilon_1}, \overrightarrow{\epsilon_2}, \overrightarrow{\epsilon_3}, \overrightarrow{\epsilon_1})$. De cette base dans elle même, la matrice de f est $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ puisque l'on a par exemple $f(\overrightarrow{\epsilon_1}) = -3.\overrightarrow{\epsilon_1}$.
La trace de f est alors $3.(-3) + 1.5$.
Ayant compris ce principe, on dresse alors un tableau, suivant la dimension d'un des noyaux

$\dim(Ker(f+3.Id))$	$\dim(Ker(f+3.Id))$	M	$Tr(M)$	$\det(M)$
4	0	$Diag(-3,-3,-3,-3)$	$4.(-3) = -12$	$(-3)^4 = 81$
3	1	$Diag(-3,-3,-3,5)$	$3.(-3) + 5 = -4$	$(-3)^3.5 = -135$
2	2	$Diag(-3,-3,5,5)$	$2.(-3) + 2.5 = 4$	$(-3)^2.5^2 = 225$
1	3	$Diag(-3,5,5,5)$	$(-3) + 3.5 = 12$	$(-3).5^3 = -375$
0	4	$Diag(5,5,5,5)$	$4.5 = 20$	$5^4 = 625$

Les couples possibles : $\boxed{(-12, 81), (-4, -135), (4, 225), (12, -375), (20, 625)}$

MPSI 2	Projecteurs de la forme $z \longrightarrow a.z + b.\overline{z}$.	**I.S.27**

L'application $z \longrightarrow a.z + b.\overline{z}$ va de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On vérifie juste ensuite :
$a.(z_1 + z_2) + b.\overline{(z_1 + z_2)} = a.z_1 + b.\overline{z_1} + a.z_2 + b.\overline{z_2}$ et $a.\lambda.z + b.\overline{\lambda.z} = \lambda.(a.z_1 + b.\overline{z_1})$ pour λ réel.

On compose : $z \longrightarrow a.z + b.\overline{z} \longrightarrow a.(a.z + b.\overline{z}) + b.\overline{a.z + b.\overline{z}}$. On trouve $z \longrightarrow (a^2 + |b|^2).z + (a + \overline{a}).b.\overline{z}$.
On identifie avec l'application initiale : $a^2 + |b|^2 = a$ et $(a + \overline{a}).b = b$.
Or, on a pris $a = e^{i.\pi/3} = \dfrac{1 + i.\sqrt{3}}{2}$. La deuxième équation ne donne rien. La première donne juste $|b|^2 = 1$.
Il y a donc des projecteurs. Un pour chaque valeur de b sur le cercle trigonométrique.

Un exemple : $b = i$. Le projecteur est $z \longrightarrow e^{i.\pi/3}.z + i.\overline{z}$. Je vous en donne la matrice sur la base canonique : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

MPSI 2	L'espace vectoriel $(0, 1, \dots, 6^2, +, .)$.	**I.S.27**

Il y a quarante neuf vecteurs dans cet espace vectoriel. Les vecteurs de la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ en sont les multiples : $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{et} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}}$
Si vous y tenez, représentez les sous forme alignée sur un quadrillage.

On prend la matrice $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ et on exige : $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & a \\ 4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$. On trouve déjà : $4.a = -2 = 5$ d'où $a = 2.4.a = 2.5 = 3$. On trouve ensuite : $8 + 4.b = 4$ d'où $b = -1 = 6$.

On vérifie dans le reste de la matrice : $\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 24 \\ 32 & 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}}$

On cherche le noyau en résolvant le système dégénéré $2.x + 3.y = 0$ et $4.x + 6.y = 0$. On trouve $y = -2.x/3 = 5.x/3 = 5.x.5 = 25.x = 4.x$. On vérifie : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

L'ensemble des vecteurs du noyau $\boxed{\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}}$

MPSI 2 | La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & * \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. | **I.S.27**

C'est bien la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Son déterminant vaut $10 - x$. Pour que l'endomorphisme ne soit pas un automorphisme, il faut et il suffit que le déterminant soit nul *(sinon morphisme inversible)*. On prend donc $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 10 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

On résout donc $M.X = 0$ *(vecteur nul)*. On trouve le vecteur $\begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et ses multiples *(on savait à l'avance que le noyau était non réduit à 0)*. Le noyau est de dimension 1. Par soustraction, le rang est de 2.

Or, les vecteurs colonne de la matrice sont dans l'ensemble image. Donc, dans l'ensemble image, il y a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Tout autre vecteur est dans le plan image si et seulement si il forme avec eux une famille liée, ce qui se traduit par la nullité du déterminant.

Efficace, non ?

