Charlemagne
MPSI-2 / 2013

Mardi 10 septembre

# $IS01$

♡1 Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ une suite *(finie)* de réels positifs. La moyenne des carrés est elle égale au carré de la moyenne ? •1 pt.•

La médiane des carrés est elle égale au carré de la médiane ? •1 pt.•
*Rappel : la médiane d'un ensemble* $[b_k | k \in I]$ *(avec* $Card(I)$ *impair pour la facilité) est l'élément* $b_m$ *vérifiant* $Card\{i \in I | b_i \leqslant b_m\} = (Card(I)+1)/2$ *(la moitié des* $b_i$ *sont plus petits que la médiane). Par exemple, la médiane de* $(12, 7, 5, 2, 1, 9, 0)$ *(trié en* $(0, 1, 2, 5, 7, 9, 12)$*) est* 5.

---

♡2 Exprimez $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\cos(a+b)+\cos(a-b)$ à l'aide de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$. •2 pt.•

---

♡3 Exprimez $\tan(3.\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$ pour $\theta$ dans $]-\pi/6, \pi/6[$. •2 pt.•
Donnez une équation du troisième degré à coefficients entiers dont $\tan(\pi/12)$ est racine. •2 pt.•
Simplifiez $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}$ et calculez $\tan(\pi/12)$. •2 pt.•

---

♣1 Votre petit frère écrit un rationnel fait de tous les chiffres de 1 à 9 dans un certain ordre au numérateur et dans un autre ordre au dénominateur, comme par exemple $\dfrac{143658729}{543879162}$. Vous affirmez avant même de commencer le moindre calcul qu'il aurait pu au moins vous donner une fraction irréductible. •2 pt.•

---

♣2 En face de vous : deux personnes. Vous savez que l'une ment toujours *(mais laquelle ?)* et l'autre dit toujours la vérité. De plus, l'une d'entre elles a dans sa poche un billet de cent euros pour vous (mais laquelle[1]... ?). Expliquez en quoi la question suivante est très utile : "est ce le menteur qui me doit cent euros ?". •2 pt.•

---

◇1 Classez les quatre complexes $a$, $b$, $a+b^2$ et $a^2+b$ par module croissant. Classez les ensuite par argument principal croissant (l'argument est à prendre entre $-\pi$ et $\pi$. On précise : $a = 4+7.i$ et $b = -3+5.i$. •4 pt.•

MPSI 2/2013

## MOYENNES

$IS01$

◇2 $a$, $b$ et $c$ sont trois réels strictement positifs. Montrez : $\sqrt{a.b} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ *(par exemple en étudiant* $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$*).* •1 pt.•

◇3 $\gamma$ et $c$ sont deux réels strictement positifs, on définit sur $[0,1]$ : $\varphi := t \longmapsto (1-t).\gamma + t.c - \gamma.e^{t.\ln(c/\gamma)}$. Calculez $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$. •1 pt.• Montrez que $\varphi'$ est décroissante sur $[0,1]$. •2 pt.•

◇4 Montrez qu'il est impossible que $\varphi'$ ne s'annule pas sur $[0,1]$. •1 pt.• Déduisez que $\varphi$ est positive sur $[0,1]$. •1 pt.•

◇5 Montrez alors $\gamma^{2/3}.c^{1/3} \leqslant \dfrac{2.\gamma+c}{3}$ puis $\sqrt[3]{a.b.c} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$. •3 pt.•

MPSI 2/2013 | `27 points` | $IS01$

[1] "quelle personne", pas "quelle poche"

**IS01** • Moyenne des carrés. • MPSI 2/2013

On doit comparer $\Big(\dfrac{a_0+\ldots+a_{n-1}}{n}\Big)^2$ et $\dfrac{(a_0)^2+\ldots+(a_{n-1})^2}{n}$. Il n'y a aucune raison pour qu'il y ait égalité. Mais il faut le prouver.
On ne peut le faire que par un contre-exemple. En effet, deux quantités qui ne se ressemblent pas peuvent quand même être égales, pensez encore à $\sin(\pi/2)$ et $\exp(\tan(0))$ par exemple.
Prenons la suite $(0,1)$ faite de deux éléments.
La moyenne des carrés est $\dfrac{0^2+1^2}{2}$. Le carré de la moyenne est $\Big(\dfrac{0+1}{2}\Big)^2$.
On a $1/2$ et $1/4$. Il n'y a pas égalité.

---

En revanche, si on note $M$ la médiane de l'échantillon, on sait : $Card\{k<n|a_k\leqslant M\}=[n/2]$ et $\exists\ i\in\{0,\ldots,n-1\},\ M=a_i$.
Par croissance sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction carré, on a encore $Card\{k<n|(a_k)^2\leqslant M^2\}=[n/2]$, et le réel $M^2$ est un des éléments de la liste $[(a_0)^2,\ldots(a_{n-1})^2]$. On reconnaît que $M^2$ est la médiane de la (nouvelle) suite des carrés.
Le carré de la médiane est bien la médiane des carrés.

**IS01** • Trigonométrie, et $\tan(\pi/12)$. • MPSI 2/2013

| $\cos(a+b)$ | $\cos(a-b)$ | $\cos(a+b)-\cos(a-b)$ | $\cos(a+b)-\cos(a-b)$ |
|---|---|---|---|
| $\cos(a).\cos(b)-\sin(a).\sin(b)$ | $\cos(a).\cos(b)+\sin(a).\sin(b)$ | $-2.\cos(a).\cos(b)$ | $-2.\sin(a).\sin(b)$ |

---

On rappelle ensuite : $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}$ en divisant numérateur et dénominateur de $\dfrac{\sin(a).\cos(b)+\cos(a).\sin(b)}{\cos(a).\cos(b)-\sin(a).\sin(b)}$ par $\cos(a).\cos(b)$ *(sous réserve d'existences)*.

En appliquant cette formule déjà à $a=b$ puis à $a=2.b$, on a : $\tan(3.\theta)=\dfrac{\tan(\theta)+\dfrac{2.\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}}{1-\tan(\theta).\dfrac{2.\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}}$ puis

$$\boxed{\tan(3.\theta)=\frac{3.\tan(\theta)-\tan^3(\theta)}{1-3.\tan^2(\theta)}}$$

L'appartenance de $\theta$ à $]-\pi/6,\pi/6[$ garantit l'existence de toutes les quantités en jeu.

---

Dans le cas particulier $\theta=\pi/12$, on obtient $\dfrac{3.\tan(\pi/12)-\tan^3(\pi/12)}{1-3.\tan^2(\pi/12)}=\tan(\pi/4)=1$.

On déduit que $\tan(\pi/12)$ est racine de l'équation $t^3-3.t^2-3.t+1=0$ d'inconnue réelle $t$.

---

On ne résout pas cette équation, mais on se contente de $\tan(\pi/12)=\tan\Big(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\Big)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$.
On ne se contente pas de cette formule, on multiplie haut et bas par la “quantité conjuguée” $\sqrt{3}-1$ : $\tan(\pi/12)=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=\dfrac{3+1-2.\sqrt{3}}{2}$.
On trouve : $\boxed{\tan\Big(\dfrac{\pi}{12}\Big)=2-\sqrt{3}}$ *(qui est bien positif)*.

**IS01** • De la logique avec un menteur, un sincère et cent euros. • MPSI 2/2013

On ne sait pas dans laquelle des quatre configutaions on est, en nommant $A$ et $B$ les deux personnes en face de vous :
• $A$ est sincère et a les cent euros *(donc $B$ ment et n'a rien)*
• $A$ est sincère et ne vous doit rien *(donc $B$ ment et a les cent euros)*
• $A$ ment et a les cent euros *(donc $B$ est sincère et n'a rien)*
• $A$ ment et n'a rien *(donc $B$ est sincère et vous doit cent euros)*.
On pourrait résumer cela dans un tableau.
La question est donc "est ce le menteur qui me doit cent euros ?". On regarde la vérité de cette phrase dans chacun des cas.

| vous questionnez le | il a le billet | la réponse devrait être | sa réponse est |
|---|---|---|---|
| sincère | oui | non | non |
| sincère | non | oui | oui |
| menteur | oui | oui | non |
| menteur | non | non | oui |

La réponse ne vous dit pas qui ment *(ni qui est sincère)*. Simplement, si celui à qui vous posez la question vous dit "non", vous pouvez lui demander de vous donner les cente euros, vous êtes sûr que c'est lui qui les a. Si il vous répond "oui", tournez vous vers l'autre.

**IS01** • Quatre complexes à trier. • MPSI 2/2013

On nous a donné : $a = 4 + 7.i$ et $b = -3 + 5.i$. On calcule alors : $a^2 = -33 + 56.i$ et $b^2 = -16 - 30.i$.
On somme, puis on calcule les carrés des modules et les tangentes de l'argument principal :

| complexe | $a$ | $b$ | $a^2 + b$ | $a + b^2$ |
|---|---|---|---|---|
| cartésien | $4 + 7.i$ | $-3 + 5.i$ | $-36 + 61.i$ | $-12 - 23.i$ |
| carré du module | $16 + 49$ | $9 + 25$ | $36^2 + 61^2$ | $12^2 + 23^2$ |
| tangente de l'argument | $7/4$ | $-5/3$ | $-61/36$ | $23/12$ |

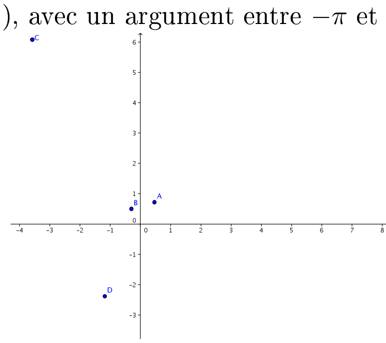
Comme les modules sont dans le même ordre que leurs carrés, on trie dès la première lecture : $\boxed{b \text{ puis } a \text{ puis } a + b^2 \text{ puis } a^2 + b}$

On dispose déjà les quatre complexes dans les quatre quadrants [2] :
• $a$ est dans le premier quadrant (Nord-Est, parties réelle et imaginaire positives) avec un argument entre 0 et $\pi/2$,
• $b$ et $a^2 + b$ sont dans le second quadrant (Nord-Ouest, avec partie réelle négative et partie imagiaire positive), leurs arguments sont dans $]\pi/2, \pi[$,
• $a + b^2$ est au Sud-Ouest (troisième quadrant), avec un argument entre $-\pi$ et $-\pi/2$.

On résume visuellement :

| | |
|---|---|
| $b$ et $a^2 + b$ | $a$ |
| $a + b^2$ | |

et




[2]orthographe "quadrant" car "quart de plan" et pas "cadran de montre"

On doit donc juste comparer $b$ et $a^2+b$, en comparant leurs tangentes. Par soustraction (ou produit en croix), on a $\dfrac{61}{36} > \dfrac{5}{3}$ (de peu). On tient compte des signes : $-\dfrac{61}{36} < -\dfrac{5}{3}$. Le plus petit des deux arguments est celui dont la tangente est “la plus proche de $-\infty$” : $a^2+b$ avant $b$.

On résume : $\boxed{a+b^2 \text{ avant } a \text{ avant } a^2+b \text{ avant } b}$

**IS01** • Exercice sur les moyennes de deux ou trois nombres. • MPSI 2/2013

On développe : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2.\sqrt{a.b}$. Comme le carré d'un réel est toujours positif, on a donc : $\boxed{a+b \geqslant 2.\sqrt{a.b}}$ puis en divisant par 2 : $arithmetique = \dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a.b} = geometrique$.

---

L'application $t \longmapsto (1-t).\gamma + t.c - \gamma.e^{t.\ln(c/\gamma)}$ existe bien sur tout $\mathbb{R}$. Sa valeur en 0 est nulle, sa valeur en 1 aussi, car $\gamma.e^{\ln(c/\gamma)}$ est égal à $c$.

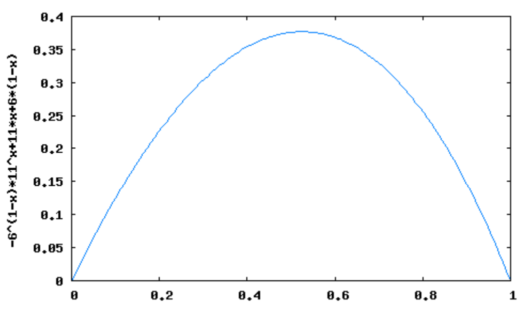
On dérive deux fois sur l'intervalle $[0,1]$ : $\varphi" = t \longmapsto -\gamma(\ln(c/\gamma))^2$.
La dérivée seconde est négative, la dérivée première décroit.

---

Si $\varphi'$ ne s'annulait pas, alors $\varphi'$ serait de signe constant sur l'intervalle $[0,1]$ *(contraposée de “change de signe implique s'annule au moins une fois”)*.
Mais alors $\varphi$ serait monotone *(croissante si $\varphi'$ reste positive, décroissante sinon)*. Or, $\varphi$ prend la même valeur en 0 et en 1 sans être constante *(dérivée seconde non nulle)*. C'est incohérent.

Ce petit raisonnement par l'absurde prouve que $\varphi'$ s'annule au moins une fois. Mais comme elle est monotone, elle s'annule une seule fois.
Par décroissance de $\varphi'$ elle est même d'abord positive, puis négative.

Par théorème de variations des fonctions dérivables sur un intervalle, $\varphi$ est d'abord croissante *(donc positive, puisque sa valeur initiale est 0)*, puis décroissante *(donc positive, puisque sa valeur ultime est nulle)*.




On déduit donc par cette étude de variations que $\varphi$ est positive sur $[0,1]$.

---

On a donc $\boxed{(1-t).\gamma + t.c \geqslant \gamma^{1-t}.c^t}$ en utilisant $e^{x.\ln(y)} = (e^{\ln(y)})^x = y^x$.
En particulier, pour $t$ égal à $1/3$ : $\dfrac{2.\gamma+c}{3} \geqslant \gamma^{2/3}.c^{1/3}$.

---

On est sur la bonne piste pour voir venir $(a.b.c)^{1/3}$.
Posons donc $\gamma = (a.b)^{1/2}$. On a alors $\dfrac{2.\sqrt{a.b}+c}{3} \geqslant \sqrt{a.b}^{2/3}.c^{1/3} = (a.b.c)^{1/3}$.

En continuant à majorer avec l'exercice précédent : $\boxed{\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \dfrac{2.\sqrt{a.b}+c}{3} \geqslant (a.b.c)^{1/3}}$

On a bien *arithmetique* $\geqslant$ *geometrique*, en considérant : $arithmetique = \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ et $geometrique = \sqrt[n]{a_1 \times \ldots \times a_n}$.

*On notera que l'on peut aussi écrire* $\ln(geometrique) = \dfrac{\ln(a_1) + \ldots + \ln(a_n)}{n}$ *et comprendre ainsi que c'est bien encore une moyenne.*

| MPSI 2/2013 | 27 points | $IS01$ |
|---|---|---|

♡4 Quel est le coefficient de $a.b.c$ dans le développement de $(a+b+c)^3$ ? •2 pt.• Quel est le coefficient de $a.b.c^2$ dans le développement de $(a+b+c+d)^4$ ? •2 pt.• Quel est le coefficient de $a.b.c.d$ dans le développement de $(a+b+c+d)^4$ ? •1 pt.•

---

♡5 Soit $(a_0, \dots a_{n-1})$ une liste de réels positifs, de moyenne $\mu$ (on a donc $n.\mu = \sum_{0\leq k<n} a_k$). Montrez, par exemple en étudiant le signe de $\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-\mu)^2$, que la moyenne des carrés est plus grande que le carré de la moyenne. •2 pt.•

---

♣3 Aidez moi à comprendre cette citation du journal Le Progrès, relevée par le Canard Enchaîné : “Nous doublons l'effectif : 47 enfants par jour”. •0 pt.•

---

♢6 Choisissez le réel $a$ pour que le discriminant du polynôme $X^2-(5+3.i).X+a+7.i$ soit imaginaire pur. •1 pt.•
Calculez alors les deux racines $r_1$ et $r_2$ *(indication : $(1+i)^2 = ?$)*. •1 pt.•
Déterminez le polynôme de racines $(r_1)^2$ et $(r_2)^2$. •3 pt.•

---

♣4 Calculez $\int_0^1 \cos^t(\theta).dt$ en pensant à mettre sous forme exponentielle avant d'intégrer... •2 pt.•

41 points —————————— 41 points

♠1 Dérivez deux fois $t \longmapsto t.\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)$ *(notée $f$)* sur $]0,+\infty[$[3] •2 pt.•

♠2 Donnez les variations de $f'$ et son signe sur $]0,+\infty[$. •2 pt.•

♠3 Montrez que $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ tend vers 1 quand $x$ tend vers 0 *(voir un taux d'accroissement)*. •1 pt.•
Trouvez la limite de $f$ en $+\infty$. •1 pt.• Déduisez : $f(n) \leqslant 1$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$. •1 pt.•

♠4 Pour tout $n$ on pose : $a_n = \dfrac{n!.e^n}{n^n}$. Calculez $\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ à l'aide de $f(n)$. •2 pt.• Quel est le sens de variation de la suite $(a_n)$ ? •2 pt.•

♠5 Déduisez pour tout entier naturel non nul $n$ : $n! \geqslant \left(\dfrac{n}{e}\right)^n.e$. •2 pt.•

13 points —————————— 13 points

♡6 Décomposez en produit de facteurs premiers $\dbinom{25}{11}$. •2 pt.•

---

♡7 Calculez $\sin(\pi/12)$. •1 pt.•

---

♡8 Quel(s) symbole(s) pouvez vous mettre dans la case de la proposition suivante :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n! \geqslant 1000)\ \boxed{\quad}\ (n^2-13.n+22 \geqslant 0)$. Symboles proposés : $\Rightarrow$, *et*, *ou*, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$(justifiez vos réponses). •4 pt.•



[3]dériver $f$ deux fois, c'est calculer $f'$ puis $f''$ et non pas calculer $f'$ et à nouveau $f'$...

**IS02** • Coefficients dans $(a+b+c)^3$ et $(a+b+c+d)^4$. • MPSI 2/2013

On développe comme on veut :

$\boxed{(a+b+c)^3 = (a^3+b^3+c^3)+3.\big(a^2.b+a.b^2+a^2.c+a.c^2+b^2.c+b.c^2\big)+6.a.b.c}$ et on affirme donc que **le coefficient de** $a.b.c$ **est** 6.

On peut y accéder en développant $(a+b+c).(a^2+b^2+c^2+2.a.b+2.a.c+2.b.c)$,
ou en développant $(a+b)^3+3.(a+b)^2.c+3.(a+b).c^2+c^3$ en ne cherchant ensuite que parmi les deux premiers termes.
On peut aussi dire qu'il y a $3^3$ termes au total *(vision d'un cube dans* $\mathbb{R}^3$*)*, que trois sont sur le modèle $a^3$, que six sont sur le modèle $3.a^2.b$ ; il en reste donc $27-3-6.3$ sur le modèle unique $a.b.c$.

---

On développe ensuite $(a+b)^4+4.(a+b)^3.(c+d)+6.(a+b)^2.(c+d)^2+4.(a+b).(c+d)^3+(c+d)^4$. On ne cherche que des $a.b.c^2$. Ils ne pouront venir que de $6.(a+b)^2.(c+d)^2$ et il s'agira de $\boxed{(6\times 2).(a.b).c^2}$

---

De même, **pour** $a.b.c.d$**, le coefficient est** $6.2.2$.

**IS02** • Moyenne des carrés. • MPSI 2/2013

On va devoir comparer $\Big(\dfrac{(a_0)^2+(a_1)^2+(a_2)^2+\dots(a_{n-1})^2}{n}\Big)$ et $\Big(\dfrac{a_0+a_1+\dots a_{n-1}}{n}\Big)^2$, pas simplement en disant "il n'y a pas égalité", mais en précisant qui est le plus grand.

On calcule comme proposé la somme $\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-\mu)^2$. C'est une somme de carrés de réels, elle est positive.
*Il faudra toujours préciser "carré de réel" et non juste "carré", car sur* $\mathbb{C}$ *cette affirmation perdrait son sens.*
Mais si on la développe, on a alors : $\sum_{k=0}^{n-1}\Big((a_k)^2-2.a_k.\mu+\mu^2\Big)\geqslant 0$.
On sépare en trois sommes : $\Big(\sum_{k=0}^{n-1}(a_k)^2\Big)-2.\mu.\Big(\sum_{k=0}^{n-1}a_k\Big)+n.\mu^2\geqslant 0$ *(n'oubliez pas qu'il y a* $n$ *termes égaux à* $\mu$*)*.
Mais si l'on remplace $\sum_{k=0}^{n-1}a_k$ par $n.\mu$ *(ce qui est vrai)*, on a deux termes en $n.\mu^2$, d'où $\Big(\sum_{k=0}^{n-1}(a_k)^2\Big)-n.\mu^2\geqslant 0$.
En basculant et divisant par $n$ *(positif)*, il reste $\dfrac{(a_0)^2+\dots+(a_{n-1})^2}{n}\geqslant\mu^2$.
La moyenne des carrés est toujours plus grande que le carré de la moyenne.
On notera qu'il ne peut y avoir égalité que si tous les termes de la somme de carrés sont nuls, c'est à dire "la suite est constante".

*Ceux qui auront argumenté en parlant de positivité de la variance auront juste déplacé le problème et auront donc remplacé leur réponse argumentée par un simple acte de foi.*

**IS02** • Le polynôme $X^2-(5+3.i).X+a+7.i$. • MPSI 2/2013

Le discriminant de ce polynôme en $X$ est $(5+3.i)^2-4.(a+7.i)$ c'est à dire $16-4.a+2.i$.

Pour qu'il soit imaginaire pur, il faut et il suffit que $a$ soit égal à 4. Le polynôme est donc $\boxed{X^2 - (5+3.i).X + 4 + 7.i}$

Son discriminant est $2.i$ et admet pour racines carrées $(1+i)$ et son opposé.
Les deux racines du polynôme sont donc $\dfrac{5+3.i+(1+i)}{2}$ et $\dfrac{5+3.i-(1+i)}{2}$.
On résume : $\boxed{S = \{2+i,\ 3+2.i\}}$

---

Leurs carrés sont $3+4.i$ et $5+12.i$. On crée donc le nouveau polynôme $(X-3-4.i).(X-5-12.i)$ ; il aura les deux racines demandées.
On le développe : $\boxed{X^2 - 8.(1+2.i).X - 33 + 56.i}$

**IS02** • L'intégrale $\int_0^1 \cos^t(\theta).dt$. • MPSI 2/2013

*Dans cette intégrale, la variable est $t$ et $\theta$ tient le rôle de constante.*
On la réécrit donc : $\displaystyle\int_0^1 e^{t.\ln(\cos(\theta))}.dt$ avec une exigence $(\cos(\theta) > 0)$ sans laquelle la quantité sous le signe intégrale n'a pas de sens. On intègre alors une simple exponentielle : $\left[\dfrac{e^{t.\ln(\cos(\theta))}}{\ln(\cos(\theta))}\right]_{t=0}^{t=1}$. On trouve après simplification $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \cos^t(\theta).dt = \frac{\cos(\theta)-1}{\ln(\cos(\theta))}}$

**IS02** • Le coefficient binomial "11 parmi 25". • MPSI 2/2013

Par définition ce coefficient vaut $\dfrac{25.24.23.22.21.20.19.18.17.16.15}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}$. On sort les facteurs premiers "in-simplifiables" : $23.19.17.\dfrac{25.24.22.21.20.18.16.15}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}$.
On simplifie 22 par 11.2 et 20 par 4.5 : $23.19.17.\dfrac{25.24.21.18.16.15}{3.6.7.8.9.10}$. On simplifie 18 par 3.6 : : $23.19.17.\dfrac{25.24.21.16.15}{7.8.9.10}$.
On élimine le 10 avec un facteur 5 issu de 25 et un facteur 2 issus de 16 : $23.19.17.\dfrac{5.24.21.8.15}{7.8.9}$. On élimine les deux 8, puis on simplifie 21 par 7 : $23.19.17.\dfrac{5.24.3.15}{9}$.
On élimine les facteurs 3 : $\boxed{\binom{25}{11} = 23.19.17.5^2.3.2^3}$

**IS02** • Suite de questions pour avoir $n! \geqslant \left(\frac{n}{e}\right)^n.e$. • MPSI 2/2013

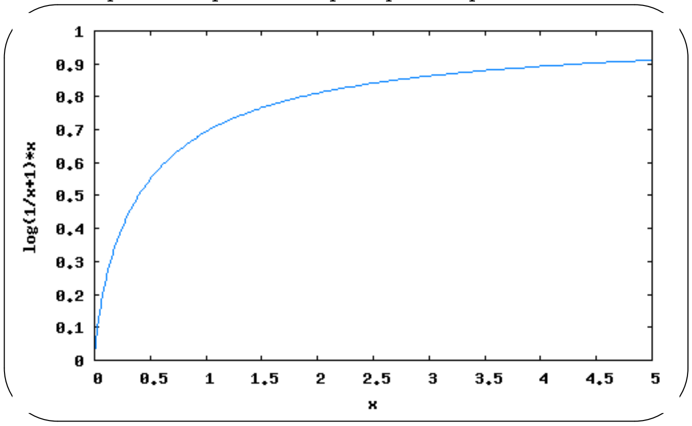
L'application $x \longmapsto x.\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ est bien définie, continue, dérivable sur $]0,+\infty[$. Pour la dériver sans trop d'efforts inutiles, on l'écrit déjà $x \longmapsto x.\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ et même $x \longmapsto x.\ln(x+1) - x.\ln(x)$ *(conseil à mémoriser : on écrit $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$ avant de dériver...)*. On trouve alors

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ |
|---|---|---|
| $x.\ln(x+1) - x.\ln(x)$ | $\ln(x+1) - \ln(x) - \dfrac{1}{x+1}$ | $\dfrac{-1}{x.(x+1)^2}$ |

Sous la forme compactée réduite au dénominateur commun, $f''$ est négative sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
Par le théorème liant les variations au signe de la dérivée, $f'$ **décroît sur** $]0,+\infty[$.

En écrivant $f'$ sous la forme recompactée $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$, on voit que $f'$ tend vers 0 à l'infini. Etant décroissante de limite nulle à l'infini, $f'$ **est positive sur** $]0,+\infty[$.

Toujours par théorème sur les variations de fonctions, $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
On veut prouver qu'elle est plus petite que 1. On va donc regarder sa limite en $+\infty$.




---

Le quotient $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ s'écrit en fait $\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x-0}$ et même $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}$ avec $\varphi = t\longmapsto \ln(1+t)$ (ou $\dfrac{g(t)-g(1)}{t-1}$ avec $g=\ln$). C'est un taux d'accroissement, qui tend vers la dérivée $\varphi'(0)$ quand $x$ tend vers 0. Et ici, $\varphi' = t\longmapsto \dfrac{1}{1+t}$ de valeur 1 en 0. On a donc : $\boxed{\lim\limits_{x\mapsto 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1}$
On applique au "cas particulier" $x=\dfrac{1}{t}$ avec $t$ qui tend vers $+\infty$ (et donc $x$ tend bien vers 0). On a donc $\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)}{1/t}$ qui tend vers 1 quand $t$ tend vers l'infini.
On y reconnaît "$f(t)$ **tend vers** 1 **quand** $t$ **tend vers l'infini positif**".

---

Comme $f$ est croissante de limite égale à 1 en $+\infty$, elle est majorée par 1. On a donc $n.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant 1$ pour tout $n$.

---

On pose donc : $a_n=\dfrac{n!.e^n}{n^n}$ et $a_{n+1}=\dfrac{(n+1)!.e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$ et on calcule la différence de deux logarithmes :
$\ln(a_{n+1})-\ln(a_n)=\Big(\ln((n+1)!)+n+1-(n+1).\ln(n+1)\Big)-\Big(\ln(n!)+n-n.\ln(n)\Big)$
On simplifie : $\ln((n+1)!)-\ln(n!)=\ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)=\ln(n+1)$. Il reste :
$\ln(a_{n+1})-\ln(a_n)=\ln(n+1)+1-(n+1).\ln(n+1)+n.\ln(n)$.
Il reste : $\ln(a_{n+1})-\ln(a_n)=1-n.\big(\ln(n+1)-\ln(n)\big)$, et on fusionne les logarithmes : $\boxed{\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)=1-f(n)}$

---

On exploite le résultat qui majore $f(n)$ par 1 : $\ln(a_{n+1}/a_n)\geqslant 0$.
On passe à l'exponentielle *(croissante)* : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1$, et par produit en croix *(termes positifs)* : $a_{n+1}\geqslant a_n$.
**La suite** $(a_n)$ **est croissante**.

---

Par croissance, on a $a_n \geqslant a_1$ pour tout $n$. On reformule : $\dfrac{n!.e^n}{n^n} \geqslant \dfrac{1.e}{1}$.

On croise et décroise les produits : $\boxed{n! \geqslant \dfrac{n^n}{e^n}.e = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n.e}$

*On croisera cette année la formule de Stirling qui "approxime" $n!$ par $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n.\sqrt{2.\pi.n}$.*

**IS02** • Calcul de $\sin(\pi/12)$. • MPSI 2/2013

On écrit rapidement : $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right).\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right).\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

On peut conclure : $\boxed{\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

**IS02** • Quantification $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n! \geqslant 1000) \vdots \ldots \vdots (n^2 - 13.n + 22 \geqslant 0)$. • MPSI 2/2013

On résout déjà les deux inéquations sur $\mathbb{N}$ :

• $n! > 1000$ équivaut à $n \geqslant 7$ *(on a $6! = 720 \leqslant 1000$ et $7! = 5040 > 1000$)*

• $n^2 - 13.n + 22 \geqslant 0$ équivaut à $n \notin \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *(trinôme négatif entre les racines).*

| proposition | reformulation | vérité | contre-exemple |
|---|---|---|---|
| $(n! \geqslant 1000) \Rightarrow (n^2 - 13.n + 22 \geqslant 0)$ | $(n \geqslant 7) \Rightarrow (n \notin \{3, \ldots 10\}$ | faux | $7, 8 \ldots$ |
| $(n! \geqslant 1000)$ *et* $(n^2 - 13.n + 22 \geqslant 0)$ | $(n \geqslant 7)$ *et* $(n \notin \{3, \ldots 10\}$ | faux | $0, 1, \ldots$ |
| $(n! \geqslant 1000)$ *ou* $(n^2 - 13.n + 22 \geqslant 0)$ | $(n \geqslant 7)$ *ou* $(n \notin \{3, \ldots 10\}$ | faux | $3, 4 \ldots$ |
| $(n! \geqslant 1000) \Leftarrow (n^2 - 13.n + 22 \geqslant 0)$ | $(n \notin \{3, \ldots 10\} \Rightarrow (n \geqslant 7)$ | faux | $0, 1, 2$ |
| $(n! \geqslant 1000) \Leftrightarrow (n^2 - 13.n + 22 \geqslant 0)$ | $(n \geqslant 7) \Leftrightarrow (n \notin \{3, \ldots 10\}$ | faux | $8, \ldots$ |
| | | | |

Il fallait penser à donner des contre-exemples, et ne pas se contenter de répondre "faux".

MPSI 2/2013 — `61 points` — *IS*02

♡9 Transformez $2.\cos(3.x).\sin(2.x)$ en somme de deux sinus. •1 pt.•

♢7 Transformez $4.\cos(4.x).\cos(3.x).\cos(x)$ en somme de quatre cosinus. •2 pt.•

♢8 Calculez ensuite *(ou avant, je m'en moque)* $\int_0^{\pi} 4.\cos(4.\theta).\cos(3.\theta).\cos(\theta).d\theta$. •2 pt.•

---

♡10 Donnez le polynôme du second degré de racines $2+i$ et $1+2.i$ de valeur 10 en 0. •2 pt.•

---

♡11 $a$, $b$ et $c$ sont les trois racines de l'équation $x^3+\alpha.x^2+x+2=0$ d'inconnue complexe $x$. Déterminez $\alpha$ pour avoir $a.b^2+a.c^2+b.a^2+b.c^2+c.a^2+c.b^2=0$. •2 pt.•

---

♡12 Dérivez $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. •2 pt.•

---

♡13 On a montré pour toute suite réelle positive : la moyenne des carrés est plus grande que le carré de la moyenne. Comparez alors la moyenne des racines carrées et la racine carrée de la moyenne. •2 pt.•

---

♣5 Résolvez l'équation "$2^{n.i.\pi/3}$ est imaginaire pur" d'inconnue réelle $n$. •3 pt.•

---

♢9 Vous lancez deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6. Les deux nombres obtenus sont notés $a$ et $b$. Evaluez la probabilité des événements suivants : •3 pt.•
• "$a$ et $b$ sont pairs",
• "$a$ et $b$ sont impairs",
• "$a$ et $b$ sont pairs ou $a$ et $b$ sont impairs",
• "$a$ est pair ou impair, et $b$ aussi".

---

♢10 Calculez $Arcsin(1/2)$ et calculez géométriquement $\int_0^{1/2} Arcsin(\lambda).d\lambda$. •3 pt.•

---

♣6 Donnez juste le domaine de définition de $x \longmapsto \int_0^x \dfrac{(t+3).dt}{t^3+6.t^2-2.t-7}$ sans chercher bien sûr à calculer explicitement cette intégrale. *(indication : le dénominateur a une racine évidente)* •4 pt.•
Donnez aussi le domaine de définition de $x \longmapsto \int_0^x \dfrac{(t+3).dt}{x^3+6.x^2-2.x-7}$. •1 pt.•

---

♡14 On a montré : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Prouvez alors $\sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right)=\sqrt{\dfrac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}$. •1 pt.•

---

♡15 Qui a le plus grand module parmi ces deux nombres : $\sqrt{5}+7.\dfrac{\sqrt{5}}{5}.i$ et une racine carrée de $14.i-5$. •2 pt.•

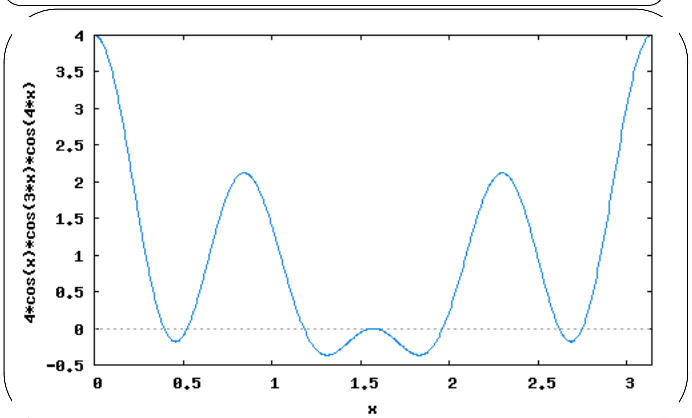
**IS03** • $4.\cos(4.x).\cos(3.x).\cos(x)$. • MPSI 2/2013

Déjà, en développant $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$, on constate :
$\sin(a+b)+\sin(a-b) = 2.\sin(a).\cos(b)$.
En renversant et particularisant : $\boxed{2.\cos(3.x).\sin(2.x) = \sin(5.x)+\sin(-x)}$

---

De même : $\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2.\cos(a).\cos(b)$, donc :
$4.\cos(4.x).\cos(3.x).\cos(x) = 2.(\cos(7.x)+\cos(x)).\cos(x)$ et en recommençant
$\boxed{4.\cos(4.x).\cos(3.x).\cos(x) = \cos(8.x)+\cos(6.x)+\cos(2.x)+1}$

L'intégrale ne pose ensuite aucun problème, puisque la fonction sous le signe somme est continue. On sépare en quatre intégrales. Celle en cosinus s'intègrent en sinus et sont nulles grâce aux bornes. Il reste alors :
$\boxed{\int_0^\pi 4.\cos(4.\theta).\cos(3.\theta).\cos(\theta).d\theta = \int_0^\pi 1.d\theta = \pi}$



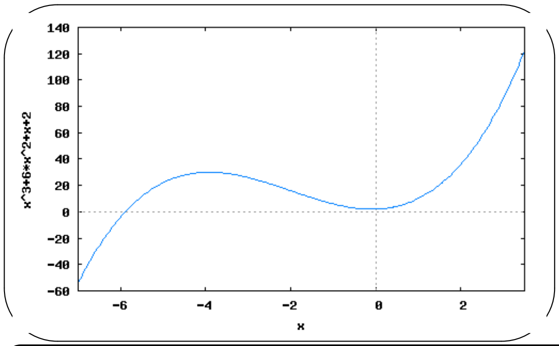

**IS03** • Polynôme de racines $2+i$ et $1+2.i$ de valeur 10 en 0. • MPSI 2/2013

Qui sont les polynômes de racines $2+i$ et $1+2.i$ ? Ce sont ceux de la forme $a.(X-2-i).(X-1-2.i)$ avec $a$ complexe non nul. En effet, il peut rester ce $a$ en facteur, ce qui permet de changer la valeur en 0.
On développe en $a.(X^2-(3+3.i).X+5.i)$.
La valeur en 0 est $5.a.i$. On va donc imposer : $a = -2.i$.
Le polynôme est $\boxed{-2.i.X^2+(6.i-6).X+10}$

**IS03** • Equation $x^3+\alpha.x^2+x+2=0$. • MPSI 2/2013

On ne sait pas a priori si les racines sont réelles ou plus généralement complexes. Mais elles sont bien, dans $\mathbb{C}$, au nombre de trois et les relations coefficients/racines donnent : $a+b+c = -\alpha$, $a.b+a.c+b.c = 1$ et $a.b.c = -2$.
On multiplie terme à terme : $1.(-\alpha) = (a.b+a.c+b.c).(a+b+c) = a^2.b+a^2.c+b.a^2+b.c^2+c.a^2+c.b^2+3.a.b.c$.

On isole : $a.b + a^2.c + b.a^2 + b.c^2 + c.a^2 + c.b^2 = -\alpha - 3.a.b.c = 6 - \alpha$.
L'exigence $a.b^2 + a.c^2 + b.a^2 + b.c^2 + c.a^2 + c.b^2 = 0$ conduit à $\boxed{\alpha = 6}$




**IS03** • dérivée de $x \longmapsto \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. • MPSI 2/2013

Cette application est définie sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

On la dérive comme quotient (ou différence $x^{-1}.\sqrt{1+x^2} - \dfrac{1}{x}$ qui me semble plus judicieuse).

On trouve $x \longmapsto \dfrac{x}{x.\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{1}{x^2}.\sqrt{1+x^2} + \dfrac{1}{x^2}$.

On réussit à réduire à un dénominateur commun $\boxed{\dfrac{1+x^2-\sqrt{1+x^2}}{x^2+x^4}}$ par exemple. Mais on peut aussi simplifier par $1+x^2$ au numérateur et au dénominateur.

**IS03** • Encore des moyennes. • MPSI 2/2013

On doit cette fois comparer $\sqrt{\dfrac{a_0 + \ldots + a_{n-1}}{n}}$ et $\dfrac{\sqrt{a_0} + \ldots + \sqrt{a_{n-1}}}{n}$.
Toute l'idée est de considérer la suite $(\sqrt{a_0}, \ldots \sqrt{a_{n-1}})$, de $n$ réels positifs. On sait depuis l'I.S. précédente que la moyenne des carrés dépasse le carré de la moyenne.
On a donc : $\dfrac{a_0 + \ldots + a_{n-1}}{n} \geqslant \left(\dfrac{\sqrt{a_0} + \ldots + \sqrt{a_{n-1}}}{n}\right)^2$.

On passe à la racine carrée *(application croissante sur* $\mathbb{R}^+$*)* : $\sqrt{\dfrac{a_0 + \ldots + a_{n-1}}{n}} \geqslant \dfrac{\sqrt{a_0} + \ldots + \sqrt{a_{n-1}}}{n}$.

**IS03** • L'équation "$2^{n.i.\pi/3}$ est imaginaire pur". • MPSI 2/2013

On écrit ce complexe proprement : $\left(e^{\ln(2)}\right)^{i.n.\pi/3} = \exp(i.n.\ln(2).\pi/3)$. Ce complexe *(de module 1)* est imaginaire pur si et seulement si son argument $n.\ln(2).\pi/3$ est de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k.\pi$ avec $k$ entier.

On simplifie par $\pi$ : $\boxed{S = \left\{\dfrac{3}{2.\ln(2)} + \dfrac{3.k}{\ln(2)} | k \in \mathbb{Z}\right\}}$

**IS03** • Deux dés à six faces équilibrés. • MPSI 2/2013

• "$a$ et b sont pairs" : c'est l'intersection de deux évenements

| | |
|---|---|
| $a$ est pair | probabilité $1/2$ |
| $b$ est pair | probabilité $1/2$ |

probabilité : $\dfrac{1}{4}$.

• "$a$ et b sont impairs" : c'est l'intersection de deux évenements

| | |
|---|---|
| $a$ est impair | probabilité $1/2$ |
| $b$ est impair | probabilité $1/2$ |

probailité : $\frac{1}{4}$.

• $a$ et $b$ sont pairs ou $a$ et $b$ sont impairs : c'est la réunion des deux évenements précédents, qui sont disjoints ; on somme les deux probabilités : $\frac{1}{4}$.

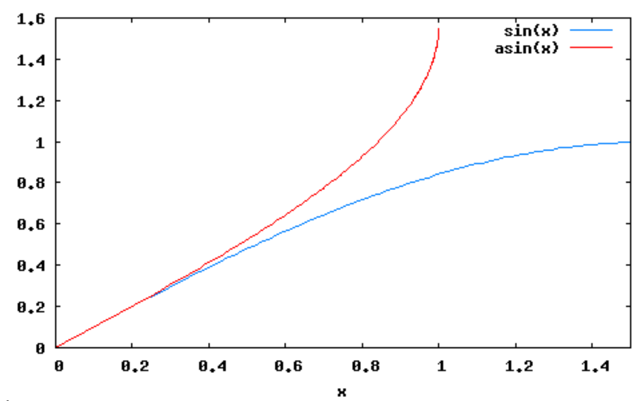
*(autre approche : a et b doivent avoir la même parité ; une fois qu'on a tiré a sans problème, la parité est imposée, et on a une chance sur deux pour que b soit de la bonne parité puisque les deux sont équiprobables)*

• $a$ est pair ou impair *(évenement toujours vrai)*, et $b$ aussi *(tout aussi vrai)* ; la probabilité cherchée vaut 1.

**IS03** • Calcul de $\int_0^{1/2} Arcsin(t).dt$. • MPSI 2/2013

On sait déjà : $\boxed{Arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}}$ *(bon intervalle et bon sinus)*.

Ensuite, on compare deux graphes : celui de l'arcsinus sur $[0, 1/2]$ et celui du sinus sur $[0, \pi/6]$.




Les deux aires $\int_0^{1/2} Arcsin(\lambda).d\lambda$ et $\int_0^{\pi/6} \sin(\alpha).d\alpha$ se complètent pour former un rectangle de largeur $\pi/6$ et de hauteur $1/2$.

On a donc $\boxed{\int_0^{1/2} Arcsin(\lambda).d\lambda = \frac{\pi}{6}.\frac{1}{2} - \int_0^{\pi/6} \sin(\alpha).d\alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1}$

**IS03** • Calcul de $\sin(\pi/24)$. • MPSI 2/2013

Par $\cos(a - b) = \cos(a).\cos(b) + \sin(a) + \sin(b)$ avec $a = \pi/3$ et $b = \pi/3$, on a trouvé la valeur de $\cos(\pi/12)$.

Avec $\cos(2.a) = 1 - 2.\sin^2(a)$, on trouve l'équation du second degré dont la racine est $\sin(\pi/24)$ : $4 - 8.s^2 = \sqrt{6} + \sqrt{2}$. On déséquilibre, on passe à la racine, et on n'oublie pas de citer l'argument de positivité de $\sin(\pi/24)$ pour conclure.

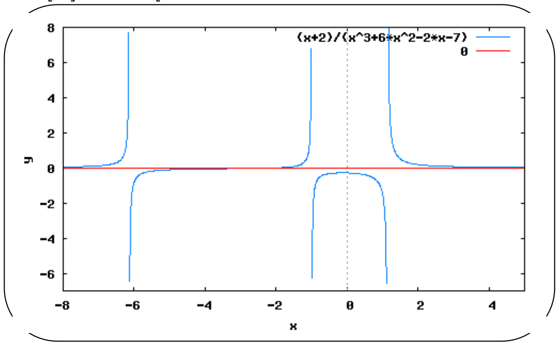
**IS03** • Fonction $x \longmapsto \int_0^x \frac{(t+3).dt}{t^3+6.t^2-2.t-7}$. • MPSI 2/2013

On note $f$ l'application $t \longmapsto \frac{t+3}{t^3 + 6.t^2 - 2.t - 7}$ et $P$ le polynôme $X^3 + 6.X^2 - 2.X - 7$. L'application de l'énoncé est donc $x \longmapsto \int_0^x f(t).dt$.