< ♡(83) > Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel de dimension n. On prend deux endomorphismes f et g. Montrez : $Ker(f)\cap Ker(g)\subset Ker(u\circ f+v\circ g)$ pour tout couple (u,v) d'endomorphismes de E. [1 pt.]

< ♢(101) > On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel (noté E), dont la base canonique est $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$(notée C). On se donne $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Montrez que $M\longrightarrow M.A$ est un endomorphisme de E (note μ_A). [1 pt.] Complétez la matrice de μ_A sur la base C : $Mat_C^C(\mu_A)=\begin{pmatrix}a&c&.&.\\b&.&.&.\\0&.&.&.\\0&.&.&d\end{pmatrix}$. [3 pt.] Calculez le déterminant et la trace de μ_A et déterminez son rang, en fonction du rang de A. [3 pt.]

< ♢(102) > De la même manière déterminez $Mat_C^C(M\longrightarrow^t M)$ ainsi que sa trace et son déterminant. [3 pt.] Existe-t-il un endomorphisme φ de E vérifiant $\varphi\circ\varphi=(M\longrightarrow^t M)$. [1 pt.]

< ♢(103) > Quels sont le déterminant et la trace de la transposition sur $M_3(\mathbb{R})$? [3 pt.]

Question subsidiaire : déterminant et trace de la transposition sur $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$? [3 pt.]

< ♣(30) > Le physicien du C.E.A. Etienne Klein écrit à propos de `Albert Einstein` : “*rien n'est établi*” et à propos de `la gravitation universelle` : “*loi vitale régnant sur la vie*”. Pouvez vous expliquer ? [1 pt.]

Au fait, et “un million de briques de lait UHT”, ça tient dans notre salle ? [1 pt.]

< ♠(51) > On prend pour E l'espace vectoriel des quaternions de Hamilton, muni de sa base canonique $(1,i,j,k)$. On prend pour f la projection sur $Vect(i,j,k)$ parallèlement à $Vect(1+i+j)$. Donnez sa matrice M sur la base canonique. Déterminez sa trace, son rang et son déterminant, et la trace de M^5. [3 pt.] Factorisez M sous la forme $A.B$ avec A et B n'ayant chacune que douze coefficients. [3 pt.]

< ♢(104) > Calculez $\displaystyle\int_0^\pi\frac{\cos(\theta)}{1+\sin(\theta)}.d\theta$ et $\displaystyle\int_0^\pi\frac{\sin(\theta)}{1+\sin(\theta)}.d\theta$, après les vérifications d'usage... [4 pt.]

< ♠(52) > Soit M une matrice carrée réelle à p colonnes et q lignes. Montrez pour tout vecteur X de taille n les implications $(M.X=0)\ \Rightarrow\ ({}^tM.M.X=0)$ et
$({}^tM.M.X=0)\ \Rightarrow\ ({}^tX.M.M.X=0)\ \Rightarrow\ ({}^t(M.X).(M.X)=0)\ \Rightarrow\ (M.X=0)$, en précisant à chaque fois qui est appelé 0. [5 pt.]

Déduisez $Ker(M)=Ker({}^tM.M)$ puis $rg(M)=rg({}^tM.M)$. [2 pt.]

$I.S.28$	CHARLEMAGNE — Correction — ANNEE **2012/13**	$I.S.28$

MPSI 2	$Ker(u \circ f + v \circ g)$.	**I.S.28**

On prend un vecteur $\overrightarrow{a}$ dans l'intersection des deux noyau. On a alors $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$ et $g(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$. On compose par des endomorphismes : $u(f(\overrightarrow{a})) = u(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$ et $v(g(\overrightarrow{a})) = v(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$. On somme : $(u \circ f + v \circ g)(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$ et on reconnaît $\overrightarrow{a} \in Ker(u \circ f + v \circ g)$.

MPSI 2	La transformation $M \longrightarrow M.A.$	**I.S.28**

On a bien une application linéaire : $\tau_A(\lambda.M + \mu.N) = (\lambda.M + \mu.N).A = \lambda.M.A + \mu.N.A = \lambda.\tau_A(M) + \mu.\tau_A(N)$.
De plus, elle va bien de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui même (formats matriciels).
Pour ce qui est de calculer sa matrice sur la base C (qui n'est pas la matrice de A, ne confodez pas), on applique la définition :
• première colonne : les composantes sur C de l'image du premier vecteur de C :
$\tau_A(E_1^1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a pour composantes a, b, 0 et 0
• deuxième colonne : les composantes de l'image du deuxième vecteur de C :
$\tau_A(E_1^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a pour composantes c, d, 0 et 0 : $\begin{pmatrix} a & c & . & . \\ b & d & . & . \\ 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & . & d \end{pmatrix}$
• troisième colonne : $\tau_A(E_2^1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ d'où $\begin{pmatrix} a & c & 0 & . \\ b & d & 0 & . \\ 0 & 0 & a & . \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$
• quatrième colonne : $\boxed{\begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}}$

Le déterminant se calcule en développant par rapport à la première colonne trois fois de suite :
$a.\begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{vmatrix} - b.\begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{vmatrix} = a.d.\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} - b.c.\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = (a.d - b.c).\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \det(A)^2$.
Pour la trace, on trouve $2.Tr(A)$.