On note que $-1$ est racine évidente de $P$. On factorise alors $P$ par $(X + 1)$ *(division euclidienne ou autre méthode)* : $X^3 + 6.X^2 - 2.X - 7 = (X + 1).(X^2 + 5.X - 7)$.

On trouve alors les trois racines de $P$ : $-1$, $\frac{-5 - \sqrt{53}}{2}$ et $\frac{-5 + \sqrt{53}}{2}$.

On les ordonne *(et les nomme)* même : $\alpha = \frac{-5-\sqrt{53}}{2} < -1 < \frac{-5+\sqrt{53}}{2} = \beta$.
On a alors une petite idée du graphe de $f$ et surtout de son domaine de définition : $]-\infty,\alpha[\cup]\alpha,-1[\cup]-1,\beta[\cup]\beta,+\infty[$.




Mais ce n'est pas le domaine de définition de $f$ qui nous intéresse. On cherche les valeurs de $x$ pour lesquelles l'intégrale de $f$ de 0 à $x$ existe. Il faut donc que $f$ soit définie *(et si possible continue)* sur tout le segment $[0,x]$.
Partant de 0, on avance jusqu'à ce que x soit *(presque)* égal à $\beta$. tant que $x$ est entre 0 et $\beta$ *(strictement)*, $f$ est continue et intégrable sur $[0,x]$ et l'intégrale $\int_0^x f(t).dt$ existe.
Dès que $x$ atteint la valeur $\beta$ ou la dépasse, on a une asymptote verticale, et $\int_0^x f(t).dt$ n'existe pas. Le domaine s'arrête en $\beta$ *(ouvert)*.
Mais on peut aussi descendre dans les négatifs, avec un intervalle écrit à l'envers. Par exemple, $\int_0^{-1/2} f(t).dt$ existe, en étant négative.

Jusquoù peut on descendre ? Jusqu'à $-1$ exclu. Bilan : $\boxed{D_F = ]-1,\beta[ = \Big]-1,\frac{\sqrt{53}-5}{2}\Big[}$

---

Pour $x \longmapsto \int_0^x \frac{(t+3).dt}{x^3+6.x^2-2.x-7}$ c'est encore plus simple, par linéarité de l'intégrale, c'est $x \longmapsto \frac{1}{x^3+6.x^2-2.x-7}.\int_0^x (t+3).dt$ c'est à dire $x \longmapsto \frac{\frac{x^2}{2}+3.x}{x^3+6.x^2-2.x-7}$. Son domaine de définition est celui de $f$ :

$$\boxed{D_f = \Big]-\infty,\frac{-\sqrt{53}-5}{2}\Big[\bigcup\Big]\frac{-\sqrt{53}-5}{2},-1\Big[\bigcup\Big]-1,\frac{\sqrt{53}-5}{2}\Big[\bigcup\Big]\frac{\sqrt{53}-5}{2},+\infty\Big[}$$

**IS03** • Deux complexes de modules et arguments à comparer. • MPSI 2/2013

On note $z$ le complexe $\sqrt{5}.\left(1+\frac{7}{5}.i\right)$ et $\delta$ la racine de $14.i-5$.
On a alors tout de suite : $|z| = \sqrt{5+49/5}$ et $\delta^2 = \sqrt{14^2+5^2}$. Pour comparer ces réels positifs, on compare leurs carrés $\frac{25+49}{5} = \frac{74}{5}$ contre $\sqrt{221}$. On passe encore aux carrés : $74^2$ contre $25.221$. Or, par calcul à la main : $74^2 = 5476 < 5525 = 25.221$. On a donc $\boxed{\sqrt{5}.\left|1+\frac{7}{5}.i\right| < \sqrt{|14.i-5|}}$

MPSI 2/2013 | 91 points | *IS*03

| Charlemagne MPSI-2 / 2013 | Mardi 1 octobre | $IS04$ |
|---|---|---|

♡16 Résolvez l'équation $2^{x^3} = 3^{x^2}$ d'inconnue réelle $x$. Rappel : $a^{b^c}$ c'est bien $a^{(b^c)}$. •2 pt.•

♡17 Calculez $Arccos\big(\cos(59.\pi/3)\big)$. •2 pt.•

♡18 Calculez $\int_0^{\pi/6} \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(\theta)}.d\theta$ et $\int_0^{\pi/6} \frac{e^{\tan(\theta)}}{\cos^2(\theta)}.d\theta$. •4 pt.•

♣7 Résolvez l'équation $n! = 1 \quad mod \quad 13$ d'inconnue entière $n$. •3 pt.•

♢11 Exprimez $\cos(\theta)$ à l'aide de $\tan(\theta/4)$ *(pour $\theta$ hors de $\{2.\pi + 4.k.\pi | k \in \mathbb{Z}\}$)*. •2 pt.•

♣8 Devant une des maternelles de mon quartier, il y a la mise en garde suivante : défense de déposer des ordures et uriner, sous peine d'une amende pouvant aller jusqu'à 250 euros". Puis je me permettre d'uriner devant cette école, tant que je ne dépose pas en même temps des ordures ? •0 pt.•

♡19 Résolvez l'équation $z^3 - (3+4.i).z^2 + (4.i-3).z + 25 = 0$ d'inconnue complexe $z$ sachant que deux des racines sont opposées. •3 pt.•

♢12 Calculez $1 + (1-i) + (1-i)^2 + (1-i)^3 + \ldots + (1-i)^{2013}$. •2 pt.•

♡20 Vérifiez avec le minimum de calculs idiots : $72^2 + 65^2 = 97^2$. •1 pt.•
Calculez le cosinus et le sinus de $Arccos(72/97) + Arcsin(36/85)$ *(sans pousser les calculs jusqu'au bout du bout)*. •2 pt.•

♡21 Rappelez la définition de l'existence d'un élément neutre dans un groupe $(H, \oplus)$. •1 pt.•
Montrez l'unicité automatique de ce neutre. •1 pt.•

♡22 Dérivez l'application $x \longmapsto \ln\Big(\tan(x) + \sqrt{1+\tan^2(x)}\Big)$ après avoir déterminé son domaine de définition. •4 pt.•

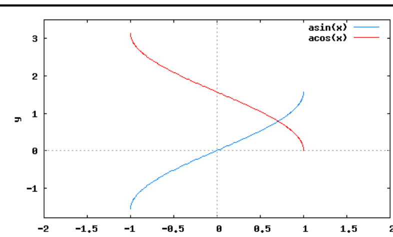
♢13 Posez la division euclidienne de $(X+2)^5$ par $X^2 + X + 1$. •3 pt.•

♠6 Résolvez $\int_{\pi/4}^{x} \frac{d\theta}{\sin(2.\theta)} = 5$ d'inconnue réelle $x$. •3 pt.•

♢14 Vous tirez au hasard *(équiréparti)* un entier entre 1 et 100. Quelle est la probabilité qu'il soit multiple de 7 ou de 11 ? •2 pt.•
Vous tirez au hasard. Quelle est la probabilité que ça ne fasse pas plaisir à vos camarades ? •0 pt.•

| MPSI 2/2013 | 126 points | $IS04$ |
|---|---|---|

Cadeau : le graphe de Arcsin et Arccos :



**IS04** • L'équation $2^{x^3}=3^{x^2}$. • MPSI 2/2013

Pour $x$ réel cette équation a bien un sens.
Elle équivaut, par passage au logarithme *(injectif)* à $x^3.\ln(2)=x^2.\ln(3)$.
On bascule d'un seul côté et on factorise en $x^2.(x.\ln(2)-\ln(3))=0$. Par intégrité, on a deux équations : $x^2=0$ ou $x.\ln(2)=\ln(3)$. On peut conclure : $\boxed{S=\Big\{0,\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}\Big\}}$

*On peut vérifier une solution* $2^{0^3}=2^0=1$ *et* $3^{0^2}=3^0=1$
*puis l'autre* $2^{(\ln(3)/\ln(2))^3}=\exp\Big(\ln(2).\dfrac{\ln(3)^3}{\ln(2)^3}\Big)$ *et* $3^{(\ln(3)/\ln(2))^2}=\exp\Big(\ln(3).\dfrac{\ln(3)^2}{\ln(2)^2}\Big)$.
*D'autre part, pour l'équation* $x^3.\ln(2)=x^2.\ln(3)$*, on ne part pas dans "je simplifie par x" qui est trop risqué. On passe tout d'un côté, on factorise, et ainsi on ne perd pas la solution* $x=0$.

**IS04** • Le calcul de $Arccos\big(\cos(59.\pi/3)\big)$. • MPSI 2/2013

On calcule $\cos(59.\pi/3)$ en réduisant modulo $2.\pi$ : $\dfrac{59.\pi}{3}=20.\pi-\dfrac{\pi}{3}$. On a donc $\cos(59.\pi/3)=\cos(-\pi/3)=1/2$.

On effectue : $Arccos(1/2)=\dfrac{\pi}{3}$. On encadre : $\boxed{Arccos\Big(\cos\big(\dfrac{59.\pi}{3}\big)\Big)=\dfrac{\pi}{3}}$

*Il faut évidemment se méfier de* $Arccos(\cos(\theta))$ *qui ne se simplifie pas si vite, puisque cette application est déjà périodique.*

**IS04** • Les intégrales $\int_0^{\pi/6}\frac{e^{\tan(t)}}{\cos^2(\theta)}.d\theta$ et $\int_0^{\pi/6}\frac{e^{\tan(\theta)}}{\cos^2(\theta)}.d\theta$. • MPSI 2/2013

Les deux intégrales existent par continuité des applications intégrées *(le cosinus ne s'annule pas entre* $0$ *et* $\pi/6$*)*.
Pour la première, $t$ est variable libre et $\theta$ est la variable muette qui va de $0$ à $\pi/3$ :

$$\int_0^{\pi/6}\frac{e^{\tan(t)}}{\cos^2(\theta)}.d\theta=e^{\tan(t)}.\int_0^{\pi/6}\frac{d\theta}{\cos^2(\theta)}=$$

On intègre en $\tan(\theta)$ et il reste $\boxed{\dfrac{e^{tan(t)}.\sqrt{3}}{3}}$

L'autre intégrale est en $u'.e^u$. On trouve une primitive en $\theta\longmapsto e^{tan(\theta)}$ et la valeur cherchée est $\boxed{e^{\sqrt{3}/3}-1}$

**IS04** • L'équation $z^3-(3+4.i).z^2+(4.i-3).z+25=0$ d'inconnue $z$. • MPSI 2/2013

L'équation est polynomiale de degré 3, elle admet trois racines dans $\mathbb{C}$ : $a$, $-a$ et $b$ *(on nous dit que deux des racines sont opposées)*.
Or, la somme des racines vaut $3+4.i$ *(formules de Viete)*.
On a donc sans attendre : $b=3+4.i$.
De plus, le produits des racines vaut $-25$. On a donc $-a^2.b=-25$.
On divise : $a^2=\dfrac{25}{3+4.i}=\dfrac{25.(3-4.i)}{3^2+4^2}=3-4.i$.
On se contente donc d'extraire les deux racines carrées du complexe $3-4.i$ *(de module* $5$*)*. En écrivant

$a = \alpha + i.\beta$ avec $\alpha$ et $\beta$ réels, on a $\alpha^2 - \beta^2 = 3$, $2.\alpha.\beta = -4$ et $\alpha^2 + \beta^2 = 5$. On trouve sans effort : $\alpha = 2$ et $\beta = -1$ *(ou les opposés)*. On tient les trois racines : $\boxed{3 + 4.i,\ 2 - i \text{ et } i - 2}$
*Si l'on a du temps, on vérifie la validité du dernier coefficient :* $a.b + (-a.b) + a.(-a) = (-3 + 4.i)$.

**IS04** • Calcul de $1 + (1-i) + (1-i)^2 + (1-i)^3 + \ldots + (1-i)^{2013}$. • MPSI 2/2013

Cette somme s'écrit $\displaystyle\sum_{k=0}^{2013}(1-i)^k$ et s'avère être une série géométrique de raison $(1-i)$ différente de 1.

Sa somme se compacte en $\dfrac{1-(1-i)^{2014}}{1-(1-i)}$ et se simplifie en $i.((1-i)^{2014} - 1)$ *(après inversion de $i$ en $-i$)*.
On remplace $1 - i$ par $\sqrt{2}.e^{-i.\pi/4}$ et on profite de la congruence $2014 = 6 \quad mod \quad 8$ : $(1-i)^{2014} = 2^{1007}.e^{-6.i.\pi/4} = i.2^{1007}$.

Il nous reste donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{2013}(1-i)^k = -2^{1007} - i}$

**IS04** • L'équation $n! = 1 \quad mod \quad 13$. • MPSI 2/2013

*Cette équation a un sens, puisque $n!$ est un entier naturel.*
On trouve deux solutions évidentes : 0 et 1 *(on rappelle que 0! vaut 1 par définition même)*.
On sait aussi qu'à partir de $n = 13$, on a $n! = 0 \quad mod \quad 13$ à cause de la présence d'un 13 dans la liste des facteurs.
On a juste à tester les premières valeurs de $n$, en calculant directement modulo 13 *(à chaque étape, on multiplie par le nouvel entier, et on réduit modulo 13)*.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n! \quad mod \quad 13$ | 1 | 2 | 6 | 11 | 3 | 5 | 9 | 7 | 11 | 6 | 1 | 12 |

Par exemple, on avait $3! = 6 \quad mod \quad 13$, donc $4! = 6.4 = 24 = 11 \quad mod \quad 13$.
De même, $5! = 11.5 = 55 = 52 + 3 = 3 \quad mod \quad 13$.
On peut donc conclure : $\boxed{S = \{0, 1, 11\}}$
*Une réponse non argumentée ne pourra pas être acceptée.*

**IS04** • Expression de $\cos(\theta)$ à l'aide de $\tan(\theta/4)$. • MPSI 2/2013

Le domaine est convenable. On pose déjà $t = \tan(\theta/2)$ si tout va bien, on trouve $\cos(\theta) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. On remplace ensuite $t$ par $\dfrac{2.\tau}{1-\tau^2}$ *(en posant $\tau = \tan(\theta/4)$)*.

Tous calculs faits : $\boxed{\cos(\theta) = \dfrac{\tau^4 - 6.\tau^2 + 1}{(\tau^2+1)^2}}$

*Attention, il faut traiter à part le cas $|\tau| = 1$ pour lequel la variable intermédiaire $t$ n'existe pas. C'est le cas $\theta = \pi + 2.k.\pi$ avec $k$ entier. On a alors $\cos(\theta) = -1$ et $\dfrac{\tau^4 - 6.\tau^2 + 1}{(\tau^2+1)^2} = -1$ (alors que $t$ est "infini").*
*Ceux qui auront songé à ce détail seront récompensés par un bonus. Je ne risque quasiment rien à l'affirmer... Combien le feront ?*

**IS04** • Le sinus et le cosinus de $Arccos(72/97) + Arcsin(36/85)$. • MPSI 2/2013

On commence par la preuve de $72^2 + 65^2 = 97^2$, non pas en additionnant deux gros carrés... On réfléchit. On calcule :
$97^2 - 72^2 = (97 - 72).(97 + 72) = 25.169 = 5^2.13^2 = (5.13)^2 = 65^2$.

On nomme ensuite $\alpha$ et $\beta$ les deux angles $Arccos(72/97)$ et $Arcsin(36/85)$ *(longueurs plus petites que 1).*

On connaît

| angle | cos | sin |
|---|---|---|
| $\alpha$ | $72/97$ | |
| $\beta$ | | $36/85$ |

, on calcule :

| angle | cos | sin |
|---|---|---|
| $\alpha$ | $72/97$ | $65/97$ |
| $\beta$ | $77/85$ | $36/85$ |

J'ai utilisé le théorème de Pythagore et le signe de $\sin(\alpha)$ avec $\alpha$ entre 0 et $\pi$ de même que le signe de $\cos(\beta)$ avec $\beta$ entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. J'ai aussi utilisé $85^2 - 36^2 = (85-36).(85+36) = 49.121 = (7.11)^2$.
On calcule alors avec les formules en $\cos.\cos - \sin.\sin$ et $\sin.\cos + \cos.\sin$ :
$\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{72.36}{97.85} + \dfrac{77.65}{97.85}$ et $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{72.77}{97.85} - \dfrac{36.65}{97.85}$

Si on y tient :

| $\sin(\alpha+\beta)$ | $\cos(\alpha+\beta)$ |
|---|---|
| $\dfrac{7597}{8245}$ | $\dfrac{3204}{8245}$ |

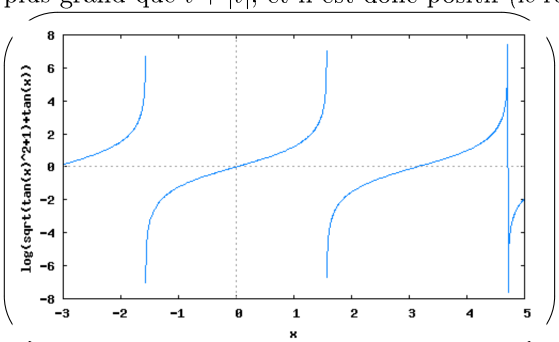
et on peut même vérifier la relation de Pythagore.

**IS04** • Neutre d'un groupe. • MPSI 2/2013

Le groupe s'appelle $h$ et sa loi $\oplus$. La définition est donc :
$\exists\ e \in H,\ \forall\ a \in H,\ a \oplus e = e \oplus a = a.$
On suppose que deux éléments $e$ et $\varepsilon$ se présentent comme neutre.
On calcule alors $e \oplus \varepsilon$. Comme $e$ est neutre, c'est $\varepsilon$. Comme $\varepsilon$ est neutre, c'est $e$. On a donc : $\varepsilon = e \oplus \varepsilon = e$ et en oubliant le terme du milieu par transitivité : $\varepsilon = e$.

**IS04** • Dérivée de $x \longmapsto \ln(\tan(x) + \sqrt{1+\tan^2(x)})$. • MPSI 2/2013

Pour que cette application soit définie, il faut éviter les nombres de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k.\pi$ avec $k$ entier. Il faut ensuite que $\tan(x) + \sqrt{1+\tan^2(x)}$ soit positif. Mais ce réel est de la forme $t + \sqrt{1+t^2}$. Il est donc plus grand que $t + |t|$, et il est donc positif *(le réel $t + |t|$ est nul pour $t$ négatif, et positif si $t$ est positif).*




On dérive une composée $x \longmapsto \tan(x)$ suivie de $t \longmapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$. La première se dérive en $x \longmapsto 1 + \tan^2(x)$. La seconde se dérive en $t \longmapsto \dfrac{1 + \dfrac{2.t}{2.\sqrt{1+t^2}}}{t + \sqrt{1+t^2}}$. La surprise est que déjà cette application se simplifie en $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ *(on en reparlera).*
On calcule cette seconde quantité en $t = \tan(x)$ et on multiplie les deux dérivées : $x \longmapsto (1 + \tan^2(x)).\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Au final, il reste $\boxed{x \longmapsto \sqrt{1+\tan^2(x)}}$
*On peut simplifier en* $x \longmapsto \dfrac{1}{|\cos(x)|}$ *en prenant garde de ne pas effacer la valeur absolue.*

**IS04** • Division euclidienne de $(X+2)^5$ par $X^2 + X + 1$. • MPSI 2/2013

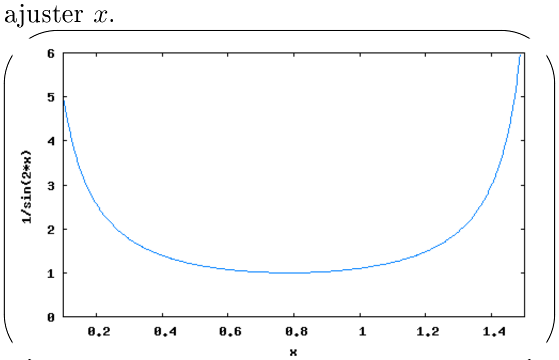
On développe déjà en $X^5 + 5.2.X^4 + 10.4.X^3 + 10.8.X^2 + 5.16.X + 32$ et on pose la division :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X^5$ | $+10.X^4$ | $+40.X^3$ | $+80.X^2$ | $+80.X$ | $+32$ | $X^2$ | $+X$ | $+1$ | |
| $X^5$ | $+X^4$ | $+X^3$ | | | | $- - -$ | $- - - - - --$ | $- - - - -$ | |
| | $9.X^4$ | $+39.X^3$ | $+80.X^2$ | | | $X^3$ | $+9.X^2$ | $+30.X$ | $+41$ |
| | $9.X^4$ | $+9.X^3$ | $+9.X^2$ | | | | | | |
| | | $30.X^3$ | $+71.X^2$ | $+80.X$ | | | | | |
| | | $30.X^3$ | $+30.X^2$ | $+30.X$ | | | | | |
| | | | $41.X^2$ | $+50.X$ | $+32$ | | | | |
| | | | $41.X^2$ | $+41.X$ | $+41$ | | | | |
| | | | | $9.X$ | $-9$ | | | | |

$\boxed{\text{Le quotient vaut } X^3 + 9.X^2 + 30.X + 41 \text{ et le reste } 9.X - 9}$

**IS04** • Equation $\int_{\pi/4}^{x} \frac{d\theta}{\sin(2.\theta)} = 5.$ • MPSI 2/2013

Tant que $x$ reste entre 0 et $\pi/2$ *(strictement)*, cette intégrale existe. De là à ce qu'elle vaille 5, il faut ajuster $x$.




On connaît une primitive : $\theta \longmapsto \ln(\tan(\theta))/2$ (issue de $\theta \longmapsto \ln(\tan(\theta/2))$).

L'équation devient $\ln\left(\frac{\tan(x)}{\tan(\pi/4)}\right) = 10$. On passe à l'exponentielle : $\tan(x) = e^{10}$. On remonte par arctangente, et on ne met pas de congruences inutiles, puisque $x$ doit rester entre 0 et $\pi$.

L'unique solution est donc $\boxed{Arctan(e^{10})}$

**IS04** • Un entier au hasard entre 1 et 100. • MPSI 2/2013

Attention, de 0 à 100, il y a 101 entiers.

Combien sont des multiples de 7 ? Il y en a quinze *(de 0 à 98, inclus tous deux)*.

Combien sont des multiples de 11 ? Il y en a dix *(de 0 à 99)*.

Mais attention, les événements sont compatibles. On va compter à tort deux fois les entiers 0 et 77 *(c'est $A \cap B$ dans $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$)*.

Finalement, on a donc vingt trois entiers "favorables".

Le rapport $\frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{cardinal\ de\ l'univers}$ vaut donc $\boxed{\frac{23}{101}}$

MPSI 2/2013 — `126 points` — $IS04$

♡23 Exprimez $\cos(4.\theta)$ comme polynôme en $\cos(\theta)$, puis comme polynôme en $\sin(\theta)$. •2 pt.•

---

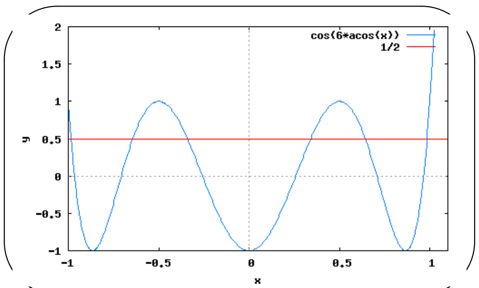
♡24 Représentez graphiquement $1_{[1,4]} + 1_{[2,3[}$ (notée $f$) sur l'intervalle $[-2, 5]$ et calculez $\displaystyle\int_{-2}^{5} f(t).dt$. •3 pt.•

---

♡25 Dérivez $x \longmapsto \ln(e^x + \sqrt{e^{2.x} - 1})$ après avoir donné son domaine. •2 pt.•

---

♡26 On note $T_6$ le sixième polynôme de Tchebytchev de première espèce, caractérisé par $T_6(\cos(\theta)) = \cos(6.\theta)$ pour tout réel $\theta$. Résolvez l'équation $2.T_6(x) = 1$ d'inconnue réelle $x$ *(si vous faites un changement de variable comme prévu, n'oubliez aucun détail)*. •4 pt.•




---

♢15 Créez le polynôme de degré 3 admettant pour racines $i$, $1 + i$ *(entre autres)*, de coefficient constant 2 et valant 1 en 1. •3 pt.•

---

♣9 Résolvez $\displaystyle\int_{x}^{5.\pi/2} \frac{d\theta}{\sin(\theta)} = 7$ d'inconnue réelle $x$. •3 pt.•

---

♣10 On définit sur $\mathbb{N}$ la loi $\sharp$ par $a\sharp b = \dbinom{a+b}{b}$ (coefficient binomial). Montrez que cette loi est interne, commutative, non associative. •2 pt.•

---

♢16 Montrez, pour tout couple $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ que $\dfrac{x.y - 1}{\sqrt{1 + x^2}.\sqrt{1 + y^2}}$ est dans $[-1, 1]$. •2 pt.•

---

♢17 Résolvez l'équation $\displaystyle\sum_{k=-n}^{2.n} i^k \in \mathbb{R}$ d'inconnue $n$ dans $\mathbb{N}$. •3 pt.•

---

♢18 Vous tirez au hasard *(équiprobable)* un entier entre 1 et 2013. Quelle est la probabilité qu'il soit multiple de 13 ou de 17 *(attention, c'est un ou exclusif !)*. •2 pt.•

---

♢19 Prouvez $4324^2 + 3360^2 = 5476^2$. •1 pt.• Calculez les racines quatrièmes de $3360.i - 4324$. •3 pt.• Calculez leur somme. •1 pt.•

---

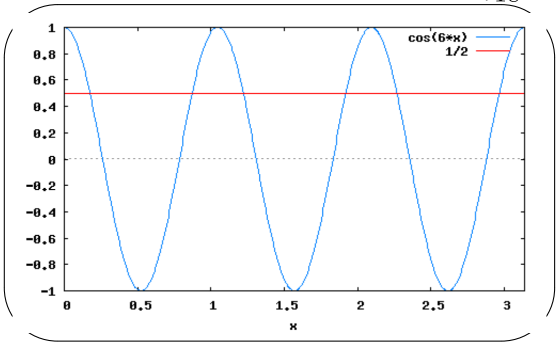
♣11 On note $E$ l'ensemble des entiers de 1 à 8. On pose $A = \{2, 5, 7, 8\}$, $B = \{1, 2, 5\}$ et $B = \{2, 5, 7\}$. Combien l'équation $X \cap A = B$ a-t-elle de solutions $X$ dans $P(E)$ ? •1 pt.• Combien l'équation $X \cap A = C$ a-t-elle de solutions $X$ dans $P(E)$ ? •3 pt.•

**IS05** • Polynômes de Tchebytchev. • MPSI 2/2013

On sort tout de suite le cours : $\cos(4.\theta) = 8.\cos^4(\theta) - 8.\cos^2(\theta) + 1$, qu'on résume en $8.c^4 - 8.c^2 + 1$. En remplaçant $c^2$ par $1 - s^2$, on trouve ... $\cos(4.\theta) = 8.\sin^4(\theta) - 8.\sin^2(\theta) + 1$.

---

On passe à l'équation $2.T_6(x) = 1$ d'inconnue réelle $x$.
On cherche $x$ sous la forme $\cos(\theta)$, en se limitant donc pour l'instant à $S \cap [-1,\ 1]$. On pose donc $\theta = Arccos(x)$ *(ce qui force $\theta$ à demeurer entre $0$ et $\pi$).*
L'équation devient $\cos(6.\theta) = \dfrac{1}{2}$.
On reconnaît $\cos(\pi/3)$. On résout alors : $\exists k \in \mathbb{Z},\ 6.\theta = \dfrac{\pi}{3} + 2.k.\pi$ ou $\exists p \in \mathbb{Z},\ 6.\theta = -\dfrac{\pi}{3} + 2.p.\pi$.
On trouve l'ensemble des valeurs de $\theta$ : $\Big\{\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k.\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\Big\} \bigcup \Big\{-\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{p.\pi}{3} | p \in \mathbb{Z}\Big\}$.




Sachant que $\theta$ doit rester entre $0$ et $\pi$, on dénombre six solutions : $\dfrac{\pi}{18}, \dfrac{7.\pi}{18}, \dfrac{13.\pi}{18}, \dfrac{5.\pi}{18}, \dfrac{11.\pi}{18}, \dfrac{17.\pi}{18}$
Sur cet intervalle, le cosinus est injectif, on trouve alors pour $x$ les valeurs suivantes *(toutes distinctes)* :

$$\boxed{\cos\Big(\frac{\pi}{18}\Big),\ \cos\Big(\frac{7.\pi}{18}\Big),\ \cos\Big(\frac{13.\pi}{18}\Big),\ \cos\Big(\frac{5.\pi}{18}\Big),\ \cos\Big(\frac{11.\pi}{18}\Big),\ \cos\Big(\frac{17.\pi}{18}\Big)}$$

On a trouvé six solutions pour $x$, entre $-1$ et $1$. Or, l'équation est polynômiale de degré 6 et ne peut avoir plus de six solutions. C'est donc qu'on les a toutes. La liste encadrée ci dessus donne l'ensemble cherché.

**IS05** • Une somme d'indicatrices. • MPSI 2/2013

On étudie sur chaque intervalle du domaine de définition :

| $x$ | $-2 \leqslant x < 1$ | $1 \leqslant x < 2$ | $2 \leqslant x < 3$ | $3 \leqslant x \leqslant 4$ | $4 < x \leqslant 5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1_{[1,4]}(x)$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $1_{[2,3[}(x)$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $f(x)$ | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 |

La fonction est en escalier : 0 puis 1 puis 2 puis 1 puis 0. Les autes se font en 1, 2, 3 et 4, avec des comportents différents suivant le point.
L'intégrale de cette application discontinue se calcule géométriquement : c'est l'aire algébrique. On la découpe en deux rectangles de hauteur 1 : l'un a pour largeur 3 (pour $1_{[1,4]}$) et l'autre a pour largeur 1 (pour $1_{[2,3[}$ et ce n'est pas la valeur en 3 qui va y changer quelquechose...).

$\boxed{\text{L'aire cherchée vaut 4.}}$

**IS05** • L'application $x \longmapsto \ln(e^x + \sqrt{e^{2.x} - 1})$. • MPSI 2/2013

Pour le domaine de définition, on doit déjà demander $e^{2.x} \geqslant 1$ ce qui équivaut à $x \in [0, +\infty[$. Dès lors, $e^{2.x} - 1$ est positif, sa racine aussi, de même que la somme $e^x + \sqrt{e^{2.x} - 1}$.

On dérive en $x \longmapsto \dfrac{e^x + \dfrac{2.e^{2.x}}{2.\sqrt{e^{2.x}-1}}}{e^x + \sqrt{e^{2.x}-1}}$.

On efface les 2, on réduit au dénominateur commun en haut : $\dfrac{e^x.(\sqrt{e^{2.x}-1} + e^x)}{\sqrt{e^{2.x}-1}}$. On simplifie avec le dénominateur, et il reste juste $\boxed{x \longmapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{e^{2.x}-1}}}$

**IS05** • Polynôme de racines $i$, $1+i$ et avec deux autres conditions. • MPSI 2/2013

Ce polynôme se factorise par $(X-i).(X-1-i)$ pour avoir ces deux racines. Comme il est de degré 3, il s'écrit $(X-i).(X-1-i).(a.X+b)$.

La valeur de son coefficient constant est sa valeur en 0 : $i.(1+i).b = 2$. On trouve la valeur de $b$ : $b = -(1+i)$.

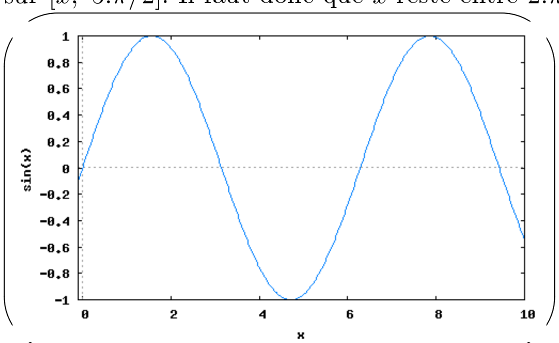
La valeur en 1 est imposée : $(1-i).(-i).(a+b) = 1$ : $a = \dfrac{3+i}{2}$.

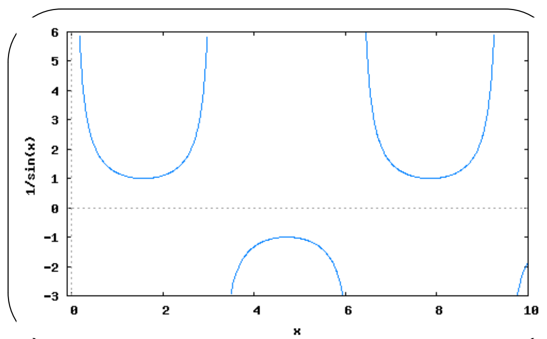
On résume : $\boxed{(X-i).(X-1-i).\Big(\dfrac{1+3.i}{2}.X - 1 - i\Big)}$

Comme toujours, on hésite sur la forme la plus pertinente : forme développée ou factorisée. On développe donc : $\dfrac{(1+3.i).X^3 + (3-7.i).X^2 + (4.i-6).X + 2}{2}$.

**IS05** • L'équation $\int_x^{5.\pi/2} \frac{d\theta}{\sin(\theta)} = 7$ d'inconnue $x$. • MPSI 2/2013

Pour que cette équation ait un sens, il faut que l'application sinus reste continue et ne s'annule pas sur $[x,\ 5.\pi/2]$. Il faut donc que $x$ reste entre $2.\pi$ et $3.\pi$.




On a ensuite une primitive explicite connue par coeur ♡ : $\theta \longmapsto \ln(\tan(\theta/2))$. L'équation devient $\ln(\tan(x/2)) = -7$.

On résout : $\tan(x/2) = e^{-7}$. On trouve $x = 2.Arctan(e^{-7})$ mais seulement modulo $\pi$ *(périodicité de la tangente)*.

Le réel $x = 2.Arctan(e^{-7})$ est dans $[0,\ \pi]$ (pas très loin de 0).

La bonne réponse est donc $\boxed{x = 2.Arctan(e^{-7}) + 2.\pi}$

**IS05** • Loi $a * b = \binom{a+b}{b}$. • MPSI 2/2013

Pour $a$ et $b$ entiers, le nombre $\binom{n}{k}$ avec $(n = a+b \geqslant k = b)$ est bien à son tour un entier.

C'est même $\dfrac{(a+b)!}{a!.b!}$, et on peut l'écrire aussi $\binom{b+a}{a}$ par symétrie sur chaque ligne du triangle de Pascal. On a donc pour tout couple : $a\sharp b = b\sharp a$.

Cette loi ne semble pas très associative. Pourquoi aurait on en effet $\binom{\binom{a+b}{b}+c}{c} = \binom{a+\binom{b+c}{c}}{a}$ ?

Mais ça ne prouve rien. Il se peut que ces expressions ne se ressemblent pas mais soient égales. Alors il faut donner un contrexemple :

| $a$ | $b$ | $c$ | $a\sharp b$ | $(a\sharp b)\sharp c$ | $a\sharp(b\sharp c)$ | $(b\sharp c)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 2 | $\binom{5}{2}$ | $\binom{12}{2}$ | $\binom{9}{3}$ | $\binom{4}{2}$ |
| | | | 10 | 66 | 84 | 6 |

On peut montrer que cette loi n'a pas de neutre.

**IS05** • Quantité $\frac{x.y-1}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}}$. • MPSI 2/2013

Pour montrer que ce réel (d'existence assurée) est entre $-1$ et 1, il suffit de prouver que son carré est plus petit que 1. On va donc calculer la différence entre son carré et 1 :

$1 - \Big(\dfrac{x.y-1}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}}\Big)^2 = \dfrac{(1+x^2).(1+y^2)-(x.y-1)^2}{(1+x^2).(1+y^2)} = \dfrac{x^2+y^2+2.x.y}{(1+x^2).(1+y^2)} = \dfrac{(x+y)^2}{(1+x^2).(1+y^2)}$

En tant que carré d'entier, cette différence est positive. On n'en demandait pas plus.

**IS05** • L'équation "$\sum_{k=-n}^{k=2.n} i^k$ est réel". • MPSI 2/2013

Pour tout entier naturel $n$ on peut calculer cette somme des termes d'une suite géométrique. Le premier terme est $i^{-n}$ et le terme à venir serait $i^{2.n+1}$ (et pas $i^{2.(n+1)}$ regardez bien). La raison ne vaut pas 1, on peut appliquer la formule de la série géométrique :

l'équation devient $\dfrac{i^{-n}-i^{2.n+1}}{1-i} \in R$.

Mais $i^{2.n+1}$ se simplifie en $(i^2)^n.i$ c'est à dire $(-1)^n.i$.

D'autre part $1/i$ est égal à $-i$, et donc $i^{-n}$ vaut $(-1)^n.i^n$.

L'équation devient $\boxed{(-1)^n.\dfrac{i^n-i}{1-i} \in \mathbb{R}}$

Ce complexe sera réel si et seulement si $i^n - i$ est multiple de $1-i$.

Or, $i^n - i$ dépend juste de la valeur de $n$ modulo 4 :

| $n \quad mod \quad 4$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $i^n - i$ | $1-i$ | 0 | $-1-i$ | $-2.i$ |

Les valeurs autorisées sont donc les $n$ congrus à 0 ou 1 modulo 4 : $\boxed{S = \{4.k,\ 4.k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}}$

**IS05** • Un entier au hasard entre 1 et 2013. • MPSI 2/2013

L'univers est ici l'ensemble $\{1, 2, \ldots 2013\}$ de cardinal 2013 (étonnant, non ?).

Il y a cent cinquante quatre multiples de 13 (de 13 à 154.13 qui vaut 2002).

Il y a cent dix huit multiples de 17 (de 17 à 2006).

Mais il y a neuf multiples communs.

dans une simple intersection (ou *inclusif*), il faut les décompter une fois. Mais dans une différence symétrique (ou *exclusif*), il faut les décompter deux fois.

La probabilité cherchée est donc : $\boxed{\dfrac{154+118-2.9}{2013} \textbf{ de valeur } \dfrac{254}{2013}}$

**IS05** • Racines quatrièmes de $3360.i - 4324$. • MPSI 2/2013

On commence par un calcul efficace. On ne calcule en effet aucun carré là encore :
$5476^2 - 4324^2 = (5476+4324).(5476-4324) = 9800.1152 = (2.7^2.10^2).(2^7.3^2)$
On reconnaît : $5476^2 - 4324^2 = 2^8.7^2.3^2.10^2 = (2^4.7.3.10)^2 = 3360^2$
On rétablit : $5476^2 = 4324^2 + 3360^2$.

---

On résout ensuite $(a+i.b)^2 = 3360.i - 4324$ avec $a$ et $b$ réels : $a^2 - b^2 = -4324$, $a.b = 1680$ et $a^2 + b^2 = 5476$.
On trouve $a^2 = 576$ et $b^2 = 4900$, avec $a$ et $b$ de même signe. On extrait : $a = 24$, et $b = 70$ *(ou le couple opposé)*.

On résout cette fois $(\alpha + i.\beta)^2 = 24 + 70.i$ de la même manière.
On trouve cette fois $7 + 5.i$.
Les quatre racines quatrièmes cherchées sont $\boxed{7+5.i,\ -7-5.i,\ i.(7+5.i) \text{ et } -i.(7+5.i)}$
La somme des quatre racines quatrièmes vaut 0. Et même sans les avoir calculées, on l'aurait trouvé : $r$, $i.r$, $-r$ et $-i.r$.

**IS05** • Equations $\{2,5,7,8\} \cap X = \{\ldots\}$. • MPSI 2/2013

Pour l'équation $\{2,\ 5,\ 7,\ 8\} \cap X = \{1,\ 2,\ 5\}$, c'est vite fait, il n'y a pas de solution. L'élément 1 n'est pas dans $\{2,\ 5,\ 7,\ 8\}$, il ne sera jamais dans l'intersection.

---

L'équation $\{2,\ 5,\ 7,\ 8\} \cap X = \{2,\ 5,\ 7\}$ a des solutions, telles que $\{2,\ 5,\ 7\}$ par exemple. On réfléchit :

• il faut que 2, 5 et 7 soient dans $X$ pour les retrouver dans l'intersection.
• il ne faut pas que 8 soit dans $X$ *(sinon on le retrouvera dans l'intersection)*
• les éléments 1, 3, 4, 6 peuvent être ou non dans $X$, ça ne changera rien à l'intersection.

Les solutions sont les ensembles de la forme $\boxed{\{2,\ 5,\ 7\} \cup Y \text{ avec } Y \text{ dans } \{1,\ 3,\ 4,\ 6\}}$
On trouve $\boxed{2^4}$ ensembles de ce type, de $\{2,\ 5,\ 7\}$ à $\{2,\ 5,\ 7,\ 1,\ 3,\ 4,\ 6\}$ en passant par $\{2,\ 5,\ 7,\ 3,\ 6\}$.

| MPSI 2/2013 | 161 points | *IS*05 |
|---|---|---|

| Charlemagne MPSI-2 / 2013 | Mardi 15 octobre | $IS06$ |
|---|---|---|

◇20 On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez $A^2.B^2$, $(A.B)^2$, $B^2.A^2$ et $(B.A)^2$. •3 pt.•
Laquelle de vos quatre matrices calculées a le plus grand déterminant ? •2 pt.•
*(R)appel* : $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a.d - b.c.$

---

◇21 Calculez $\displaystyle\int_0^\pi Min(2.\sin(t), 1).dt$. •3 pt.•

---

♣12 Sur tous les entiers obtenus en effectuant des pemutations sur les chiffres 123456789, combien sont des multiples de 9 ?
Combien sont des multiples de 2 ?
Combien sont des multiples de 5 ?
Combien sont des multiples de 6 ? •4 pt.•

---

◇22 On définit $\varphi = x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Représentez graphiquement $\varphi \circ \varphi$. •2 pt.•

---

♡27 Retrouvez ce qu'il se cache sous les taches de café : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ . & . \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & . \\ . & . \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -5 & . \\ . & . \end{pmatrix}$. •3 pt.•

---

♠7 On a montré dans un devoir précédent que $\dfrac{1 - x.y}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}}$ était toujours dans $[-1, 1]$ pour $x$ et $y$ réels. On pose alors $\theta = Arcsin\left(\frac{x.y-1}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}}\right)$ *(existence assurée)*.
Calculez alors $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$ *(langage fonctionnel* : $\left(x \longmapsto Arcsin\left(\frac{x.y-1}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}}\right)\right)'$*)* et $\dfrac{\partial\theta}{\partial y}$ *(langage fonctionnel* : $\left(y \longmapsto Arcsin\left(\frac{x.y-1}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}}\right)\right)'$*)*. •4 pt.•

---

♣13 Complétez : $\tan(\pi/12) + \tan(\pi/5) = \tan(\ldots)$. •1 pt.•

---

♡28 Montrez que la composée de deux applications injectives est injective. •1 pt.•

---

◇23 Déterminez l'intersection généralisée $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{n}{n+1},\ \frac{2.n+3}{n+1}\right[$. (on est en maths, on veut une preuve) •3 pt.•

---

♡29 Rappelez une caractérisation de "$H$ est un sous-groupe de $(E,\ \theta)$". •2 pt.•
Montrez que l'ensemble des nombres de la forme $a + b.\sqrt{3}$ avec $a$ et $b$ rationnels *(et $(a,\ b) \neq (0, 0)$* est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*,\ \times)$. •3 pt.•

---

♡30 Donnez la formule qui calcule $Max(a, b)$ pour $a$ et $b$ réels. •1 pt.•

---

◇24 Démontrez que le p.g.c.d. de $3^{12} + 1$ et $3^8 + 1$ est égal à 2. •3 pt.• *(indication* : $(3^4 + 1).(3^{12} + 1) - 3^8.(3^8 + 1)$*)*

**IS06** • $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. • MPSI 2/2013

On calcule les premiers produits utiles : $A.B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $B.A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, puis les carrés :

| $A^2$ | $B^2$ | $A^2.B^2$ | $B^2.A^2$ | $(A.B)^2$ | $(B.A)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 29 & 5 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 29 & -20 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ |

Les quatre matrices de la liste demandée ont le même déterminant, de valeur 16 (et c'est $\det(A)^2.\det(B)^2$.