Il reste la question du rang.
• si A est de rang 0, la matrice de τ_A est nulle, donc de rang 0.
• si A est de rang 2, le déterminant de τ_A est aussi non nul, et τ_A est de rang 4.
• si A est de rang 1, ses colonnes sont proportionnelles; il en est alors de même pourr C_1 et C_2 puis pour C_3 et C_4 (colonnes de $Mat_C^C(\tau_A)$), le rang de τ_A vaut au plus 2, la présence des 0 fait que le rang ne peut pas être de 1 (colonnes toutes proportionnelles de C_1 à C_4); le rang de τ_A vaut 2.

déterminant	trace	si $rg(A) = 0$	si $rg(A) = 1$	si $rg(A) = 2$
$\det(A)^2$	$2.Tr(A)$	alors $rg(\tau_A) = 0$	alors $rg(\tau_A) = 2$	alors $rg(\tau_A) = 4$

MPSI 2	Matrice de la transposition.	**I.S.28**

La transposition est bien un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$, espace de dimension 4. La matrice de la transposition est donc de taille 4 sur 4. On calcule :

• $E_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1^1$, d'où $\begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \end{pmatrix}$

• $E_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_2^1$, d'où $\begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & . & . \\ 0 & 1 & . & . \\ 0 & 0 & . & . \end{pmatrix}$

• $E_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1^2$

• enfin E_2^2 a pour image lui même. On peut conclure avec $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ La trace vaut 2.

Le déterminant vaut -1 et le rang vaut donc 4.

Qu'est ce qui plombe les élèves sur un tel exercice ? Leur propention à tout mélanger, e à confondre "transposée" *et* "transposition"*. La transposée d'une matrice M, c'est ${}^tM$. La transposition, c'est $M \longrightarrow^t M$. Evidemment, les élèves au cerveau aussi évolué qu'un yaourt sans sucre de la cantine ne perçoivent pas la différence, persistant à confondre $f(x)$ et f. Pour ceux là, je dirai que leur professeur de mathématiques de Terminale les a envoyés au casse-pipe en les orientant vers les filières scientifiques en écrivant des appréciations positives dans leurs dossiers APB.*
La matrice de la transposée de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, c'est bien $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
La matrice de la transposition c'est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui transforme $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{pmatrix}$ (écritures en composantes sur la base canonique des matrices M et ${}^tM$).

Si il existait φ de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui même vérifiant $\varphi^2 = (M \longrightarrow^t M)$, alors on aurait $\det(\varphi)^2 = -1$, ce qui, sur $\mathbb{R}$ est impossible. Fin du raisonnement par l'absurde.

On évolue un peu, avec la transposition sur $M_3(\mathbb{R})$. L'espace vectoriel est de dimension 9, la matrice cherchée est de taille 9 sur 9. Mais elle contient beaucoup de 0. En fait, chaque vecteur de la base canonique a pour image un vecteur de la base canonique, d'où un seul 1 par colonne. De plus, E_1^1, E_2^2 et E_3^3 sont leur propre image, d'où trois 1 sur la diagonale. La trace vaut 3. Ensuite, E_1^2 a par exemple pour image E_2^1 ; la deuxième colonne a son 1 en ligne 4.

Le bilan donne la matrice $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}}$ de trace 3, de déterminant -1 *(trois échanges de colonnes deux à deux pour retrouver la matrice unité, de déterminant* 1*)* et de rang 9 *(inversible).*

Et en dimension n ? Chaque matrice de la base canonique E_i^k a pour image E_k^i dont les composantes sont faites d'un 1 et de $n^2 - 1$ chiffres 0 (oui, la matrice est de taille n^2 sur n^2). Pour avoir la trace, il suffit de compter le nombre de 1 sur la diagonale, c'est à dire le nombre de matrices de la base canonique qui ne changent pas sous l'effet de la transposition : les n matrices E_i^i. La trace vaut n.
Il reste $n^2 - n$ matrices qui s'échangent deux à deux. Pour revnir de la matrice de la transposition à la matrice diagonale I_{n^2}, il suffit d'échanger ces matrices deux à deux, d'ou signature *(pardon, "déterminant")* en $(-1)^{(n^2-n)/2}$.
C'est aussi la dimension de $A_n(\mathbb{R})$, espace des matrices antisymétriques, et on le retrouve en travaillant sur la

meilleure des bases...

MPSI 2	D'"Albert Einstein" à "rien n'est établi".	**I.S.28**

C'est juste un anagramme. Les lettres sont les même, mais dans le désordre. D'où le bonus avec la signature : $\begin{vmatrix} a & l & b & e & r & t & e & i & n & s & t & e & i & n \\ r & i & e & n & n & e & s & t & e & t & a & b & l & i \end{vmatrix} = \overrightarrow{(arn_1e_1n_2i_1t_1e_2st_2)} \circ \overrightarrow{(li_2)} \circ \overrightarrow{(be_3)}$. La signature vaut ici $(-1)^9.(-1)^1.(-1)^1$ ce qui fait -1.

Il en va de même avec la gravitation universelle et *loi vitale régnant sur la vie*

Etienne Klein a publié un livre entier sur ces anagrammes, correspondant à chaque fois à des définition possibles des suites de mots choisis. De plus, dans son livre, il explique sa démarche avec "non commutativité" mathématique et "formules chimiques" (par exemple $ABE_3I_2LN_2RST_2$).

Dire que c'est au même C.E.A. que travaille Joel Martin ("la Comtesse" des contrepéteries du Canard Enchaîné). Il doit y avoir des radiations un peu spéciales là bas.

Un million de briques de lait U.H.T., c'est un million de litres, c'est à dire un million de décimètres cubes. En mètres cubes, ça fait 10^3m^3. En estimant que notre salle fait dix mètres sur dix mètres, il faut dix mètres de haut, ce que nous n'avons pas. Mais avec deux salles de cours, on n'en est plus loin.

Tiens, au fait, en une journée, vous inhalez quel volume d'air (que vous exhalez bien sûr).

Et sur une journée, en circuit fermé, votre coeur pompe quel volume de sang ?

Et vous êtes vous un jour demandé ce que représente tout ce que vous allez dévorer en une vie ? Peut être retrouverez vous sur Internet la photo que fit mon ami Henry-Achille Pessar dans les années 70 de cette simulation sur tout un parking d'hypermarché.

MPSI 2	Un projecteur sur $\mathbb{H}$.	**I.S.28**

La linéarité du projecteur est acquise. Il reste à calculer les images de chacun des vecteurs de base. C'est vite fait pour i, j et k qui sont dans l'espace sur lequel on projette : on a $p(i)i$, $p(j) = j$ et $p(k) = k$. D'où trois 1 sur la fin de la diagonale.

Il reste la première colonne. Pour ce faire, on décompose 1 en $(1+i+j)-i-j$ et dans son image, on efface $1+i+j$ qui est dans le noyau. On a donc : $p(1) = -i-j$.

On remplit la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Elle a pour déterminant 0 *(projecteur non inversible)*, pour rang 3 *(dimension de l'image)* et pour trace 3 *(la trace est égale au rang pour un projecteur).*

Sans effort, M^5 est égale à M *(projecteur)* et sa trace vaut 3 *(cadeau traitable même sans avoir calculé la matrice M).*

Si il s'agit de factoriser comme produit de matrices à douze coefficients, il faut s'interroger sur le format de ces matrices : 4 sur 3, 3sur 4, 2sur 6... et pourquoi pas 1 sur 12. Des matrices de format 2 sur 6 et 6 sur 2 pourraient se multiplier, mais ne donneraient pas au final une matrice de taille 4 sur 4. Pire encore avec 1 sur 12. On va donc prendre 4 ligne sur trois colonnes et le contraire. C'est cohérent : on va aller de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ *(endomorphisme)* en passant par $\mathbb{R}^3$ *(d'où chute du rang d'une unité).*

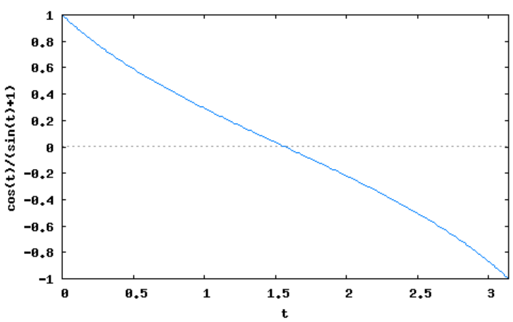
On va justement utiliser le fait que sur $Vect(i,j,k)$, p induit l'identité. Ceci nous pousse à créer un bloc "unité" : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$. La ligne de zéros, c'est pour l'image qui ne fait pas intervenir 1. On complète ensuite assez logiquement lebloc de droite, en se disant qu'il "va chercher le noyau". Or, dans le noyau, on trouve $-1+i$ et $-1+j$:

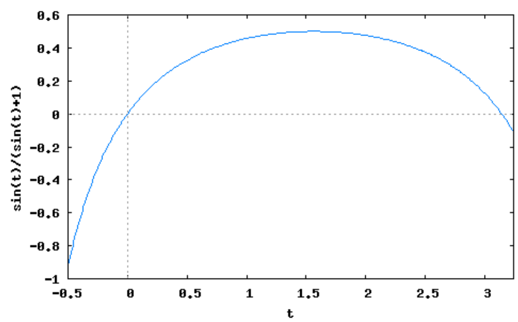
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Celà dit, il y a d'autres solutions, en glissant entre nos deux matrices V et H un couple inversible : $(V.P).(P^{-1}.H)$.