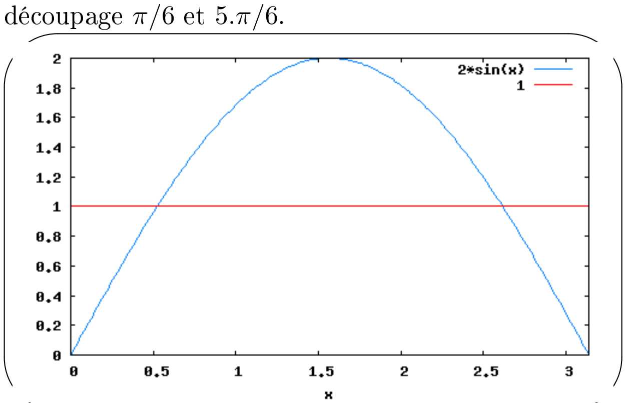
**IS06** • La matrice en $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ . & . \end{pmatrix}$. • MPSI 2/2013

Les formats sont compatibles pour les multiplications. On pose a priori $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$. On calcule : $A^2 = \begin{pmatrix} 1+a & 1+b \\ a.(1+b) & a+b^2 \end{pmatrix}$. Par identification avec $A^2$ : $a = 3$. On reporte : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & b \end{pmatrix}$ et on calcule davantage : $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1+b \\ 3.(1+b) & 3+b^2 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 7+3.b & . \\ . & . \end{pmatrix}$. Par identification : $7 + 3.b = -5$ d'où $b = -4$.

On dresse le bilan : $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -9 & 19 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} -5 & 16 \\ 48 & -85 \end{pmatrix}}$ avec solution unique.

**IS06** • Calcul de $\int_0^\pi Min(2.\sin(t), 1).dt$. • MPSI 2/2013

L'application est continue (on l'a en écrivant $t \longmapsto \dfrac{1 + 2.\sin(t) - |1 - 2.\sin(t)|}{2}$) , donc l'intégrale existe.
On traite cette intégrale géométriquement, en découpant par la relation de Chasles, avec points de découpage $\pi/6$ et $5.\pi/6$.




On trouve : $\displaystyle\int_0^\pi Min(2.\sin(t), 1).dt = \int_{0^\pi/6} 2.\sin(t).dt + \int_{\pi/6}^{\pi} 1.dt + \int_{5.\pi/6}^{\pi} 2.\sin(t).dt$

On trouve des primitives en $-2.\cos$ et $Id$ et on effectue : $\boxed{4+\dfrac{2.\pi}{3}-2.\sqrt{3}}$

**IS06** • L'application $x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{sinon} \end{cases}$. • MPSI 2/2013

Cette application est bien définie en tout point. Sa composée le sera aussi. On distingue les cas :
• pour $x$ rationnel, $\varphi(x)$ vaut $x$. Il est à son tour rationnel. On a donc $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x) = x$.
• pour $x$ irrationnel, $\varphi(x)$ vaut $1-x$. Il est à son tour rationnel. On a donc $\varphi(\varphi(x)) = 1-\varphi(x) = 1-(1-x) = x$.
Pour tout $x$, on a donc $\varphi(\varphi(x)) = x$. Le graphe est celui de l'identité : la première bissectrice.

**IS06** • L'application $(x,y) \longmapsto Arcsin(\frac{x.y-1}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}})$. • MPSI 2/2013

Comme le réel $\left(\dfrac{x.y-1}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}}\right)$ est entre $-1$ et $1$, on peut en prendre l'arcsinus. Cette application est bien continue et même dérivable en tant que composée d'applications dérivables *(attention toutefois peut être en quelques valeurs à cause des racines et de l'arcisnus)*.
On dérive une composée : $x \longmapsto \frac{x.y-1}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}}$ suivie de $h \longmapsto Arcsin(h)$.

On trouve le produit de deux termes : la dérivée du quotient et le $\dfrac{1}{\sqrt{1-(.)^2}}$.

On élève le quotient au carré, on lui soustrait 1 *(calcul déjà fait)* et on trouve : $\dfrac{1}{\sqrt{1-(\ldots)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{(x+y)^2}{(1+x^2).(1+y^2)}}} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}}{|x+y|}$ *(attention à la valeur absolue)*.

On dérive aussi le quotient avec notations $u = (x \longmapsto x.y-1)$ et $v = (x \longmapsto \sqrt{1+x^2})$ *(comme on dérive des fonctions de $x$, le $\sqrt{1+y^2}$ n'a aucun rôle et se factorise)*.

On trouve alors $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}.\dfrac{y.\sqrt{1+x^2}-(x.y-1).\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$.

On pousse les racines au dénominateur : $x \longmapsto \dfrac{y.(1+x^2)-(x.y-1).x}{\sqrt{1+y^2}.\sqrt{1+x^2}.(1+x^2)}$ ce qui donne $x \longmapsto \dfrac{x+y}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}}$ *(finalement assez simple)*.

On multiplie les deux termes, et il reste fort peu de choses : $\boxed{\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \varepsilon.\dfrac{1}{1+x^2} \text{ avec } \varepsilon \text{ qui vaut } \dfrac{x+y}{|x+y|}}$ ce qui fait $1$ ou $-1$. *Si l'on travaille sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ il reste juste $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$.*

---

Par symétrie parfaite des rôles, la dérivée par rapport à $y$ est $y \longmapsto \dfrac{\varepsilon}{1+y^2}$, avec le même $\varepsilon$.
On remonte alors facilement à la fonction elle même : $x \longmapsto Arctan(x) + Arctan(y)$ à une constate additive près, en tout cas tant qu'on reste sur un domaine où $\varepsilon$ vaut 1.
En $(0,0)$, la valeur de cette constate se calcule et elle donne $Arcsin(-1)$ c'est à dire $-\pi/2$.
On a donc $Arcsin\left(\dfrac{x.y-1}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}}\right) = Arctan(x) + Arctan(y) - \dfrac{\pi}{2}$ *(le premier qui dit "je m'en étais douté", je lui donne à lire l'oeuvre intégrale de Srinivaja Ramanujan dans le texte)*.

**IS06** • Les anagrammes de 123456789. • MPSI 2/2013

On a bien 9! nombres, de 123456789 à 987654321.
• Pour chacun, la somme des chiffres vaut $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$ c'est à dire 45. C'est un multiple de 9, et même de 3. Chacun est donc multiple de 3.
• Seuls ceux terminant par 5 sont des multiples de 5. Ils sont donc de la forme $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_85$ avec $a_1$ à $a_8$ les huit chiffres 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 et 9, permutés. On a donc 8! nombres.
• Les multiples de 2 sont ceux dont le dernier chiffre est 2, 4, 6 ou 8. Pour chacun de ces chiffres, il y a huit chiffres à placer devant dans l'ordre qu'on veut, d'où 8! nombres pour chacun. Au final : 4.8!.
• Les multiples de 6 sont exactement les multiples de 2, puisque nos nombres sont déjà tous multiples de 3. Bilan :

| multiples de | 3 | 2 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| nombre | 9! | 4.8! | 8! | 4.8! |

*Rappel : un chiffre, c'est juste un symbole (la liste en base 10 est 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9), et on utilise les chiffres pour écrire des nombres (il y en a une infinité). C'est la même distinction qu'entre lettre et mot. C'est facile à comprendre, mais tant d'élèves s'obstinent à confondre. C'est comme la distinction entre atome et molécule. Et en chimie, on vous sanctionnerait pour cette confusion. Le ferai je en maths ?*

**IS06** • Cours : composée de deux injection ; maximum, tangentes. • MPSI 2/2013

On prend $f$ injective de $E$ dans $F$ et $g$ injective de $F$ dans $G$. On étudie $g \circ f$ de $E$ dans $G$. On prend donc $a$ et $b$ dans $E$ et on suppose $g \circ f(a) = g \circ f(b)$. On veut établir $a = b$.
On traduit l'hypothèse : $g(f(a)) = g(f(b))$. On utilise l'injectivité de $g$ : $f(a) = f(b)$. On utilise l'injectivité de $f$ : $a = b$.

---

On a directement : $Max(a,\ b) = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{|b-a|}{2}$ (on se place au milieu et on avance de la moitié de la distance entre $a$ et $b$.

---

La réponse est idiote : $\boxed{\tan(\pi/12) + \tan(\pi/5) = \tan\Big(Arctan\Big(\tan(\pi/12) + \tan(\pi/5)\Big)\Big)}$

**IS06** • Intersection $\cap_{n\in\mathbb{N}}[\frac{n}{n+1},\ \frac{2.n+3}{n+1}[$ • MPSI 2/2013

Chacun des intervalles est en fait de la forme $[a_n,\ b_n[$, avec $a_n$ qui tend vers 1 par valeur inférieure ($a_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$) et $b_n$qui tend vers 2 par valeur supérieure.
On sent que l'intersection généralisée est $\boxed{[1,\ 2]}$
Mais il faut le prouver, par double inclusion.
On doit déjà montrer : $[1, 2] \subset \bigcap[a_n,\ b_n[$. On prend un réel $x$ entre 1 et 2 (sens large). On a donc : $a_n = \dfrac{n}{n+1} \leqslant 1 \leqslant x \leqslant 2 < \dfrac{2.n+3}{n+1} = b_n$ pour tout $n$. On reconnaît : $\forall n,\ x \in [a_n,\ b_n[$, $x$ est dans l'intersection généralisée.

On doit aussi montrer : $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[a_n,\ b_n[\subset [1, 2]$. On prend un réel $x$ dans l'intersection : pour tout $n$ : $a_n \leqslant x < b_n$. On fait tendre $n$ vers l'infini ; par passage à la limite, les inégalités deviennent larges : $1 \leqslant x \leqslant 2$. $x$ est donc dans $[1,\ 2]$.

---

Si l'on veut le faire d'une autre façon : on montre que les éléments hors de $[1,\ 2[$ ne sont pas dans l'intersection généralisée.
Premier cas pour ne pas être dans $[1,\ 2]$ : être strictement plus petit que 1. On prend donc un $\alpha$ dans $]-\infty,\ 1[$. On choisit alors $n$ assez grand pour avoir $\alpha < \dfrac{n}{n+1}$ (en l'occurence : $n = \left[\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right] + 1$. Le réel $\alpha$ est hors de ce $[a_n,\ b_n[$, il n'est donc pas dans l'intersection

On prend le second cas : $\beta$ dans $]2,\ +\infty[$. On choisit alors $n = \left[\dfrac{3-\beta}{\beta-2}\right]+1$. On a alors $b_n < \beta$. Pour ce $n$, $\beta$ n'est pas dans $[a_n,\ b_n[$. Il n'est donc pas dans $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} [a_p,\ b_p[$.

**IS06** • Sous groupes, dont les $a+b.\sqrt{3}$. • MPSI 2/2013

Attention aux notations choisies. On doit avoir
• $H \subset E$, $e \in H$ où $e$ est le neutre de $(E,\ \theta)$ *(caractérisé par $\forall x \in E,\ x\theta e = e\theta x = x$)*
• $H$ est stable par $\theta$ : $\forall (a,\ b) \in H^2,\ a\theta b \in H$,
• $H$ est stable par passage au symétrique : $\forall a \in H,\ a^{-1} \in H$ *(caractérisé par $a\theta a^{-1} = a^{-1}\theta a = e$)*

---

On prend les nombres de la forme $a+b.\sqrt{3}$ avec $a$ et $b$ rationnels.
• Comme $a$, $b$ et $\sqrt{3}$ sont réels, la combinaison $a+b.\sqrt{3}$ est réelle. On tient l'inclusion $G\subset\mathbb{R}$ en ayant posé $G = \{a+b.\sqrt{3} \mid (a,b)\in\mathbb{Q}^2\}$.
• Pour la stabilité multiplicative, on prend deux éléments $\alpha$ et $\beta$ dans $G$. Ils s'écrivent $a+b.\sqrt{3}$ et $c+d.\sqrt{3}$ pour $a$, $b$, $c$ et $d$ rationnels. Leur produit se calcule : $\alpha.\beta = (a+b.\sqrt{3}).(c+d.\sqrt{3}) = (a.c+3.b.d)+(a.d+b.c).\sqrt{3}$. En posant $A = a.c+3.b.d$ *(rationnel)* et $B = a.d+b.c$ *(rationnel)*, on tient une écriture de la forme $A+B.\sqrt{3}$ pour le produit $\alpha.\beta$.
• On prend un élément $\alpha$ de $G$ qu'on écrit $a+b.\sqrt{3}$. Son inverse $\dfrac{1}{a+b.\sqrt{3}}$ existe, mais est il de la forme demandée ? Il n'en a pas l'air. Néanmoins, cet inverse s'écrit aussi $\dfrac{a-b.\sqrt{3}}{a^2+3.b^2}$ par “conjugaison”. On pose alors $A = \dfrac{a}{a^2+3.b^2}$ et $B = \dfrac{-b}{a^2+3.b^2}$ *(rationnels cas $(\mathbb{Q},\ +,\ .)$ est un corps)*, cet inverse s'écrit sous la forme voulue.
• On trouve enfin le neutre multiplicatif en l'écrivant $1+0.\sqrt{3}$ avec 1 et 0 rationnels.

*Toutes ces questions sont très simples, mais les élèves qui n'ont pas encore compris ce que sont les mathématiques (du raisonnement sur des variables et non du calcul pour bacheliers sans prétention intellectuelle) se fourvoient en écrivant un peu n'importe quoi pour “faire plaisir” au correcteur.*

Ah si ! Il manque un détail. Ce sous-groupe doit être inclus dans $\mathbb{R}^*$ et non dans $\mathbb{R}$ *(le groupe, c'est $(\mathbb{R}^*,\ \times)$ et pas $(\mathbb{R}^*,\ \times)$)*. Il faut donc vérifier que pour $a$ et $b$ rationnels non nuls, $a+b.\sqrt{3}$ est un réel non nul. Or, s'il était nul, on aurait $\sqrt{3} = -\dfrac{a}{b}$ et $\sqrt{3}$ serait réel. Ou alors, $b$ serait nul, interdisant cette division, mais alors en reportant dans $a+b.\sqrt{3}=0$ on aboutirait à $a$ nul aussi, ce qu'on a refusé.

**IS06** • Le p.g.c.d. de $3^{12}+1$ et $3^8+1$ • MPSI 2/2013

Déjà, $3^{12}$ et $3^8$ sont impairs. Les deux nombres $3^{12}+1$ et $3^8+1$ sont pairs. On sait déjà que 2 est un diviseur commun.
Pour prouver que c'est le plus grand, on va chercher à l'obtenir par une identité de Bézout. On nous oriente vers $(3^4+1).(3^{12}+1)-3^8.(3^8+1)$. On trouve $3^{12}+3^4-3^8$. On est loin de 2, mais on peut aussi éliminer avec $(3^4+1).(3^{12}+1)-3^8.(3^8+1) = 3^4.(3^8+1)-3^8$.
On poursuit : $(3^4+1).(3^{12}+1)-(3^8+3^4).(3^8+1) = -3^8$.
On affine encore : $\boxed{(3^4+1).(3^{12}+1)-(3^8+3^4-1).(3^8+1) = 2}$
C'est l'identité de Bézout cherchée.

MPSI 2/2013 | 196 points | *IS*06

| | | |
|---|---|---|
| Charlemagne<br>MPSI-2 / 2013 | Mardi 5 novembre | *IS*07 |

◊25 Complétez les matrices $A$ et $B$ sachant qu'on a $A.B = B.A$ : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & * \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & * \end{pmatrix}$. •2 pt.•

---

◊26 On définit $\varphi = x \longmapsto \dfrac{2.x+1}{3.x-1}$. Résolvez l'équation $\varphi\circ\varphi\circ\varphi\circ\varphi\circ\varphi\circ\varphi(x) = 2$ d'inconnue réelle $x$. •3 pt.•

---

♡31 Rappelez la définition de $(u_n)$ converge vers 1 quand $n$ tend vers l'infini. •1 pt.•
Prouvez que c'est le cas pour la suite $(\cos(n!.\pi/2347))$. •2 pt.•

---

◊27 On définit : $f = (x \longmapsto \begin{cases} 2.x & \text{si } x \leqslant 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$. Représentez $f$ et $f\circ f$ sur $[-1, 4]$. •3 pt.•

---

◊28 On tape les instructions suivantes avec Python : `a,b,c=7,4,5+3` et `d=2*b`
Que donne ensuite cette ligne : `3**((a==b)==(c !=d))` ? •2 pt.•

---

♡32 Complétez : $Arctan(2) + Arctan(*) = Arctan(3)$. •2 pt.•

---

♡33 On définit $f = x \longmapsto \ln(\cos(x))$. Calculez $f^{(k)}(\pi/3)$ pour $k$ de 0 à 3. •4 pt.•
Déduisez $\ln\left(1/\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+h\right)\right) \geqslant \ln(2) + \sqrt{3}.h + 2.h^2$ pour $h$ entre 0 et $\pi/6$. •2 pt.•

---

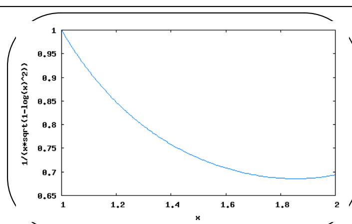
♡34 Dans un devoir précédent, vous avez démontré pour tout triplet de réels positifs $(a, b, c)$ : $\sqrt[3]{a.b.c} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$. On va le redémontrer ici par une autre méthode. On se donne quatre réels positifs $a$, $b$, $c$ et $d$. Montrez : $\sqrt{a.b} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ puis $\sqrt{\sqrt{a.b}.\sqrt{c.d}} \leqslant \dfrac{a+b+c+d}{4}$. •3 pt.•
En prenant ensuite $d = \dfrac{a+b+c}{3}$ démontrez l'inégalité demandée. •2 pt.•
Comment prouveriez vous ensuite $\sqrt[13]{a_1\dots a_{13}} \leqslant \dfrac{a_1+\dots+a_{13}}{13}$ pour toute famille de treize réels strictement positifs ? •2 pt.•

---

◊29 Montrez que l'ensemble $\{\sin(x) + \sqrt{3}.\cos(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est majoré et calculez sa borne supérieure. •2 pt.•
Calculez aussi la borne supérieure de $\{\sin(x)+\sqrt{3}.\cos(a) \mid (a,\ x) \in \mathbb{R}^2\}$puis de $\{\sin(x)-\sqrt{3}.\cos(a) \mid x \in \mathbb{R}\}$. •2 pt.•
Indication pour une des question : $K.\sin(x+\alpha)$.

---

◊30 Calculez $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2-(t.\ln(t))^2}}$. •2 pt.•



**IS07** • Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ * & * \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ * & * \end{pmatrix}$. • MPSI 2/2013

Pour simplifier le travail, on donne des notations : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ c & d \end{pmatrix}$. On effectue les deux produits : $A.B = \begin{pmatrix} 1+2.c & 3+2.d \\ a+b.c & 3.a+b.d \end{pmatrix}$ et $B.A = \begin{pmatrix} 1+3.a & 2+3.b \\ c+a.d & 2.c+b.d \end{pmatrix}$. On égalise et on trouve quatre équations liant nos quatre variables. Mais elles sont redondantes :
$3.a = 2.c$ *(deux fois)*, $3.b = 2.d + 1$ et enfin $a - c + b.c - a.d = 0$
On trouve déjà : $c = 3.a/2$ et $d = (3.b - 1)/2$ et la dernière équation ne sert à rien... On a donc tout une famille de matrices qui conviennent : $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3.a/2 & (3.b-1)/2 \end{pmatrix}}$

**IS07** • L'application $x \longmapsto \frac{2.x+1}{3.x-1}$ • MPSI 2/2013

On doit composer six fois cette fonction. On le fait en repassant par les matrices. Cette homographie a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Or, composer les homographies, c'est multiplier les matrices *(vu en cours et en T.D.)*. On doit donc calculer :
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^6 = (A^2)^2.A^2$ pour aller vite, avec $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ puis $A^4 = \begin{pmatrix} 52 & 11 \\ 33 & 19 \end{pmatrix}$ et enfin $A^6 = \begin{pmatrix} 397 & 96 \\ 288 & 109 \end{pmatrix}$.

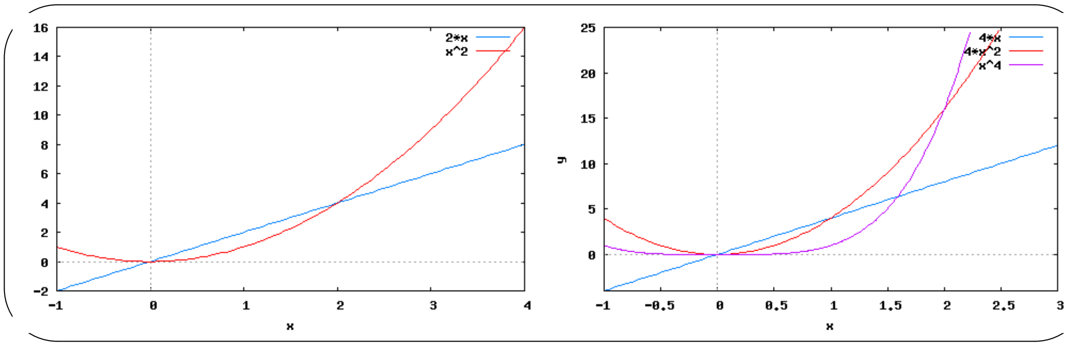
On interprête : $\varphi(x) = \dfrac{397.x + 96}{288.x + 109}$ et on résout : $\dfrac{397.x + 96}{288.x + 109} = 2$. On trouve : $\boxed{x = -\dfrac{122}{179}}$ *(la solution est rationnelle, évidemment)*

**IS07** • La suite $(\cos(n!.\pi/2347))$. • MPSI 2/2013

La définition : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ (n \geqslant N_\epsilon) \ \Rightarrow \ (|u_n - 1| \leqslant \varepsilon$.
Ici, on veut, pour $\varepsilon$ donné trouver un $N_\epsilon$ à partir duquel on va avoir $|1 - \cos(n!.\pi/2347)| \leqslant \varepsilon$. Or, ce cosinus finit par valoir 1 véritablement. Quand $n$ atteint la valeur 2347, il y a dans $n!$ un facteur 2 et un facteur 2347 *(et plein d'entiers entre les deux)*. Le terme $n!.\pi/2347$ est alors un multiple de $2.\pi$ et son consinus vaut 1.
On a donc, pour $n$ plus grand que 2347 : $|1 - \cos(n!.\pi/2347)| = |1 - 1| \leqslant \varepsilon$.
On peut donc proposer $\boxed{N_\epsilon = 2347}$ *(valable pour tous les $\varepsilon$)*. En fait, cette suite est stationnaire *(constante à partir d'un certain rang)*.

**IS07** • L'application $x \longmapsto \begin{cases} 2.x & \text{si } x \leqslant 2 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$. • MPSI 2/2013

Le graphe de $f$ est fait d'une portion de droite *($y = 2.x$ pour $x$ dans* $[-1, \ 2]$*)* et une part de parabole *($y = x^2$ pour $x$ dans* $[2, 4]$*)*. On trace alors aisément le graphe :




Pour $f(f(x))$, il faut être bien plus prudent. La discussion porte sur $f(x)$. Il faut voir quand $f(x)$ dépasse 2. Graphiquement, tout bascule en 1.

| $x$ | $[-1,\ 1]$ | $[1,\ 2]$ | $[2,\ 4]$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f(x) = 2.x \leqslant 2$ | $f(x) = 2.x > 2$ | $f(x) = x^2 > 2$ |
| $f(f(x))$ | $2.(f(x))$ | $(f(x))^2$ | $(f(x))^2$ |
| $f^2(x)$ | $4.x$ | $4.x^2$ | $x^4$ |

Le graphe est porté ci dessus.

**IS07** • $Arctan(2) + Arctan(*) = Arctan(3)$. • MPSI 2/2013

On cherche un réel positif. On écrit rapidement : $Arctan(*) = Arctan(3) - Arctan(2)$ et on passe à la tangente : $* = \dfrac{\tan(Arctan(3)) - \tan(Arctan(2))}{1 + \tan(Arctan(3)).\tan(Arctan(2))} = \dfrac{3-2}{1+3.2} = \dfrac{1}{7}$.

On résume : $\boxed{Arctan(2) + Arctan(1/7) = Arctan(3)}$

**IS07** • Application $x \longmapsto \ln(\cos(x))$. • MPSI 2/2013

On dérive autant de fois que désiré sur l'intervalle $]-\pi/2,\ \pi/2[$ :

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f"(x)$ | $f^{(3)}(x)$ |
|---|---|---|---|
| $\ln(\cos(x))$ | $-\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ | $-1 - \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$ | $\dfrac{-2.\sin(x)}{\cos(x)} + \dfrac{\sin^3(x)}{\cos^3(x)}$ |
| $\ln(1/2)$ | $-\sqrt{3}$ | $-4$ | $-8.\sqrt{3}$ |

*(on ne dérive pas avec des* $\dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$ *qui conduisent à des formules plus que lourdes... on y voit des* $(v^{-2}.u)' = u'.v^{-2} - 2.v^{-3}.v'.u$*, ou alors on reconnaît* $\tan$ *qui se dérive en* $1 + \tan^2$*).*

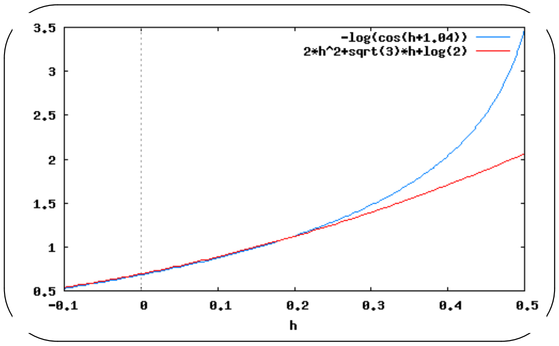
C'est avec un tableau que l'on synthétise les résultats et calculs.

---

Pour la questtion suivante, il faut penser à la formule de Taylor avec reste intégrale : $f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \dfrac{h^2}{2}.f"(a) + \dfrac{h^3}{2}.\displaystyle\int_{t=0}^{t=1} (1-t)^2.f^(3)(a+t.h).dt$.

En particulier : $\ln\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + h\right)\right) = \ln(1/2) - \sqrt{3}.h - 2.h^2 + \dfrac{h^3}{2}.\displaystyle\int_0^1 (1-t)^2.f^(3)\Big(\dfrac{\pi}{3} + t.h\Big).dt$

On change de signe : $\ln(1/\cos(\pi/3+h)) = \ln(2) + \sqrt{3}.h + 2.h^2 - reste$. Or, pour $h$ entre 0 et $\pi/6$, le reste est négatif *($h$ est positif, mais la dérivée seconde garde un signe moins tant que le cosinus et le sinus sont positifs, ce qui est ici le cas).*




**IS07** • Inégalité $(a.b.c)^{1/3} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$. • MPSI 2/2013

On montre déjà $2.\sqrt{a.b} \leqslant a+b$ en développant $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$, qui est positif, en tant que carré de réel.
On écrit ensuite cette inégalité pour divers couples :

$$\sqrt{\sqrt{a.b}.\sqrt{c.d}} \leqslant \frac{\sqrt{a.b}+\sqrt{c.d}}{2} \leqslant \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

On a l'inégalité des moyennes pour quatre réels, il faut redescendre à trois.

---

On écrit déjà plus lisiblement : $4.(a.b.c.d)^{1/4} \leqslant (a+b+c+d)$.

On prend le cas particulier $d = \dfrac{a+b+c}{3}$ *(positif)*.

On a alors $4.(a.b.c.(a+b+c)/3)^{1/4} \leqslant (a+b+c).\Big(1+\dfrac{1}{3}\Big)$.

On effectue et simplifie par 4 : $(a.b.c)^{1/4}.(a+b+c)^{1/4}.3^{-1/4} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$.

On divise par $(a+b+c)^{1/4}$ : $(a.b.c)^{1/4}.3^{-1/4} \leqslant \dfrac{(a+b+c)^{3/4}}{3}$.

On simplifie par $3^{1/4}$ : $(a.b.c)^{1/4} \leqslant \dfrac{(a+b+c)^{3/4}}{3^{3/4}}$.

On élève à la puissance 4/3 *(application croissante)* : $(a.b.c)^{1/3} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$ C'est la formule attendue.

---

Pour une famille de treize termes $a_1$ à $a_{13}$, on commece par le cas d'une famille de seize termes : $\sqrt[16]{a_1\ldots a_{16}} \leqslant \dfrac{a_1+\ldots+a_{16}}{16}$ en appliquant la formule $\sqrt{a.b} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ de manière répétitive *(on peut accéder aux puissances de 2 de manière répétitive)*

On prend ensuite le cas particulier $a_{14} = a_{15} = a_{16} = \dfrac{a_1+\ldots+a_{13}}{13}$.

On simplifie par $(a_1+\ldots+a_{13})^{3/16}$ ; on réunit d'un même côté les constantes numériques après que le 16 ait d'ailleurs disparu quasi spontanément ; on passe à la puissance 16/13, et on espère que ce sera fini.

**IS07** • Python, a,b,c=7,4,5+3 et d=2*b et enfin 3**((a==b)==(c !=d)). • MPSI 2/2013

On avance simplement, en regardant les valeurs attribuées :

| a | b | c | d |
|---|---|---|---|
| 7 | 4 | 8 | 8 |

Ensuite, on fait des tests qu'on reconnaît aux == et != *(qui signifie "est différend de")* :

| a==b | c!=d | (a==b)==(c!d) | syntaxe |
|---|---|---|---|
| $7=4$ ? | $8\neq 8$ ? | False==False ? | question |
| False | False | True | réponse |

On termine par un étrange 3**True.

On se souvient alors que True vaut 1 et False vaut 0. On a donc $3^1$.
On peut s'attendre à 3

**IS07** • Trois bornes supérieures. • MPSI 2/2013

On majore les sinus et cosinus par 1. Tous ces ensembles sont majorés par $1+\sqrt{3}$ *(et même par 15)*. Mais dans $\{\sin(x)+\sqrt{3}.\cos(x) \mid a \in \mathbb{R}\}$, on reste "loin" de ce majorant, puisque $\sin(x)$ et $\cos(x)$ ne peuvent atteindre simultanément la valeur 1. Mais si on regarde l'indication de $K.\sin(x+\alpha) = K.\cos(\alpha).\sin(x)+K.\sin(\alpha).\cos(x)$, on comprend : $\sin(x)+\sqrt{3}.\cos(x) = 2.\Big(\frac{1}{2}.\sin(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos(x)\Big) = 2.\sin(x+\pi/3)$.
Cette quantité se majore par $\boxed{2}$ et ce majorant est justement 2, atteint pour $x=\pi/6$. C'est donc lui la borne supérieure.

---

Pour ce qui est de $\{\sin(x)+\sqrt{3}.\cos(a) \mid (a,\ x)\in\mathbb{R}^2\}$, un majorant est encore $\boxed{1+\sqrt{3}}$ et ce majorant est atteint pour le couple $(x=\pi/2,\ a=0)$ qui optimise. C'est lui la borne supérieure.

---

Avec $\{\sin(x)-\sqrt{3}.\cos(a) \mid x\in\mathbb{R}\}$, $a$ est fixé, et on majore donc par $\boxed{1-\sqrt{3}.\cos(a)}$ majorant atteint pour $x$ égal à $\pi/2$. C'est encore lui la borne supérieure.

**IS07** • Intégrale $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2-(t.\ln(t))^2}}$ • MPSI 2/2013

La quantité sous le dénominateur reste positive et ne s'annule jamais *(heureusement que $t$ ne dépasse par $e$)*.
On met sous la forme $\dfrac{1}{t.\sqrt{1-(\ln(t))^2}}$ qui est en $\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.On intègre donc en $Arcsin(\ln(t))$ et la valeur est $\boxed{Arcsin(\ln(2))}$ qu'on ne simplifiera pas.

| MPSI 2/2013 | 230 points | $IS07$ |
|---|---|---|

♡35 Calculez $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2).Arctan(x)}$. •2 pt.•

---

◇31 Construisez une matrice carrée de taille 2 dont deux des coefficients vaudront 6 et $-3$ et dont le spectre sera $\{-1, 3\}$ *(le spectre, c'est les deux termes d'une matrice diagonale $D$ vérifiant $M.P = P.D$ pour au moins une matrice inversible $P$, on rappelle qu'alors les deux matrices $M$ et $D$ ont même trace et même déterminant).* •2 pt.•
Elevez la ensuite à la puissance 3 et calculez trace et déterminant. •2 pt.•

---

◇32 A l'Ecole Nationale de Robotique / Univertisté de Technologie, cent cinquante élèves suivent les cours d'anglais, cent suivent les cours de chinois, trente sont bilingues *(anglais/chinois)* et quatre vingt dix ne suivent aucune de ces deux langues. Combien y a-t-il d'élèves. •2 pt.•

---

◇33 Pouvez vous trouvé les quatre erreurs qu'il y à dans cette phrases ? •0 pt.•

---

♣14 Vous lancez deux dés à six faces classiques, non pipés. Quelle est la probabilité que l'un des entiers divise l'autre ? •3 pt.•

---

◇34 $a$, $b$ et $c$ sont trois complexes de somme nulle. Montrez que ce sont les racines d'un polynôme s'écrivant $X^3 + d.X - p$. •1 pt.• Exprimez $p$ à l'aide de $a$, $b$ et $c$. •1 pt.• Pour tout $n$, on note $S'_n = \frac{a^n + b^n + c^n}{n}$. Montrez $S'_2 = -d$ puis calculez $S'_3$ à l'aide de $d$ et $p$. •3 pt.•
Montrez que $a$, $b$ et $c$ sont racines du polynôme $X^5 + d.X^3 - p.X^2$. Exprimez $S'_5$ à l'aide de $d$ et $p$. •1 pt.•
Montrez enfin : $S'_5 = S'_3.S'_2$. •1 pt.•

Variante : en écrivant $c = -a - b$, calculez $S'_2$, $S'_3$ et $S'_5$ comme polynômes en $a$ et $b$. •2 pt.•

---

♡36 On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout entier naturel $n$. Montrez : $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$ pour tout $n$. •2 pt.•

♠8 Montrez alors que la moyenne de la liste $\left[\frac{1}{1+\frac{k}{n}},\ k\ de\ 1\ \ n\right]$ tend vers $\ln(2)$ quand $n$ tend vers l'infini. •4 pt.•

---

◇35 Déterminez la limite quand $x$ tend vers 0 de $\frac{\ln(1+\sin(x))}{1-\cos(3.x)}.\tan(2.x)$. •4 pt.•

---

♡37 Rappelez la définition de "$f$ est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$". •1 pt.•

♡38 Montrez que la composée de deux applications lipschitziennes est encore lipschitzienne. •1 pt.•

♣15 Montrez que $x \longmapsto \tan(\sin(x))$ est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. •4 pt.•

La trace d'une matrice carrée, c'est la somme des termes de la diagonale principale.

**IS08** • Matrice de spectre $\{-1,3\}$. • MPSI 2/2013

Comme on veut un spectre égal à $\{-1,3\}$, il faut qu'elle soit semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Il faut donc que sa trace soit égale à 2 et son déterminant à $-3$.
Le 6 et le $-3$ ne peuvent pas être ensemble sur la diagonale pour la trace. Si on met le 6 sur la diagonale, l'autre coefficient vaut $-4$ : $\begin{pmatrix} 6 & a \\ b & -4 \end{pmatrix}$. Ensuite, on ajuste pour avoir un déterminant égal à $-3$ : $-24 - a.b = -3$ avec $a$ ou $b$ égal à $-3$. L'autre vaut 7. On peut prendre $\boxed{\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}}$ mais ce n'est pas le seul choix possible.

On peut ensuite calculer le cube de cette matrice (qui dépendra de votre choix personnel) : ici $A^3 = \begin{pmatrix} 48 & -21 \\ 49 & -22 \end{pmatrix}$.
Mais une chose est sûre : $A^3$ va s'écrire $P.D^3.P^{-1}$, et aura pour trace et déterminants ceux de $D^3$.
On a donc : $\boxed{Tr(A^3) = 3^3 + (-1)^3 = 26 \text{ et } \det(A^3) = 3^3.(-1)^3 = -27}$

**IS08** • Intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2).Arctan(x)}$. • MPSI 2/2013

On peut avoir des doutes sur l'existence de cette intégrale. L'application est en effet définie et continue sur le domaine $[1,+\infty[$, mais l'intervalle d'intégration n'est pas un segment.
On va donc calculer $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{(1+x^2).Arctan(x)}$ puis faire tendre $a$ vers l'infini. On a juste une forme en $\dfrac{u'}{u}$. On trouve une primitive et on effectue : $\ln(Arctan(a)) - \ln(Arctan(1))$.
Le passage à la limite quand $a$ tend vers l'infini donne la valeur définitive : $\ln(\pi/2) - \ln(\pi/4)$ qui se simplifie en $\boxed{\ln(2)}$

**IS08** • Une école, deux langues. • MPSI 2/2013

On dresse un tableau :

| | anglais | pas anglais |
|---|---|---|
| chinois | $a$ | $b$ |
| pas chinois | $c$ | $d$ |

On traduit les hypothèses : $a + c = 150$, $a + b = 100$, $a = 30$ et $d = 90$.
Par soustraction directe : $b = 70$ et $c = 120$. On somme : $a + b + c + d = 30 + 70 + 120 + 90 = 310$.

On vérifie

| | anglais | pas anglais |
|---|---|---|
| chinois | 30 | 70 |
| pas chinois | 120 | 90 |

*On peut ensuite s'interroger sur le nom de l'école...*

**IS08** • Deux dés "normaux". • MPSI 2/2013

On effectue donc deux tirages : $a$ et $b$, donnant chacun de manière équiprobable un entier de 1 à 6. Un tableau, trente six cases équiprobables :

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a=b$ | $b\vert a$ | $b\vert a$ | $b\vert a$ | $b\vert a$ | $b\vert a$ |
| 2 | $a\vert b$ | $a=b$ | | $b\vert a$ | | $b\vert a$ |
| 3 | $a\vert b$ | | $a=b$ | | | $b\vert a$ |
| 4 | $a\vert b$ | $a\vert b$ | | $a=b$ | | |
| 5 | $a\vert b$ | | | | $a=b$ | |
| 6 | $a\vert b$ | $a\vert b$ | $a\vert b$ | | | $a=b$ |

Nombre de cas(es) favorables : 22. $\boxed{\text{Probabilité } : \dfrac{22}{36}=\dfrac{11}{18}}$

**IS08** • Trois complexes de somme nulle. • MPSI 2/2013

Le polynôme unitaire de racines $a$, $b$ et $c$ est $(X-a).(X-b).(X-c)$ qui se développe en $X^3-(a+b+c).X^2+(a.b+a.c+b.c).X-a.b.c$ et se simplifie en $X^3+(a.b+a.c+b.c).X-a.b.c$ sous notre hypothèse. On posera donc $\boxed{d=a.b+a.c+b.c \text{ et } p=a.b.c}$ dans l'énoncé.

---

On développe classiquement le carré $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2.(a.b+a.c+b.c)$. Or, il est nul : $0=2.S'_2+2.d$, donc $S'_2=-d$.

On exploite que $a$, $b$ et $c$ sont les trois racines du polynôme : $a^3=-d.a+p$, $b^3=-d.b+p$, $c^3=-d.c+p$. On somme : $a^3+b^3+c^3=-d.(a+b+c)+3.p$. On exploite encore l'hypothèse "somme nulle" et on divise par 3 : $\boxed{S'_3=p}$

---

On repart de $a^3=-d.a+p$ et on multiplie par $a^2$ *(qu'il soit nul ou non)* : $a^5=-d.a^3+p.a^2$.
On fait de même avec les deux autres racines, et on a le polynôme indiqué : $X^5+d.X^3-p.X^2$.
On somme les trois égalités : $(a^5+b^5+c^5)=-d.(a^3+b^3+c^3)+p.(a^2+b^2+c^2)$.
On reconnaît : $5.S'_5=-d.3.S'_3+p.2.S'_2$.
On remplace par ce qu'on sait déjà : $5.S'_5=-3.d.p+2.p.(-d)=-5.d.p$.
On simplifie : $S'_5=-d.p$. On avait déjà $S'_2=-d$ et $S'_3=p$.
On a bien $S'_5=S'_2.S'_3$.

---

On repart de $c=-a-b$ et on élève au carré : $c^2=a^2+2.a.b+b^2$. On ajoute $a^2+b^2$ et on divise par 2 : $S'_2=a^2+a.b+b^2$.
On fait de même pour les cubes. Cette fois, les $a^3$ et $b^3$ s'effacent et il reste : $S'_3=-(a^2.b+a.b^2)$ après une belle division par 3.
On fait enfin de même avec les puissances cinquièmes avec la formule du binôme : $S'_5=-(a^4.b+2.a^3.b^2+2.a^2.b^3+a.b^4)$.

On vérifie enfin : $(a^4.b+2.a^3.b^2+2.a^2.b^3+a.b^4)=(a^2+a.b+b^2).(a^2.b+a.b^2)$.

On a retrouvé sans efforts le même résultat : $\boxed{\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}.\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}}$

**IS08** • Limite en 0 de $\ln(1+\sin(x)).\tan(2.x)/(1-\cos(3.x))$. • MPSI 2/2013

Déjà, tous ces termes existent pour $x$ "assez proche de 0" *(pour $x$ plus petit que $\pi/6$ en valeur absolue).* En revanche, on ne peut pas calculer cette quantité en 0. De plus, numérateur et dénominateur tendent vers 0 quand $x$ tend vers 0. On a une forme indéterminée. On va la traiter grâce aux équivalents.
• Quand $x$ tend vers 0, $\sin(x)$ tend aussi vers 0 et $\ln(1+\sin(x))$ est équivalent à $x$.
Mais alors, $\sin(x)$ est aussi équivalent à $x$, donc par transitivité, $\ln(1+\sin(x))$ est équivalent à $x$.
• Quand $x$ tend vers 0, $3.x$ le fait aussi, et $1-\cos(3.x)$ est équivalent à $\dfrac{(3.x)^2}{2}$.
• Quand $x$ tend vers 0, $2.x$ le fait aussi, et $\tan(2.x)$ est équivalent à $2.x$.

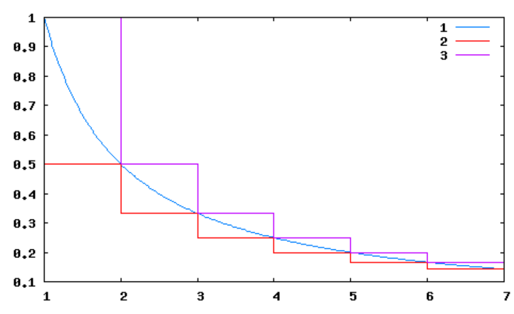
On passe alors aux produits : $\dfrac{\ln(1+\sin(x))}{1-\cos(3.x)}.\tan(2.x)$ est équivalent à $\dfrac{x}{9.x^2/2}.2.x$. Cette quantité se simplifie en $4/9$.
Or, être équivalent à un réel non nul, c'est tendre vers ce réel.
Bilan : $\boxed{\lim_{x\to 0}\Big(\dfrac{\ln(1+\sin(x))}{1-\cos(3.x)}.\tan(2.x)\Big)=\dfrac{4}{9}}$

---

On pouvait aussi tout exprimer à l'aide du sinus noté $s$ (qui tend vers 0) et du cosinus $c$ (qui tend gentiment vers 1) : $\dfrac{\ln(1+\sin(x))}{1-\cos(3.x)}.\tan(2.x) = \dfrac{\ln(1+s).2.s}{(1-c).(1+4.c+4.c^2)}.\dfrac{c}{2.c^2-1}$. On a un équivalent en $\dfrac{2.s^2}{(1-c).(1+4.c+4.c^2)}.\dfrac{c}{2.c^2-1}$. On remplace $s^2$ par $(1-c^2)$ puis par $(1-c).(1+c)$. Les $(1-c)$ se simplifient et il n'y a plus d'indétermination.

**IS08** • Série harmonique. • MPSI 2/2013

Pour l'encadrement $\ln(n)+1 \leqslant H_n \leqslant \ln(n)+1$, il suffit d'écrire $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t}$ en majorant $\dfrac{1}{t}$ par $\dfrac{1}{k}$ tout au long de $[k,\ k+1]$ dans la première intégrale et en minorant dans la seconde.
On somme pour $k$ de 1 à $n$ d'un côté, et de 2 à $n$ de l'autre *(on met de côté le terme $k=1$)*. Par relation de Chasles, on a alors $\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1+\int_1^n\frac{dt}{t}$. Il ne reste plus qu'à intégrer.