MPSI 2 | Les intégrales $\int_0^\pi \frac{\cos(\theta).d\theta}{1+\sin(\theta)}$ et $\int_0^\pi \frac{\sin(\theta).d\theta}{1+\sin(\theta)}$. | **I.S.28**

On peut intégrer, car les fonctions sous le signe somme sont définies, continues.
Pour la première, même pas besoin d'invoquer Bioche, on voit tout de suite le rôle du cosinus au numérateur, comme dérivée du sinus du dénominateur. On dispose d'une primitive en $x \longrightarrow \ln(1+\sin(x))$. Les valeurs en 0 et π se simplifient mutuellement *(et même ici directement)*.
Pour l'autre intégrale, aucun des trois changements $\theta \longrightarrow -\theta$, $\theta \longrightarrow \pi-\theta$ et $\theta \longrightarrow \pi+\theta$ n'est probant. On pose donc $t = \tan(\theta/2)$ avec prudence au bout de l'intervalle d'intégration. On aboutit à $\displaystyle\int_{t=0}^{t\mapsto+\infty} \frac{\frac{2.t}{1+t^2}}{1+\frac{2.t}{1+t^2}}\frac{2.dt}{1+t^2}$. Il va faloir décomposer en éléments simples le $\dfrac{4.t}{(1+t^2).(1+t)^2}$ qui intervient. On le décompose en $\dfrac{a.t+b}{1+t^2}+\dfrac{c}{1+t}+\dfrac{d}{(1+t)^2}$. On calcule d par la méthode des pôles : $\dfrac{4.(-1)}{(1+(-1)^2)}$. Il vaut -2. Le comportement à l'infini (négligeable devant $1/t$) fait que a et c sont opposés.
Bref, après résolution d'un système si nécessaire, on trouve $\dfrac{4.t}{(1+t^2).(1+t)^2} = \dfrac{0}{1+t}-\dfrac{2}{(1+t)^2}+\dfrac{2}{1+t^2}$.
On intègre en $\left[2.Arctan(t)+\dfrac{2}{1+t}\right]_{t=0}^{t\mapsto+\infty}$ et on trouve $\boxed{\pi-2}$





MPSI 2 | $Ker(M)$ et $Ker({}^tM.M)$. | **I.S.28**

Si X est dans $\mathbb{R}^p$ et qu'on suppose $M.X = 0_q$, alors par multiplication par ${}^tM$ (q colonnes et p lignes), on a ${}^tM.M.X = {}^tM.0_q = 0_p$. On déduit : $Ker(M) \subset Ker({}^tM.M)$ même si ces deux matrices n'ont pas le même format.
Si l'on suppose ${}^tM.M.X = 0_p$ alors par multiplication par le vecteur ligne ${}^tX$, on a ${}^tX.{}^tM.M.X = {}^tX.O_p = 0$ (réel), puis en utilisant ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$: ${}^t(M.X).(M.X) = 0$ (réel). Mais en nommant Y le vecteur colonne $M.X$ de composantes y_1 à y_q, on constate que le calcul ${}^tY.Y$ donne $(y_1)^2+\ldots+(y_q)^2$. Sa nullité entraîne celle de tous les y_i (somme de carrés). On termine donc : $({}^tM.M.X = 0_p) \Rightarrow (M.X = 0_q)$, d'où l'autre inclusion entre noyau.
Avec l'égalité des noyaux et la relation $rg(M) = \dim(\mathbb{R}^p) - \dim(Ker(M))$ et $rg({}^tM.M) = \dim(\mathbb{R}^p) - \dim(Ker({}^tM.M))$, on aboutit à l'égalité des rangs.

$I.S.29$	CHARLEMAGNE MPSI2	Lundi 10 juin	ANNEE **12/13**	$I.S.29$

$<\heartsuit(84)>$ Montrez que si A est une matrice carrée de taille n diagonalisable, alors ${}^tA$ et A^2 sont diagonalisables. 2 pt.

$<\clubsuit(31)>$ Attention, ici, tous les coefficients sont dans $\{0, 1, \dots, 6\}$ avec l'addition et la multiplication modulo 7, vos résultats le seront aussi, ou alors recommencez une sup, mais une PCSI [2]. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Calculez son déterminant. Quel est le rang de A ? 3 pt.