On doit ensuite calculer une moyenne : $\displaystyle\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. On fait entrer le $n$ dans la somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$.

On décale les indices : $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{2.n}\frac{1}{p}$ *(regardez avec des points de suspension)*. On reconnaît $H_{2.n}-H_n$.
On encadre chaque terme de la somme par une intégrale, comme ci dessus. On a alors une minoration par $\displaystyle\int_{n+1}^{2.n+1}\frac{dt}{t}$ et une majoration par $\displaystyle\int_n^{2.n}\frac{dt}{t}$.
On effectue : $\ln\Big(\dfrac{2.n+1}{n+1}\Big) \leqslant H_{2.n}-H_n \leqslant \ln(2)$.
Les deux termes de l'encadrement tendent vers $\ln(2)$ *(pour le premier, écrire $\ln\Big(\dfrac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\Big)$)*.
Par encadrement, $\boxed{H_{2.n}-H_n \text{ tend vers } \ln(2)}$

**IS08** • Applications lipschitziennes. • MPSI 2/2013

La définition de $f$ est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est
$\exists\ K\ \in\ \mathbb{R}^+,\ \forall\ (x, y)\ \in\ \mathbb{R}^2,\ |f() - f(x)| \leqslant K.|y - x|$
*Il ne faut pas oublier de quantifier le rapport de Lipschitz $K$, qui dépend du choix de $f$ et n'est pas une donnée de l'énoncé.*
*Trop d'élèves auront sans doute donné la quantification de "$f$ est lipschitzienne de rapprt $K$".*

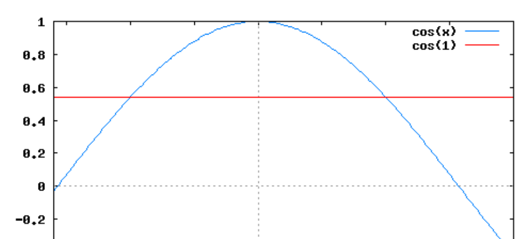
---

On prend $f$ et $g$ lipschitziennes de rapports $K_f$ et $K_g$.
On se donne $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$. On écrit $|g(f(x)) - g(f(y))| \leqslant K_g.|f(x) - f(y)|$ par le caractère lipschitzien de $g$ (appliqué à $f(x)$ et $f(y)$), puis $K_g.|f(x) - f(y)| \leqslant K_g.K_f|x - y|$ par caractère lipschitzien de $f$ et positivité du multiplicateur $K_g$. Par transitivité, comme $x$ et $y$ sont quelconques, on reconnaît le caractère lipschitzien de $g \circ f$ *(de rapport $K_g.K_f$).*

---

Le sinus est réputé pour être lipschitzien de rapport 1 : $|\sin(b) - \sin(a)| \leqslant |b - a|$ *(en passant par* $\left|\int_a^b \cos(t).dt\right|$ *par exemple dans laquelle on encadre le cosinus par $-1$ et 1, ou alors en revenant à* $2.\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right).\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ *et $|\sin(t)| \leqslant |t|$).*
*Mais la tangente n'est pas lipschitzienne... Il ne faut pas bluffer.*
En tout cas, elle ne l'est pas sur $]-\pi/2,\ \pi/2[$.
Mais on n'en a pas besoin sur un tel intervalle, puisque le sinus reste entre $-1$ et 1.
Proprement, $\tan(\sin(b)) - \tan(\sin(a)) = \dfrac{\sin(\sin(b))}{\cos((\sin(b))} - \dfrac{\sin(\sin(a))}{\cos((\sin(a))} = \dfrac{\sin\big(\sin(a) - \sin(a)\big)}{\cos((\sin(a)).\cos(\sin(b))}$ en utilisant le célèbre $\sin(\beta - \alpha) = \sin.\cos - \cos.\sin$.
On passe à la valeur absolue et on majore :
$$\Big|\tan(\sin(b)) - \tan(\sin(a))\Big| = \frac{|\sin\big(\sin(a) - \sin(a)\big)|}{\cos((\sin(a)).\cos(\sin(b))} \leqslant \frac{|\sin(b) - \sin(a)|}{\cos((\sin(a)).\cos(\sin(b))}$$
*(le dénominateur $\cos(\sin(a))$ est positif, car $\sin(a)$ reste entre $-1$ et 1 donc entre $-\pi/2$ et $\pi/2$).*
On affine : $\Big|\tan(\sin(b)) - \tan(\sin(a))\Big| \leqslant \dfrac{|b-a|}{\cos((\sin(a)).\cos(\sin(b))}$ par caractère lipschitzien du sinus *(il faut bien qu'il serve).*

Le final repose sur l'encadrement précité : $-1 \leqslant \sin(a) \leqslant 1$ qui donne $\cos(1) \leqslant \cos(\sin(a)) \leqslant 1$.
Le dénominateur est donc plus grand que $\cos^2(1)$.




On majore par passage à l'inverse : $\boxed{|\tan(\sin(b)) - \tan(\sin(a)) \leqslant \dfrac{|b-a|}{\cos^2(1)}}$ et on a une application lipschitzienne de rapport $1/\cos^2(1)$ *(on rappelle que le rapport ne doit pas dépendre de $a$ et $b$)*

| | | |
|---|---|---|
| MPSI 2/2013 | 266 points | $IS08$ |

♡39 Soient $f$ et $g$ deux applications *($f$ de $E$ dans $F$ et $g$ de $F$ dans $G$)*. Donnez la quantification de $g \circ f$ est injective. •1 pt.• Montrez qu'alors $f$ est injective. •1 pt.• On prend $E = F = G = \mathbb{N}$, $f = n \longmapsto 2.n$ et $g = n \longmapsto n + \dfrac{1-(-1)^n}{2}$. Montrez que $f$ et $g \circ f$ sont injectives. $g$ l'est elle ? •2 pt.•

---

♡40 Calculez $\displaystyle\sum_{k=-100}^{200} k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=-100}^{200} k^3$. •3 pt.•

---

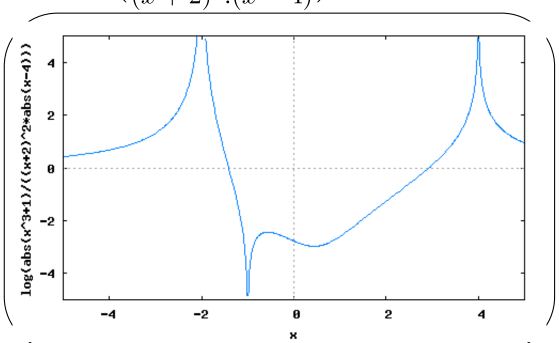
♡41 On définit : $R = 2.X^3 - 8.X^2 + 3.X + 9$. Trouvez sa racine entière et factorisez le dans l'anneau $(\mathbb{Z}[X], +, .)$ des polynômes à cofficients entiers. •2 pt.• Indiquez le nombre de solutions de l'équation $R(\sin(\theta)) = 0$ d'inconnue réelle $\theta$ dans $[-\pi, \pi]$ et donnez la somme de ces solutions. •3 pt.•

---

♢36 Pour tout $n$, on note $a_n = n! + 1$. Calculez $a_n$ pour $n$ de 0 à 6 et calculez aussi $pgcd(a_n, a_{n+1})$ pour $n$ de 0 à 5. •2 pt.•
Exprimez $a_{n+1}$ à l'aide de $a_n$. •1 pt.• Soit $n$ un entier donné dans $\mathbb{N}^*$ et $d$ un diviseur commun de $a_n$ et $a_{n+1}$. Montrez qu'alors $d$ divise aussi $n$, puis montrez que $d$ divise 1. •2 pt.•

---

♢37 Dérivez $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x^3+1}{(x+2)^2.(x-4)}\right)$ et trouvez les réels positifs pour lesquels cette dérivée s'annule. •3 pt.•




---

♠9 Vérifiez $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$ pour tout couple de matrices carrées de taille 2. •1 pt.•
Calculez $\det\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}^k\right)$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}.\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}^k\right)$, $\det\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\right)$. •4 pt.•

---

♢38 On définit : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculez $\sigma^{2013}$. •1 pt.• Résolvez l'équation $\sigma^n(1) = 4$ d'inconnue $n$ dans $\mathbb{N}$. •1 pt.• Calculez $\displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq 5} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$. •3 pt.•

---

♢39 Montrez que $x \longmapsto \sqrt[3]{x+1}$ est lipschitzienne de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. •2 pt.• *(indication : $a - b = \dfrac{a^3 - b^3}{\dots}$).*

---

♡42 Quantifiez : "la suite $u$ converge vers $\alpha$" et montrez alors qu'elle est bornée. •3 pt.•

**IS09** • Applications injectives. • MPSI 2/2013

Déjà, la composée $g \circ f$ a bien un sens, et va de $E$ dans $G$ en passant par $F$. Son injectivité se traduit par : $\boxed{\forall\ (a,b) \in E^2,\ g(f(a)) = g(f(b))\ \Rightarrow\ a = b}$

On va alors prouver que $f$ est injective. On veut $\forall\ (a,b) \in E^2,\ f(a) = f(b)\ \Rightarrow\ a = b$. On prend donc $a$ et $b$. On suppose $f(a) = f(b)$. On compose par $g$ : $g(f(a)) = g(f(b))$ *(ici, il n'y a rien à invoquer, c'est $\alpha = \beta\ \Rightarrow\ g(\alpha) = g(\beta)$, ce qui se lit $g(\alpha) = g(\alpha)$ et est une évidence).* Par injectivité de $g$, on déduit : $a = b$, ce qui est la conclusion cherchée.
*Reformulation : l'injectivité est héréditaire à droite.*

---

On passe à l'exemple.
• $f = n \longmapsto 2.n$ est injective, puisque $2.a = 2.b$ implique $a = b$.
• $f = n \longmapsto n + \dfrac{1-(-1)^n}{2}$ n'est pas injective, puisque 1 et 2 ont la même image *(en toute généralité, voici la liste des images des entiers successifs :* $[0,\ 2,\ 2,\ 4,\ 4,\ 6,\ 6,\ 8, \ldots]$*).*
• On calcule ensuite $g(f(n))$ pour tout $n$ : $2.n + \dfrac{1-(-1)^{2.n}}{2} = 2.n$. On retouve $f$, injective.

**IS09** • Les sommes $\sum_{k=-100}^{200} k^2$ et $\sum_{k=-100}^{200} k^3$. • MPSI 2/2013

La parité de l'exposant a un rôle puisque pour $k$ négatif, $k^2$ est positif et s'additionne au terme d'indice opposé, tandis que $k^3$ est négatif et se simplifie avec le terme d'indice opposé.
Le terme d'indice 0 est nul dans l'une comme dans l'autre. On écrit donc :

$$\sum_{k=-100}^{200} k^2 = \sum_{k=-100}^{0} k^2 + \sum_{k=1}^{200} k^2 = \sum_{k=0}^{100} k^2 + \sum_{k=0}^{200} k^2$$

On utilise les formules du cours et il reste $\boxed{\dfrac{100.101.201}{6} + \dfrac{200.201.401}{6}}$ c'est $3025050$.

De même, $\displaystyle\sum_{k=-100}^{200} k^3 = \sum_{k=-100}^{0} k^3 + \sum_{k=1}^{200} k^3 = \sum_{k=0}^{200} k^3 - \sum_{k=0}^{100} k^3$ ; au final $\boxed{\dfrac{200^2.201^2}{4} - \dfrac{100^2.101^2}{2}}$ et tous calculs faits : $378507500$.

**IS09** • Le polynôme $2.X^3 - 8.X^2 + 3.X + 9$. • MPSI 2/2013

On teste les racines entières de $-3$ à $3$ car ce ne doit quand même pas être si monstrueux. On trouve vite $\boxed{R(3) = 0}$

De toutes façons, si $a$ est racine entière, alors on a $-2.a^3 + 8.a^2 - 3.a = 9$ et $a$ divise 9. On s'oriente donc vite vers 3 ou $-3$ *(mais la somme est "trop négative" dès le premier coup d'oeil).*

On factorise donc : $R = (X-3).(2.X^2 - 2.X - 3)$, soit en posant une division, soit en développant $(X-3).(a.X^2 + b.X + c)$ et en identifiant.

On ne peut factoriser davantage sans tomber sur $R = (X-3).\Big(X - \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\Big).\Big(X - \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\Big)$ qui nous fait sortir de $\mathbb{Z}[X]$.

---

L'équation $R(\sin(x)) = 0$ est définie partout et équivaut à $a = \sin(x)$ et $a \in \Big\{3, \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\Big\}$.
Or, 3 et $(1+\sqrt{7})/2$ sont hors de $[-1,1]$. Il ne nous reste que $\sin(x) = (1-\sqrt{7})/2$ *(qui est dans le bon*

*intervalle, puisque* $-\sqrt{7} \geqslant -3$*).*

On a alors des solutions : $Arcsin\Big(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\Big) + 2.k.\pi$

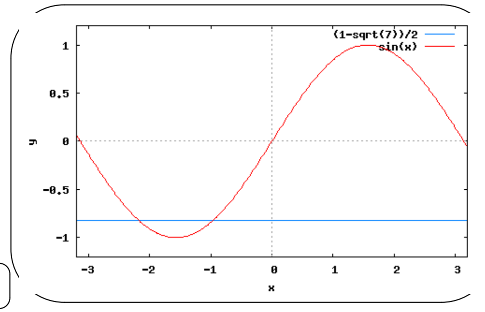
et $\pi - Arcsin\Big(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\Big) + 2.p.\pi$ avec $k$ et $p$ entiers.

Dans notre intervalle, il y a $Arcsin\Big(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\Big)$

*(entre* $-\pi/2$ *et* $0$*),*

et $-\pi - Arcsin\Big(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\Big)$.

$\boxed{\text{On a deux solutions, et leur somme vaut } -\pi.}$




**IS09** • La suite $(n!+1)$. • MPSI 2/2013

On calcule les premiers termes, et dans le même tableau, on calcule les plus grands diviseurs communs :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n!+1$ | 2 | 2 | 3 | 7 | 25 | 121 |
| $(n+1)!+1$ | 2 | 3 | 7 | 25 | 121 | 721 |
| $pgcd(a_n, a_{n+1})$ | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Ensuite, on exprime : $a_{n+1} = (n+1).n!+1 = (n+1).(a_n-1)+1$ et simplifie : $\boxed{a_{n+1} = (n+1).a_n - n}$

On suppose donc qu'un entier $d$ divise $a_n$ et $a_{n+1}$. Il divise donc leur combinaison qu'est par exemple $(n+1).a_n - a_{n+1}$.
En effet, en écrivant $a_n = d.\alpha$ et $a_{n+1} = d.\beta$, on a $(n+1).a_n - a_{n+1} = d.((n+1).\alpha - \beta)$ avec $(n+1).\alpha-\beta$ entier.

Mais cette combinaison $(n+1).a_n - a_{n+1}$ est égale à $n$, donc $d$ divise $n$.

Mais alors, $d$ divise $n!$ *(lui même multiple de* $n$*)*. Et par combinaison, $d$ divise $a_n - n!$, c'est à dire 1.
Le seul diviseur commun de $a_n$ et $a_{n+1}$ est dnc 1 *(seul entier positif qui divise* $1$*)*.
On trouve que $a_n$ et $a_{n+1}$ sont toujours premiers entre eux pour $n$ au moins égal à 1.

**IS09** • L'application $x \longmapsto \ln(\frac{x^3+1}{(x+2)^2.(x-4)})$. • MPSI 2/2013

Cette application est bien définie sur $[5, +\infty[$. Mais surtout, avant de la dériver, on la sépare, par propriété de morphisme du logarithme :

$\ln\Big(\dfrac{x^3+1}{(x+2)^2.(x-4)}\Big) = \ln(1+x^3) - 2.\ln(x+2) - \ln(x-4)$.

On peut alors dériver sans effort sous cette forme en $x \longmapsto \dfrac{3.x^2}{x^3+1} - 2.\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-4}$.

Il ne reste plus qu'à réduire au dénominateur commun. Le numérateur est $3.x^2.(x+2).(x-4) - (x^3+1).\big(2.(x-4)+(x+2)\big)$.

On trouve finalement $\boxed{\dfrac{-24.x^2 - 3.x + 6}{(x^3+1).(x+2).(x-4)}}$

*Bien sûr, vous pouviez dériver par* $\dfrac{u'}{u}$ *et* $\dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$*. Mais ce serait alors reconnaître que vous refusez de faire le moindre progrès par rapport à ce que vous aviez appris par coeur en Terminale. Il faut que vous acceptiez de raisonner un peu pour pouvoir faire en quatre minutes ce que vous pensez savoir faire en neuf minutes. Passez de la force brute à l'intelligence...*

On cherche alors les racines positives du numérateur $8.x^2+x-2$. On n'en trouve qu'une : $\boxed{\dfrac{-1+\sqrt{65}}{16}}$

**IS09** • La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. • MPSI 2/2013

On commence par le déterminant de $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}^k$.

Cette matrice est une somme qu'on écrit même $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}^k.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{20-k}$. Même si on n'a pas le droit d'utiliser la formule du binôme dans un anneau non commutatif tel que $(M_2(\mathbb{R}),\ +,\ .)$, on est en droit d'en faire usage ici, car les deux éléments qui interviennent sont permutables *($I_2$ est permutatble avec toutes les matrices carrées de taille 2)*.

On simplifie donc en $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{20}$.

On la calcule, puis on calcule son déterminant ?

Non ! On rappelle que le déterminant du produit est le produit des déterminants. Il reste donc, par itération rapide de la formule : $\det\left(\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\right)\right)$ qu'on doit élever à la puissance 20.

Cette première somme vaut $\boxed{18^{20}}$ qu'on ne simplifie guère.

---

La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k}.\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}^k\right)$ est encore plus simple, elle vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k}.\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\right)^k$ et même $\displaystyle\sum \binom{20}{k}.10^k$. C'est une simple formule du binôme dans $\mathbb{R}$ de valeur $(1+10)^{20}$ c'est à dire $\boxed{11^{20}}$

---

Dans la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, c'est toujours la même matrice. On la factorise et on remplace le multiplicateur $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k}$ par $(1+1)^{20}$. On a donc $\det(k.A)$ avec $A$ égale à la matrice et $k$ égal à $2^{20}$. Cette matrice est $\begin{pmatrix} k & 2.k \\ -2.k & 6.k \end{pmatrix}$ et son déterminant est $k^2.(1.6-2.(-2))$ c'est à dre ici $\boxed{2^{40}.10}$

---

Pour la formule $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$ mainte fois utilisée ici, il suffit de poser deux matrices et d'en effectuer le produit : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.a'+b.c' & a.b'+b.d' \\ c.a'+d.c' & c.b'+d.d' \end{pmatrix}$. Son déterminant vaut $(a.a'+b.c').(c.b'+d.d')-(c.a'+d.c').(a.b'+b.d')$. On le développe, et on le compare au produit $(a.d-b.c).(a'.d'-c'.b')$. C'est juste du calcul...

**IS09** • La permutation $\sigma$. • MPSI 2/2013

On a bien une permutation *(bijection)* et on la décompose en produit de cycle(s) de supports disjoints : $\overrightarrow{(1,\ 5,\ 3,\ 2,\ 4)}$.Son ordre est 5 *($\sigma^5 = Id$)* et on décompose donc : $\sigma^{2013} = (\sigma^5)^{402}.\sigma^3 = \sigma^3 = \overrightarrow{(1,\ 2,\ 5,\ 4,\ 3)}$ qu'on écrit aussi $\boxed{\sigma^{2013} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}}$

On constate : $\sigma^4(1) = 4$. Par périodicité de plus petite période 5, on a donc $\boxed{\exists\, p \in \mathbb{N},\ n = 4 + 5.p}$ *(qu'on écrit aussi $S = 4 + 5.\mathbb{N}$)*

---

Le produit est ensuite étrange.Il est indexé par les couples $(i,\ j)$ avec $i < j$ (ce qui garantit que les dénominateurs soient non nul). On peut en dresser la liste $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3)$ et ainsi de suite. Ou on peut les visualiser dans un tableau :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | * | * | * | * |
| | | * | * | * |
| | | | * | * |
| | | | | * |
| | | | | |

.

On a donc 10 termes *(et combien en taille $n$ ?)*.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $(4-5)/1$ | $(2-5)/2$ | $(1-5)/3$ | $(3-5)/4$ |
| | | $(2-4)/1$ | $(1-4)/2$ | $(3-4)/3$ |
| | | | $(1-2)/1$ | $(3-2)/2$ |
| | | | | $(3-1)/1$ |
| | | | | |

Dans ces produits, aucun n'est nul, par injectivité de $\sigma$.
On effectue le produit : $\dfrac{(4-5)}{1}.\dfrac{(2-5)}{2}.\dfrac{(1-5)}{3}.\dfrac{(3-5)}{4}.\dfrac{(2-4)}{1}.\dfrac{(1-4)}{2}.\dfrac{(3-4)}{3}.\dfrac{(1-2)}{1}.\dfrac{(3-2)}{2}.\dfrac{(3-1)}{1}$ qui s'allège en $\dfrac{-1}{1}.\dfrac{-3}{2}.\dfrac{-4}{3}.\dfrac{-2}{4}.\dfrac{-2}{1}.\dfrac{-3}{2}.\dfrac{-1}{3}.\dfrac{-1}{1}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{1}$. Aux signes près, tout se simplifie entre le haut et le bas, et il reste huit signes moins, soit $\boxed{\displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq 5} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = 1}$

**IS09** • Application lipschitzienne $x \longmapsto \sqrt[3]{x^2+1}$. • MPSI 2/2013

L'application est définie partout. On doit trouver $k$ vérifiant $\left|\dfrac{\sqrt[3]{y^2+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{y - x}\right| \leqslant k.|y - x|$. Or, on a l'identité $(b^3 - a^3) = (b - a).(b^2 + a.b + a^2)$ qui donne $b - a = \dfrac{b^3 - a^3}{b^2 + a.b + a^2}$. Ici, on a donc $\sqrt[3]{y+1} - \sqrt[3]{x+1} = \dfrac{(y+1) - (x+1)}{(y+1)^{2/3} + (y+1)^{1/3}.(x+1)^{1/3} + (x+1)^{2/3}}$. On tient notre $y - x$ au numérateur. Mais il reste le dénominateur. Toutefois, chacun de ses termes est plus grand que 1 (des $(1+x)^{\cdots}$ avec $x$ positif). On le minore par 3 et on majore alors $|\sqrt[3]{y+1} - \sqrt[3]{x+1}| \leqslant \dfrac{|y-x|}{3}$.

**IS09** • Suite convergente. • MPSI 2/2013

La définition est $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists\, N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_\epsilon)\ \Rightarrow\ (|u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon)$
On prend le cas particulier $\varepsilon = 1$. A partir du rang $N_1$, on a alors $|u_n - \alpha| \leqslant 1$ ce qui donne $\alpha - 1 \leqslant u_n \leqslant \alpha + 1$. La suite est donc minorée par $\alpha - 1$ et majorée par $\alpha + 1$ mais seulement à partir du rang $N_1$.
Il ne reste toutefois qu'un nombre fini de termes avant ce rang. On les regarde tous ensemble : $u_0$, $u_1$ jusqu'à $u_{N_1-1}$. On prend le plus grand de cette liste : $Max(u_0,\ u_1,\ u_{N_1-1})$ et le plus petit : $Min(u_0,\ u_1,\ u_{N_1-1})$ et on encadre :
$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ Min(u_0,\ u_1,\ u_{N_1-1},\ \alpha - 1) \leqslant u_n \leqslant Max(u_0,\ u_1,\ u_{N_1-1},\ \alpha + 1)}$

MPSI 2/2013 — 301 points — $IS09$

♡43 Calculez $\displaystyle\sum_{p+k=100} 2^k.5^p$ *(k et p sont des entiers naturels).* •2 pt.•

---

♡44 On définit : $f = x \longmapsto x.\sin(x)$. Pour tout $n$, on note $a_n = f^{(n)}(0)$. Calculez $a_n$ pour $n$ de 0 à 5. •2 pt.•
Montrez : $a_n = -4.n$ pour tout $n$ *(si vous le faites par une récurrence, vous aurez les points, mais vous passerez à mes yeux pour un immonde bourrin qui n'a pas la volonté de progresser depuis la Terminale, et qui se complait dans sa médiocrité, pensez à la bonne* formule *dans le cours).* •2 pt.•

---

♡45 L'équation $x^2 - *.x = 1$ d'inconnue $x$ a pour racines $\cos(\alpha)$ et $\cos(\beta)$. Calculez $\cos(\alpha + \beta)$. •2 pt.•

---

♢40 Deux questions *(légèrement adaptées)* du PLAN *(examen nord-américain de début de lycée)*, normalement sous forme de Q.C.M., quarante items en quarante minutes :
• vous avez acheté trois chemises dans une boutique pour un prix moyen de 8 euros ; les deux premières étaient à 15 euros les deux. Quel était le prix de la troisième ? •1 pt.•
• l'effectif de l'**E**cole **N**ationale de **T**echnologie **U**rbaine et **B**iotechnologie **E**ndocrinienne est cette année de 1260 élèves, ce qui représente une hausse de cinq pour cent par rapport à l'an dernier. Quel était l'effectif l'an dernier ? •1 pt.•

---

♣16 Dans un précédent numéro du Canard Enchaîné, un dessin de Pancho attribue à Carla Bruni l'assertion suivante, à l'attention de son mari, notre ancien président de la République : "*auparavant, tu n'y pensais qu'en te rasant ; maintenant tu ne te rases plus, mais tu y penses tout le temps*".
En notant $r_t$ la proposition "Nicolas S. se rase à l'instant $t$" et $p_t$ la proposition "Nicolas S. pense à sa candidature éventuelle, à l'instant $t$". Quantifiez alors avec des "$\forall t \leqslant$ " les deux assertions de l'ex-première dame de France. •2 pt.•

---

♡46 Enoncez l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les intégrales et donnez en la démonstration. •2 pt.•
Déduisez, pour $f$ continue de $[a,\ b]$ das $\mathbb{R}$ : $\displaystyle\Big(\int_a^b f(t).dt\Big)^2 \leqslant (b-a).\int_a^b f^2(t).dt$. •1 pt.•

---

♢41 Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Arctan\Big(\frac{2^k}{1+2^{2.k+1}}\Big)$ pour tout entier naturel $n$, et donnez sa limite quand $n$ tend vers l'infini. Indication : $tan(Arctan(2.x) - Arctan(x))$. •4 pt.•

---

♢42 Sachant (?) que la suite $\displaystyle\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^6}\Big)_n$ converge vers $\dfrac{\pi^6}{945}$, donnez la limite de la suite $\displaystyle\Big(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(2.p-1)^6}\Big)_n$. •2 pt.•

---

♢43 $u$ est une suite définie par $u_0$ donné et $u_{n+1} = 3.u_n + 2^n$ pour tout $n$. On pose alors $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ 2^n \end{pmatrix}$. Trouvez $M$ *(matrice carrée de taille 2)* vérifiant $U_{n+1} = M.U_n$ pour tout $n$. Donnez une matrice diagonale $D$ ayant même trace et même déterminant que $M$. Trouvez $P$ inversible vérifiant $M.P = P.D$. Calculez $M^n$, puis $U_n$ et enfin $u_n$ pour tout $n$. •5 pt.•

| Charlemagne MPSI-2 / 2013 | Correction | $IS10$ |
|---|---|---|

**IS10** • La somme $\sum_{p+k=100} 2^k.5^p$. • MPSI 2/2013

On réindexe en série géométrique : $\sum_{k=0}^{100} 2^k.5^{100-k}$. La raison en est 2/5, le premier terme est $5^{100}$, et le terme à venir est $2^{100}/5$. La somme vaut $\boxed{\dfrac{5^{100}-2^{100}/5}{1-2/5}=\dfrac{5^{101}-2^{101}}{3}}$ On se contentera de ça, puisque ce nombre a soixante dix chiffres.

**IS10** • L'application $x \longmapsto x.\sin(x)$. • MPSI 2/2013

Cette application est dérivable autant de fois qu'on veut, on dérive donc, puis on calcule e 0 :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f^n(x)$ | $x.\sin(x)$ | $\sin(x)+x.\cos(x)$ | $2.\cos(x)-x.\sin(x)$ | $-x.\cos(x)-3.\sin(x)$ | $x.\sin(x)-4.\cos(x)$ | $x.\cos(x)+5.\sin(x)$ |
| $a_n$ | 0 | 0 | 2 | 0 | $-4$ | 0 |

On part de $f=u.v$ avec $u=Id$ et $v=\sin$. On applique la formule de Leibniz pour dériver $f$ $4.n$ fois. On a alors $f^{(4.n)}=\sum_{k=0}^{4.n}\binom{4.n}{k}.v^{4.n-k}.u^{(k)}$. Mais les dérivées de $u$ disparaissent vite : $u=Id$ et $u'=1$ *(et au delà, $u^{(k)}=0$)*. Il ne reste que deux termes :
$\boxed{f^{(4.n)}(x)=x.\sin^{(4.n)}(x)+4.n.1.\sin^{(4.n-1)}(x)+0=x.\sin(x)-4.n.\cos(x)}$ On calcule en 0 : $a_{4.n}=-4.n$.

**IS10** • L'équation $x^2-*.x=1$ de solutions $\cos(\alpha)$ et $\cos(\beta)$. • MPSI 2/2013

La clef de l'exercice est dans les **relations coefficients racines**. On peut écrire : $\cos(\alpha)+\cos(\beta)=*$ *(la tache de café)* et $\cos(\alpha)\times\cos(\beta)=-1$. Or, $\cos(\alpha)$ et $\cos(\beta)$ sont entre $-1$ et 1.
La seule solution est que l'un vaille 1 et l'autre $-1$.
$\alpha$ et $\beta$ sont des multiples de $\pi$ *(un multiple pair pour avoir $\cos(\alpha)=1$ et un multiple impair pour avoir $\cos(\beta)=-1$)*.
On déduit que $\alpha+\beta$ est de la forme $(2.p+2.q+1).\pi$ et son cosinus vaut $\boxed{-1}$

**IS10** • Deux questions du `plan`. • MPSI 2/2013

C'est parti avec trois chemises de valeurs $a$, $b$ et $c$. On sait : $a+b=15$ et $(a+b+c)/3=8$. On isole : $c=24-(a-b)=9$. La troisième chemise coute **neuf euros**. Ma preuve est très algébrisée, je le regrette.

---

On continue avec $e.(1+0,05)=1260$. On effectue : $e=\dfrac{1260}{1,05}=\dfrac{126000}{3.5.7}=\dfrac{18000}{3.5}=\dfrac{6000}{5}=600.2=1200$. On vérifie : **cinq pour cent de** 1200 **c'est bien** 60.

**IS10** • Nicolas Sakozy, son rasoir et l'échéance électorale. • MPSI 2/2013

On doit quantifier deux propositions, l'une pour tous les instants $t$ avant $T$ (instant où Nicolas a changé d'attitude, passant de “auparavant” à “maintenant”) et après $T$. On note donc $r_t$ le fait qu'il y pense (et $\overline{r_t}$ le fait qu'il n'y pense pas) et $r_t$ le fait qu'il se rase :
• “avant, tu n'y pensais qu'en te rasant” : $\boxed{\forall\ t\leqslant T,\ p_t\ \Rightarrow\ r_t}$

• "maintenant, tu ne te rases plus, mais tu y penses tout le temps" : $\boxed{\forall\, t > T,\ \overline{r_t}\ et\ p_t}$

---

Ne vous faites pas avoir avec "tu n'y pensais qu'en te rasant". Elle exprime bien que "si il ne se rasait pas, il n'y pensait pas", ce qui donne $\overline{r_t} \Rightarrow \overline{p_t}$, ce qui contrapose en $p_t \Rightarrow r_t$ ("si tu y pensais, c'est que tu étais en train de te raser, sinon, tu n'y pensais pas). Rien ne dit que chaque fois qu'il se rasait, il y pensait, donc pas de $r_t \Rightarrow p_t$, s'il vous plait.

Cet exercice m'a été suggéré par mon beau-frère, professeur de mathématiques lui aussi dans un des lycées fournisseur des prépas de Charlemagne...

**IS10** • Inégalité de Cauchy-Schwarz sur les intégrales. • MPSI 2/2013

On prend $f$ et $g$ continues de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $\lambda$ réel, l'application $t \longmapsto (\lambda.f(t) + g(t))^2$ est continue et positive. Son intégrale de $a$ à $b$ est donc positive : $\int_a^b (\lambda.f(t) + g(t))^2.dt \geqslant 0$.

On développe : le trinôme $\lambda^2.\int_a^b (f(t))^2.dt + 2.\lambda.\int_a^b f(t).g(t).dt + \int_a^b (g(t))^2.dt$ reste de signe constant positif.

Son discriminant est donc négatif ou nul *(pour le cas où il existerat $\lambda$ annulant l'intégrale).*

On calcule ce discriminant, on bascule : $\boxed{(\int_a^b f(t).g(t).dt)^2 \leqslant \int_a^b (f(t))^2.dt.\int_a^b (g(t))^2.dt}$ *(produit scalaire plus petit que produit des normes).*

*On n'a étudié que le cas où $a$ est plus petit que $b$, mais le raisonnement serait le même avec "trinôme négatif". De même, si $f$ est nulle, alors on n'a plus de trinôme mais une simple fonction constante, mais l'inégalité coule de source.*

---

Dans le cas particulier où $g$ est la constante égale à 1, on a la comparaison carré de l'intégrale et intégrale du carré, dans laquelle $b - a$ n'est autre que $\int_a^b 1^2.dt$.

**IS10** • Somme des $Arctan(2^k/(1 + 2^{2.k+1}))$. • MPSI 2/2013

Chaque terme des sommes existe. A priori, rien ne permet de calculer ces sommes d'arctangentes. Mais on regarde l'indication et on développe $\tan(b - a) = \dfrac{\tan(b) - \tan(a)}{1 + \tan(b).\tan(a)}$ avec $b = Arctan(2.n)$ et $a = Arctan(n)$. On a donc : $\tan(Arctan(2.x) - Arctan(x)) = \dfrac{x}{1 + 2.x}$.

Si on l'applique pour $x = 2^k$, on a $\tan(Arctan(2^{k+1}) - Arctan(2^k)) = \dfrac{2^k}{1 + 2^{2.k+1}}$.

On la lit dans l'autre sens, et on efface la tangente : $\boxed{Arctan\Big(\dfrac{2^k}{1 + 2^{2.k+1}}\Big) = Arctan(2^{k+1}) - Arctan(2^k)}$

On somme alors : $\sum_{k=0}^{n} Arctan\Big(\dfrac{2^k}{1 + 2^{2.k+1}}\Big) = \sum_{k=0}^{n} \Big(Arctan(2^{k+1}) - Arctan(2^k)\Big)$. On télescope, et il reste $\boxed{Arctan(2^{n+1}) - Arctan(2^0)}$

On peut simplifier en $Arctan\Big(\frac{2^{n+1}-1}{1+2^{n+1}}\Big)$.

---

Quand $n$ tend vers l'infini, $Arctan(2^{n+1})$ tend vers $\pi/2$ et il reste $\boxed{\pi/4}$

---

Ah si, un détail. Pouvait on passer de $\tan(Arctan(2^{k+1}) - Arctan(2^k)) = \dfrac{2^k}{1 + 2^{2.k+1}}$ à $Arctan\Big(\dfrac{2^k}{1 + 2^{2.k+1}}\Big) =$

$Arctan(2^{k+1}) - Arctan(2^k)$. Les deux nombres ont la même tangente, mais sont ils bien égaux ? La formule $Arctan(a) - Arctan(b) = Arctan\Big(\dfrac{a-b}{1+a.b}\Big)$ que certains apprennent par coeur *(à tort)* n'est vaable que modulo $\pi$.
Ici, les deux nombres $Arctan(2^k/(1+2^{2.k+1}))$ et $Arctan(2^{k+1}) - Arctan(2^k)$ sont dans $[0,\ \pi/2]$ *(le premier par définition et le second par différence)*. Ils sont donc bien égaux.

**IS10** • Limite de la série de terme général $1/(2.p-1)^6$. • MPSI 2/2013

On décide de poser $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^6}$ pour tout $n$.

On a alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2.n} \frac{1}{k^6} = A_{2.n}$, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2.p)^6} = \frac{A_n}{2^6}$ et par soustraction $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2.p-1)^6} = \sum_{k=1}^{2.n} \frac{1}{k^6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2.p)^6} = A_{2.n} - \frac{A_n}{2^6}$.

Cette somme converge vers $\dfrac{\pi^6}{945}.\Big(1 - \dfrac{1}{2^6}\Big)$ quand $n$ tend vers l'infini. On trouve $\boxed{\dfrac{\pi^6}{960}}$

**IS10** • La suite $u_{n+1} = 3.u_n + 2^n$. • MPSI 2/2013

On peut se lancer dans le calcul des termes de la suite $u$ de proche en proche, puis avec une récurrence.
On peut aussi utiliser donc le vecteur $U$ :

$$\boxed{U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.u_n + 2^n \\ 2.2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_n \\ 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .U_n}$$

La matrice cherchée est donc $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, qui ne dépend effectivement pas de $n$.

Sa trace vaut 5 et son déterminant 6. La matrice diagonale cherchée sera de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a+b=5$ et $a.b=6$. $a$ et $b$ sont donc les solutions de $X^2 - 5.X + 6 = 0$ d'inconnue $X$. On (re)-trouve 2 et 3. On va donc prendre $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On résout $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et on trouve $\alpha = 0$ et $\beta = -1$ *(qui conviennent dans les quatre équations à la fois, ne vous contentez pas d'une rédaction par conditions nécessaires)*.

Par récurrences immédiates, on trouve $D^n$ et aussi $M^n = P.D^n.P^{-1}$. Tous calculs faits :
$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

On multiplie par $U_0$ : $\boxed{U_n = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n.u_0 + 3^n - 2^n \\ 2^n \end{pmatrix}}$

et on isole : $\boxed{u_n = 3^n.(u_0+1) - 2^n}$ *(formule qu'on peut valider par récurrence sur $n$, mais mieux vaut utiliser l'intelligence que la force brutale de la récurrence)*.

| MPSI 2/2013 | 327 points | $IS10$ |
|---|---|---|

♡47 Dérivez $x \longmapsto x^{1/\sin(x)}$ en précisant aussi son domaine de définition. •2 pt.•

---

♡48 Le dé $A$ *(équilibré à $\sqrt[5]{7776}$ faces)* a pour faces $[1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 6]$ et le dé $B$ *(tout aussi équilibré, à $[2.\pi]$ faces)* a pour faces $[1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 6,\ 6]$. Quelle est l'espérance de chacun ? Quelle est la variance de chacun ? •2 pt.•
Quelle est l'espérance du lancer "somme des deux dés" ? •1 pt.•
Quelle est l'espérance du lancer "produit des deux dés" ? •1 pt.•
Quelle est la probabilité d'un match nul en cas de duel entre les deux dés ? •1 pt.•

---

♡49 Montrez que la suite $\left(\int_1^2 \ln^n(t).dt\right)_n$ est décroissante. Converge-t-elle ? •2 pt.•

---

♢44 Encore deux questions du plan *(le Q.C.M. nord-américain niveau début de lycée)*.
• Le petit dessin *(d'une sorte de noeud papillon)* était fourni, je vous l'indique : deux segments parallèles de même sens $[A,\ B]$ et $[E,\ D]$ *(pas forcément de même longueur)* ; $(AE)$ coupe $(BD)$ en $C$. On donne : $ABC = 40^{\circ}$, $CED = 60^{\circ}$. Que vaut $BCE$ ? •1 pt.•
• L'entier $5.2^a$ a exactement huit diviseurs entiers positifs. Que vaut $a$ ? •1 pt.•
• Quand deux droites se coupent à 90 degrés, faut il les desinfecter à l'alcool à angle droit ? •0 pt.•

---

♢45 Calculez $A = \sum_{k=0}^{100}(-2)^k$, $B = \sum_{k=0}^{100} 2^{-k}$, $C = \sum_{k=0}^{100} 2^{(-1)^k}$ et $D = \sum_{k=0}^{100} 2^{(-1)^k.k}$. •5 pt.•

---

♡50 Inverser $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & * & 1 \end{pmatrix}$ après l'avoir complétée pour que son déterminant vaille $-1$. •3 pt.•

---

♣17 $L$ est une liste d'entiers naturels : `L=[2, 3, 1, 5, 4, 3, 9, 4]`. Que donne le scrit Python suivant : •2 pt.•

```
m=L[0]
for i in range(1 : len(L)) :
...if m>L[i] :
......L[i]=m
...else :
......m=L[i]
print(L)
```

---

♡51 Montrez que la somme de deux suites convergentes est encore convergente. •1 pt.•

---

♢46 De combien de façons pouvez vous compléter la permutation suivante ? •1 pt.• $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 5 & 6 & 3 & . & . & . & . & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Choisissez en une et donnez sa signature. •1 pt.•
Donnez la somme des signatures de toutes les permutations possibles. •1 pt.•

---

♢47 Dans le plan affine euclidien usuel, on donne les points $A(1,\ 1)$, $C(3,\ 4)$ et $D(2,\ 5)$. Où devez vous placer $B$ sur l'axe $Ox$ pour que le quadrilatère $(A,\ B,\ C,\ D)$ ait une aire égale à 8 ? •3 pt.•

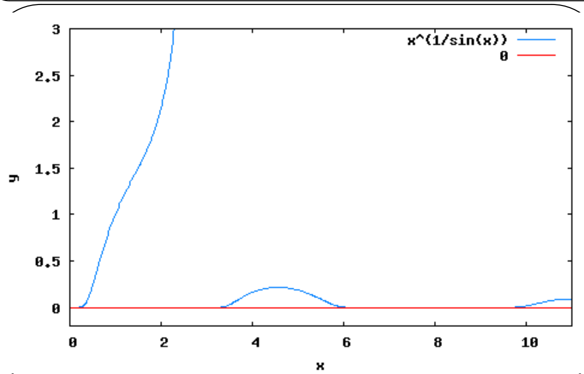
**IS11** • L'application $x \longmapsto x^{1/\sin(x)}$. • MPSI 2/2013

Comme ni le nombre ni l'exposant ne sont entiers, il faut en revenir à la définition : $x \longmapsto \exp(\ln(x)/\sin(x))$ avec l'unique condition $x > 0$ pour l'existence du logarithme et $x \notin \pi.\mathbb{Z}$ pour la non nullité du sinus.

Le domaine est donc $\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} ]k.\pi,\ k+1).\pi[}$

On dérive ensuite la composée $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\sin(x)} \longmapsto \exp\Big(\dfrac{\ln(x)}{\sin(x)}\Big)$ et on trouve

$$\boxed{x \longmapsto \Big(\frac{1}{x.\sin(x)} - \frac{\cos(x).\ln(x)}{\sin^2(x)}\Big).\exp\Big(\frac{\ln(x)}{\sin(x)}\Big)}$$




On peut arranger en $\dfrac{x^{\frac{1}{\sin(x)}-1}}{\sin(x)} - \dfrac{\cos(x).\ln(x)}{\sin^2(x)}.x^{1/\sin(x)}$ mais peut on appeler ça arranger ?

**IS11** • Deux dés. • MPSI 2/2013

L'espérance se calcule par la moyenne simple des valeurs des faces. Pour la variance, on calcule la moyenne des carrés et le carré de la moyenne : $\sigma = E(X^2) - E(X)^2$ (positif par inégalité de Cauchy-Schwarz) :

| dé | espérance | | espérance du carré | variance |
|---|---|---|---|---|
| $[1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 6]$ | $(1+1+2+5+6+6)/6$ | $\frac{21}{6}$ | $\frac{103}{6}$ | $\frac{59}{12}$ |
| $[1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 6,\ 6]$ | $(1+1+3+3+6+6)/6$ | $\frac{20}{6}$ | $\frac{92}{6}$ | $\frac{38}{9}$ |

L'espérance pour la somme des deux dés est

$$\sum_{\substack{i\leq 6\\ j\leq 6}} \frac{a_i+b_j}{36} = \frac{1}{36}\sum_{\substack{i\leq 6\\ j\leq 6}}(a_i+b_j) = \frac{1}{36}\sum_{\substack{i\leq 6\\ j\leq 6}} a_i + \frac{1}{36}\sum_{\substack{i\leq 6\\ j\leq 6}} b_j = \frac{1}{6}.\sum_{i\leq 6} a_i + \frac{1}{6}.\sum_{j\leq 6} b_j$$

(linéarité, variables de sommations intervenant comme compteurs).

Finalement, on retrouve la somme des deux espérances : $\boxed{\dfrac{41}{6}}$

Pour le produit : $\displaystyle\sum_{\substack{i\leq 6\\ j\leq 6}} \frac{a_i.b_j}{36} = \frac{1}{36}\sum_{\substack{i\leq 6\\ j\leq 6}}(a_i.b_j) = \frac{1}{36}.\Big(\sum_{i\leq 6} a_i\Big).\Big(\sum_{j\leq 6} b_j\Big).$

Finalement, on retrouve le produit des deux espérances, par indépendance : $\boxed{\dfrac{420}{36}}$ de valeur simplifiée

: $35/3$ ce qui fait $11,7$ à $10^{-1}$ près.
On pouvait évidemment se taper la tête contre un arbre.

Pour le duel entre les deux dés, on n'a guère le choix, cette fois : un arbre ou un tableau équivalent

| si $A$ tire | 1 (proba 1/3) | 2 (proba 1/6) | 5 (proba 1/6) | 6 (proba 1/3) |
|---|---|---|---|---|
| si $B$ tire | 1 (proba 1/3) | rien | rien | 6 (proba 1/3) |
| proba | 1/9 | 0 | 0 | 1/9 |

La probabilité de match nul est $\boxed{2/9}$

**IS11** • La suite $(\int_1^2 \ln^n(t).dt)_n$. • MPSI 2/2013

Chaque terme de cette suite existe, par continuité de l'application sous le signe intégrale.
On calcule la différence de deux termes consécutifs, afin d'en chercher le signe :
$$\int_1^2 \ln^{n+1}(t).dt - \int_1^2 \ln^n(t).dt = \int_1^2 \ln^n(t).(\ln(t)-1).dt$$
Dans l'intégrale, le terme $\ln(t)^n$ est positif, mais le terme différence est négatif *(c'est seulement à partir de $e$ que $\ln(t)$ dépasse 1).*
La différence est négative ; la suite décroit.

Comme tous les termes de la suite sont positifs, c'est une suite réelle décroissante minorée. Elle converge.

**IS11** • Deux petites questions du `plan`. • MPSI 2/2013

On se place dans le triangle $(A,B,C)$. On connaît par l'énoncé l'angle en $B$ : $40^\circ$. On connaît aussi indirectement l'angle en $A$ : par parallélisme et "alterne-interne", c'est celui mesuré en $E$ : $60^\circ$. Il reste en $C$ un angle de $80^\circ$. Mais alors, par alignement de $A$, $C$ et $E$, il nous reste en $C$ un angle $BCE$ égal à $180-80$, ce qui fait $100^\circ$.

---

Les diviseurs de $5\times 2^a$ sont les $2^\alpha$ avec $\alpha$ entre 0 et $a$ et les $5.2^\alpha$ avec même contrainte sur $\alpha$. On déduit alors par les données de l'énoncé, que de 0 à $a$ il y a quatre valeurs. C'est donc que $a$ vaut 3.

**IS11** • Quatre sommes en $\sum_{k=0}^{100} 2^{(-1)^k}$. • MPSI 2/2013

Dans chacune des sommes, il y a cent un termes.
$A=\sum_{k=0}^{100}(-2)^k$ est une série géométrique de raison $-2$ (différente de 1) : $\boxed{A=\frac{1-(-2)^{101}}{1-(-2)}=\frac{2^{101}+1}{3}}$
$B=\sum_{k=0}^{100}2^{-k}$ est aussi une série géométrique, mais de raison $-1/2$ *(toujours différent de 1)* : $\boxed{B=\frac{1-2^{-101}}{1-1/2}=2-\frac{1}{2^{100}}}$
$C=\sum_{k=0}^{100}2^{(-1)^k}$ est à séparer en deux sommes suivant la parité de $k$ : $C=\sum_{\substack{k=0\\k\ pair}}^{100}2^{(-1)^k}+\sum_{\substack{k=0\\k\ impair}}^{100}2^{(-1)^k}=\sum_{\substack{0\leq k\leq 100\\k\ pair}}^{100}2+\sum_{\substack{k=0\\k\ impair}}^{100}\frac{1}{2}$. On a juste à compter les termes : $\boxed{C=51.2+\frac{50}{2}}$
$D=\sum_{k=0}^{100}2^{(-1)^k.k}$. On sépare comme au dessus suivant la parité : $D=\sum_{\substack{0\leq k\leq 100\\k\ pair}}^{100}2^k+\sum_{\substack{k=0\\k\ impair}}^{100}\frac{1}{2^k}$. On a

deux séries géométriques, de raisons 4 et 1/4 *(on ne garde qu'un terme sur deux des séries A et B)* :

$$\boxed{D = \frac{1-2^{102}}{1-4} + \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{101}}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2^{102}-1+2-2^{-99}}{3}}$$

**IS11** • La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$. • MPSI 2/2013

Puisque c'est demandé, on calcule le déterminant de cette matrice en développant par rapport à la première colonne :

$\det(M) = 2.(-1-3.a) - 1.(1-5.a) + 2.8 = 13 - a$

On le veut égal à $-1$ : l'unique solution est $\boxed{a = 14}$ Ayant tous les coefficients et le déterminant, on inverse par la méthode des cofacteurs : $\boxed{\begin{pmatrix} 43 & -69 & -8 \\ -5 & 8 & 1 \\ -16 & 26 & 3 \end{pmatrix}}$ *(en n'oubliant pas de transposer).*

**IS11** • Un script Python. • MPSI 2/2013

On commence par stocker dans une variable temporaire $m$ le premier terme de la liste *(ici 2).*
Ensuite, par une boucle, on parcourt la liste, terme à terme à partir du rang 1 *(on laisse donc de côté le premier terme).*
Pour chaque valeur $L[i]$ que l'on lit, on la compare à $m$.
Si la valeur est plus petite que $m$, on la remplace par $m$,
si elle est plus grande que $m$, c'est $m$ qui monte.
On comprend ainsi que $m$ ne peut qu'augmenter au fur et à mesure *(en fonction des termes de la liste)*, c'est un maximum qui se dessine.
Mais peu à peu, on efface des termes de la liste pour les remplacer par ce maximum qui augmente.
Graphiquement, c'est simple à voir, avec l'idée du thermomètre qui affiche la température et les maxima de température.
On dresse un tableau avec $L$, $k$, $m$ étape par étape :

| $k$ | $m$ | $L[k]$ | nouvelle $L$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | $[2,3,1,5,4,3,9,4]$ |
| 2 | 3 | 1 | $[2,3,3,5,4,3,9,4]$ |
| 3 | 3 | 5 | $[2,3,3,5,4,3,9,4]$ |
| 4 | 5 | 4 | $[2,3,3,5,5,3,9,4]$ |
| 5 | 5 | 3 | $[2,3,3,5,5,5,9,4]$ |
| 6 | 5 | 9 | $[2,3,3,5,5,5,9,4]$ |
| 7 | 9 | 4 | $[2,3,3,5,5,5,9,9]$ |

La nouvelle liste obtenue est croissante au sens large et a effacé les éléments qui entrainaient une décroissance.
On parle parfois en mathématiques de régularisée croissante : $\boxed{L^*[k] = Max(L[p] \mid p \leqslant k)}$

**IS11** • Somme de suites convergentes. • MPSI 2/2013

Soient $a$ qui converge vers $\alpha$ et $b$ vers $\beta$. On va montrer que $a+b$ converge vers $\alpha+\beta$.
H : $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists\, N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_\epsilon\ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| \leqslant \epsilon$
et $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists\, M_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant M_\epsilon\ \Rightarrow\ |b_n - \beta| \leqslant \epsilon$
On se donne $\varepsilon$ et on considère $n$ quelconque mais plus grand que $Max(N_{\epsilon/2},\ M_{\epsilon/2})$. On a alors à la fois $|a_n - \alpha| \leqslant \varepsilon/2$ et $|b_n - \beta| \leqslant \varepsilon/2$. Mais comme on a aussi l'inégalité triangulaire qui affirme : $|a_n + b_n - \alpha - \beta| \leqslant |a_n - \alpha| + |b_n - \beta|$, on peut conclure par transitivité de l'ordre :

$|(a_n+b_n)-(\alpha+\beta)| \leqslant 2.\varepsilon/2$.

**IS11** • Des permutations. • MPSI 2/2013

On part de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 5 & 6 & 3 & & & & & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Il reste quatre cases à compléter. Par bijectivité, lesvaleurs à utiliser sont 7, 9, 10 et 11 (condition nécessaire et suffisante), dans les quatre emplacements.

Quatre nombres pour quatre places : vingt quatre choix.

J'en prends un à titre d'exemple : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 7 & 9 & 10 & 11 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et le décompose en produit de cycles : $\overrightarrow{(1,4,3,6,9,8,11,2,5,7,10)}$.

En tant que cycle de longueur 10, sa signature vaut $(-1)^9$ c'est à dire $-1$.

Les vingt-quatre permutations se répartissent en deux catégories : celles de signature paire et celles de signatures impaires. Or, il doit y en avoir autant de chaque type. En effet, pour chaque permtutation $\sigma$ d'un type, il y a $\sigma \circ \overrightarrow{(5,\ 6)}$ qui est aussi dans la liste, mais du type opposé.

D'un coté : douze permutations de signature 1 ; de l'autre : douze permatations de signature $-1$. Au total, la somme des signatures est nulle.

Question subsidiaire non posée mais à laquelle vous pouvez réfléchir : de toutes les permutations crées, laquelle a l'ordre le plus petit *(c'est à dire retombe le plus vite sur $Id$).*

**IS11** • Un quadrilatère d'aire 8. • MPSI 2/2013

On rappelle que l'aire du triangle $(A,B,C)$ se calcule par $\det(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})/2$. On découpe le quadrilatère en deux triangles, et on impose donc : $\det(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) + \det(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}) = 16$.

En imposant $B(x,\ 0)$ par présence sur $Ox$, l'équation devient : $\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16$.

On la développe : $(3.x-1)+5 = 16$. On la résout : $\boxed{x=4}$

| | | |
|---|---|---|
| MPSI 2/2013 | 355 points | $IS11$ |

| Charlemagne MPSI-2 / 2013 | Mardi 10 décembre | $IS12$ |
|---|---|---|

♡52 Définition de $(G,\ *)$ est un groupe *(avec les ∃ et ∀)*. •2 pt.•

♡53 Calculez $\displaystyle\int_0^1 \frac{x.dx}{1+x^4}$. •2 pt.•

♡54 Simplifiez la somme "double" $\displaystyle\sum_{0<i\leq j\leq n} \frac{i}{j}$ pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}^*$. •3 pt.•

♡55 Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\binom{n}{k}$ puis $\displaystyle\sum_{0\leq p\leq k\leq n}(-1)^p.\binom{n}{k}$ et enfin $\displaystyle\sum_{0\leq p<k\leq n}(-1)^k.\binom{n}{k}$. •6 pt.•

♢48 Dans le développement du déterminant de la matrice $A$ de taille 10 sur 10, de terme général $a_i^k$, quel est le coefficient de $a_1^6.a_2^3.a_3^1.a_4^9.a_5^8.a_6^{10}.a_7^7.a_8^2.a_9^5.a_{10}^4$ ?
Même question pour $a_1^2.a_2^3.a_3^1.a_5^9.a_7^8.a_4^{10}.a_6^7.a_8^6.a_9^5.a_{10}^4$ et enfin $a_1^2.a_2^3.a_3^1.a_4^8.a_5^9.a_6^{10}.a_7^7.a_8^2.a_9^5.a_{10}^4$. •3 pt.•

♢49 On vous propose un contrat d'embauche à durée déterminée de six ans. Avec deux formules pour lesquelles le salaire d'embauche est le même : 2500 euros par mois.
Première formule : dix pour cent d'augmentation chaque année.
Deuxième formule : soixante dix pour cent la quatrième année.
Quelle formule prenez vous, sachant que votre objectif est de maximiser le salaire total sur les six ans *(on ne tient pas compte de l'inflation, des côtés psychologiques...)*. •2 pt.•

♠10 On définit $A(1,\ 1,\ -2)$, $B(0,\ 2,\ 3)$ et $C(2,\ -1,\ *)$ et $D(3,\ -2,\ 2)$. Ajustez $*$ pour que le plan $(ABC)$ passe par $D$. •2 pt.•

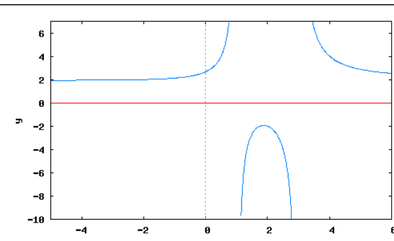
♠11 Complétez $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\\heartsuit\\\clubsuit\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\spadesuit\\1\end{pmatrix}$. •2 pt.•

♣18 Que donne le script suivant •3 pt.•

```
n = 5
L=[[k]*n for k in range(n)]
print(L)
print(sum(L[k][3]*L[2][k] for k in range(n))
```

♢50 Le système $\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 3\\ x & +2.y & -z & = & 2\\ 2.x & -5.y & +3.z & = & 0\end{array}\right.$ d'inconnues $(x,\ y,\ z)$ a pour solution le triplet $(1,\ 1,\ 1)$. Si l'on remplace le 0 de la dernière ligne par 3, de combien faut il augmenter $x$ ? •3 pt.•

♣19 Proposez une fonction pour ce graphe :



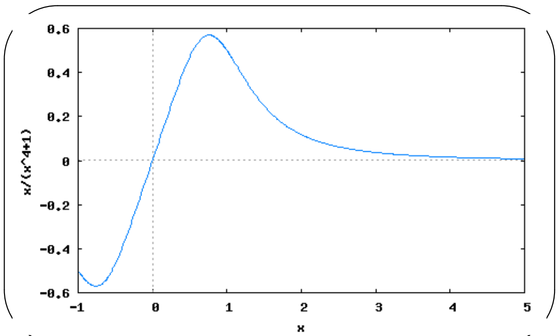

•2 pt.•

**IS12** • Définition d'un groupe $(G,\ *)$. • MPSI 2/2013

Loi interne : $\forall\ (a,\ b)\ \in\ G^2,\ a*b\ \in\ G$
Loi associative : $\forall\ (a,\ b,\ c)\ \in\ G^3,\ (a*b)*c = a*(b*c)$
Neutre : $\exists\ e\ \in\ G,\ \forall\ a\ \in\ G,\ a*e = e*a = a$
Symétriques : $\forall\ a\ \in\ G,\ \exists\ \alpha\ \in\ G,\ a*\alpha = \alpha*a = e$

**IS12** • L'intégrale $\int_0^1 \frac{x.dx}{1+x^4}$. • MPSI 2/2013

Cette intégrale existe par continuité de l'application sur le segment. On identifie vite une forme en $u'/(1+u^2)$. L'intégrale vaut $\left[\dfrac{Arctan(x^2)}{2}\right]_0^1$ et la valeur simplifiée est $\boxed{\dfrac{\pi}{8}}$




**IS12** • La somme $\sum_{0<i\leq j\leq n} \frac{i}{j}$. • MPSI 2/2013

Pour tout $n$ donné, cette somme existe, car aucun dénominateur ne réussit à être nul. Il y a une double variable de sommation : $i$ et $j$ avec la contrainte $i \leqslant j$ qui finalement nous fait décrire la moitié d'un tableau carré.
On transforme cette somme brute en somme de sommes *(ce qui revient à décrire cette "moitié de tableau" ligne par ligne)* : $\displaystyle\sum_{0<i\leq j\leq n} \frac{i}{j} = \sum_{1\leq j\leq n}\Big(\sum_{1\leq i\leq j}\frac{i}{j}\Big)$.
Chaque somme $\left(\sum_{1\leq i\leq j}\frac{i}{j}\right)$ se ramène à la "somme des $j$ premiers entiers" : $\dfrac{1}{j}.\dfrac{j.(j+1)}{2}$. On simplifie avec soulagement et on obtient comme grande somme dépendant de $n$ : $\displaystyle\sum_{0<i\leq j\leq n}\frac{i}{j} = \sum_{1\leq j\leq n}\frac{j+1}{2}$. On a encore une somme des premiers entiers, ou presque. C'est de fait la somme arithmétique de 2 à $n+1$ *(de valeur* $\dfrac{(n+1).(n+2)}{2} - 1$*)* à diviser encore par 2.

La valeur finale trouvée est $\boxed{\displaystyle\sum_{0<i\leq j\leq n}\frac{i}{j} = \frac{n^2+3.n}{4}}$ *(c'est bien un entier, au facteur 2 près).*

**IS12** • Les sommes comme $\sum_{0\leq p\leq k\leq n}(-1)^p.\binom{n}{k}$. • MPSI 2/2013

La somme $\displaystyle\sum_{0\leq k\leq n}(-1)^k.\binom{n}{k}$ est connue, c'est $(1-1)^n$ par la formule du binome. Elle est nulle *(un demi point)* sauf pour $n$ égal à 0 *(un autre demi point si vous y pensez).*

La somme $\displaystyle\sum_{0\leq p\leq k\leq n}(-1)^p.\binom{n}{k}$ est une somme à deux indices liés. On la fibre par la valeur de $k$ : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\Big).\binom{n}{k}$. La somme $\Big(\displaystyle\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\Big)$ est une série géométrique de valeur $\dfrac{1-(-1)^{k+1}}{2}$. On sépare alors deux sommes sur $k$ par linéarité : $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\binom{n}{k}$. La première vaut $(1+1)^n/2$ et la deuxième est nulle : $\boxed{\displaystyle\sum_{0\leq p\leq k\leq n}(-1)^p.\binom{n}{k}=2^{n-1}}$

*Pour $n$ égal à 0 (à traiter à part), on trouve 1 et non pas 1/2 comme l'induirait à tort cette formule.*

---

On fibre de même la troisième somme $\displaystyle\sum_{0\leq p<k\leq n}(-1)^k.\binom{n}{k}$ : c'est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{p=0}^{k-1}\Big)(-1)^k.\binom{n}{k}$.

Dans cette somme, $p$ est un compteur qui va de 0 à $k-1$ ($k$ termes). La somme vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k.(-1)^k.\binom{n}{k}$.

Elle nous fait penser à $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k.\binom{n}{k}$ qu'on trouve en dérivant l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.x^k=(1+x)^n$ et en estimant cette dérivée en 1.

Ici, on dérive aussi : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.k.x^{k-1}=n.(1+x)^{n-1}$ et en $-1$ on trouve $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.k.(-1)^{k-1}=0}$

*(sauf pour $n$ nul ou égal à 1).*

Pour $n$ nul, on trouve 0 et pour $n$ égal à 1 on trouve $-1$.

**IS12** • Termes dans un déterminant. • MPSI 2/2013

On rappelle la formule $\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n}Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}\dots a_{10}^{\sigma(10)}$. Les termes proposés vont donc être pondérés du coefficient signature, égal à 1 ou $-1$.

On traite quand même à part $a_1^2.a_2^3.a_3^1.a_4^8.a_5^9.a_6^{10}.a_7^7.a_8^2.a_9^5.a_{10}^4$ pour lequel on a deux fois le 2 dans la liste des colonnes. Il ne correspond pas à une permutation. Son coefficient est donc nul.

On exprime la permutation de $a_1^6.a_2^3.a_3^1.a_4^9.a_5^8.a_6^{10}.a_7^7.a_8^2.a_9^5.a_{10}^4$.

C'est $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 6&3&1&9&8&10&7&2&5&4\end{pmatrix}$. On décompose en produit ( ?) de cycle(s) de support(s) disjoint(s) : $\overrightarrow{(1,\ 6,\ 10,\ 4,\ 9,\ 5,\ 8,\ 2,\ 3)}$. La signature vaut $(-1)^{9-1}$ c'est à dire 1.

Pour $a_1^2.a_2^3.a_3^1.a_5^9.a_7^8.a_4^{10}.a_6^7.a_8^6.a_9^5.a_{10}^4$, la permutation est $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&3&1&10&9&7&8&6&5&4\end{pmatrix}$,que l'on peut aussi écrire $\begin{pmatrix}1&2&3&5&7&4&6&8&9&10\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&3&1&9&8&10&7&6&5&4\end{pmatrix}$. On décompose : $\overrightarrow{(1,\ 2,\ 3)}\circ\overrightarrow{(4,\ 10)}\circ\overrightarrow{(5,\ 9)}\circ\overrightarrow{(6,\ 7,\ 8)}$. La signature vaut 1.

**IS12** • Deux contrats de travail à durée déterminée. • MPSI 2/2013

On note $S$ le salaire annuel d'embauche *(c'est* $12\times 2500$ *sauf erreur).*

Première formule : les salaires successifs sont :

| année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| salaire | $S$ | $r.S$ | $r^2.S$ | $r^3.S$ | $r^4.S$ | $r^5.S$ |

*(avec r égal à* $1,1$*)* et le salaire total sur la durée du contrat est $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} r^k.S = S.\frac{r^6-1}{r-1}$.

Deuxième formule :

| année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| salaire | $S$ | $S$ | $S$ | $S$ | $\rho.S$ | $\rho.S$ |

(avec $\rho = 1,7$) et le salaire total vaut alors $S.(4+2.\rho)$.

On compare donc $\dfrac{(1,1)^6-1}{0,1}$ et $4+2.(1,7)$ *(le montant du salaire initial n'a aucun rôle dans le choix de contrat).*

On développe $(1+10^{-1})^6$ par la formule du binôme : $1+0,6+0,15+0,020+0,0015+0,00006+0,000001$.

On soustrait 1 et on multiplie par 10 : $7,71561$.

En face : $7,4$. $\boxed{\text{C'est le premier contrat, progressif qui l'emporte.}}$

**IS12** • Quatre points, un plan. • MPSI 2/2013

On peut déterminer l'équation du plan $(A\ B\ C)$ *(en fonction de* $*$*)* et demander que $D$ la vérifie : $\det(\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) = 0$.

On calcule ces vecteurs : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ +2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. On calcule le déterminant : $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 5 & *+2 & 4 \end{vmatrix} = 7-a$. La condition est donc $\boxed{* = 7}$

**IS12** • Une équation avec un produit vectoriel. • MPSI 2/2013

L'équation est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $a$, $b$ et $c$ réels. On la transforme en système : $\left\{\begin{array}{rrcl} -2.b & -a & = & 1 \\ -b & +0 & = & c \\ a & +0 & = & 1 \end{array}\right.$. On trouve $a = 1$ par la dernière, puis $b = -1$ par la première et enfin $c = 1$ par la deuxième. $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

**IS12** • Un script Python. • MPSI 2/2013

On rappelle que `[a]*p` crée une liste en collant `p` fois côte à côte la petite liste `[a]`. On a donc `[a, a,...a]`. Ici, comme on a pris `n` égal à `5`, on crée des listes `[k, k, k, k, k]`.

On crée ces listes pour `k` de `0` à `4` (`range(n)` va de `0` à `n-1`). On a donc la liste de listes

`[[0,0,0,0,0], [1,1,1,1,1], [2,2,2,2,2], [3,3,3,3,3], [4,4,4,4,4]]`

Ensuite, on effectue une somme de produits : les `L[2][k]*L[k][3]`, pour `k` de `0` à `4`. On a donc `L[2][0]*L[0][3]+L[2][1]*L[1][3]+L[2][2]*L[2][3]+...+L[2][4]*L[4][3]`

Il faut ensuite prendre garde aux indices. Par exemple, pour `L[2][0]` : `L[2]` est la liste d'indice `2` de `L` : c'est `[2,2,2,2,2]` et on en prend l'élément d'indice `0`. C'est un 2. On le multiplie par `L[0][3]` qui est nul (la liste `L[0]` c'est `[0,0,0,0,0]`).

La somme vaut donc `2*0+2*1+2*2+2*3+2*4`. On simplifie en $\boxed{20}$

**IS12** • Un système à trois inconnues. • MPSI 2/2013

Déjà, le triplet $(1,\ 1,\ 1)$ est bien solution du système $\left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +z & = & 3 \\ x & +2.y & -z & = & 2 \\ 2.x & -5.y & +3.z & = & 0 \end{array}\right.$. On sait alors que sa résolution par formules de Cramer donne $1 = x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}}$. On peut vérifier si on y tient.

Si on remplace le système par $\left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +z & = & 3 \\ x & +2.y & -z & = & 2 \\ 2.x & -5.y & +3.z & = & 3 \end{array}\right.$, alors la solution est $x' = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}}$.

$1 = \dfrac{3.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}}$ et $x' = \dfrac{3.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}}$.

De combien a été l'augmentation ? De $x'-1 = \dfrac{3.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}}$. On effectue le calcul : $\boxed{x' - 1 = \dfrac{-9}{-13}}$

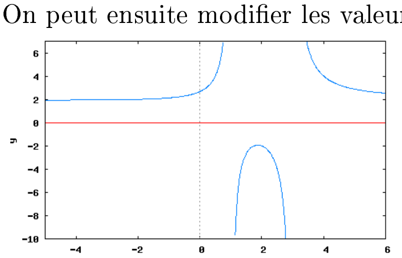
Si vous faites partie des élèves un peu gentillets qui auront résolu le système sans chercher à voir ce qu'il suffisait vraiment de faire, je vous donne la solution : $\left(\dfrac{22}{13},\ \dfrac{7}{13},\ \dfrac{10}{13}\right)$.

**IS12** • Un graphe. • MPSI 2/2013

On peut proposer une fraction rationnelle, pour avoir des asymptotes verticales. Comme elles sont en 1 et en 3, on va proposer $\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-3}$. Cette application va bien partir vers $+\infty$ et $-\infty$ en 1 par valeur inférieure et par valeur supérieure. Pour que les signes soient les bons, on va prendre $a$ négatif. Le comportement en 3 donne $b$ positif.

Mais il faut ensuite une asymptote horizontale $y = 2$. Or, notre fraction rationnelle tend vers 0 à l'infini. On va donc lui ajouter 2. On peut donc proposer $2 - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-3}$.

On peut ensuite modifier les valeurs $-1$ et 1 pour que les valeurs en 2 et en 0 soient cohérentes.



♡56 On définit : $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\\1&3&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&1&2&1\\1&2&2&1\end{pmatrix}$. Calculez $A.B$ et $B.A$. •2 pt.• Calculez la trace de chacune d'elles. •1 pt.• Calculez le déterminant de $B.A$. •1 pt.• Retrouvez la nullité de $\det(A.B)$ en utilisant $A'=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&3&1&0\\3&1&2&0\\1&3&2&0\end{pmatrix}$ et $B'=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&1&2&1\\1&2&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. •2 pt.•

---

♣20 Un ivrogne se promène dans Manhattan, que l'on assimile à un quadrillage à coefficients entiers $(x,\ y)$. Il part de l'origine $(0,\ 0)$. A chaque unité de temps, il choisit au hasard (uniforme) une des quatre directions et avance d'une unité dans cette direction. Quelle est la probabilité qu'il revienne au point de départ après quatre étapes. Quelle est la probabilité qu'il y revienne après 2013 étapes ? •5 pt.•

---

♢51 La loi $*$ définie par $a*b=Max(a+b,\ a.b)$ est interne sur $\mathbb{R}^+$. Est elle associative ? •1 pt.• Dispose-t-elle d'un neutre ? •1 pt.• Si oui, quels éléments ont un symétrique, si non, donnez le nombre de cycles de $S_5$ de signature $-1$ dont le cube soit l'identité. •1 pt.•

---

♢52 Calculez $\displaystyle\int_0^\pi \cos(4.t).\sin(t).dt$. •3 pt.•

---

♣21 L'exercice sur l'ivrogne est trop compliqué pour vous ? Allez, quelle est la probabilité qu'il revienne au point de départ en deux étapes ? •1 pt.•

---

♢53 On se donne deux vecteurs de l'espace : $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ *(composantes* $A=\begin{pmatrix}a\\a'\\a"\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}b\\b'\\b"\end{pmatrix}$*).*
Donnez la matrice $M_A$ de taille 3 sur 3 vérifiant $M_A.X=\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{x}$ pour tout vecteur $\overrightarrow{x}$ *(de la forme* $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$*).* •1 pt.• Donnez la matrice $M_B$ vérifiant $M_B.X=\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{x}$ pour tout $\overrightarrow{x}$. •1 pt.• Calculez le produit $M_A.M_B$. •1 pt.•
Donnez la matrice $L_A$ à une seule ligne vérifiant $L_A.X=\overrightarrow{a}.\overrightarrow{x}$. •1 pt.• Calculez $B.L_A-L_A.B.I_3$. •1 pt.•
Retrouvez alors la formule du double produit vectoriel : $\overrightarrow{a}\wedge(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c})=(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c})\times\overrightarrow{b}-(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{c}$. •1 pt.•

---

♢54 On donne : $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=160$. Calculez $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&0\end{vmatrix}$. •2 pt.•

---

♢55 Le prix d'un téléphone (insup)-portable a été divisé par 2 il y a trois ans. Mais il a augmenté de trente pour cent il y a deux ans, puis de vingt cinq pour cent l'an dernier, et vingt pour cent très récemment. Vous regrettez de ne pas l'avoir acheté quand il a chuté brutalement. Mais regrettez vous de l'acheter maintenant plutôt que de l'avoir acheté il y a plus de trois ans. •1 pt.•

---

♡57 On donne $A(1,0,1)$, $B(2,0,1)$, $C(1,1,0)$ et $D(2,2,3)$. Donnez l'équation du plan $(A,\ B,\ C)$, la distance de $D$ à ce plan et le volume du tétraèdre $(A,\ B,\ C,\ D)$. •3 pt.•

| Charlemagne<br>MPSI-2 / 2013 | Correction | $IS13$ |
|---|---|---|

**IS13** • Deux matrices $A$ et $B$. • MPSI 2/2013

On effectue les deux produits :

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 11 & 7 \\ 9 & 9 & 10 & 8 \\ 7 & 11 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 11 & 7 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 11 \\ 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 11 \end{pmatrix}$$

Les deux matrices ont la même trace : $\boxed{33}$

La matrice $B.A$ de taille 3 sur 3 a pour déterminant $\boxed{144}$

On a vu en cours par “coplanarité” que $\det(A.B)$ est nul.

Mais on constate aussi : $A'.B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 11 & 7 \\ 9 & 9 & 10 & 8 \\ 7 & 11 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 11 & 7 \end{pmatrix} = A.B.$

On a alors : $\det(A.B) = \det(A'.B') = \det(A').\det(B')$ car cette fois on a des matrices carrées.
Or, $\det(A')$ est nul *(en développant par rapport à la dernière colonne)*.

**IS13** • La marche aléatoire de l'ivrogne. • MPSI 2/2013

Trois exemples de trajets en quatre étapes :
- $(0,0)$, $(1,0)$, $,(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$ qui ne revient pas au départ
- $(0,0)$, $(-1,0)$, $,(-1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$ qui revient au départ
- $(0,0)$, $(0,-1)$, $(1,-1)$, $,(1,0)$, $(2,0)$ qui revient au départ

Combien y a-t-il de trajets de quatre étapes : $4^4$ *(quatre choix indépendants à chaque étape)*.
Si on les modélise par quatre lettres prises dans la liste $[N,\ S,\ E,\ O]$ (ou $[N,\ S,\ E,\ W]$ en v.o.), chaque trajet est un mot de quatre lettres *(notre troisième trajet est* $(S,\ E,\ N,\ S)$*)*. Il y a $4^4$ mots de quatre lettres.

Combien reviennent au point de départ ?
Ceux qui ont dans chaque direction avancé autant que reculé.
Regardons en fonction des deux premiers pas. On a des mots $(d_1, d_2, ., .)$, avec seize possibilités pour le couple $(d_1, d_2)$.

• Parmi ces seize possibilités, il y a celles en $(N,S)$, $(S,N)$, $(E,O)$ et $(O,E)$ qui nous ramènent au point de départ. Si elles sont suivies du même type de motif “aller-retour”, on revient au point de départ.
En termes de probabilités : $\dfrac{4}{16}.\dfrac{4}{16}$.

• Pour les autres couples des deux premiers pas, on a des schémas comme $(N,N)$, $(E,E)$, $(S,S)$ et $(O,O)$ *(quatre possibilités)*. Pour ceux ci, on n'a pas le choix, pour revenir au point de départ, il faut faire le trajet inverse. ce trajet inverse *(deux lettres)* n'a que probabilité $1/16$ de survenir.

En termes de probabilités : $\frac{4}{16}.\frac{1}{16}$.

• Pour les autres couples tels que $(N, E)$ (il y en a huit, par simple soustraction), on revient au point de départ si et seulement si on tire le motif inverse, dans n'importe que ordre *(sur notre exemple : $(N, E, S, O)$ ou $(N, E, O, S)$ qui décrit finalement un carré).*
Pour avoir le motif inverse : $\frac{1}{4}.\frac{1}{4}$, mais comme les deux ordres sont possibles : $\frac{8}{16}\Big(2.\frac{1}{4}.\frac{1}{4}\Big)$.

On somme les sous-cas favorables qui forment une partition de l'ensemble des cas favorables et on trouve au final $\boxed{\frac{1}{4.4}+\frac{1}{4.16}+\frac{2}{2.4.4}=\frac{9}{64}}$ soit quatorze pour cent environ.

---

Question *(à la maison)* pour les pythonistes :
créer la liste des $4^4$ mots possibles, et la liste des mots favorables.
Mon programme me le confirme. De plus, pour six étapes : $400/4^6$ soit $9,7$ pour cent ; pour huit étapes : $4900/4^8$ soit $7,5$ pour cent ; et pour 10 : $63504/4^{10}$.

---

*Pour* 2013 *étapes, on ne va pas se lancer dans un arbre comme précédemment. Ce serait folie. Il doit y avoir un argument rapide.*
Et en réléchissant un peu, on se rend compte qu'il est impossible de revenir au point de départ en 2013 étapes, comme en une, trois, cinq, sept ou neuf étapes.
Mais il faut trouver un argument irréfutable, plus compact et plus probant que des affirmations “avec de grands mouvements de mains”.
L'argument est l'existence d'un **invariant** : la partité de la somme $x_n + y_n$ où $x_n$ et $y_n$ sont les coordonnées de la position de l'ivrogne à l'étape $n$ *($x_0 + y_0 = 0$ par exemple).* A chaque étape, l'une *(et une seule)* des deux coordonnées augmente ou diminue de 1 *(et change donc de parité).* La somme change donc de parité à chaque étape. Comme elle était paire au départ, elle sera impaire après 2013 étapes, et ne pourra donc pas être nulle.
**La probabilité cherchée est bien nulle.**

---

Il traine ailleurs dans l'énoncé une question pour gagner facilement des points : la probabilité de revenir au point de départ en deux étapes. On l'a déjà croisée plus haut : il s'agit des quatres trajets aller-retour du type $(N, S)$, $(S, N)$, $(E, O)$ et $(O, E)$ dans la liste des seize trajets. Probabilité :
$\boxed{\frac{4}{16}=\frac{1}{4}}$

**IS13** • La loi $a * b = Max(a + b,\ a.b)$. • MPSI 2/2013

La loi est bien interne, puisque pour deux réels donnés, on calcule aisément leur somme, leur produit et l'un des deux est leur maximum, et c'est un réel positif.
Pour l'associativité, on regarde déjà des exemples :
$1 * 2 = Max(1 + 2, 1.2) = 3$
$(1 * 2) * 3 = 3 * 3 = Max(3 + 3,\ 3.3) = 9$
$2 * 3 = Max(2 + 3,\ 2.3) = 6$
$1 * (2 * 3) = 1 * 6 = Max(1 + 6,\ 1.6) = 7$
Il n'y a pas égalité. Cet exemple est un contre-exemple.

On a quand même un neutre qu'on devine : $a*0 = Max(a+0,\ a.0) = Max(a,\ 0) = a$ car on travaille sur $\mathbb{R}^+$.

On cherche $a$ pour lequel il existerait $\alpha$ vérifiant $Max(a + \alpha,\ a.\alpha) = 0$ *(le neutre).*

**IS13** • Intégrale $\int_0^{\pi} \cos(4.t).\sin(t).dt$. • MPSI 2/2013

Cette intégrale existe par continuité de la fonction sous le signe intégrale. On linéarise avec la formule du cours :

$\cos(a).\sin(b)$ est dans $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$, et c'est par une différence qu'il ne reste que ce terme :

$\cos(a).\sin(b) = \dfrac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}$ (on vérifie : cette différence est nulle pour $b$ nul)

On sépare par linéarité en $\dfrac{1}{2}.\Big[-\dfrac{\cos(5.t)}{5}+\dfrac{\cos(3.t)}{3}\Big]_{t=0}^{t=\pi}$.

On résume : $\boxed{\int_0^{\pi} \cos(4.t).\sin(t).dt = -\dfrac{2}{15}}$

**IS13** • Le double produit vectoriel. • MPSI 2/2013

On pose : $A = \begin{pmatrix} a \\ a' \\ a" \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On calcule puis propose :

$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} a'.z - a".y \\ a".x - a.z \\ a.y - a'.x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a" & a' \\ a" & 0 & -a \\ -a' & a & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{x} = a.x + a'.y + a".z = \begin{pmatrix} a & a' & a" \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

On identifie donc : $\boxed{M_A = \begin{pmatrix} 0 & -a" & a' \\ a" & 0 & -a \\ -a' & a & 0 \end{pmatrix} \text{ et } L_A = \begin{pmatrix} a & a' & a" \end{pmatrix}}$

Cette matrice a un déterminant nul *(de même que la trace).*

On trouve l'autre matrice de la même façon : $M_B = \begin{pmatrix} 0 & -b" & b' \\ b" & 0 & -b \\ -b' & b & 0 \end{pmatrix}$.

On calcule alors $M_A.M_B = \begin{pmatrix} -a'.b' - a".b" & a'.b & a".b \\ a.b' & -a.b - a".b" & a".b' \\ a.b" & a'.b" & -a.b - a'.b' \end{pmatrix}$.

On calcule aussi $B.L_A - L_A.B.I_3 = \begin{pmatrix} b \\ b' \\ b" \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & a' & a" \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & a' & a" \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b \\ b' \\ b" \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ces produits matriciels s'effectuent sans effort mais en s'interrogeant sur ces colonnes à un terme qui tombent sur des lignes à un seul terme :

$B.L_A - L_A.B.I_3 = \begin{pmatrix} b.a & b.a' & b.a" \\ b'.a & b'.a' & b'.a" \\ b".a & b".a' & b".a" \end{pmatrix} - (a.b + a'.b' + a".b").\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On effectue

$\begin{pmatrix} b.a & b.a' & b.a" \\ b'.a & b'.a' & b'.a" \\ b".a & b".a' & b".a" \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a.b + a'.b' + a".b" & 0 & 0 \\ 0 & a.b + a'.b' + a".b" & 0 \\ 0 & 0 & a.b + a'.b' + a".b" \end{pmatrix}$

On retrouve, "comme par hasard" la matrice $M_A.M_B$.

A quoi sert alors cette matrice $M_A.M_B$ ? On a pour tout $X$ : $M_A.M_B.X = M_A.(M_B.X) = \overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{x})$.

Si la formule du double produit vectoriel est correcte, on doit trouver $\underline{(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{x})} \times \overrightarrow{b} - \underline{(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})} \times \overrightarrow{x}$.

Et que fait justement $B.L_A - L_A.B.I_3$ ?

On effectue matriciellement : $(B.L_A - L_A.B.I_3).X = B.L_A.X - \underline{(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})}.I_3.X$.
On simplifie vectoriellement en $\overrightarrow{b} \times \underline{(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{x})} - \underline{(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})} \times \overrightarrow{x}$.
Par égalité des matrices, on a égalité des applications, donc égalité des formules vectorielles.
*Pour la lisibilité, j'ai souligné les nombres réels.*

**IS13** • Deux déterminants. • MPSI 2/2013

On nous a offert $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 160$. A quoi cela peut il servir ?

On développe : $-4.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 160$.

On cherche le nouveau déterminant :
$-4.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

La différence se borne au seul terme $3.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$. On le calcule : 3.4.

Le nouveau déterminant vaut donc $\boxed{148}$

**IS13** • La tablette dont le prix bouge beaucoup. • MPSI 2/2013

On note $P$ son prix il y a un peu plus de trois ans. Son prix est alors devenu $P/2$.
Il a augmenté de trente pour cent : nouveau prix $\dfrac{P}{2} \times 1,3$.
Il a augmenté encore de vingt-cinq pour cent : $\dfrac{P}{2} \times 1,3 \times 1,25$
Il a pris encore vingt pour cent : $\dfrac{P}{2} \times 1,3 \times 1,25 \times 1,2$.
Sa nouvelle valeur est alors $\boxed{\dfrac{P \times 1,95}{2}}$ C'est encore rentable par rapport au prix de départ.
*Rappelons en effet qu'il ne faut pas additionner les pourcentages, mais multiplier les rapports.*

**IS13** • De la géométrie dans l'espace. • MPSI 2/2013

On donne les points $A(1,0,1)$, $B(2,0,1)$, $C(1,1,0)$ et $D(2,2,3)$. On extrait les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ puis l'équation du plan : $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z-1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$. On trouve $\boxed{y+z=1}$ *(confirmé par nos trois points).*

La distance d'un point à ce plan se mesure par $\dfrac{|y+z-1|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}$. Pour $D$ on trouve $\boxed{4/\sqrt{2}}$

On mesure le volume du parallélépipède construit à partir de $A$, $B$, $C$ et $D$ : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4$.

On divise par 6 comme confirmé par l'Iphone de Yacine et Mélanie×Mélanie×Mélanie (le cube de Mélanie) : $\boxed{2/3}$

| MPSI 2/2013 | 415 points | $IS13$ |
|---|---|---|

♡58 Rappelez la définition de "$(\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ldots\ \overrightarrow{v_n})$ est une famille liée de l'espace vectoriel $(E,\ +,\ .)$" *(avec des ∀ et des ∃)*. •2 pt.•
Montrez qu'alors la famille $(\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ldots\ \overrightarrow{v_n},\ \overrightarrow{u})$ est aussi liée. •1 pt.•

---

♡59 Choisissez $a$ pour que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-5\\a\end{pmatrix}\right)$ soit liée dans $\mathbb{R}^4$. •2 pt.•

---

♢56 Montrez que $\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),\ +,\ .)$ des matrices carrées de taille 2), et décomposez les quatre matrices de la base canonique $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ sur cette base. •5 pt.•

---

♣22 Que va afficher un ordinateur avec le petit programme suivant *(en pseudo-langage)* •2 pt.•

```
a :=1/2 ; b :=1 ;
while a<11 do (a :=3-2*a puis b :=b*a) ;
affiche(b)
```

---

♡60 $A$ est une variable aléatoire qui tire une note, uniforme sur l'ensemble des entiers de 1 à 20 *(inclus)* et $B$ est une variable aléatoire uniforme sur l'ensemble des entiers de 1 à 10 *(indépendante de $A$)*. Quelle est la probabilité que $A+B$ vaille 13 ? •1 pt.•

---

♢57 Représentez graphiquement $\theta\longmapsto\cos(\theta)+\cos(\theta+2.\pi/3)+\cos(\theta+4.\pi/3)$. •2 pt.•

---

♢58 Combien des racines sixièmes de $1+i$ ont une partie réelle positive ? •3 pt.•

---

♢59 $(A,B,C)$ est un triangle non rectangle. On note $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ ses trois angles. Le professeur demande de calculer $\tan(\alpha)*\tan(\beta)*\tan(\gamma)$. Un élève interprèete les $*$ comme des multiplications, tandis que son voisin les interprète comme des additions. Et ils trouvent la même valeur. Est-ce un coup de chance parce que le triangle a été bien choisi ? Non ! Prouvez que c'est vrai pour tout triangle. •3 pt.•

---

♢60 Quelle est la deuxième solution positive $a$ de l'équation $\displaystyle\int_{\pi^2}^{a}\frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}.dt=0$ *(les solutions sont triées par ordre croissant)*. •2 pt.•

---

♢61 On rappelle : $\overrightarrow{a}\wedge(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c})=(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c})\times\overrightarrow{b}-(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{c}$.
Exprimez alors $\det(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b})$ à l'aide de $\det(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$. •2 pt.•

---

♢62 On définit la matrice $A$ de taille 6 de terme général $a_i^k=(i+k)^2$ *(indexation pythonienne)*. Ecivez $A$ et calculez $A.U$ avec $U={}^t(1,\ -3,\ 3,\ -1,\ 0,\ 0)$. Déduisez enfin $\det(A)=0$. •2 pt.•

**IS14** • Familles liées. • MPSI 2/2013

Une famille est liée si et seulement si un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.
On traduit : $\exists\ i \in \{1, \dots n\},\ \exists\ (\lambda_1, \dots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n-1},\ \overrightarrow{v_i} = \sum_{\substack{k \leq n \\ k \neq i}} \lambda_k.\overrightarrow{v_k}$

Quitte à faire passer le terme $\overrightarrow{v_i}$ de l'autre côté avec coefficient $-1$ *(non nul)* :
$\exists\ (\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{0}\right)$ *et* $\left(\exists i \in \{1, \dots n\},\ \lambda_i \neq 0\right)$.
*(pour le sens réciproque, on isole un $\lambda_i.\overrightarrow{v_i}$ avec son coefficient non nul, et on divise pour qu'il ait pour coefficient $1$).*

---

Si la famille à $n$ éléments est liée par une relation du type $\overrightarrow{v_i} = \sum_{\substack{k \leq n \\ k \neq i}} \lambda_k.\overrightarrow{v_k}$, alors la famille à $n+1$ éléments l'est à son tour par $\overrightarrow{v_i} = \sum_{\substack{k \leq n \\ k \neq i}} \lambda_k.\overrightarrow{v_k} + 0.\overrightarrow{u}$.