$<\clubsuit(32)>$ Déterminez le noyau de $A - I_3$. 2 pt.

$<\clubsuit(33)>$ Donnez le spectre de A. 2 pt.

$<\clubsuit(34)>$ A quelle puissance n *(différente de* 1) aurez vous $A^n = A$? 2 pt.

$<\diamondsuit(105)>$ On tape sur Maple l'instruction

```
A :=matrix(6,6,(i,k)->if irem((k-i)^2,6)=1 then 1 else 0 fi) ;
```

Sachant que `irem(a,b)`, c'est le reste de la division de `a` par `b` (c'est à dire a modulo b), indiquez la matrice obtenue. 2 pt.

$<\diamondsuit(106)>$ J'ai tapé ensuite `charpoly(A,x)` et j'ai obtenu $x^6 - 6.x^4 + 9.x^2 - 4$. Donnez le spectre de A. 2 pt. Pouvez sous me dire tout de suite si A est diagonalisable ? 1 pt.

$<\diamondsuit(107)>$ Que donnera l'instruction `multiply(A,vector(6,[1,1,1,1,1,1])` ? 1 pt.

$<\diamondsuit(108)>$ Déterminez le noyau de $A - I_6$. 3 pt.

$<\diamondsuit(109)>$ A est elle diagonalisable ? 3 pt.

$<\spadesuit(53)>$ Donnez le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $(1+e^x)^{ch(x)}$. 4 pt. ou à défaut à l'ordre 2, avec allure locale du graphe évidemment.

$<\heartsuit(85)>$ Déterminez le centre du cercle d'équation $|z-1| = 3.|z+1+i|$. 2 pt.

$I.S.29$	MPSI2	961 points	Année 2012/13	$I.S.29$

[2]physique chimie sans intelligence

I.S.29	CHARLEMAGNE — Correction — ANNEE **2012/13**	I.S.29

MPSI 2	Diagonalisabilité de ${}^tA$ et A^2.	**I.S.29**

C'est une simple question de cours. On suppose A diagonalisable. On l'écrit donc $A = P.D.P^{-1}$ avec P inversible *(eh, banane, comment parlerais tu de P^{-1} sinon ?)* et D diagonale ($D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$).
On élève au carré :$A^2 = P.D^2.P^{-1}$ avec P inversible et D diagonale ($D = diag((\lambda_1)^2, \dots, (\lambda_n)^2)$). A^2 (et toutes les autres puissainces) sont diagonalisables.
On transpose aussi : ${}^tA ={}^t P^{-1}.{}^tD.{}^tP = ({}^tP)^{-1}.D.({}^tP)$. On reconnapit que ${}^tA$ est diagonalisable, semblable à la même matrice diagonale que A. Mais on ne sait pas expliquer à quoi ça correspond exactement...

MPSI 2	La matrice à coefficients dans $0, 1, \dots, 6$.	**I.S.29**

On développe le déterminant par rapport à la première colonne (en sachant que 6 est l'opposé de 1) : $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 0$ (je ne laisserai pas François lire ça par dessus mon épaule, il va me croire fou).

$\boxed{\text{Le déterminant est nul, la matrice n'est pas inversible.}}$

Elle n'est pas de rang 3. Ni de rang 0 puisque ce serait sinon la matrice nulle.
Je n'irai pas affirmer qu'elle soit de rang 1 sans argumenter un peu. En effet, la colinéarité n'est pas un phénomène visible. Par exemple, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (dans un rapport 3). Mais $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ n'est par exemple pas colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ car le seul rapport de colinéarité possible, à cause de la dernière composante) serait 7 (euh, pardon, 0) et ce n'est pas le cas.
Bref, $\boxed{\text{le rang de } A \text{ est de 2}}$

On calcule $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ qui a pour déterminant $1.\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ c'est à dire 0. C'est bon signe, on va "avoir du noyau". On résout le système dont les équations sont $4.y + 2.z = 0$, $6.x + 3.y + 3.z = 0$ et $y + 4.z = 0$. On note que la dernière équation est la même que la première : $y = 3.z$ (ou $z = 5.y$, c'est pareil). On remplace dans la seconde : $6.x + 12.z = 0$. On réduit : $-x + 5.z = 0$.

Tout s'exprime à l'aide de la seule composante z : $z.\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Je vous laisse vérifier en effectuant le calcul si nécessaire : $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 42 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On peut décrire ce noyau en donnant le vecteur de base ci dessus, mais je vous en donne même la liste des sept vecteurs, pour que vous y reconnaissiez celui que vous aurez pris pour base :

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}}$$

On a montré qu'il existait un sous espace propre de dimension 1 : $Ker(A)$ *(par la formule du rang si nécessaire)* et un autre sous-espace propre de dimension 1 : $Ker(A - I_3)$.
On a donc deux valeurs propres simples : 0 et 1. Bon début pour le spectre.
On trouve la troisième valeur propre grâce à la trace *(laquelle vaut 3)*. C'est donc que la dernière valeur propre vaut 2. Le sepctre est $\{0, 1, 2\}$
Désolé pour les braves psikopats qui auront gentillement calculé le polynôme caractéristique en effectuant : $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 2 \\ 6 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 10.\lambda^2 - 2.\lambda - 91$, puis en le réduisant modulo 7. Ils seront arrivés à $\lambda^3 + 4.\lambda^2 + 2.\lambda$ *(au signe près)*, de racines exhibées ci dessus.

Le corollaire de VanDerMonde appliqué à A de spectre de même cardinal que la dimension de l'espace garantit que A est diagonalisable, semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On écrit alors $A = P.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.P^{-1}$ où P est une matrice inversible que je n'expliciterai pas *(sa deuxième colonne contient un des vecteurs de la liste encadrée plus haut, c'est tout ce que j'ai à dire, et sa première contient un vecteur non nul du noyau)*.

Par récurrence immédiate : $A^n = P.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.P^{-1}$ *(sauf pour n nul)*. Or, $2^3 = 1$ puis $2^4 = 2$. On aura donc $\boxed{A^4 = P.D^4.P^{-1} = P.D.P^{-1} = A}$
Sympathique, non ? (validé par Maple).

MPSI 2	Une matrice et des instructions Maple.	**I.S.29**

L'instruction `A :=matrix(p,q,(i,j)->truc(i,j)) ;` permet de remplir une matrice de taille p sur q dont le terme de position (i, j) est $truc(i, j)$ comme on s'en doute.
Ici, il nous faut donc comprendre que la matrice est carrée (ouf, inutile de savoir si on entre "ligne,colonne" ou "colonne,ligne". De plus, i et j ont des rôles symétriques, ce qui nous épargne aussi les inquitudes sur les lignes et colonnes. La matrice sera d'ailleurs symétrique réelle *(donc diagonalisable (ah ?))*.
Il ne reste qu'à comprendre ce qu'on calcule : si $(j - i)^2$ modulo 6 vaut 1 alors on met 1 sinon, on met 0. Bref, c'est $a_i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } (k-i)^2 = 1 \quad mod \quad 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Pour les termes diagonaux : 0.
Pour $k - i = 1$ *(juste au dessus de la diagonale)* : 1.
Pour $i - k = 1$ *(juste au dessous de la diagonale)* : 1.
Pour $ki = 2$ *(trop au dessus de la diagonale)* : 0. De même, plus on s'en éloigne.
Mais quand $(k - i)^2$ vaut 25, on remet 1. Ceci n'a lieu que pour les couples $(6, 1)$ et $(1, 6)$.

La matrice est donc : $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$ *(une diagonale de 0 en sandwich entre des 1 qui reviennent à l'autre bout quand ils sortent de la matrice)*.

On nous donne le polynome caractéristique : $x^6 - 6.x^4 + 9.x^2 - 4$

. Il a pour racine évidente 1 et, par parité -1 *(c'est en fait un polynôme de degré 3 en x^2).* On factorise $X^3 - 6.X^2 + 9.X - 4 = (X-1).(X^2 - 5.X + 4)$ sans effort.
Je rappelle que si vous avez encore besoin de poser $(X-1).(a.X^2 + b.X + c)$, développer, obtenir un système et calculer a, b et c, c'est votre droit. Mais au moins ne me mettez pas ça sur votre copie. C'est comme si face au moindre calcul du type "$23 \times 31 = ?$", vous me posiez la multiplication au milieu de la page, avec ses retenues écrites en rouge pour ne pas les perdre de vue. Le calcul se fait de tête, normalement. Ou à la rigueur en posant la division euclidienne.
On termine : $X^3 - 6.X^2 + 9.X - 4 = (X-1).(X^2 - 5.X + 4) = (X-1)^2.(X-4)$. Les six racines du polynôme caractéristique forment la liste $\boxed{[1, 1, -1, -1, 2, -2]}$
Tel est donc le spectre. Comme il y a des racines doubles, on ne sait pas si la matrice sera diagonalisable.

La fonction `vector(6,[1,1,1,1,1,1])` construit le vecteur dont toutes les composantes valent 1. Son image est son double.
Tiens, un vecteur propre de valeur propre 2 !

Pour la valeur propre 1, on résout le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} -u & +v & & & & +z & =0 \\ u & -v & +w & & & & =0 \\ & v & -w & +x & & & =0 \\ & & w & -x & +y & & =0 \\ & & & +x & -y & +z & =0 \\ u & & & & +y & -z & =0 \end{array}\right.$. En sommant les lignes, on a déjà $u+v+w+x+y+z=0$. En y remplaçant $u+w$ par v (ligne 2) et $x+z$ par y (ligne 5), on trouve $2.v + 2.y = 0$. On déduit : $y = -v$.
De même, on trouve $x = -u$ et $z = -w$. On reporte dans la somme : elle n'apporte plus rien.