**IS14** • Trois vecteurs dans $\mathbb{R}^4$. • MPSI 2/2013

Ces trois vecteurs forment une famille liée si et seulement si l'un d'entre eux est combinaison des autres.
Ceci revient à dire que ces trois vecteurs sont coplanaires *(même plan)*.
Les deux premiers ne sont pas colinéaires et ils définissent un plan. Il faut et il suffit que le dernier soit donc aussi dans ce plan, c'est à dire combinaison linéaire des autres :

$$\exists(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ a \end{pmatrix} = \alpha.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On aboutit à un système de quatre équations pour deux inconnues et un paramètre. Le petit système $\left\{\begin{array}{rrcr} \alpha & +2.\beta & = & 1 \\ 2.\alpha & +4.\beta & = & 2 \end{array}\right.$ n'apporte pas tout (équations proportionnelles). Le système avec une ligne de plus $\left\{\begin{array}{rrcr} \alpha & +2.\beta & = & 1 \\ -\alpha & +\beta & = & -5 \end{array}\right.$ donne une unique solution $(\alpha,\ \beta) = (3,\ -1)$.

On reporte dans la dernière condition $2.\alpha + 0.\beta = a$. On trouve $\boxed{a = 6}$

On peut évidemment aussi calculer des déterminants de taille 3 et les annuler tous : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = 0$.

**IS14** • Quatre matrices de $M_2(\mathbb{R})$. • MPSI 2/2013

Les quatre matrices sont dans bien dans $M_2(\mathbb{R})$, et en plus elles sont quatre. On est en bon chemin pour qu'elles forment une base, comme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que l'on va noter $E_1$ à $E_4$.
Les quatre matrices de l'énoncé $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$ sont alors $0.E_1+1.E_2-1.E_3+1.E_4$, $1.E_1+1.E_2+2.E_3-1.E_4$, $2.E_1+0.E_2+1.E_3-1.E_4$ et $1.E_1+0.E_2+1.E_3-1.E_4$.

On peut alors se contenter de calculer le déterminant suivant : $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$. On développe par rapport à la seconde ligne : $-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ et on trouve $-1$.
Une affirmation rapide mais sans grande preuve permet alors de conclure : la famille est une base de $(M_2(\mathbb{R}),\ +,\ .)$ (de dimension 4).

Sinon, pour une preuve sans faille. On envisage de décomposer une matrice quelconque $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sous la forme $a.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si on trouve une solution, et qu'elle est unique, alors on aura une base.
Or, ceci conduit au système dont on a précisément calculé le déterminant plus haut.

Sinon, on peut aussi décomposer une à une les quatre matrices de la base canonique :
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 3.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 5.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
Comme on sait décomposer les matrices de la base canonique, on sait décomposer leurs combinaisons linéaires, c'est à dire toutes les matrices.
L'unicité est garantie par le système ou par le fait que le cardinal de la famille est égal à la dimension.

**IS14** • Petit programme avec boucle while. • MPSI 2/2013

On initialise $A$ avec a valeur $1/2$. On effectue des remplacements par $3 - 2.A$ qui augmentent $|A|$ comme une boucle `for`, mais changent le signe. On a donc un signe qui clignotte. On va effectuer la boucle combien de fois ?
Voici la liste des valeurs de $A$ : $\left[\frac{1}{2}, 2, -1, 5, -7, 17\right]$ et on s'arrête.
Les valeurs de $b$ sont alors les suivantes : $2, -2, -10, 70$ et enfin 1190.
Comme on termine en affichant $b$, la valeur affichée sera $\boxed{1190}$

---

La question est quand même : quelles sont les valeurs de $a$ qui interviennent effectivement dans les produits $b := b * a$ ?
La valeur $a = 1/2$ permet d'effectuer une première boucle, mais elle n'intervient pas dans le produit. On entre dans la première boucle avec $a = 1/2$, mais on le remplace tout de suite par 2.
On entre dans la dernière boucle avec $a = -7$. Mais on le remplace par $a = 3 - 2.(-7) = 17$, donc on effectue bien le calcul $b := b * 17$ d'où la valeur finale.
Certains se seront peut être plantés en effectuant plutôt

```
a :=1/2 ; B :=1 ;
while a<11 do (b :=b*a et a :=3-2*a) ;
affiche(b)
```

qui conduit bien à 35.

**IS14** • Variable aléatoire somme de deux variables uniformes. • MPSI 2/2013

On veut que $A+B$ soit égal à 13. Il y a plusieurs façons d'y parvenir, et chacune a la même probabilité égale à $\frac{1}{20}.\frac{1}{10}$ : $(3,10)$,$(4,9)$,$(5,8)$,$(6,7)$,$(7,6)$,$(8,5)$,$(9,4)$,$(10,3)$,$(11,2)$,$(12,1)$
La probabilité cherchée vaut donc $\boxed{1/20}$

**IS14** • Un triangle et une somme/produit $\tan(\alpha)*\tan(\beta)*\tan(\gamma)$. • MPSI 2/2013

Comme le triangle n'est pas rectangle, toutes ces tangentes existent. Il reste à prouver : $\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma)=\tan(\alpha).\tan(\beta).\tan(\gamma)$ *(exemple : triangle équilatéral : $\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{3}.\sqrt{3}.\sqrt{3}$).*
On va poser : $\tan(\alpha)=t_a$, $\tan(\beta)=t_b$ et $\tan(\gamma)=t_c$ pour alléger.
On doit donc comparer $t_a+t_b+t_c$ et $t_a.t_b.t_c$.
Or, on sait : $\gamma=\pi-\alpha-\beta$ (somme des angles d'un triangle).
On a donc : $t_c=-\tan(\alpha+\beta)=\frac{t_a+t_b}{t_a.t_b-1}$.
On vérifie alors en effet : $t_a+t_b-\frac{t_a+t_b}{1-t_a.t_b}=t_a.t_b.\frac{t_a+t_b}{t_a.t_b-1}$ car $(t_a+t_b).(1-t_a.t_b)-t_a-t_b=-t_a.t_b.(t_a+t_b)$.

On résume bien : $\boxed{\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma)=\tan(\alpha).\tan(\beta).\tan(\gamma)}$

**IS14** • L'équation $\int_{\pi^2}^{a}\frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}.dt=0$ • MPSI 2/2013

Tant que $a$ reste strictement positif, l'intégrale existe. On reconnaît dans le $1/\sqrt{t}$ la dérivation du $\sqrt{t}$ dans le sinus. On a donc une primitive explicite : $t\longmapsto -2.\cos(\sqrt{t})$.
On résout donc l'équation $2.(\cos(\pi)-\cos(\sqrt{a}))=0$. Le réel $\pi^2$ est solution évidente, mais c'est la première solution réelle positive. La deuxième est $\boxed{9.\pi^2}$

**IS14** • L'application $\theta\longmapsto\cos(\theta)+\cos(\theta+2.\pi/3)+\cos(\theta+4.\pi/3)$. • MPSI 2/2013

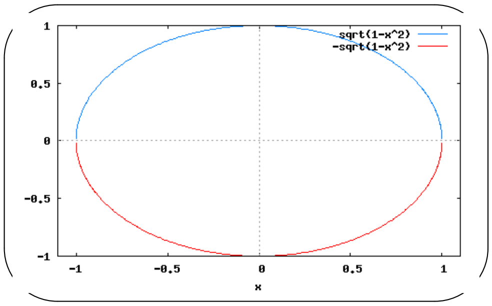
C'est très rapide. Si on développe par $\cos.\cos-\sin.\sin$ et qu'on remplace les valeurs de $\cos(2.\pi/3)$, $\sin(2.\pi/3)$ et autres, on trouve 0.
Cette application est constante, nulle. Son graphe est l'axe $Ox$.

Autre approche : c'est la partie réelle de $e^{i.\theta}+e^{i.\theta}.e^{2.i.\pi/3}+e^{i.\theta}.e^{4.i.\pi/3}$. On factorise et il reste $e^{i.\theta}.(1+j+j^2)$ avec $j$ racine de $X^3-1$ et aussi de $X^2+X+1$.

Autre approche : c'est le courant triphasé (dit "de forte puissance"), avec trois signaux sinusoïdaux en "tiers de phase". Ce type de courant est fait pour que les dispersions sur les trois fils se compensent.

**IS14** • Les racines sixièmes de $1+i$. • MPSI 2/2013

On cherche déjà la liste de ces racines : $z^6=(1+i)$ donne, sous forme polaire : $\rho^6.e^{i.6.\theta}=\sqrt{2}.e^{i.\pi/4}$.
Qu'importe la valeur du module, puisqu'elle n'intervient pas sur le signe de la partie réelle. On résout donc juste $6.\theta=\frac{\pi}{4}\quad mod\quad 2.\pi$ qui donne une infinité de solutions (les $\frac{\pi}{12}+k.\frac{\pi}{3}$ avec $k$ décrivant $\mathbb{Z}$) , mais seulement six solutions modulo $2.\pi$ : $\left[\frac{\pi}{12},\ \frac{5.\pi}{12},\ \frac{9.\pi}{12},\ \frac{13.\pi}{12},\ \frac{17.\pi}{12},\ \frac{21.\pi}{12}\right]$.
On les place sur le cercle trigonométrique, et on cherche lesquelles ont un cosinus positif (pour la partie réelle). Le basculement de signe se fait en $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3.\pi}{2}$ que je vais appeler $\frac{6.\pi}{12}$ et $\frac{18.\pi}{12}$ pour le lecteur attentif. Il ne me reste plus qu'à ne garder les solutions utiles : $\left[\frac{\pi}{12},\ \frac{5.\pi}{12},\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \frac{21.\pi}{12}\right]$. Trois solutions ont une partie réelle positive. C'est assez logique, cette répartition...




**IS14** • Double produit vectoriel. • MPSI 2/2013

On se donne trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On peut calculer des produits vectoriels et des déterminants. Pour alléger, je vais noter $a$, $b$ et $c$ les trois vecteurs, sans flèches.

- $D = \det(b \wedge c,\ c \wedge a,\ a \wedge b) = \Big((b \wedge c) \wedge\ (c \wedge a)\Big).(a \wedge b)$ *(définition* $\det(a, b, c) = (a \wedge b).c$*)*
- $D = \Big(\big((b \wedge c).a\big) \times c) - \big((b \wedge c).c\big) \times a)\Big).(a \wedge b)$ *(double produit vectoriel)*
- $D = \Big(\det(b, c, a) \times c - \overrightarrow{0}).(a \wedge b)$ *(orthogonalité et définition)*
- $D = \det(b, c, a) \times \big(c.(a \wedge b)\big) = \det(b, c, a).\det(c, a, b)$ *(linéarité et définition)*

Par permutation circulaire *(antisymétrie du déterminant mais signature* 1*)*, on a

$$\boxed{\det(b \wedge c,\ c \wedge a,\ a \wedge b) = (\det(a, b, c))^2}$$

**IS14** • Matrice $(i + k)^2$. • MPSI 2/2013

Les indices vont de 0 à 5 *(et les coefficients de* 0 *à* 100*)*. On écrit la matrice et le produit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 \\ 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 \\ 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 \\ 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & 100 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il n'y a pas de secret : $1.(d)^2 - 3.(d+1)^2 + 3.(d+2)^2 - (d+3)^2$ vaut 0.

On a donc $A.U = 0$ *(vecteur colonne nul)* pour au moins un vecteur $U$ non nul.

$\det(A)$ ne peut pas être non nul. Sinon, $A$ serait inversible, et par multiplication à gauche par $A^{-1}$ on aurait $A^{-1}.A.U = A^{-1}.0 = 0$ d'où $U = 0$. Ca c'est une preuve d'algébriste.

Mais sinon, il y a plus simple. On comprend qu'on a effectué une combinaison sur les colonnes : $C_0 - 3.C_1 + 3.C_2 - C_3 = 0$. Ceci prouve que les colonnes sont liées *(la quatrième est combinaison des trois précédentes)*. Le déterminant est nul.

MPSI 2/2013 | 442 points | $IS14$

♡61 Calculez $\int_1^2 (x-1).(x-2).(x+4).dx$, puis $\int_0^3 (x-1).(x-2).(x+4).dx$ et enfin $\int_0^3 |x^3+x^2-10.x+8|.dx$. •3 pt.•

---

♡62 Soient $A$, $B$ et $C$ trois matrices carrées de taille $n$, de termes généraux $a_i^k$, $b_i^k$ et $c_i^k$. Donnez le terme général de la matrice $A.B$. Donnez le terme général de la matrice $A.B.C$. •2 pt.•

---

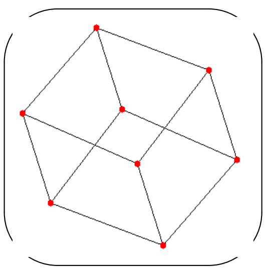
♡63 On note $A$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $p+i.q.\sqrt{2}$ avec $p$ et $q$ entiers relatifs. Montrez que le déterminant d'une matrice carrée à coefficients dans $A$ est aussi dans $A$. •2 pt.•

---

♡64 L'application $\cos^2 . \sin$ est elle dans l'espace vectoriel engendré par ($\theta \longmapsto \sin(\theta)$, $\theta \longmapsto \sin(2.\theta)$, $\theta \longmapsto \sin(3.\theta)$) ? Et l'application $\cos . \sin^2$ ? •3 pt.•

---

♣23 Benoît pensait dans le devoir 5 que l'angle au centre d'un cube était droit *(c'est à dire l'angle entre deux grandes diagonales)*. Retrouvez sa valeur *(celle de l'angle, pas de Benoît)*. •2 pt.•



---

♢63 Calculez $\det(A)$ et $Com(A)$ après avoir vérifié que les vecteurs colonne de $A$ sont tous dans le plan engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. •3 pt.•

---

♢64 On admet le résultat suivant pour tout triplet de réels $(a, b, c)$ : $(a < b < c) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ e^a & e^b & e^c \end{vmatrix} > 0$. Déduisez pour $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ de $(\mathbb{R}^{+*})^3$ : $(\alpha < \beta < \gamma) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \ln(\alpha) & \ln(\beta) & \ln(\gamma) \end{vmatrix} < 0$. •2 pt.•

---

♡65 Pour acheter un Sboug et un Gniaf, il vous en coûtait cent euros. En janvier, le prix du Sboug a augmenté de dix pour cent et celui du Gniaf a diminué de cinq pour cent. Il vous en coûte alors cinq euros quatre vingt de plus. Combien coûtent deux Sboug ? •2 pt.•

---

♢65 On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donnez une base de chacun des ensembles $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid Tr(A.B.M) = Tr(M.A.B)\}$ et $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid Tr(A.B.M) = Tr(M.B.A)\}$. •3 pt.•

---

♡66 Rappelez la définition de la somme de Riemann gauche pour une application $a$ sur un intervalle $[f,\ g]$ de $\mathbb{R}$. •1 pt.•

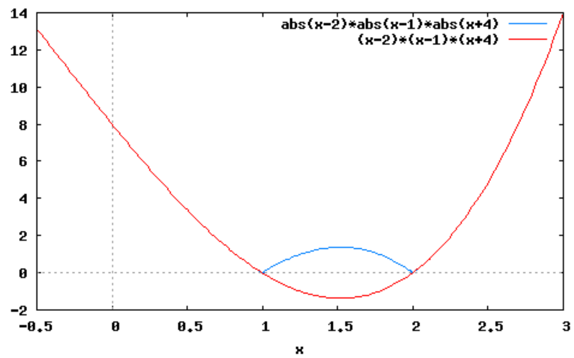
**IS15** • Calcul de $\int_0^3 |x^3+x^2-10.x+8|.dx$ • MPSI 2/2013

Les intégrales de polynômes et même de valeurs absolues de polynômes existent par continuité. Ensuite, une remarque rapide : $(x-1).(x-2).(x+4) = x^3+x^2-10.x+8$, preuve que l'exercice est bien fait...
On intègre donc par linéarité :

$$\boxed{\int_1^2 (x-1).(x-2).(x+4).dx = \int_1^2 (x^3+x^2-10.x+8).dx = \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-5.x^2+8.x\right]_1^2 = -\frac{11}{12}}$$

On étend aussi : $\displaystyle\int_0^3 (x-1).(x-2).(x+4).dx = \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-5.x^2+8.x\right]_0^3 = \frac{33}{4}$.

*Les signes sont cohérents, puisque $(x-1).(x-2).(x+4)$ est négatif entre les racines 1 et 2.*




Pour l'intégrale de la valeur absolue, il faut voir géométriquement.
On découpe par relation de Chasles :

$$\int_0^3 |x^3+x^2-10.x+8|.dx = \int_0^1 |x^3+x^2-10.x+8|.dx + \int_1^2 |x^3+x^2-10.x+8|.dx + \int_2^3 |x^3+x^2-10.x+8|.dx$$

en tenant compte des signes :

$$\int_0^3 |x^3+x^2-10.x+8|.dx = \int_0^1 (x^3+x^2-10.x+8).dx - \int_1^2 (x^3+x^2-10.x+8).dx + \int_2^3 (x^3+x^2-10.x+8).dx = \int_0^3 (x^3+x^2-10.x+8).dx - 2.\int_1^2 (x^3+x^2-10.x+8).dx.$$

On trouve alors $\boxed{\dfrac{121}{12}}$

**IS15** • Terme général du produit $A.B.C.$ • MPSI 2/2013

On applique directement les formules du cours :

matrice $A.B$ : $\displaystyle\alpha_i^k = \sum_{j=1}^n a_i^j.b_j^k$

matrice $A.B.C$ : $\displaystyle\beta_i^k = \sum_{p=1}^n \alpha_i^p.c_p^k = \sum_{\substack{j\le n\\ p\le n}} a_i^j.b_j^p.c_p^k$

**IS15** • Déterminant d'une matrice à coefficients de la forme $p+q.i.\sqrt{2}$. • MPSI 2/2013

On note $a_j^k$ le terme général d'une matrice à coefficients dans $A$. Chaque $a_j^k$ s'écrit $p_j^k + i.\sqrt{2}.q_j^k$ avec des $p_j^k$ et des $q_j^k$ entiers. Le déterminant de cette matrice est $\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{k\le n} a^k_{\sigma(k)}$.

Plutôt que de se lancer dans une grande récurrence assez lourde, on montre que $(A,\ +,\ .)$ est un anneau.

Si ce résultat est établi, alors chaque produit $\prod_{k\leq n} a^k_{\sigma(k)}$ sera dans $A$ de même que $Sgn(\sigma).\prod_{k\leq n} a^k_{\sigma(k)}$ par simple changement de signe. Enfin, la somme de $n!$ éléments de $A$ sera encore dans $A$.
Pour montrer que $(A,\ +,\ .)$ est un anneau, on a juste à établir les stabilités (sous-anneau de $(\mathbb{C},\ +,\ .)$, d'autant que seules les stabilités nous servent ici). On prend donc deux éléments $a$ et $b$ s'écrivant $p+i.\sqrt{2}.q$ et $p'+i.\sqrt{2}.q'$.
Leur somme s'écrit $P+i.\sqrt{2}.Q$ avec $P=p+p'$ et $Q=q+q'$ tous deux dans $Z$.
Leur produit s'écrit $P'+i.\sqrt{2}.Q'$ avec $P'$ et $Q'$ entiers : $P'=p.p'-2.q.q'$ et $Q'=p.q'+p'.q$.

**IS15** • L'application $s.c^2$ et l'espace engendré par $\theta \longmapsto \sin(k.\theta)$ pour $k$ de 1 à 3. • MPSI 2/2013

L'espace est celui des applications de la forme $\theta \longmapsto a.\sin(\theta)+b.\sin(2.\theta)+c.\sin(3.\theta)$ avec $a$, $b$, $c$ et $d$ réels. On les écrit même $\theta \longmapsto \sin(\theta).\big(a+2.b.\cos(\theta)+c.(4.\cos^2(\theta)-\cos(\theta))\big)$ par les formules de Tchebitchev.
On est donc amené à chercher à écrire $\cos^2$ sous la forme $a+2.b.\cos+c.(4.\cos^2-1)$. C'est chose faite en prenant $c=1/4$, $b=0$ et $a=1/4$.

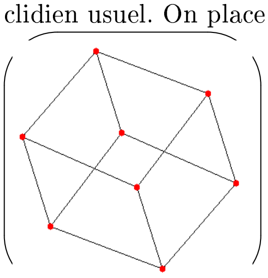
On résume : $\boxed{\big(\theta \longmapsto \cos^2(\theta).\sin(\theta)\big) = \Big(\theta \longmapsto \dfrac{\sin(\theta)+\sin(3.\theta)}{4}\Big)}$

---

L'application $\theta \longmapsto \cos(\theta).\sin^2(\theta)$ est paire. Or, les trois applications $\theta \longmapsto \sin(k.\theta)$ sont impaires, de même que leurs combinaisons linéaires. Pour que $\cos.\sin^2$ soit dans l'espace vectoriel, elle devrait être à la fois paire et impaire. Or, la seule application à la fois paire et impaire est nulle. Et ce n'est pas le cas de la notre. La réponse est donc négative.

**IS15** • L'angle au centre d'un cube. • MPSI 2/2013

On passe par les coordonnées cartésiennes des sommets et du centre du cube dans l'espace affine euclidien usuel. On place le centre en $(0,0,0)$.



On prend ensuite deux sommets : $A(1,1,1)$ et $B(1,1,-1)$ séparés par une unique arête (ici parallèle à $Oz$). On mesure les longueurs des deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ : $\sqrt{3}$ et leur produit scalaire : $1.1+1.1+1.(-1)=1$. On applique alors la formule "produit scalaire = produit des normes fois cosinus" et on extrait donc : $\cos(\theta)=1/3$. L'angle cherché à pour mesure $\boxed{Arccos(1/3)}$

**IS15** • Une matrice de quatre vecteurs coplanaires. • MPSI 2/2013

On constate : $\begin{pmatrix}2\\5\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\4\\-3\\-1\end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\5\\3\end{pmatrix} = -2.\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\0\end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-1\\7\\4\end{pmatrix} = -3.\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\0\end{pmatrix} + 4.\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$ en calculant le coefficients du secnd vecteur par la

dernière coordonnée et en ajustant la première par une autre composante et en vérifiant les deux dernières.
Le déterminant de la matrice $A$ est nul, car les vecteurs sont coplanaires *(hyper-volume nul)*.
La comatrice de $A$ est nulle. Ses seize coefficients le sont. En effet, quel que soit le cofacteur que l'on calcule, il est comme $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix}$, formé de trois vecteurs complanaires (projection dans $\mathbb{R}^3$ de vecteurs déjà coplanaires, combinaisons ici de $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Encore une fois, en algèbre linéaire, on réfléchit avant de calculer.

**IS15** • Déterminants en $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ e^a & e^b & e^c \end{vmatrix}$. • MPSI 2/2013

On se donne $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ strictement positifs. On suppose $\alpha < \beta < \gamma$. On veut étudier le signe de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \ln(\alpha) & \ln(\beta) & \ln(\gamma) \end{vmatrix}$. On veut le lier à un certain $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ e^a & e^b & e^c \end{vmatrix}$. On sent le changement de variables. On pose $a = \ln(\alpha)$, $b = \ln(\beta)$ et $c = \ln(\gamma)$. Par croissance du logarithme, on a $a < b < c$.
On déduit donc $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \ln(\alpha) & \ln(\beta) & \ln(\gamma) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^a & e^b & e^c \\ a & b & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ e^a & e^b & e^c \end{vmatrix}$. Par résultat admis, ce déterminant est négatif.

**IS15** • Des Sbougs et des Gniafs. • MPSI 2/2013

On pose le problème en équation en notant $s$ l'ancien orix du Sboug et $g$ l'ancien prix du Gniaf. On a alors le simple système $\left\{\begin{array}{ccc} s & +g & = & 100 \\ 1,1 \times s & +0,95 \times g & = & 105,8 \end{array}\right.$. On résout matriciellement parce qu'on est totalement intoxiqué : $s = \dfrac{\begin{vmatrix} 100 & 1 \\ 105,8 & 0,95 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1,1 & 0,95 \end{vmatrix}} = \dfrac{10,8}{0,15} = 72$. On trouve $g$ par soustraction : $g = 28$.
Le nouveau prix du Sboug à l'unité est $72 \times 1,1$. Le prix des deux est $\boxed{158,4 \text{ euros}}$

**IS15** • Ensembles d'équations $Tr(A.B.M) = Tr(A.M.B)$ et autres. • MPSI 2/2013

L'un de ces ensembles est évident :
toutes les matrices vérifient $Tr(A.B.M) = Tr(M.A.B)$ par la formule $Tr(X.Y) = Tr(Y.X)$.
L'ensemble est donc $M_2(\mathbb{R})$ lui même. Une base est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$
*(mais toute famille libre de quatre vecteurs de $M_2(\mathbb{R})$ convient aussi bien).*

En revanche, on aura beau assembler $Tr(A.B.M)$ en des $Tr(A.(B.M))$ ou autres, on n'arrivera pas à $Tr(M.B.A)$. On va donc en venir aux coefficients, en posant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ :
$A.B.M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3.c & b+3.d \\ a+4.c & b+4.d \end{pmatrix}$ a pour trace $a+b+3.c+4.d$
$M.B.A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.a+b & 5.a+3.b \\ 2.c+d & 5.c+3.d \end{pmatrix}$ a pour trace $2.a+b+5.c+3.d$

Notre ensemble a pour équation cartésienne $a+2.c-d=0$.

Lse matrices sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a+2.c \end{pmatrix}$ et on les "filtre" en $a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ avec $a$, $b$ et $c$ réels.

La famille $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)}$ est donc génératrice de notre ensemble (la présence de $I_2$ ne doit pas nous surprendre : $Tr(A.B.I_2) = Tr(I_2.B.A)$).

Elle est libre car $a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entraîne immédiatement $a=b=c=0$. Sinon, on peut citer l'unicité de la décomposition proposée. On a donc une base, et notre espace est de dimension 3.

**IS15** • Somme de Riemann gauche. • MPSI 2/2013

Tout ce dont il faut se méfier, c'est des notations un peu barbares *(application a, intervalle* $[f,\ g]$*)* :

$$\boxed{\frac{g-f}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} a\Big(f+k.\frac{g-f}{n}\Big)}$$

MPSI 2/2013 | `465 points` | $IS15$

| Charlemagne MPSI-2 / 2013 | Mardi 21 janvier | $IS16$ |
|---|---|---|

♡67 Résolvez l'équation différentielle $y"_t + 3.y'_t + 2.y_t = \cos(t)$ avec conditions initiales $y_0 = y'_0 = 1$. •3 pt.•

---

♡68 On donne : $y'_t + |t-1|.y_t = 0$ et $y_0 = 1$. Calculez $y_3$. •2 pt.•

---

♡69 Trouvez une suite géométrique $u$ vérifiant $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3.u_{n+1} + 10.(u_n + 3^n)$. •1 pt.•
Trouvez toutes les suites $v$ vérifiant $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N},\ v_{n+2} = 3.v_{n+1} + 10.(v_n + 3^n)$ et $v_0 = v_5 = 0$. •2 pt.•

---

♡70 Rappelez la définition de "$(\overrightarrow{v_1}, \dots \overrightarrow{v_p})$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $(E,\ +,\ .)$". •2 pt.•

Montrez que la famille $(1+X,\ X^2+3,\ X^2+X-1,\ X^2-3.X+2)$ est génératrice de $(\mathbb{R}_2[X],\ +,\ .)$. •2 pt.•

---

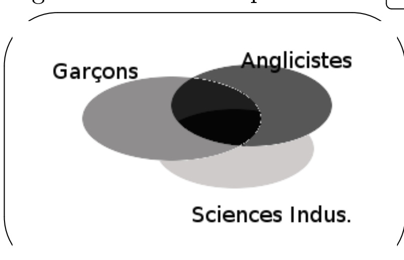
♡71 Calculez $\displaystyle\int_0^\pi |\sin\big(\theta - \frac{\pi}{8}\big)|.d\theta$. •2 pt.•

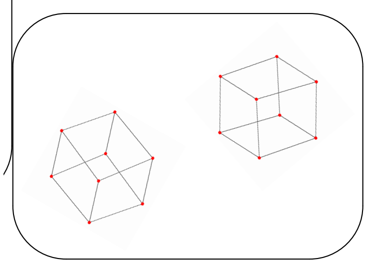
---

♡72 $\alpha$ est un réel fixé, résolvez l'équation $\underline{z}^2 - 2.e^{i.\alpha}.\underline{z} + 2.i.\sin(\alpha).e^{i.\alpha} = 0$ d'inconnue complexe $z$. •2 pt.•

---

♣24 En $MPSI\ \pi$, il y a soixante pour cent de garçons, quatre-vingt pour cent d'anglicistes et soixante dix pour cent des élèves ont pris l'option S.I.. Pouvez vous encadrer la proportion de garçons anglicistes suivant l'option S.I. ? •3 pt.•



♣25 Je lance deux dés à six faces non pipés. Quelle est la probabilité que j'aie un double ? Vous allez me dire 1/6, ayant bien appris votre cours *(une fois le premier dé lancé, sa face est connue, et il y a une chance sur six que le deuxième dé indique la même valeur, par équiprobabilité).* Mais ce que vous ne savez pas, c'est que ces dés ne sont pas des dés classiques. Les six faces du premier sont $1-2-3-3-3-4$ et les six faces du deuxième sont $1-1-2-2-3-3$. Alors, quelle probabilité ? •2 pt.•

---

♣26 On donne les éléments d'un arbre et leur indice montant et leur indice descendant *(tableau incomplet)*. Retracez l'arbre : •2 pt.•

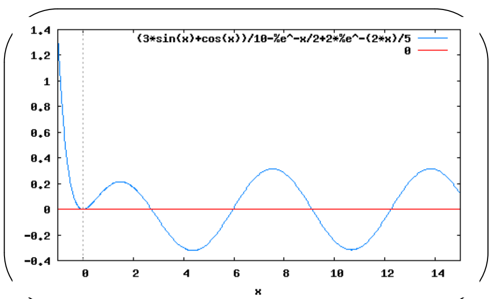
| A | B | C | E | I | L | N | R | T | U |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8-15 | 16-19 | 3-4 | 9-.. | 14-14 | ..-20 | 17-18 | 5-6 | 11-12 | 2-.. |

---

♢66 Soit $u$ une suite géométrique complexe de raison $\rho$ de module 1. Etudiez le comportement de sa moyenne de Cesaro suivant la valeur de $\rho$. •2 pt.•

**IS16** • Equation différentielle $y"_t + 3.y'_t + 2.y_t = \cos(t)$. • MPSI 2/2013

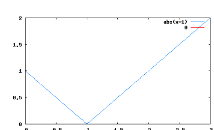
On a une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, à second membre simple, à résoudre sur $\mathbb{R}$. L'espace des solutions est affine, de dimension 2, mais les conditions initiales vont donner une unique solution.
L'équation homogène associée est $h"_t + 3.h'_t + 2.h_t = 0$.
L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 3.\lambda + 2 = 0$.
Le spectre est $\{-1,\ -2\}$.
On déduit : $S_H = Vect(t \longmapsto e^{-t},\ t \longmapsto e^{-2.t})$.
On cherche une solution particulière par analogie dans $Vect(\sin,\ \cos)$. On trouve $t \longmapsto \dfrac{\cos(t) + 3.\sin(t)}{10}$.
Les solutions générales sont de la forme $t \longmapsto \dfrac{\cos(t) + 3.\sin(t)}{10} + a.e^{-t} + b.e^{-2.t}$.
Les conditions initiales donnent après résolution : $\boxed{t \longmapsto \dfrac{\cos(t) + 3.\sin(t)}{10} - \dfrac{e^{-t}}{2} + \dfrac{2.e^{-2.t}}{5}}$




**IS16** • L'équation différentielle $y'_t + |t-1|.y_t = 0$ avec condition initiale. • MPSI 2/2013

On a affaire à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus, sous forme de Cauchy-Lipschitz, à résoudre sur $\mathbb{R}$, avec une condition initiale. L'espace des solutions est de dimension 1, et la condition initiale donne une unique solution.

On pose : $a_t = |t-1|$ et on intègre en $t \longmapsto \displaystyle\int_0^t |x-1|.dx$ qu'on ne simplifie pas pour l'instant. On met un signe moins, on passe aux exponentielles, et on tient compte de la condition initiale : $y_t = 1.e^{-\int_0^t |x-1|.dx}$
On déduit donc : $y_3 = \exp\Big(-\int_0^3 |x-1|.dx$



On calcule l'intégrale géométriquement par relation de Chasles : on trouve $2,5$. On déduit in fine : $\boxed{y_3 = \exp(-5/2)}$

**IS16** • Suites vérifiant $u_{n+2} = 3.u_{n+1} + 10.(u_n + 3^n)$ pour tout $n$. • MPSI 2/2013

On commence par la solution particulière, qui peut être par principe de similitude de la forme $(a.3^n)$. On reporte, on simplifie par $3^n$ et la condition nécessaire et suffisante devient $a.3^{n+2} = 3.a.3^{n+1} + 10.a.3^n + 10.3^n$ puis $9.a = 9.a + 10.a + 10$. $\boxed{a \text{ vaut } -1}$ *(je sais, au tribunal, a vaut k).*

Pour l'équation $v_{n+2} = 3.v_{n+1} + 10.v_n + 3^n$ par linéarité, ayant déjà une solution *(particulière)*, il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène $a_{n+2} = 3.a_{n+1} + 10.a_n$.
Là encore, le cours nous dit que l'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 engendré par deux suites géométriques indépendantes. Leurs raisons sont les racines de l'équation caractéristique $\lambda^2 = 3.\lambda + 10$. On trouve 5 et $-2$.
Les solutions homogènes sont donc de la forme $\alpha.(-2)^n + \beta.5^n$ avec $\alpha$ et $\beta$ dépendant des conditions initiales.
Les solutions générales sont donc de la forme $\alpha.(-2)^n + \beta.5^n + 3^n$.

Les conditions presque initiales imposent : $\alpha + \beta - 1 = 0$ et $-2^5.\alpha + 5^5.\beta - 3^5 = 0$.
On trouve finalement $\boxed{v_n = \dfrac{5^5 - 3^5}{5^5 + 2^5}.(-2)^n + \dfrac{3^5 + 2^5}{5^5 + 2^5}.10^n - 3^n}$

**IS16** • Familles génératrices. • MPSI 2/2013

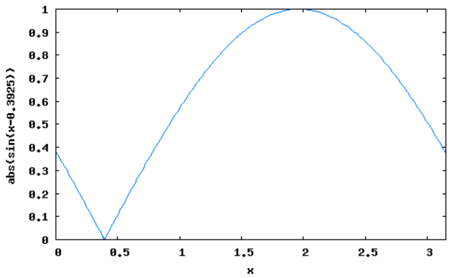
Deux points sur une simple question de cours ? C'est cadeau, si on ne se trompe pas sur l'ordre des quantificateurs :
tout vecteur de $E$ est combinaison linéaire des $\overrightarrow{v_k}$ :
$\forall\ \overrightarrow{u}\ \in\ E,\ \exists\ (\alpha_1, \dots \alpha_p)\ \in\ \mathbb{R}^p,\ \overrightarrow{u} = \alpha_1.\overrightarrow{v_1} + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{v_p}$
Oui, un point pour ça.
Un ou deux ? Un seul. En effet, il manque un point important :
$\overrightarrow{v_1} \in E,\ \dots \overrightarrow{v_p} \in E$ ; il faut que les vecteurs soient dans $E$.
Tout vecteur $a.\overrightarrow{i} + b.\overrightarrow{j}$ du plan $Vect(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est combinaison linéaire de $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{k})$ *(c'est* $a.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) + b.(\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) + (b-a).\overrightarrow{k})$) mais cette famille n'est pas génératrice du plan.
*Sinon, j'offirai aussi un point à ceux qui auront considéré qu'il fallait aussi quantifier "espace vectoriel* $(E,\ +,\ .)$*".*

---

Les quatre vecteurs $1+X$ , $X^2+3$, $X^2+X-1$ et $X^2-3.X+2$ sont bien dans $\mathbb{R}_2[X]$. Il suffit de prouver que tout polynôme $a.X^2+b.X+c$ peut s'écrire $\alpha.(1+X)+\beta.(X^2+3)+\gamma.(X+X-1)+\delta.(X-3.X+2)$ pour au moins un quadruplet $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)$.
• Si on est débutant, on tente de résoudre le système. C'est faisable, et c'est gentillet. On note qu'on a plusieurs solutions, comme on s'en doute.
• Si on est plus dans l'esprit de l'algèbre linéaire, on montre que l'on peut décomposer 1, $X$ et $X^2$ suivant cette famille *(en explicitant une décomposition pour chacun)* et on étend par linéarité à tout $\mathbb{R}_2[X]$.
• Si l'on a un esprit strictement calculateur, on montre que la sous-famille $(1+X,\ X^2+3,\ X^2+X-1)$ est déjà une base de $\mathbb{R}_2[X]$ *(en vérifiant que son déterminant sur la base canonique* $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ *est non nul)* ; on en déduit que cette famille de trois vecteurs est génératrice et on agrandit en famille qui reste a fortiori génératrice *(on impose $\delta = 0$ dans les formules du premier élèves).*

**IS16** • Calcul de $\int_0^\pi |\sin\left(\theta - \frac{\pi}{8}\right)|.d\theta$. • MPSI 2/2013

Par continuité de la fonction sous le signe intégrale, cette intégrale existe. On découpe par relation de Chasles et on tient compte des signes : $\displaystyle\int_0^\pi |\sin\left(\theta - \frac{\pi}{8}\right)|.d\theta = \int_0^{\pi/8} \sin\left(\frac{\pi}{8} - \theta\right).d\theta + \int_{\pi/8}^\pi \sin\left(\theta - \frac{\pi}{8}\right).d\theta$
On intègre avec des cosinus : $1 - \cos(\pi/8) + 1 + \cos(\pi/8)$.
On n'en revient pas à première lecture si on oublie d'avoir la visions graphique des choses : les $\cos(\pi/8)$ se simplifient : $\boxed{\displaystyle\int_0^\pi |\sin\left(\theta - \frac{\pi}{8}\right)|.d\theta = 2}$
*Mais c'est juste $\int_0^\pi \sin(t).dt$ par translation et périodicité...*




**IS16** • Une classe, des angliscistes, un choix d'option. • MPSI 2/2013

*Bien sûr les données ne permettent pas de déduire exactement le nombre de garçons anglicistes suivant l'option S.I., les données sont insuffisantes.*

*On peut évidemment cerner la proportion cherchée :* $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$ *comme toute proportion (sauf s'il existe des anti-élèves, évidemment).*

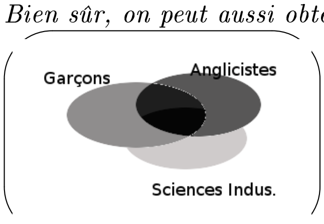
Mais ensuite, on doit pouvoir être plus précis.
Par exemple, avec soixante pour cent de garçons et quatre vingt dix pour cent d'anglicistes, on comprend qu'il y a assurément des garçons anglistes *(les deux ensembles sont non disjoints, puisque la somme de leurs cardinaux dépasse le cardinal de la classe)*.
Combien ? On note $C$, $G$, $A$ et $S$ les ensembles formés de la classe, des garçons, des anglicistes et des élèves de l'option SI.
On va supposer, puisque l'on raisonne sur des proportions *(on connaît les quotients en $G/C$, $A/C$ et autres)*, que $C$ a pour cardinal 100.

Les données sont donc :

| ensemble | **C**lasse | **G**arçons | **A**nglicistes | **S**ciences Indus. |
|---|---|---|---|---|
| cardinal | 100 | 60 | 90 | 80 |

.

On cherche $Card(G \cap A \cap S)$.
Déjà, avec $G \cap A \cap S \subset G$ on peut majorer par la proportion de garçons : $\boxed{p \leqslant 0,6}$ *(et c'est réalisable si tous les garçons font anglais et S.I., et il y a des filles anglicistes pour compléter).*
*Bien sûr, on peut aussi obtenir $p \leqslant 0,7$ en incluant dans $S$ mais c'est une information inutile.*




Ensuite, **le cardinal de** $A \cap G$ **vaut au moins** 50.
Pour certains, c'est évident en regardant le "cas limite" où le minimum des garçons fait anglais. C'est le cas où les quarante filles font toutes anglais. Il reste cinquante garçons anglicistes et dix garçons germanistes, hispanistes, russophones, italophones, hébraïsant, lusophones, et que sais je encore.
Pour d'autres, on écrit la forme $Card(A \cup G) = Card(A) + Card(G) - Card(A \cap G)$, on remplace : $Card(A \cap G) = 90 + 60 - Card(A \cup B)$. Il ne reste plus qu'à majorer $Card(A \cup B)$ par 100 *(le cardinal de la classe)*.

Disposant de $Card(A \cap G) \geqslant 50$ et $Card(S) = 70$, on arrive à $\boxed{Card((A \cap (G) \cap S) \geqslant 20}$ par le même raisonnement qu'au dessus. *Peut on donner une exemple de cette situation ? Oui :*

| $GAS$ | $GA\overline{S}$ | $G\overline{A}S$ | $G\overline{AS}$ | $FAS$ | $FA\overline{S}$ | $F\overline{A}S$ | $F\overline{AS}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 30 | 0 | 10 | 40 | 0 | 0 | 0 |

**IS16** • Deux dés à six faces. • MPSI 2/2013

On note $(a, b)$ le tirage des deux dés ; $a$ vaut 1, 2, 3 ou 4 *(non équiprobables)* et $b$ vaut 1, 2 ou 3 *(équiprobables)*. On dresse un arbre et on ne regarde que les feuilles intéressantes. On indique pour chacune sa probabilité :

| couple (a,b) | $(1,1)$ | $(2,2)$ | $(3,3)$ |
|---|---|---|---|
| probabilité | $\frac{1}{6}.\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}.\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}$ |

.

On somme ces événements indépendants : $\boxed{\frac{5}{18}}$

**IS16** • L'équation $\underline{z}^2 - 2.e^{i.\alpha}.\underline{z} + 2.i.\sin(\alpha).e^{i.\alpha} = 0$ d'inconnue $z$. • MPSI 2/2013

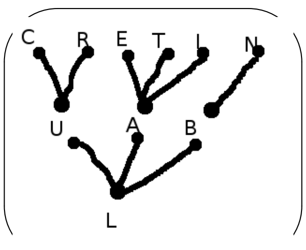
C'est une équation du second degré. On en calcule le discriminant : $4.e^{2.i.\alpha} - 8.i.\sin(\alpha).e^{i.\alpha}$. On pose classiquement $c = \cos(\alpha)$ et $s = \sin(\alpha)$. Le discriminant devient $4.(2.c^2 - 1 + 2.i.c.s) - 8.i.s.(c + i.s)$ puis $(8.c^2 - 4 + 8.s^2)$ et même finalement 4 (vous aviez plus simple ?).
On extrait des racines carrées : 2 et $-2$.
Les deux racines de l'équation sont alors $\boxed{e^{i.\alpha} + 1 \text{ et } e^{i.\alpha} - 1}$
On peut vérifier avec somme et produit des racines.