On trouve, à ce stade, des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} u \\ u+w \\ w \\ -u \\ -u-w \\ -w \end{pmatrix}$.

On vérifie en effectuant le produit : cette condition est suffisante.

On a donc : $\boxed{Ker(A - I_6) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$

La valeur propre 1 apporte deux vecteurs propres pour une base.

On ne peut toujours pas conclure. Mais on cherche ensuite le noyau de $A + I_3$. On fait le même type de calculs (conditions nécessaires par exemple en sommant, puis vérification pour voir si la condition est suffisante). On trouve $Ker(A - I_6) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
La valeur propre -1 apporte aussi deux vecteurs propres pour une base.

Il nous reste les valeurs propres -2 et 2 qui vont apporter chacune un vecteur propre *(déjà fait pour 2)*. Au total, six vecteurs propres, toute est en place pour une base (sans même expliciter des vecteurs propres pour -2 et 2).
On a six vecteurs dans $\mathbb{R}^6$, donc une base. La matrice est diagonalisable.

On pourra prendre $diag(1,1,-1,-1,2,-2)$ et construire la matrice P avec les vecteurs propres quasiment dans l'ordre de lecture sur notre page.

MPSI 2	Un développement limité totalement inutile : $(1+e^x)^{ch(x)}$.	**I.S.29**

On doit étudier $(1+e^x)^{ch(x)}$ qui est bien défini sur $\mathbb{R}$. Son logarithme est $ch(x).\ln(1+e^x)$.

On effectue tout à l'ordre 3 : $1+e^x = 2+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ que l'on factorise en $1+e^x = 2.\Big(1+\frac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{12}+o(x^3)\Big)$.

On reporte : $\ln(1+e^x)=\ln(2)+\ln\Big(1+\frac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{12}+o(x^3)\Big)$.

On développe : $\ln(1+e^x)=\ln(2)+\Big(\frac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{12}\Big)-\dfrac{1}{2}.\Big(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}\Big)^2+\dfrac{1}{3}.\Big(\dfrac{x}{2}\Big)^3+o(x^3)$

On simplifie : $\ln(1+e^x)=\ln(2)+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{8}+o(x^3)$ quand x tend vers 0 (les x^3 sont partis).

On rappelle : $ch(x)=1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$

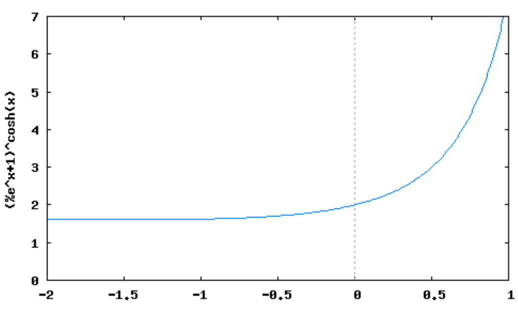
$ch(x).\ln(1+e^x)=\ln(2)+\dfrac{x}{2}+\Big(\dfrac{4.\ln(2)+1}{8}\Big).x^2+\dfrac{x^3}{4}+o(x^3)$

On en prend l'exponentielle, en utilisant la propriété de morphisme de cette dernière :
$e^{ch(x).\ln(1+e^x)}=e^{\ln(2)}.e^{x/2}.e^{a.x^2}.e^{x^3/4}.e^{o(x^3)}$ avec $a=(4.\ln(2)+1)/8$.

On développe chacune de ces exponentielles à des ordres plus ou moins poussés :
$e^{\ln(2)}=2$, $e^{x/2}=1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{48}+o(x^3)$, $e^{a.x^2}=1+a.x^2+o(x^3)$ et $e^{x^3/4}=1+\dfrac{x^3}{4}+o(x^3)$ (quand x tend vers 0).

On multiplie ces quantités progressivement entre elles, jusqu'à

$\boxed{(1+e^x)^{ch(x)}=2+x+\dfrac{1+2.\ln(2)}{2}.x^2+\dfrac{4+3.\ln(2)}{6}.x^3+o(x^3)}$ quand x tend vers 0



MPSI 2	Un cercle.	**I.S.29**

L'équation en coordonnées cartésiennes est $(x-1)^2+y^2 = 9.((x+1)^2+(y+1)^2)$ c'est à dire $8.(x^2+y^2)+20.x+18.y+17=0$. On reformule en $8.\Big((x+5/4)^2+(y+9/8)^2\Big) = \ldots$. Le centre est donc $(-5/4,-9/8)$.