**IS16** • Un arbre dont on connaît les indices. • MPSI 2/2013

On complète avec les deux indices qui manquent :

| A | B | C | E | I | L | N | R | T | U |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8-15 | 16-19 | 3-4 | 9-10 | 14-14 | 1-20 | 17-18 | 5-6 | 11-12 | 2-7 |

On trace alors le tableau de la racine *(1-20)* aux feuilles *((n)-(n+1))*. On trouve




et ce sera facile pour moi à corriger...
même si je pense que le même exercice posé par Y.B. donnerait

| A | B | C | D | F | I | K | S | T | U |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9-12 | 14-19 | 2-13 | 15-18 | 4-5 | 6-7 | 1-20 | 10-11 | 16-17 | 3-8 |

**IS16** • Moyenne de Cesaro d'une suite géométrique. • MPSI 2/2013

La suite $u$ est de la forme $u_n = u_0.\rho^n$ pour tout $n$. On somme : $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0.\sum_{k=0}^{n} \rho^k = u_0.\frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}$ *(en tout cas pour $\rho$ différent de 1)*.

Le terme $\rho^{n+1}$ est de module 1 et reste borné. Le terme $u_0.\frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}$ est donc aussi borné *(par $|u_0|.\frac{2}{|1-\rho|}$)*.
On divise par $n+1$, le quotient tend vers 0.
**La moyenne de Cesaro d'une suite géométrique de raison dans $S - \{1\}$ tend vers 0 à l'infini.**

Il reste à traiter à part le cas de la raison égale à 1. la suite est constante, sa moyenne de Cesaro coïncide avec elle. La moyenne de Cesaro de la suite constante $u_0$ converge aussi vers $u_0$.

MPSI 2/2013 `490 points` $IS16$

♡73 Donnez la quantification de la convergence d'une suite $a$ vers une limite $\alpha$. •1 pt.•

---

♡74 Calculez la somme de la série de terme général $3^{-n}$. •1 pt.•

Montrez que la suite $\dfrac{\sqrt{n}.3^{-n}}{2^{-n}}$ est bornée. •1 pt.•

Déduisez que la série de terme général $\dfrac{\sqrt{n}}{3^n}$ converge. •2 pt.•

---

♡75 Montrez que la série de terme général $\dfrac{5.n+17}{(n+3).(n^2+5.n+4)}$ converge. •1 pt.•

Décomposez $\dfrac{5.X+17}{(X^3+8.X^2+19.X+12)}$ en éléments simples (après avoir factorisé le dénominateur). •1 pt.•

Calculez la somme de la série de terme général $\dfrac{5.n+17}{(n+3).(n^2+5.n+4)}$. •2 pt.•

---

♡76 Calculez $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{[x]}.dx$, $\displaystyle\int_1^9 [\sqrt{x}].dx$ et $\left[\displaystyle\int_1^9 \sqrt{x}.dx\right]$. •4 pt.•
Les crochets désignent la partie entière.

---

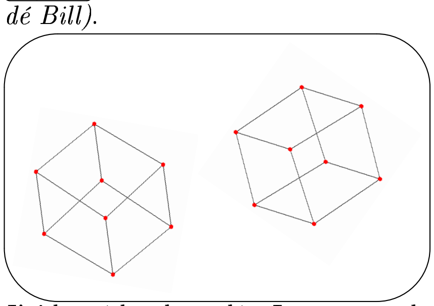
♢67 Résolvez l'équation "$z+z^{-1}$ est réel" d'inconnue complexe $z$. •2 pt.•

---

♡77 $f$, $g$ et $h$ sont solutions de l'équation différentielle $y'"_t + a_t.y"_t + b_t.y'_t + c_t.y_t = 0$. On pose : $\omega = \begin{vmatrix} g' & h' \\ g" & h" \end{vmatrix}$ puis $w = \begin{vmatrix} f & g & h \\ f' & g' & h' \\ f" & g" & h" \end{vmatrix}$. Simplifiez $\omega'$. •1 pt.• Montrez : $w' = \begin{vmatrix} f' & g' & h' \\ f" & g" & h" \\ f'" & g'" & h'" \end{vmatrix}$ puis $w' = -a.w$. •3 pt.•

---

♣27 On prend encore les dés $1-1-2-2-3-3$ *(appelé dé foncé)* et $1-2-3-3-3-4$ *(appelé dé Bill)*.



J'ai lancé les deux dés. La somme obtenue est 5. Quelle est la probabilité que Bill ait affiché 4 ? •3 pt.•

---

♢68 $f$ est une application vérifiant $f(0)=0$ et $\forall\ t \in \mathbb{R},\ f"(t)+2.f'(t)+2.f(t)=0$. Exprimez la forme de $f$ et tracez un exemple de graphe *(autre que la solution nulle, je vous en prie)*. •2 pt.•

Calculez $f'(0)$ sachant qu'on a $Sup\{f(t) \mid t \in \mathbb{R}^+\} = 1$. •4 pt.•
Attention, il y a deux valeurs possibles pour $f'(0)$.

**IS17** • Séries de termes généraux $3^{-n}$ et $\sqrt{n}.3^{-n}$. • MPSI 2/2013

La première question est du cours *(de début d'année même)* : $A_n = \sum_{k=0}^{n} 3^{-k} = \frac{1-3^{-n-1}}{1-3^{-1}}$. On fait tendre $n$ vers l'infini, le terme $3^{-n-1}$ tend vers 0 et les sommes partielles tendent vers $\frac{1}{1-1/3}$. On simplifie et on adopte les notations sur les sommes de séries $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} 3^{-k} = \frac{3}{2}}$

---

On regarde le quotient $\frac{\sqrt{n}.3^{-n}}{2^{-n}}$ qu'on écrit plus lisiblement $\frac{\sqrt{n}}{(3/2)^n}$. par croissances comparées *(polynôme contre suite géométrique)*, ce quotient tend vers 0. Or, toute suite réelle convergente est bornée. On a répondu à la question.

---

Ayant obtenu le fait que cette suite est bornée, on a alors $\frac{\sqrt{n}.3^{-n}}{2^{-n}} \leqslant K$ en notant $K$ un majorant.
Par positivité de tous les termes, on a $\frac{\sqrt{n}}{3^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$.
Or, la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ converge *(série géoémétrique de raison plus petite que* 1*)*. Par le théorème de majoration des séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{\sqrt{n}}{3^n}$ converge.

**IS17** • Série de terme général $\frac{5.n+17}{(n+3).(n^2+5.n+4)}$. • MPSI 2/2013

On a affaire à une série de terme général positif.
Son terme générale tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini *(différence des degrés entre dénominateur et numérateur)*, c'est bien parti.
Pour qui en a besoin, on écrit $\frac{5.n+17}{(n+3).(n^2+5.n+4)} = \frac{\frac{5}{n^2}+\frac{17}{n^3}}{1+\frac{8}{n}+\frac{19}{n^2}+\frac{12}{n^3}}$.
On cherche ensuite un équivalent du terme général : $\frac{5}{n^2}$.
Ce terme général est celui d'une série de Riemann d'exposant 2. C'est largement suffisant pour sa convergence *(le basculement se fait à* 1*)*.
Par théorème d'équivalence des termes généraux de séries à termes positifs, on peut conclure que $\sum_{k=0}^{n} \frac{5.k+17}{(k+3).(k^2+5.k+4)}$ converge.

---

On factorise comme par hasard le dénominateur :
$\boxed{\frac{5.X+17}{(X^3+8.X^2+19.X+12)} = \frac{5.X+17}{(X+1).(X+3).(X+4)} = \frac{2}{X+1} - \frac{1}{X+3} - \frac{1}{X+4}}$ *(coefficients trouvés par la méthode des pôles ou en copiant sur la voisin(e) qui pensait que vous regardiez sa main avec une passion mal dissimulée et dévorante).*

---

On va pouvoir calculer les sommes partielles (on a des vraies sommes avec un nombre fini de termes, on peut séparer) :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{5.k+17}{k^3+8.k^2+19.k+12} = 2.\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+4}$$

On réindexe : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{5.k+17}{k^3+8.k^2+19.k+12} = 2.\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p} - \sum_{p=3}^{n+3}\frac{1}{p} - \sum_{p=4}^{n+4}\frac{1}{p}$.

On simplifie ce qu'on peut :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{5.k+17}{k^3+8.k^2+19.k+12} = 2.\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big) - \Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\Big) - \Big(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}\Big)$$

On fait tendre $n$ vers l'infini, et on compte ce qu'il reste :

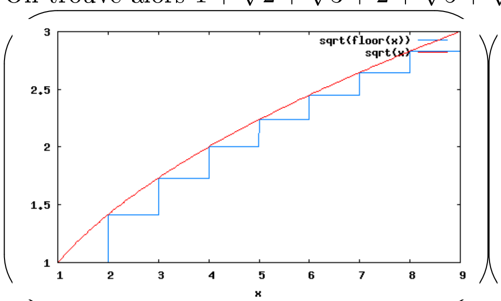
$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5.k+17}{k^3+8.k^2+19.k+12} = 2.\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big) - \frac{1}{3} = \frac{10}{3}}$$

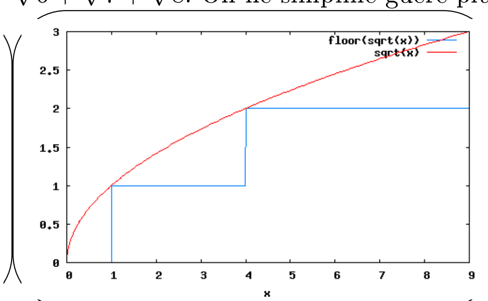
**IS17** • Intégrales en $\int_1^9 \sqrt{x}.dx$. • MPSI 2/2013

Les fonctions sous le signe somme ne sont pas forcément continues. Pour justifier l'existence des intégrales, on découpe par relation de Chasles pour avoir des fonctions continues et peut être même constantes dans certains cas :

$$\int_1^9 \sqrt{[x]}.dx = \int_1^2 \sqrt{1}.dx + \int_2^3 \sqrt{2}.dx + \int_3^4 \sqrt{3}.dx + \ldots + \int_8^9 \sqrt{8}.dx$$

On trouve alors $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{8}$. On ne simplifie guère plus.



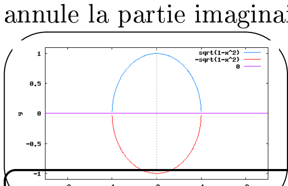

$$\int_1^9 [\sqrt{x}].dx = \int_1^4 1.dx + \int_4^9 2.dx = 3.1+5.2 = 13 \text{ sans autre commentaire.}$$

$$\Big[\int_1^9 \sqrt{x}.dx\Big] = \Big[\frac{2}{3}\Big(9^{3/2}-1^{3/2}\Big)\Big]$$

Le contenu du crochet de partie entière vaut $\dfrac{2.26}{3}$ et sa partie entière vaut $\boxed{17}$

**IS17** • L'équation $z+z^{-1}\in\mathbb{R}$ d'inconnue complexe $z$. • MPSI 2/2013

L'inconnue $z$ dans $\mathbb{C}^*$ sera notée $x+i.y$. L'équation devient rapidement $(x+i.y)+\dfrac{x-i.y}{x^2+y^2}\in\mathbb{R}$. On annule la partie imaginaire : $i.y.(x^2+y^2-1)=0$.



On trouve un ensemble en deux parties :

- $y=0$ : l'axe réel *(privé de l'origine)*
- $x^2+y^2=1$ : le cercle unité.

**IS17** • Le wronskien de l'équation différentielle $y'''_t + a_t.y''_t + b_t.y'_t + c_t.y_t = 0$. • MPSI 2/2013

On développe le petit wronskien de taille 2 :

$$\omega = \begin{vmatrix} g' & h' \\ g'' & h'' \end{vmatrix} = g'.h'' - h'.g'' \text{ et on dérive : } \omega' = g'.h''' + g''.h'' - h''.g'' - h'.g''' = g'.h'' - h'.g''$$

On reconnaît : $\boxed{\omega' = \begin{vmatrix} g' & h' \\ g''' & h''' \end{vmatrix}}$

On développe ensuite le grand wronskien par rapport à sa première ligne :
$w = f.\begin{vmatrix} g' & h' \\ g'' & h'' \end{vmatrix} - g.\begin{vmatrix} f' & h' \\ f'' & h'' \end{vmatrix} + h.\begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix}$

On dérive les produits en exploitant le résultat précédent et sa généralisation à $\begin{vmatrix} f' & h' \\ f'' & h'' \end{vmatrix}$ et autres :
$w = \Big(f'.\begin{vmatrix} g' & h' \\ g'' & h'' \end{vmatrix} - g'.\begin{vmatrix} f' & h' \\ f'' & h'' \end{vmatrix} + h'.\begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix}\Big) + \Big(f.\begin{vmatrix} g' & h' \\ g''' & h''' \end{vmatrix} - g.\begin{vmatrix} f' & h' \\ f''' & h''' \end{vmatrix} + h.\begin{vmatrix} f' & g' \\ f''' & g''' \end{vmatrix}\Big)$

Le premier terme est le développement par rapport à la première ligne de $\begin{vmatrix} f' & g' & h' \\ f' & g' & h' \\ f'' & g'' & h'' \end{vmatrix}$ *(nul par antisymétrie)* et le deuxième terme est le développement par rapport à la première ligne de $\begin{vmatrix} f & g & h \\ f' & g' & h' \\ f''' & g''' & h''' \end{vmatrix}$ comme attendu.

---

On reprend cette forme pour $w'$ et on y remplace $f'''$ par $-a.f'' - b.f' - c.f$ car $f$ est solution de l'équation différentielle. On fait de même avec $g'''$ et $h'''$ :
$w' = \begin{vmatrix} f & g & h \\ f' & g' & h' \\ -a.f'' - b.f' - c.f & -a.g'' - b.g' - c.g & -a.h'' - b.h' - c.h \end{vmatrix}$

On ajoute la ligne 1 sur la ligne 3 (après multiplication par $c$), sans changer la valeur du déterminant :
$w' = \begin{vmatrix} f & g & h \\ f' & g' & h' \\ -a.f'' - b.f' & -a.g'' - b.g' & -a.h'' - b.h' \end{vmatrix}$

On fait de même avec $L_3 + b.L_2$ et il reste $w' = \begin{vmatrix} f & g & h \\ f' & g' & h' \\ -a.f'' & -a.g'' & -a.h'' \end{vmatrix}$. On sort $-a$ par tri-linéarité, et on retrouve $w' = -a.w$ comme demandé.

**IS17** • Les deux dés Bill et Foncé. • MPSI 2/2013

On peut se contenter de dresser un tableau sur l'univers de 36 évenements équiprobables. Mais on a une information de plus : on a effectué un tirage. L'univers se réduit alors brutalement :

| | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 |

| | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | . | . | . | . | . | 5 |
| 1 | . | . | . | . | . | 5 |
| 2 | . | . | 5 | 5 | 5 | . |
| 2 | . | . | 5 | 5 | 5 | . |
| 3 | . | 5 | . | . | . | . |
| 3 | . | 5 | . | . | . | . |

et il ne reste que dix événements équiprobables. Parmi ces événements, on ne garde que ceux qui répondent à la question : il y en a deux.

| | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | . | . | . | . | . | 5 |
| 1 | . | . | . | . | . | 5 |
| 2 | . | . | 5 | 5 | 5 | . |
| 2 | . | . | 5 | 5 | 5 | . |
| 3 | . | 5 | . | . | . | . |
| 3 | . | 5 | . | . | . | . |

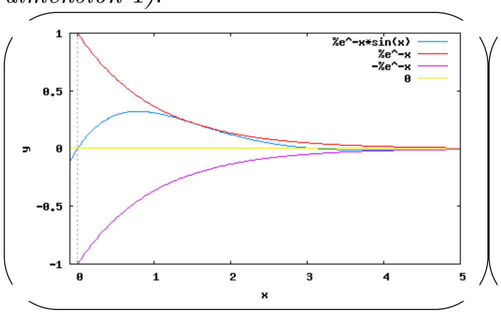
La probabilité cherchée est donc $\boxed{\dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}}$

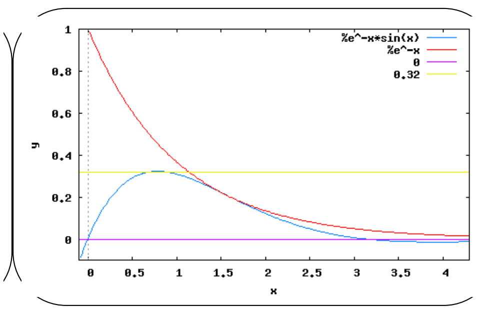
---

Je vous le fais de façon plus proche du programme de Sup :
$P(B=4 \mid A+B=5) = \dfrac{P(B=4 \text{ et } A+B=5)}{P(A+B=5)} = \dfrac{P(B=4 \text{ et } A=1)}{P(A+B=5)} = \dfrac{P(B=4).P(A=1)}{P(A+B=5)}$
Par indépendance des variables, le numérateur est $\dfrac{1}{6}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12}$.
On décompose le dénominateur en événements disjoints :
$P(A+B=5) = P(A=1, B=4) + P(A=2, B=3) + P(A=3, B=2) + P(A=4, B=1)$
On trouve $\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{6} + 0 = \dfrac{5}{18}$. Le quotient redonne bien $\frac{2}{5}$.

**IS17** • L'équation différentielle $y" + 2.y' + 2.y = 0$ avec plus ou moins de conditions initiales. •
MPSI 2/2013

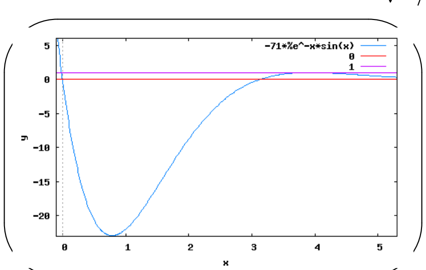
On prend une application $f$ qui est solution de cette équation différentielle $y" + 2.y' + y = 0$. C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, à second membre nul. Son espace des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2.\lambda + 2 = 0$. Son discriminant est $-1 - i$ et $-1 + i$.
Son espace des solutions homogènes complexes est $Vect(t \longmapsto e^{-t}.e^{i.t},\ t \longmapsto e^{-t}.e^{-i.t})$.
Son espace des solutions homogènes réelles est $Vect(t \longmapsto e^{-t}.\cos(t),\ t \longmapsto e^{-t}.\sin(t))$.
On impose une condition initiale $y(0) = 0$. Les solutions qui se présentaient sous la forme $t \longmapsto e^{-t}.(a.\cos(t) + b.\sin(t))$ sont alors de la forme $\boxed{t \longmapsto b.e^{-t}.\sin(t)}$ avec $b$ réel *(espace vectoriel de dimension 1)*.




On dispose ensuite d'une information complémentaire : la borne supérieure sur $\mathbb{R}^+$. Attention aux erreurs. Elle n'est pas atteinte quand le sinus vaut 1.
Quand le sinus vaut 1, le graphe frole celui de l'exponentielle, mais c'est tout. Le maximum est avant, là où s'annule la dérivée.
On dérive en $t \longmapsto e^{-t}.\cos(t) - e^{-t}.\sin(t)$. Le maximum est en $\pi/4$ et il vaut $e^{-\pi/4}.\sqrt{2}/2$. Ceci impose une valeur à $b$ (c'est $e^{\pi/4}.\sqrt{2}$) et on calcule la dérivée en 0 : $\boxed{f'(0) = e^{\pi/4}.\sqrt{2}}$

Mais on ne peut se contenter de cette seule solution. Il en existe effectivement une autre. Celle où $f'(0)$ est négatif. La fonction a alors sur $[0, +\infty[$ d'abord un minimum, puis un maximum en $5.\pi/4$. Ce maximum vaut alors $e^{-5.\pi/4}.\sqrt{2}/2$ et l'on trouve $\boxed{f'(0) = -e^{5.\pi/4}.\sqrt{2}}$



♡78 Montrez que si la série de terme général $|a_n|$ converge, alors la série de terme général réel $a_n$ converge. •2 pt.•

---

♡79 Résolvez l'équation $\sqrt{x}^x = x^{\sqrt{x}}$ d'inconnue réelle $x$. •2 pt.•

---

♢69 Pour tout couple d'entiers naturels $(n,\ k)$, on pose $a_{n,k} = \binom{n}{k}.2^{-k}.3^{k-n}$. Montrez que pour tout $n$ la série de terme général converge, et calculez sa somme. •1 pt.•
Déterminez la limite de $\dfrac{a_{n+1,k}}{a_{n,k}}$ quand $n$ tend vers l'infini *(k fixé)*. •1 pt.•
Déduisez qu'il existe un rang $N_k$ à partir duquel on a $\dfrac{a_{n+1,k}}{a_{n,k}} \leqslant \dfrac{1}{2}$. •1 pt.•
Déduisez que la suite $a_{n,k}$ *(k fixé)* est majorée à partir d'un certain rang par une suite géométrique de raison $1/2$. •1 pt.•
Déduisez que pour tout $k$ la série de terme général $a_{n,k}$ converge. •1 pt.• On note sa somme $s_k$.
Calculez la somme de la série de terme général $s_k$. •1 pt.•

---

♣28 Les élèves de $MPSI\pi$ se répartissent aléatoirement entre les deux groupes de T.I.P.E. *(maths ou physique)*. Chacun des vingt élèves tire à pile ou face *(pièce équilibrée)* le groupe dans lequel il va aller. Sachant qu'il n'y a que quinze places dans chaque groupe, quelle est la probabilité que le hasard fasse bien les choses ? •3 pt.•

---

♢70 $a$ est un réel strictement positif. Calculez les limites suivantes :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^m$, $\lim\limits_{m\mapsto+\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^m$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$. •3 pt.•

---

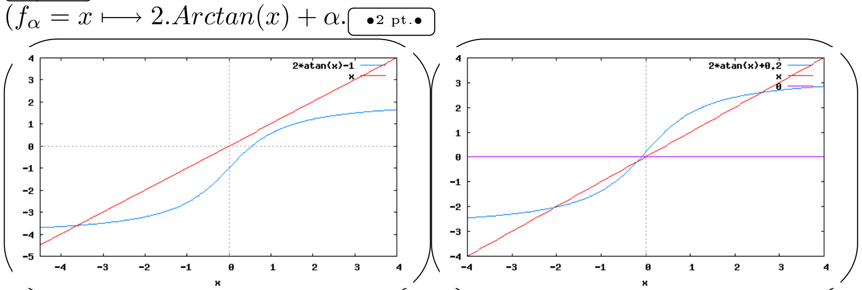
♠12 On vous donne une liste $L$, écrivez une procédure Python qui teste si il y a dans $L$ deux éléments consécutifs égaux. •2 pt.•

---

♠13 Pour tout polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à 4, on pose : $|P|_\# = \sum\limits_{k=0}^{5}|P(k)|$. Montrez que $|.|_\#$ est une norme (E,P,S,H,IT). •2 pt.•
Calculez la norme des vecteurs de la base canonique. •1 pt.•

---

♢71 Quelle équation doit vérifier $\alpha$ pour que l'application $f_\alpha$ ait exactement deux points fixes ($f_\alpha = x \longmapsto 2.Arctan(x) + \alpha$. •2 pt.•




Pour l'une de ces valeurs de $\alpha$, indiquez dans un tableau suivant la valeur de $u_0$ le comportement de la suite $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ *(sans démonstration)*. •2 pt.•

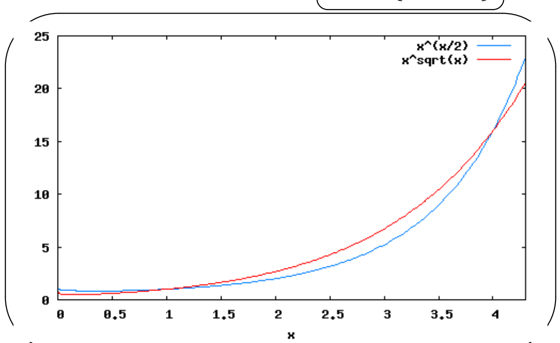
| Charlemagne MPSI-2 / 2013 | Correction | $IS18$ |
|---|---|---|

**IS18** • Convergence en valeur absolue. • MPSI 2/2013

On note $V$ la série de terme général $|a_n|$. Elle est croissante *($V_{n+1} - V_n = |a_{n+1}| \geqslant 0$)*, et elle converge, c'est donc qu'elle est majorée. On note $S$ un majorant.
La série de terme général $|a_n| + a_n$ est croissante *(pour tout $x$ réel $|x| + x$ est nul ou positif)*. On la majore par $2.V_n$ *(suite)* donc par $2.S$ *(valeur numérique)*. La série $\sum_{k=0}^{n}(a_n + |a_n|)$ converge, et par soustraction $\sum_{k=0}^{n} a_k$ converge.

**IS18** • L'équation $\sqrt{x}^x = x^{\sqrt{x}}$. • MPSI 2/2013

Cette équation n'a de sens que pour $x$ dans $\mathbb{R}^+$, à cause de la racine et des exposants ni entiers ni même rationnels.
On peut estimer que 0 est racine, on la met de côté.
Ensuite, l'équation s'écrit $e^{x.\ln(\sqrt{x})} = e^{\sqrt{x}.\ln(x)}$. Par injectivité du logarithme, elle se ramène à $\frac{x.\ln(x)}{2} = \sqrt{x}.\ln(x)$. la racine $x = 1$ peut ensuite être isolée *(elle annule le logarithme)*, et ensuite, il reste $x = 2.\sqrt{x}$ de racines 0 et 4.
On résume en vérifiant les trois racines trouvées : $\boxed{S = \{0, 1, 4\}}$

Un cadeau graphique : 


**IS18** • Les séries de termes généraux $\binom{n}{k}.2^{-k}.3^{k-n}$. • MPSI 2/2013

On a tout un tableau infini, avec quand même des termes nuls de par la convention sur les coefficients binomiaux aberrants :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $1/3$ | $1/2$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $1/3^2$ | $2/2.3$ | $1/2^2$ | $0$ | $0$ |
| $1/3^3$ | $3/3^2.2$ | $3/3.2^2$ | $1/2^3$ | $0$ |
| $1/3^4$ | $4/3^3.2$ | $6/3^2.2^2$ | $4/3.2^3$ | $1/2^4$ |
| $1/3^5$ | $5/3^4.2$ | $10/3^3.2^2$ | $10/3^2.2^3$ | $5/3.2^4$ |

On se fixe $n$ et on regarde la série de terme général $\frac{\binom{n}{k}}{2^k.3^{n-k}}$, avec $k$ qui varie donc. Mais dès que $k$ a dépassé $n$, le terme général est nul.
Il est alors évident que la série converge *(ses sommes partielles sont constantes à partir du rang $n$)*.

La somme de la série est $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n}{k}.\frac{1}{2^k.3^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\frac{1}{2^k.3^{n-k}} + 0 = \Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big)^n = \frac{5^n}{6^n}}$

---

On raisonne cette fois à $k$ fixé, c'est à dire qu'on somme en colonne. On étudie le quotient de deux termes consécutifs sur la colonne : $\frac{a_{n+1,k}}{a_{n,k}} = \frac{(n+1)!}{k!.(n+1-k)!}.\frac{1}{2^k.3^{n+1-k}}.\frac{k!.(n-k)!}{n!}.\frac{2^k.3^{n-k}}{1} = \frac{n+1}{n+1-k}.\frac{1}{3}$.

Ce quotient tend vers $\boxed{1/3}$ quand $n$ tend vers l'infini.

---

Ayant cette convergence, on traduit : $\frac{1}{3}-\varepsilon\frac{a_{n+1,k}}{a_{n,k}} \leqslant \frac{1}{3}+\varepsilon$ à partir d'un certain rang *(dépendant de $k$ et $\varepsilon$)*. On prend le cas particulier $\varepsilon = \frac{1}{6}$ et on a $\frac{a_{n+1,k}}{a_{n,k}} \leqslant \frac{1}{2}$ à partir d'un rang.

Cette démarche est ici inutile. On peut expliciter le rang, puisque la question se réduit à $\frac{n+1}{3.(n+1-k)} \leqslant \frac{1}{2}$. On effectue un produit croisé, on trouve $n \geqslant 3.k-1$ *(condition nécessaire et suffisante)*.

---

A partir du rang explicité ci dessus, on a $a_{n+1,k} \leqslant \frac{a_{n,k}}{2}$. En mettant bout à bout ces inégalités successives *(valables seulement à compter du rang $N_k$)* : $a_{n,k} \leqslant a_{N,k}.\frac{1}{2^{n-N}}$.
Or, la série de terme général $a_{N,k}.\frac{1}{2^{n-N}}$ converge *(série géométrique de raison entre 0 et 1)*.
Par théorème de majoration sur les séries à termes positifs, la série de terme général $a_{n,k}$ converge.
On ajoute le terme $\sum_{n=0}^{N-1} a_{n,k}$ qui est purement numérique. La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}$ existe.

---

On veut ensuite calculer $\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}\Big)$. On permute les sommes discrètement et on calcule

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{5}{6}\Big)^n = \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 6}$$

**IS18** • Procédure Python. • MPSI 2/2013

On dispose donc d'une liste $L$ et on doit vérifier si il existe un indice vérifiant $L[i] = L[i+1]$.
On va donc se promener le long de la liste *(de 0 à `len(L)-2` inclus)* et faire à chaque fois le test `L[i]==L[i+1]`. Si le teste est valide au moins une fois, on répond `Truie`, sinon on répond `Valse`.
Pour éviter de parcourir toute la liste si on rencontre par chance deux termes consécutifs égaux, je vous prpose une boucle `while` qui permet de sortir dès qu'on a trouvé cette situation. Il faut bien spur ensuite l'arrêter si on est allé au bout de la liste, et s'interroger : pour quelle raison me suis-je arrêté : deux éléments égaux ou fin de liste ?

```
def AlocratIdio(L ) : #pléonasme
....i = 0
....while (i < len(L)-1) and (L[i]!= L[i+1]) :
........i +=1
....return(i < len(L)-1)
```

*(oui, c'est au moment même du return qu'on fait le test qui répondra `True` ou `False` ).*
Bien sûr, d'autres réponses sont possibles.

**IS18** • Les élèves qui tirent au hasard leur groupe de T.I.P.E. • MPSI 2/2013

Chaque élève choisit son groupe avec équiprobabilité (1/2, 1/2).
Il y a $2^{20}$ situations possibles, équiprobables *(on a un arbre avec vingt choix binaires consécutifs)*.

Si le tirage de chaque élève est 0 ou 1 au lieu de “pile ou face”, on peut décrire les situations par un nombre binaire à vingt chiffres, de $00\ldots0$ *(tout le monde fait maths)* jusqu'à $11\ldots1$ *(tout le monde fait physique)*.
Si on fait la somme des chiffres de la situation décrite, on trouve le nombre d'élèves en TIPE de physique. Les situations défavorables sont celles où cette somme est plus grande que 15 *(trop de physiciens)* ou plus petite que 5 *(trop de matheux)*.
Quelle est la probabilité que $k$ des 20 élèves fassent maths ? C'est $\binom{20}{k}.\frac{1}{2^k}.\frac{1}{2^{20-k}}$. En effet, il s'agit dans une liste de vingt termes d'en choisir $k$ à qui l'on attribue 0, et on met 1 aux autres. De plus, les choix sont équiprobables d'où le $\frac{1}{2^{20}}$ *(nombre de configurations possibles)*.
On va donc estimer $\boxed{\sum_{k=5}^{15}\binom{20}{k}.\frac{1}{2^{20}}=\frac{1036184}{1048576}\simeq 0,988}$ à $10^{-3}$ près.

**IS18** • Trois limites de suites en $(1+\frac{a}{n})^n$. • MPSI 2/2013

Il faut surveiller les rôles : dénominateur et exposant.
$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^m$. L'exposant $m$ est fixé, et c'est $n$ qui bouge. Le réel $a/n$ tend vers 0. Par continuité, des fonctions monomes, la suite tend vers $1^m$ c'est à dire 1.

$\lim_{m\mapsto+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^m$. Le réel dans la parenthèse est fixé, strictement plus grand que 1. L'exposant tend vers l'infini. On a une suite géométrique de raison plus grande que 1 : la limite est infinie.

$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$. On a une forme indéterminée. Il faut en revenir à la définition par exponentielle et logarithme :

$$\exp\left(n.\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right)=\exp\left(a.\frac{\ln(\left(1+\frac{a}{n}\right)}{a/n}\right)$$

On reconnaît un taux d'accroissement du logarithme de la forme $\frac{\ln(1+\alpha)-\ln(1)}{\alpha}$ *(limite 1)*. Le contenu de la parenthèse tend vers $a$. Par continuité de l'exponentielle, on trouve $e^a$ comme limite.

| $\lim_{n\mapsto+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^m$ | $\lim_{m\mapsto+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^m$ | $\lim_{n\mapsto+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ |
|---|---|---|
| 1 | $+\infty$ | $e^a$ |

**IS18** • Une norme sur l'espace vectoriel de polynômes de degré inférieur ou égal à 4. • MPSI 2/2013

Existence. Pour tout polynôme $P$ les cinq réels $P(k)$ existent, ont une valeur absolue et leur somme existe.
Positivité. Une somme de valeurs absolue est un réel positif.
Homogénéité. Pour tout couple $(P,\ \lambda)$ on a sans problème

$$|\lambda.P|_\#=\sum_{k=0}^{4}|\lambda.P(k)|=\sum_{k=0}^{4}|\lambda|.|P(k)|=|\lambda|.\sum_{k=0}^{4}|P(k)|=|\lambda|.|P|_\#$$

Séparation. Si $P$ est la polynôme nul, la somme est nulle.
Réciproquement, si la somme des valeurs absolues est nulle, chaque terme de la somme est nul *(exemple : $0\leqslant|P(1)|\leqslant|P|_\#=0$)*.
On a alors $P(0)+P(1)=P(2)=P(3)=P(4)$. Le polynôme $P$ a plus de racines que son degré, il est nul.
Trop d'élèves s'arrêtent à $P(0)=\ldots=P(4)=0$ sans comprendre que c'est loin d'être suffisant ; il faut arriver à “$P$ est nul”.

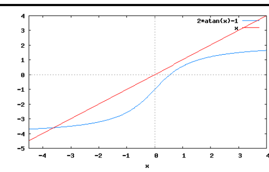
Inégalité triangulaire. On se donne $P$ et $Q$. Pour tout $k$ on a $|(P+Q)(k)| \leqslant |P(k)|+|Q(k)|$. On somme de 0 à 4. On a $|P+Q|_{\#} \leqslant |P|_{\#} + |Q|_{\#}$.

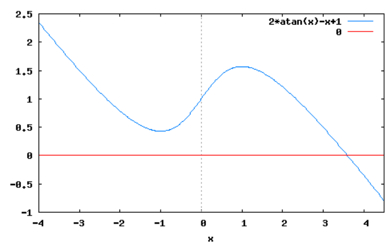
---

On calcule les cinq normes :

| $P$ | $1$ | $X$ | $X^2$ | $X^3$ | $X^4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert P\rvert_{\#}$ | 5 | 10 | 30 | 100 | 354 |

**IS18** • L'application $x \longmapsto 2.Arctan(x) + \alpha$. • MPSI 2/2013

On constate sur les graphiques fournis  que cette application aura toujours au moins un point fixé, et au plus trois. Pour qu'elle n'en ait qu'un, il faut et il suffit que deux se confondent en un : le graphe est tangent à la bissectrice en un point $a$. On va donc étudier la différence $\varphi = x \longmapsto 2.Arctan(x) + \alpha - x$, en la dérivant : $\varphi' = x \longmapsto \dfrac{2}{1+x^2} - 1$. Cette dérivée s'annule et



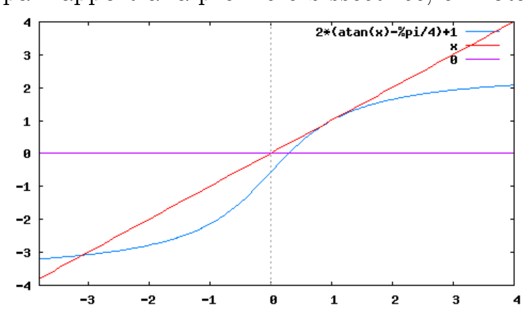

change de signe en $-1$ et en $1$.

On demande alors que cette différence $\varphi(-1)$ ou $\varphi(1)$ soit nulle.

On trouve $\boxed{\alpha = 1 - \dfrac{\pi}{2} \text{ ou son opposé.}}$

---

On trace sommairement le graphe et on applique les résultats visuels par intervalles stables et positions par rapport à la première bissectrice, en notant $\beta$ l'autre point fixe.




| $u_0$ | $]-\infty,\ \beta[$ | $\beta$ | $]\beta,\ \alpha[$ | $\alpha$ | $]\alpha,\ +\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | stable | fixe | stable | fixe | stable |
| monotonie | croissante | constante | décroissante | constante | décroissante |
| convergence | vers $\beta$ | vers $\beta$ | vers $\beta$ | vers $\alpha$ | vers $\alpha$ |

MPSI 2/2013 — 543 points — $IS18$

♡80 Soit $f$ une application continue de $[0,\ 1]$ dans lui même vérifiant $\int_0^1 f(t).dt = \frac{1}{2}$. Montrez que l'application $f - Id$ a une intégrale nulle et ne peut pas être de signe constant. Déduisez que $f$ a au moins un point fixe. •2 pt.•

---

◇72 Montrez pour tout $n$ supérieur ou égal à 2 : $n! \leqslant \sum_{k=0}^{n} k! \leqslant n! + 2.(n-1)!$. •1 pt.•

Déduisez que $\sum_{k=0}^{n} k!$ est équivalent à $n!$ quand $n$ tend vers l'infini. •1 pt.•

Indiquez si les séries de termes généraux $\frac{0!+1!+\ldots+n!}{(n+1)!}$ et $\frac{0!+1!+\ldots+n!}{(n+2)!}$ convergent. •2 pt.•

---

◇73 On définit : $f = x \longmapsto \sqrt{x^4 + 2.x^3 + x} - x^2$.
Déterminez le développement asymptotique quand $x$ tend vers l'infini positif, jusqu'à l'ordre $-1$ : $f(x) = a.x^2 + b.x + c + d.x^{-1} + o(1/x)$. •4 pt.•

---

♡81 Donnez la limite à l'infini de la suite $(n^{1/\ln(n)})$ en explicitant $N_\epsilon$ pour tout $\varepsilon$. •1 pt.•

---

♣29 Les vingt élèves de $MPSI\pi$ tirent encore au hasard le $TIPE$ qu'ils vont suivre. Ils tirent tous avec la même pièce *(pile=maths, face=physique)*, mais celle ci est déséquilibrée *(pile avec probabilité p)*. Quelle équation doit vérifier $p$ pour que l'on ait au moins une chance sur dix d'avoir deux groupes parfaitement équilibrés ? •2 pt.•

---

Ensuite, il y a trois élèves dans cette classe dont les prénoms sont ambigüs : Claude, Dominique et Camille. Je sais que si Dominique est un garçon, alors Claude est en une fille. Si Camille est un garçon, alors Dominique est une fille. Si Dominique est une fille, alors Camille aussi. Si Camille est de sexe féminin, alors Claude s'appelle Monsieur. Donnez moi le sexe de chacun *(enfin, non, indiquez le moi, c'est tout)*. •1 pt.•

---

♡82 Rappelez la définition de la somme de Riemann gauche d'une application $f$ sur un segment $[a,\ b]$ pour une équisubdivision en $n$ points. Montrez que $n.\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2+k^2}$ est une somme de Riemann *(quelle application, quel intervalle ?)*. •2 pt.•

---

♡83 On note $f$ l'application $x \longmapsto Arccos\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big) + Arcsin\Big(\frac{2.\sqrt{x}}{1+x}\Big)$. Donnez son domaine de définition. •2 pt.• Donnez la limite de $f$ à l'infini. •1 pt.•
Montrez : $f(1) = f(4)$. •1 pt.•
Dérivez $f$ en distinguant la position de la variable par rapport à 1. •2 pt.•
Résolvez l'équation $f(x) = \pi$ en posant le changement de variable $x = \tan^2(\theta)$. •1 pt.•

Charlemagne
MPSI-2 / 2013

Correction

$IS19$

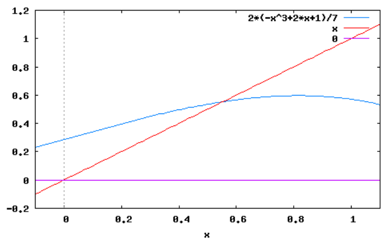
**IS19** • $f$ vérifiant $\int_0^1 f(t).dt = 1/2$. • MPSI 2/2013

On calcule donc $\displaystyle\int_0^1 (f(t) - t).dt$ comme suggéré, par linéarité, on trouve $\displaystyle\int_0^1 f(t).dt - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1$ et on trouve finalement 0.

---

Si l'application $f - Id$ ne s'annulait pas, elle serait de signe constant sur l'intervalle $[0,\ 1]$ sur lequel elle est continue *(contraposée du théorème des valeurs intermédiaires)*.

Mais alors soit elle serait strictement positive, auquel cas l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (f(t) - t).dt$ serait strictement positive, soit elle serait strictement négative, et l'intégrale aussi.
On aboutit à une contradiction, $f$ a au moins un point fixe.




*Si vous avez omis de mettre en valeur les mots "intervalle", "continuité" et "valeurs intermédiaires", vous avez perdu.*

**IS19** • Série avec $\sum_{k=0}^{n} k!$. • MPSI 2/2013

La première inégalité peut se démontrer par récurrence.

Mais on sait déjà $n! \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$ puisque cette somme de termes positifs contient au moins $n!$ lui même.

Ensuite, on isole les deux derniers termes : $\displaystyle\Big(\sum_{k=0}^{n-2} k!\Big) + (n-1)! + n!$. La somme est faite de $n-1$ termes (de 0 à $n-2$) et le plus grand est le dernier : $(n-2)!$. On majore donc cette somme par $(n-1).(n-2)!$.
Au final, on majore par $(n-1).(n-2)! + (n-1)! + n!$.

---

On part de l'encadrement et on divise par $n!$ qui est positif : $\displaystyle\frac{n!}{n!} \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n} k!}{n!} \leqslant \frac{n!}{n!} + \frac{2.(n-1)!}{n!}$.
les deux termes de l'encadrement tendent vers 1. Par le théorème de l'encadrement, $\displaystyle\frac{0! + 1! + 2! + \ldots + n!}{n!}$ tend vers 1 quand $n$ tend vers l'infini. C'est la définition des équivalents.

---

Le terme général $\displaystyle\frac{0! + 1! + 2! + \ldots + n!}{(n+1)!}$ est positif. La série associée est croissante. Mais ce terme général est égal à $\displaystyle\frac{0! + 1! + 2! + \ldots + n!}{n!}.\frac{1}{n+1}$ et est équivalent à $\displaystyle\frac{1}{n+1}$.

Par théorème sur les séries à termes positifs équivalents, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0! + 1! + \ldots + n!}{(n+1)!}$ diverge.

*On peut aussi minorer les sommes partielles par* $\sum_{n=0}^{N}\frac{n!}{(n+1)!}$ *et conclure par minoration, sans grand théorème.*

---

En revanche, le terme général $\frac{0!+1!+2!+\ldots+n!}{(n+2)!}$ est équivalent à $\frac{1}{(n+1).(n+2)}$. Et celui ci est le terme général d'une série télescopique qui converge. Le même théorème permet cette fois de conclure que la série converge.

**IS19** • L'application $x\longmapsto\sqrt{x^4+2.x^3+x}-x^2$. • MPSI 2/2013

Cette application est définie sur $\mathbb{R}^+$. On lève l'indétermination en $+\infty$ par quantité conjuguée : $f(x)=\frac{x^4+2.x^3+x-x^4}{\sqrt{x^4+2.x^3+x}+x^2}$. On passe aux équivalents : $f(x)\simeq\frac{2.x^3}{2.x^2}$. On trouve un équivalent égal à $x$.

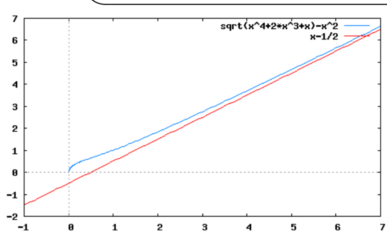
On soustrait $x$ : $f(x)-x=\sqrt{x^4+2.x^3+x}-(x^2+x)=\frac{x^4+2.x^3+x-(x^2+x)^2}{\sqrt{x^4+2.x^3+x}+(x^2+x)}=\frac{-x^2+o(x^2)}{2.x^2+o(x^2)}$.

On trouve une limite égale à $-1/2$.

On résume : $f(x)=x-\frac{1}{2}+o(1)$ quand $x$ tend vers l'infini.

Une étape de plus : $f(x)-x+\frac{1}{2}=\frac{x^4+2.x^3+x-(x^2+x-1/2)^2}{\sqrt{x^4+2.x^3+x}+(x^2+x)}=\frac{2.x+o(x)}{2.x^2+o(x^2)}\simeq\frac{1}{x}$.

Bilan : $\boxed{f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big)\text{ quand } x \text{ tend vers l'infini}}$




**IS19** • La suite $n^{1/\ln(n)}$. • MPSI 2/2013

Cette suite n'est définie qu'à partir du rang 2, mais après, c'est simple : $n^{1/\ln(n)}=(e^{\ln(n)})^{1/\ln(n)}=e^1=e$.

Cette suite converge vers $e$ et on a $|u_n-e|=0\leqslant\varepsilon$ à partir du rang $N=2$ par exemple.

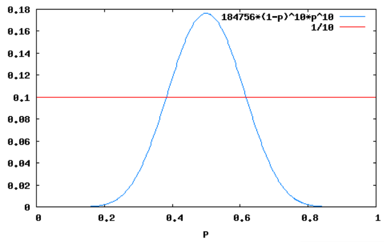
**IS19** • Les $T.I.P.E.$ de la $M.P.S.I.\pi$. • MPSI 2/2013

Les tirages avec la pièce déséquilibrée suivent donc encore une loi binomiale, mais cete fois avec paramètre $p$.

Pour qu'il y ait exactement dix élèves en $TIPE$ de maths et autant en $TIPE$ de physique, il faut et il suffit qu'il y a ait eu dix piles *(probabilité* $p^{10}$*)* et dix faces *(probabilité* $(1-p)^{10}$*)*, et il faut ensuite répartir les dix piles dans une liste de longueur 20 *(d'où le facteur* $\binom{20}{10}$*)*.

La probabilité d'équilibre parfait est donc $\binom{20}{10}.p^{10}.(1-p)^{10}$.

On veut qu'elle vaille au moins 1/10, d'où l'inéquation $\boxed{\binom{20}{10}.(p-p^2)^{10}\geqslant\frac{1}{10}}$




On résout : $p.(1-p) = \sqrt[10]{\dfrac{1}{10.\dbinom{20}{10}}}$. L'application numérique sur cette équation du second degré me donne $\boxed{0,382 < p < 0,617}$ *(valeurs à $10^{-3}$ prés)*. Et il est évident que le maximum correspond à la pièce équilibrée qui donne des groupes de dix avec probabilité $16,7$ pour cent à $10^{-3}$ près.

**IS19** • Le sexe des élèves. • MPSI 2/2013

On écrit les quatre quantifications :

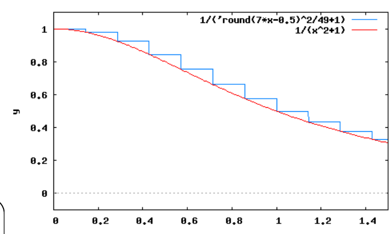
| | |
|---|---|
| a : DomG $\Rightarrow$ ClauF | b : CamG $\Rightarrow$ DomF |
| c : DomF $\Rightarrow$ CamF | d : CamF $\Rightarrow$ ClauG |

En mettant bout à bout $b$ et $c$ on aboutit à une fausse contradiction CamG $\Rightarrow$ CamF qui se résout par **Camille est une fille** *(oui, on le savait)*. Rappelons que $p \Rightarrow \overline{p}$ c'est non(p) ou non(p).
On reporte dans $d$ : **Claude est un garçon**.
On reporte dans la contraposée de $a$ : **Dominique ne peut être qu'une fille**.

**IS19** • Sommes de Riemann. • MPSI 2/2013

Par définition : $\dfrac{b-a}{n}.\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k.\dfrac{b-a}{n}\Big)$.

La somme qui nous est donnée est $n.\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{n^2.\Big(1+\Big(\dfrac{k}{n}\Big)^2\Big)}$ et on peut l'écrire $\dfrac{1}{n}.\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{1+(k/n)^2}$.




On pose alors $\boxed{f = x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2} \text{ et } (a,\ b) = (0,\ 1)}$

**IS19** • L'équation $Arccos(\frac{1-x}{1+x}) + Arcsin(\frac{2.\sqrt{x}}{1+x}) = \pi$. • MPSI 2/2013

Pour que $f(x)$ existe, plusieurs conditions dont certaines sont redondantes. On veut que $x$ soit positif, et différent de $-1$.
On veut que $(1-x)/(1+x)$ soit entre $-1$ et $1$. Or, l'homographie $x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ et y varie de $1$ (inclus) à $-1$ *(exclu)*. La condition d'existence de $Arccos((1-x)/(1+x))$ est donc vérifiée sur $[0, +\infty[$.
Quant à $\dfrac{2.\sqrt{x}}{1+x}$, c'est un réel positif pour $x$ positif. Mais mieux encore, il reste plus petit que 1. En effet, cette application a pour dérivée $x \longmapsto \dfrac{1-x}{(1+x)^2.\sqrt{x}}$ *(calcul rapide)*. Elle est donc croissante, puis

décroissante, de limite nulle. Son maximum est en 1 et il vaut 1. On a donc bien $\dfrac{2.\sqrt{x}}{1+x} \in [0,1]$ pour tout $x$ réel positif.
On l'a aussi par soustraction à 1 et utilisation de l'identité remarquable $(1-\sqrt{x})^2 \geqslant 0$.

---

Quand $x$ tend vers $+\infty$ *(cohérent avec le domaine)*, la fraction $\dfrac{1-x}{1+x}$ tend vers $-1$ et la fraction $\dfrac{2.\sqrt{x}}{1+x}$ tend vers 0. La somme $f(x)$ tend vers $Arccos(-1) + Arcsin(0)$ c'est à dire vers $\pi$.

---

On calcule : $f(1) = Arccos(0) + Arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$.
On calcule aussi : $f(4) = Arccos(-3/5) + Arcsin(4/5)$.
On est ici en présence de valeurs numériques qui ne nous sont pas inconnues. On va noter $\alpha$ l'angle de cosinus $3/5$ et de sinus $4/5$ *(forts que nous sommes de la relation $3^2+4^2=5^2$, nous savons qu'il existe)*. On a alors $Arccos(-3/5) = \pi - \alpha$ et $Arcsin(4/5) = \alpha$. On valide : $f(4) = \pi$.

---

On dérive les composées : $f'(x) = \dfrac{(-1)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}}.\dfrac{(-2)}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4.x}{(1+x)^2}}}.\dfrac{1-x}{(1+x)^2.\sqrt{x}}$. Avec des identités qu'on remarque plus ou moins, on arrive à $f'(x) = \dfrac{2}{(1+x)^2.\sqrt{\dfrac{4.x}{(1+x)^2}}} + \dfrac{1-x}{(1+x)^2.\sqrt{x}.\sqrt{\dfrac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}}$.
Par chance $1+x$ est positif, on peut donc déjà simplifier. Ensuite, le signe de $1-x$ dépend de la position de $x$ par rapport à 1.
Pour $x$ entre 0 et 1, on trouve $f'(x) = \dfrac{2}{(1+x).\sqrt{x}}$.
Pour $x$ plus grand que 1, la dérivée est nulle.

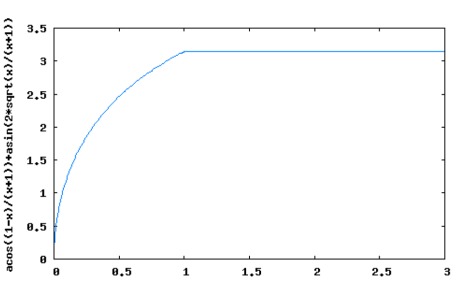
---

On confirme une chose qu'on aurait pu deviner : pour $x$ plus grand que 1, $f(x)$ vaut $\pi$ *(valeur en 1 en 4 et limite à l'infini)*.
L'équation $f(x) = \pi$ a pour solutions tout $[1, +\infty[$ *(et rien de plus, à cause de la stricte croissance avant 1)*.

---

Si l'on pose $x = \tan^2(\theta)$ *(cohérent avec la condition $x \geqslant 0$)*, l'équation devient $Arccos(\cos(2.\theta)) + Arcsin(\sin(2.\theta)) = \pi$ *(formules en arc moitié, qui deviennent arc double)*.
Si $x$ est entre 0 et 1, $\theta$ est entre 0 et $\pi/4$ et $2.\theta$ est entre 0 et $\pi/2$. On est dans la zone d'inversion du sinus et du cosinus et on simplifie : $f(x) = 4.\theta$. L'équation $f(x) = \pi$ n'a pas encore de solution.

Si $x$ est plus grand que 1, alors $2.\theta$ est entre $\pi/2$ et $\pi$. On a alors $Arccos(\cos(2.\theta)) = 2.\theta$ mais $Arcsin(\sin(2.\theta)) = \pi - 2.\theta$. On somme : $f(x) = \pi$.
On retrouve ce que l'on savait déjà : l'équation $f(x) = \pi$ a pour solution $[1, +\infty[$.



MPSI 2/2013 | 566 points | $IS19$

♡84 Donnez le développement limité quand $x$ tend vers 0 de $\sin^2(x)$ à l'ordre 7. •2 pt.•
Même question avec $\sin(x^2)$. •1 pt.•

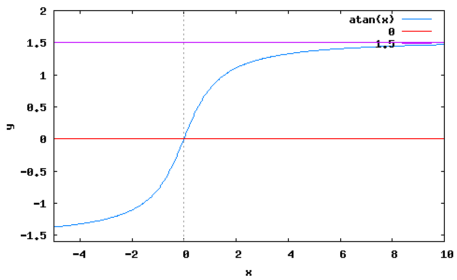
---

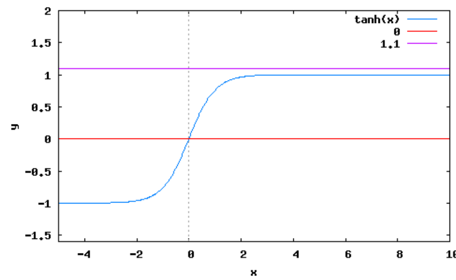
♡85 Prolongez en 0 l'application $x \longmapsto x^2.[1/x]$ notée $f$ *(à droite et à gauche).* •1 pt.• De quel(s) côté(s) de 0 est elle dérivable *(existence de limite des taux d'accroissement* $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$*).* •1 pt.•

♣ Exprimez $\displaystyle\int_0^1 f(t).dt$ à l'aide de la fonction $\zeta$ de Riemann. •3 pt.•

---

♢74 Les graphes de la tangente hyperbolique et de l'artangente se ressemblent :




Serait il possible qu'il existe $a$ et $b$ vérifiant $th(x) = a.Arctan(b.x)$ pour tout $x$ ? Donnez le développement limité d'ordre 5 quand $x$ tend vers 0 de $th(x)$ et de $a.Arctan(b.x)$. •3 pt.•
Déduisez qu'il ne peut exister $a$ et $b$. •1 pt.•
Trouvez une application $\varphi$ vérifiant $th(x) = Arctan(\varphi(x))$ pour tout $x$. •1 pt.•
Donnez sa limite en $+\infty$. •1 pt.•
Donnez son développement limité d'ordre 3 en 0. •3 pt.•

---

♡86 Le problème que Pavl Halmos aimait poser à ses étudiants : les concombres sont composés de quatre vingt dix neuf pour cent d'eau *(si si, et nous, c'est plus que quatre vingt dix pour cent).* Le Cours des Halles en bas de chez moi en a acheté cinq cent kilos. Mais après le week-end, ils ne sont plus formés que de quatre vingt dix huit pour cent d'eau. Combien de kilos lui reste-t-il à vendre ? •1 pt.•

---

♣30 On m'a offert un dé à six faces, équilibré. Ses faces sont numérotés 1, 2, 3, 4 et deux valeurs que je ne vous donnerai pas. Si je vous dis que si en lançant le dé deux fois de suite, l'espérace de la somme est 4 et l'espérance du produit aussi, pouvez vous retrouver la valeur des deux faces cachées ? •2 pt.•

---

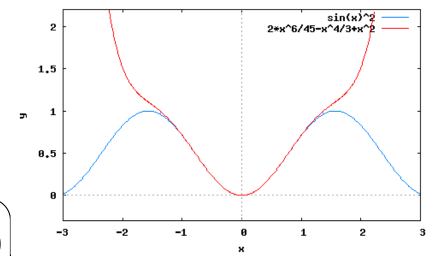
♢75 Complétez $A = \begin{pmatrix} 2 & * \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sachant que $\det(A + I_2)$ est nul. Calculez le plus grand coefficient de $A^{50}$. •3 pt.•

---

♢76 Donnez le développement limité quand $x$ tend vers 0 de $\displaystyle\int_{t=0}^{t=x} \frac{dt}{\cos(x)+\sin(t)}$ sans calculer l'intégrale, mais en effectuant le développement limité de la fonction sous le signe intégrale, puis en intégrant. •4 pt.•

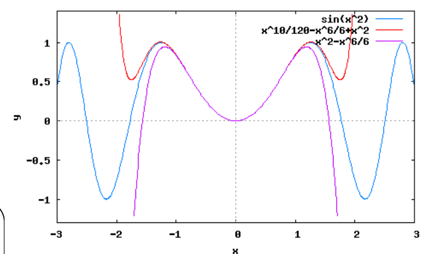
**IS20** • Développement limité de $\sin^2(x)$ en 0. • MPSI 2/2013

On connaît le développement limité du sinus en 0 : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$ et on élève au carré en développant un tableau. On constate que le terme en $x^7/7!$ n'intervient pas.
On peut aussi remplacer $\sin^2(x)$ par $\frac{1-\cos(2.x)}{2}$ et utiliser : $\cos(2.x) = 1 - \frac{(2.x)^2}{2} + \frac{(2.x)^4}{24} - \frac{(2.x)^6}{6!} + o(x^7)$ quand $x$ tend vers 0.




$$\boxed{\sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2.x^6}{45} + o(x^7) \text{ quand } x \text{ tend vers } 0}$$

Pour $\sin(x^2)$, c'est un simple remplacement dans le développement limité du sinus :



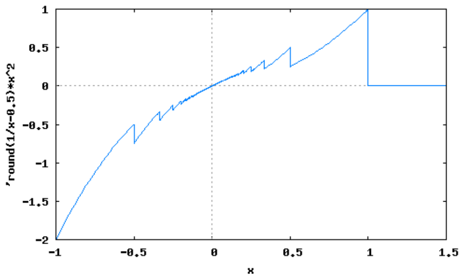

$$\boxed{\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^7)}$$

**IS20** • L'application $x \longmapsto x^2.[1/x]$. • MPSI 2/2013

Il n'y a qu'en 0 que cette application n'est pas définie. Mais on peut encadrer par définition même : $\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x}$. On multiplie par $x^2$ *(toujours positif, les inégalités ne changement pas de sens)* : $x - x^2 < f(x) \leqslant x$. Quand $x$ tend vers 0, par théorème du prolongement par encadrement, $f(x)$ tend vers 0 en 0 (des deux côtés). On posera donc $f(0) = 0$.

---

On divise par $x - 0$ la quantité $f(x) - f(0)$. On trouve $x.[1/x]$. Le même encadrement donne une limite à droite égale à 1.
$f$ est dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0) = 1$.
Le même encadrement, mais dans l'autre sens $1 - x > f(x)/x \geqslant 1$ donne $f'_g(0) = 1$.
Au final, $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 de dérivée 1}}$ *(sa tangente est la première bissectrice).*




---

Pour intégrer de 0 à 1, on découpe par relation de Chasles généralisée à une infinité de termes. On trouve la série des $\int_{1/(n+1)}^{1/n} f(t).dt$ *(termes positifs)*.

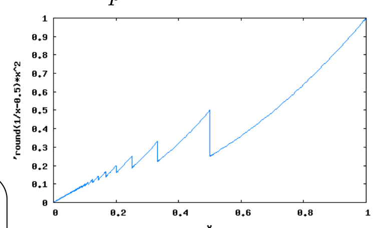
On sait déjà que la série va converger, car elle est majorée par 1 *(aire du carré de côté* 1*)*.

On calcule chaque terme qu'on va noter $u_n$ : $\int_{1/(n+1)}^{1/n} f(t).dt = \int_{1/(n+1)}^{1/n} n.t^2.dt$. On effectue : $u_n = \frac{n}{3}.\Big(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}\Big)$.

On somme de $n$ égal à 1 jusqu'à l'infini.

On d'ores et déjà la somme des $\frac{1}{n^2}$ avec coefficient 1/3. On la "connaît", c'est $\pi^2/6$.

Il reste la somme des $\frac{n}{(n+1)^3}$ qu'on arrange en $\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^3}$. C'est le retour de notre somme des $\frac{1}{p^2}$ *(à un terme près)*. Il nous reste $\zeta(3)$ (c'est la somme des $\frac{1}{p^3}$).




Bilan : $\boxed{\int_0^1 t^2.\Big[\frac{1}{t}\Big].dt = \frac{\zeta(3)}{3} = \frac{1}{3}.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}}$

**IS20** • Pavl Halmos et ses concombres. • MPSI 2/2013

Il faut raisonner calmement. Les données :

500 kg de concombres, soit 495 kg d'eau et 5 kg de matière sèche.

Le lundi : on n'a pas perdu de matière sèche, juste de l'eau *(par évaporation, déssèchement...)*. Il reste donc 5 kg de matière sèche. Cette matière représente deux pour cent de la masse de concombres *(complément du* 98%*)*. C'est donc qu'on a $5.\frac{100}{2}$ kg de concombres.

La bonne réponse est donc $\boxed{\text{250 kilogrammes de concombres}}$

*Paul Halmos fut assistant de John Von Neumann, et spécialiste de la vulgarisation mathématique par ailleurs.*

**IS20** • Arctangente et tangente hyperbolique. • MPSI 2/2013

On connaît le développement limité en 0 de l'arctangente *(par intégration de* $1/(1+x^2)$*)* :

$Arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$ puis $\boxed{a.Arctan(b.x) = a.b.x - a.\frac{b^3.x^3}{3} + a.\frac{b^5.x^5}{5} + o(x^5)}$ quand $x$ tend vers 0.

Pour la tangente hyperbolique, on rappelle : $sh(x) = x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$ et $ch(x) = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$ quand $x$ tend vers 0. On pose a priori les coefficients, on effectue un produit en croix, on identifie : $\boxed{th(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2.x^5}{15} + o(x^5)}$ quand x tend vers 0.

***La ressemblance avec le développement limité de la tangente est loin d'être fortuite.***

---

On veut identifier $th(x)$ et $a.Arctan(b.x)$, donc on identifie les développements limités : $a.b = 1$, $a.b^3/3 = 1/3$ et $a.b^5/5 = 2/15$. Il n'y a aucune compatibilité entre ces équations.

---

Il y a sans difficulté une application $\varphi$ vérifiant $th = Arctan \circ \varphi$. C'est $\boxed{x \longmapsto \tan(th(x))}$

Il n'y a pas de problème de domaine. De plus, $Arctan(\tan(..))$ se simplifie bien sur ce domaine *($th(x)$ reste entre $-1$ et $1$).*

Sa limite à l'infini est $\tan(1)$ dont on ne dira rien de plus.

En 0 on a son développement limité en posant $\alpha = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ dans $\tan(\alpha) = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + o(\alpha^3)$ *(après avoir vérifié que $\alpha$ tend bien vers 0).* On trouve sans tarder $\boxed{\varphi(x) = x + o(x^3)}$

Bonus : $\tan(th(x)) = x - \frac{x^5}{15} + o(x^6)$ quand $x$ tend vers 0.

**IS20** • Un dé à six faces dont deux cachées. • MPSI 2/2013

On note $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ a,\ b\}$ l'ensemble des événements du jet de ce dé. L'ensemble des événements équiprobables des deux jets de dé, c'est $A \times A$.

Les données de l'énoncé disent donc : $\frac{1}{36} \sum_{d\in A, d'\in A} (d + d') = 4$ et $\frac{1}{36} \sum_{d\in A, d'\in A} (d \times d') = 4$.

La première somme se séparent en deux sommes : $\frac{1}{36} \sum_{d\in A, d'\in A} d$ et $\frac{1}{36} \sum_{d\in A, d'\in A} d'$. Dans chacune, la variables très muette sert de compteur et on trouve $\frac{6}{36}.\sum_{d\in A} d$ et la même en $d'$. Bref, on trouve le double de l'espérance du dé *(c'était prévisible).* L'énoncé nous permet donc de conclure déjà : $\frac{1+2+3+4+a+b}{6} = 2$.

La deuxième somme est en fait la somme des termes du tableau des $d.d'$, elle se sépare en $\frac{1}{6}.\sum_{d\in A} d.\frac{1}{6}.\sum_{d'\in A} d'$. C'est *(là encore, on le savait)* le produit des deux espérances. L'énoncé nous donne dnc cette fois : $\left(\frac{1+2+3+4+a+b}{6}\right)^2 = 4$.

C'est deux fois la même équation, et la réponse est négative : **les données ne permettent pas de retrouver les valeurs de $a$ et $b$** *(tout au mieux, on sait que leur somme vaut 2).*

**IS20** • La matrice $\begin{pmatrix} 2 & . \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. • MPSI 2/2013

On calcule $A+I_2 = \begin{pmatrix} 3 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Son déterminant vaut $9-x$. C'est donc que $x$ vaut 9. On cherche alors les valeurs propres de $A$ (trace 4 et déterminant $-5$). Elles valent $-1$ et 5.

On diagonalise : $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

On élève à la puissance $n$ : $A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$.

En particulier : $\boxed{A^{50} = \begin{pmatrix} \dfrac{5^{50}+1}{2} & 3.\dfrac{5^{50}-1}{2} \\ \dfrac{5^{50}-1}{6} & \dfrac{5^{50}+1}{2} \end{pmatrix}}$

Le plus grand coefficient de $A^{50}$ est celui de ligne 1 colonne 2 : $3.\frac{5^{50}-1}{2}$.

**IS20** • L'intégrale $\int_{t=0}^{t=x} \frac{dt}{\cos(x)+\sin(t)}$ quand x tend vers 0. • MPSI 2/2013

Le réflexe du mathématicien : l'existence de l'intégrale. Pour $x$ donné, il faut éviter que le dénominateur ne s'annule. Or, pour $x$ “proche de 0” *(c'est à dire plus petit que $\pi/6$ en valeur absolue par exemple)*, son cosinus reste plus grand que $\sqrt{3}/2$, tandis que $|\sin(t)|$ reste plus petit que $1/2$ *(puisque $t$ est entre 0 et $x$)*.

On regarde le quotient $\dfrac{1}{\cos(x)+\sin(t)} = \dfrac{1}{1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)+t-\dfrac{t^3}{6}+o(t^3)}$ quand $x$ tend vers 0 *(et dans ce cas, $t$ tend aussi vers 0)*.

On identifie une forme en $\dfrac{1}{1+u}$ avec $u = t - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{t^3}{6} + o(x^3)$ *(comme $t$ est entre 0 et $x$, le $o(t^3)$ entre dans le $o(x^3)$)*.

C'est bien une quantité de limite nulle. On peut utiliser $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$ *(et le $o(u^3)$ est automatiquement $o(t^3)$ donc aussi $o(x^3)$)*.

On développe $u^2$ en $t^2 - x^2.t + o(x^3)$ et on remplace $u^3$ par $t^3 + o(x^3)$ *(par équivalent)*.

On résume : $\dfrac{1}{\cos(x)+\sin(t)} = 1 - t + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{t^3}{6} + t^2 - x^2.t - t^3 + o(x^3)$ quand $x$ tend vers 0 *(entraînant $t$ avec lui)*.

Il ne reste plus qu'à intégrer en $t$ de 0 à $x$ :

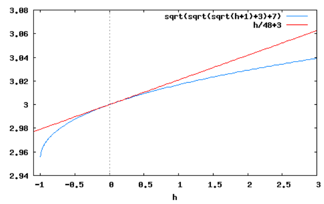
$\displaystyle\int_0^x \Big(\frac{1}{\cos(x)+\sin(t)}\Big).dt = \int_0^x \Big(1 - t + \frac{x^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^2 - x^2.t^2 - t^3 + o(x^3)\Big).dt$ quand $x$ tend vers 0.

$$\boxed{\int_0^x \Big(\frac{1}{\cos(x)+\sin(t)}\Big).dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{5.x^3}{6} - \frac{17.x^4}{24} + o(x^4)}$$

Il est important qu'il ne reste plus que des $x$ dans la formule finale.

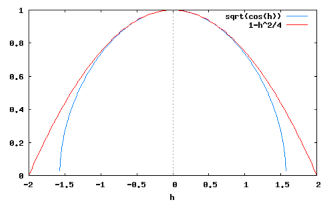
| | | |
|---|---|---|
| MPSI 2/2013 | 593 points | $IS20$ |

♡87 Développement limité d'ordre 2 quand $x$ tend vers 1 de $\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{x}}}$. •4 pt.•




---

♡88 Donnez le développement limité d'ordre 5 quand $\theta$ tend vers 0 de $\sqrt{\cos(\theta)}$. •2 pt.•




Donnez son développement limité d'ordre 2 en $\pi/3$. •2 pt.•

---

♡89 Calculez $y \longmapsto \left(x \longmapsto \left(Arctan\left(\frac{x^2-y^2}{2.x.y}\right)\right)'\right)'$. •5 pt.•

---

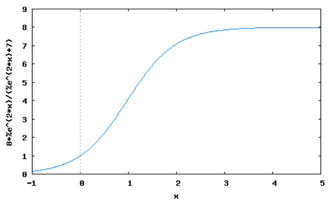
♣31 Le retour du dé à six faces dont quatre valent 1, 2, 3 et 4. Si je vous dis que l'espérance est 2 et la variance 40/3, pouvez vous retrouver les valeurs qui manquent ? •2 pt.•

---

♢77 Calculez le déterminant de la matrice $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. •1 pt.•

---

♢78 Soit $f$ la solution de l'équation différentielle logistique $y'_t = 2.y_t - \left(\frac{y_t}{2}\right)^2$ qui modélise l'évolution d'une population qui se reproduit suivant la loi classique $y'_t = \alpha.y_t$ *(plus il y a de monde, plus il y a de naissances)*, compensée par un facteur de limitation des ressources *(quand des individus se rencontrent trop souvent, ils entrent en concurrence sur les ressources disponibles)*. On ne cherche pas à résoudre cette équation même si c'est faisable.
Donnez le développement limité de $f$ à l'ordre 3 en 0 sachant que $y_0$ vaut 1. •3 pt.•




---

♠14 Tracez un pentagone convexe. Reliez tous les sommets entre eux *(vous devez voir un "pentacle")*. Combien y a-t-il de triangles sur votre figure. •2 pt.•

**IS21** • Développement de $\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{x}}}$ en 1. • MPSI 2/2013

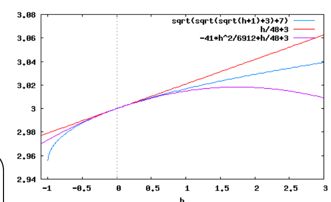
Premier réflexe : l'application est bien définie sur un voisinage de 1 *(et même sur* $]0,\ +\infty[$ *si on exige même la dérivabilité).* On sait par formule de Taylor-Young qu'il existe un développement limité.
Comme on travaille au voisinage de 1, le réflexe impératif et élémetaire est la translation : $x = 1+h$ *(sur laquelle on restera jusqu'au bout).*

La formule à utiliser plusieurs fois est $(1+u)^{1/2} = 1+\dfrac{u}{2}-\dfrac{u^2}{8}+\dfrac{u^3}{16}+o(u^3)$ quand $u$ tend vers 0 obtenue par formule de Newton $\dfrac{\alpha.(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$.

On a donc $\sqrt{3+\sqrt{1+h}} = \sqrt{4+\dfrac{h}{2}-\dfrac{h^2}{4}+\dfrac{h^3}{16}+o(h^3)} = 2.\sqrt{1+\dfrac{h}{8}-\dfrac{h^2}{16}+\dfrac{h^3}{64}+o(h^3)}$ en factorisant par 4.

On recommence en posant cette fois $u = \dfrac{h}{8}-\dfrac{h^2}{16}+o(h^2)$ car je me rends compte que je n'ai demandé que l'ordre 2 : $\sqrt{3+\sqrt{1+h}} = 2+\dfrac{h}{8}-\dfrac{9.h^2}{256}+o(h^2)$.

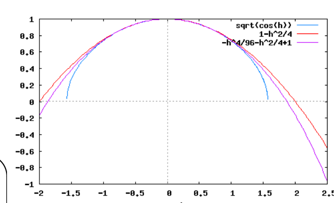
On ajoute 7, on factorise par 9 : $\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1+h}}} = 3.\sqrt{1+\dfrac{h}{72}-\dfrac{h^2}{256}+o(h^2)}$. Un dernier coup :




$$\boxed{\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1+h}}} = 3+\frac{h}{48}-\frac{41.h^2}{6912}+o(h^2) \text{ quand } h \text{ tend vers } 0}$$

**IS21** • Développement limité en 0 de $\sqrt{\cos(x)}$. • MPSI 2/2013

Toujours pas de problème de domaine de définition ni de classe. On développe le cosinus à l'ordre 5 : $\cos(h) = 1-\dfrac{h^2}{2}+\dfrac{h^4}{24}+o(h^5)$ quand $h$ tend vers 0. On reprend le développement $\sqrt{1+u} = 1+\dfrac{u}{2}-\dfrac{u^2}{8}+o(u^2)$ avec $u$ égal à $-\dfrac{h^2}{2}+\dfrac{h^4}{24}+o(h^5)$ qui tend bien vers 0 en 0 et dont le carré se bornera à $\dfrac{h^4}{4}$ vu l'ordre choisi.

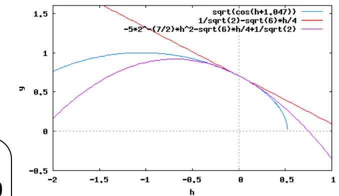



$$\boxed{\sqrt{\cos(h)} = 1-\frac{h^2}{4}-\frac{h^4}{96}+o(h^5) \text{ quand } h \text{ tend vers } 0}$$

---

En $\pi/3$ on pose $x = \pi/3+h$ et on développe déjà le cosinus : $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+h\right) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}.h}{2}-\dfrac{h^2}{4}+o(h^2)$.

On factorise $\dfrac{1}{2}$ pour avoir encore $\sqrt{\dfrac{1}{2}}.(1+u)^{1/2}$ avec $u$ tendant vers 0.




$$\boxed{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}.h}{4} - \frac{5.\sqrt{2}.h^2}{16} + o(h^2) \text{ quand } h \text{ tend vers } 0}$$

**IS21** • Dérivations successives $y \longmapsto (x \longmapsto (Arctan(\frac{x^2-y^2}{2.x.y}))')'$. • MPSI 2/2013

Il faut avant tout comprendre la notation et décomposer le travail :
$(x \longmapsto \Big(Arctan\Big(\dfrac{x^2-y^2}{2.x.y}\Big)\Big)'$ est la dérivée d'une application en la variable $x$, dans laquelle $y$ est (pour l'instant) une constante.

On se fixe $y$ et on dérive la composée $x \longmapsto \dfrac{x^2-y^2}{2.x.y} \longmapsto Arctan\Big(\dfrac{x^2-y^2}{2.x.y}\Big)$.

On trouve le produit de $\dfrac{2.x.(2.x.y)-2.y.(x^2-y^2)}{(2.x.y)^2}$ et $\dfrac{1}{1+\Big(\dfrac{x^2-y^2}{2.x.y}\Big)^2}$. Pas d'inquiétude, de belles simplifications se font, et il reste $\dfrac{2.x^2.y+2.y^3}{4.x^2.y^2+(x^2-y^2)^2}$ et même simplement $2.\dfrac{y.(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

Bref, toutes simplifications faites :
$(x \longmapsto \Big(Arctan\Big(\dfrac{x^2-y^2}{2.x.y}\Big)\Big)' = \Big(x \longmapsto \dfrac{2.y}{x^2+y^2}\Big)$

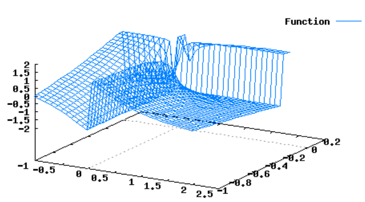
Mais on n'a pas fini, il faut encore voir cette chose comme une fonction de $y$ et la dériver à son tour.

On a cette fois $y \longmapsto 2.\dfrac{1.(x^2+y^2)-y.(2.y)}{(x^2+y^2)^2}$.

Il ne reste plus qu'à remettre ceci à l'étage des fonctions et même des fonctions de fonction :

$$\boxed{\Big(y \longmapsto (x \longmapsto \Big(Arctan\Big(\frac{x^2-y^2}{2.x.y}\Big)\Big)'\Big)' = \Big(y \longmapsto \Big(x \longmapsto 2.\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big)\Big)}$$

*Cette formulation est celle des froides mathématiques. Elle est exprimée à l'étage des fonctions. Mais en mathématiques plus chaudes et plus maniables, la formule est* $\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial}{\partial x}Arctan\Big(\dfrac{x^2-y^2}{2.x.y}\Big)\Big)$ *et même*




$\dfrac{\partial^2 Arctan\Big(\dfrac{x^2-y^2}{}\Big)}{\partial y \partial x} = \dfrac{2.(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

C'est effectivement plus maniable, mais il faut bien comprendre qu'il ne s'agit pas de dérivation de fonctions mais de dérivation formelle de formules. En physique et en notation de Landau, il n'y a pas de fonctions, mais des formules. Quand on écrit $U = R.I$ (loi d'Ohm), ce n'est pas que $U$ est fonction des deux variables $R$ et $I$ mais que l'on exprime $U$ à l'aide de $R$ et $I$. Les règles de dérivation formelle sont toutes celles qui figurent dans votre formulaire du bac, évidemment.

**IS21** • Le dé à six faces dont deux inconnues. • MPSI 2/2013

On persiste à noter $a$ et $b$ les deux valeurs qui manquent. L'espérance c'est $\dfrac{1+2+3+4+a+b}{6}$, et la variance c'est $\dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2+a^2+b^2}{6} - \Big(\dfrac{1+2+3+4+a+b}{6}\Big)^2$ *(égale dont à* $40/3$*)*.

Les donnés de l'énoncé donnent sans attendre $a+b=2$ et $a^2+b^2=74$. On extrait leur produit par $a.b=\dfrac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2}=-35$. Ce sont les deux racines (réelles ?) de l'équation $x^2+2.x-35=0$ d'inconnue $x$ et de racines $\boxed{-5 \text{ et } 7}$

*La prochaine fois, je prendrai $2.i$ et $-2.i$ histoire de vraiment brouiller les pistes et avoir un pur dé de matheux. Mais il me sera alors difficile de savoir qui entre 3 et $-2.i$ gagne...*

**IS21** • Un déterminant. • MPSI 2/2013

C'est cadeau ; on développe par rapport à chaque colonne l'une après l'autre, et on a juste le produit des différents entiers non nuls de la matrice, à peu de choses près. Plus simplement, on permute l'ordre des colonnes : $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ et on développe. Il reste $2.3.2.\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ et il reste $\boxed{58}$

**IS21** • Système logistique de Verhulst $y' = 2.y - (y/2)^2$. • MPSI 2/2013

L'équation n'étant pas linéaire, le cours ne nous dit pas comment la résoudre. On sait néanmoins qu'il existe une solution car l'équation est sous forme de Cauchy-Lipschitz autonome ($y'$ fonction régulière de $y$). On a donc une unique solution qui est pour le moins dérivable. Mais comme $f'$ est fonction dérivable de $f$, $f'$ est dérivable. $f$ est donc deux fois dérivable. On reporte, $f'$ l'est aussi. En mettant le processus en boucle, la solution est de classe $C^\infty$. Elle admet donc des développements limités à tous ordres. Et il en est de même de $f'$. De plus, on a alors la garantie que le développement de $f'$ est obtenu comme si on dérivatit celui de $f$.

On pose donc a priori un développement pour $f$ de la forme $f(t)=1+a.t+b.t^2+c.t^3+o(t^3)$ quand $t$ tend vers 0.

Celui de $f'$ est $f'(t)=a+2.b.t+3.c.t^2+o(t^2)$ par formule de Taylor-Young.

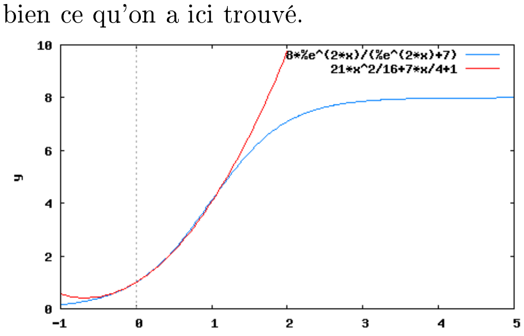
On reporte dans l'équation différentielle :

$a+2.b.t+3.c.t^2+o(t^2)=2.(1+a.t+b.t^2)-(1+a.t+b.t^2)^2/4+o(t^2)$

On développe et identifie par unicité du développement limité. On trouve un système qui se résout de ligne en ligne : $a=7/4$, $2.b=3.a/2$ et $3.c=(6.b-a^2)/4$.

On résume : $\boxed{f(t)=1+\frac{7}{4}.t+\frac{21}{16}.t^2+\frac{77}{192}.t^3+o(t^3) \text{ quand } t \text{ tend vers } 0}$

Pour information, la solution explicite est en fait $t \longmapsto \dfrac{8.e^{2.t}}{e^{2.t}+7}$ dont le développement limité redonne bien ce qu'on a ici trouvé.



**IS21** • Nombre de triangles dans un pentacle. • MPSI 2/2013

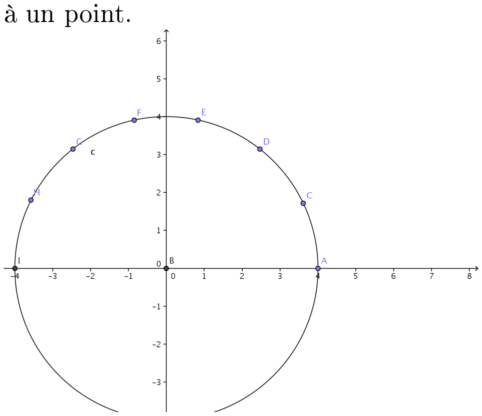
Il y a évidemment des réponses plus ou moins logiques et/ou fumeuses :
il n'y a aucun triangle sur ma figure, sinon j'aurais une bien sale gueule,
désolé, j'ai tracé un pentagone dont tous les sommets sont confondus, tout se réduit à un point, il n'y a pas de triangle
je n'ai relié les sommets que dans l'ordre (sommet $n$ avec sommet $n+1$), il n'y a donc aucun triangle
j'ai tracé la figure sur du papier quadrillé, il y a donc beaucoup de triangles réduits à un point, comme ceux aux intersections du quadrillage
Sinon, il suffit d'être méthodique. On n'en dénombre que dix si on ne regarde que les triangles qui ne sont coupés par aucune droite de notre schéma. Ce sont les triangles "sur le bord".
Mais il en reste d'autres, comme ceux formés par un sommet et "les deux sommets opposés".
Pour se comprendre, on note de $A_1$ à $A_5$ les sommets du pentagone. Quand on trace les segments intérieurs comme $A_1A_3$ (il y en a cinq), on crée des points qui définissent un "petit pentagone intérieur". On les note de $B_1$ à $B_5$, en notant $B_k$ le point intérieur "opposé à $A_k$". C'est ainsi que $B_2$ est l'intersection de $A_1A_4$ et $A_3A_5$.
Chaque triangle a pour sommet au moins l'un des $A_k$ (il faut trois points, et on n'a pas de triangle formé uniquement avec des $B$).
On va compter les triangles issus du sommet $A_1$ et on va multiplier par 5 pour avoir tous les triangles :

| $A_1A_2A_3$ | $A_1A_2A_4$ | $A_1A_2A_5$ | $A_1A_3A_4$ | $A_1A_3A_5$ | $A_1A_4A_5$ | total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/3 | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 2 |

| $A_1A_2B_5$ | $A_1A_2B_4$ | $A_1A_2B_3$ | $A_1A_3B_2$ | | | total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | | | 2 |

| $A_1B_5A_4$ | $A_1B_2A_5$ | $A_1B_3A_5$ | $A_1B_4A_5$ | $A_1B_4B_3$ | | total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1 | | 3 |

Qui sont ces coefficients de pondération ? C'est pour indiquer que chacun des triangles sera compté plusieurs fois, en fonction du nombre de sommets $A_i$.
On a donc finalement sept triangles par sommet $A_k$. Et comme il y a cinq sommets $A_k$, on aboutit à un total de $\boxed{\text{trente cinq triangles}}$
Cette méthode me rappelle le décompte des atomes dans les réseaux cristallographiques *(hexagonal compact et autres)*.
On peut ensuite s'amuser à compter aussi les triangles réduits à un segment *(triangles plats)* et réduits à un point.



MPSI 2/2013 | `614 points` | $IS21$

Charlemagne
MPSI-2 / 2013 | Mardi 18 mars | $IS22$

♡90 $(E,\ +,\ .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quantifiez “la famille $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}, \dots \overrightarrow{e_p})$ est libre”. •1 pt.•

---

◇79 On définit : $f = x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. Donnez le développement limité de $f$ en 2, en 4 et en son maximum (à l’ordre 3 en chacun pour le maximum de points, sinon, arrêtez à l’ordre 2). •5 pt.•

◇80 Indiquez suivant la valeur de $a$ *(réel strictement positif)* le nombre de solutions de l’équation $a^x = x^a$ d’inconnue réelle positive $x$. •2 pt.•

◇81 Montrez que pour $a$ au voisinage de 2 l’équation $a^x = x^a$ admet une solution $x$ strictement positive autre que $a$ que l’on va noter $\varphi(a)$. •1 pt.•

◇82 Donnez alors le développement d’ordre 1 de $\varphi$ au voisinage de 2. •2 pt.•

---

♣32 Vous lancez trois dés à six faces classiques, équilibrés.
Quelle est la probabilité que le maximum des valeurs affichées soit égal à 1 ? •1 pt.•
Quelle est la probabilité que le maximum des valeurs affichées soit inférieur ou égal à 2 ? •1 pt.•
Quelle est la probabilité que le maximum des valeurs affichées soit égal à 2 ? •1 pt.•
Quelle est la probabilité que le maximum des valeurs affichées soit égal à 3 ? •1 pt.•

---

♠15 Si `L` est une liste d’entiers positifs tous différents, que fait le script suivant :

```
a, b = 0, 0
for c in L :
....if c > b :
........if c > a :
............b = a
............a = c
........else :
............b = c
print(b)
```

Qu’affichera-t-il pour $L = [1,\ 5,\ 6,\ 4,\ 9,\ 7,\ 2]$ ? •3 pt.•

---

◇83 Ajustez $a$ et $b$ pour que $\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$ soient vecteurs propres de $\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$.

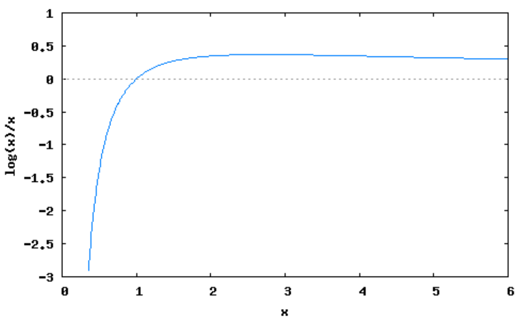
MPSI 2/2013 | 632 points | $IS22$

**IS22** • Familles libres. • MPSI 2/2013

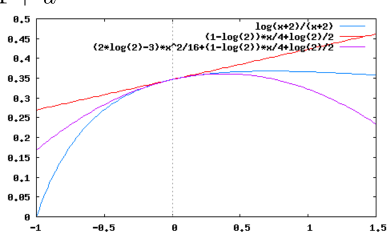
La définition est "la seule combinaison nulle est la combinaison triviale".
$\forall(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p) \in \mathbb{R}^p,\ \left(\alpha_1.\overrightarrow{e_1} + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{e_p} = \overrightarrow{0}\right) \Rightarrow \left(\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0\right)$

**IS22** • L'application $x \longmapsto \ln(x)/x$. • MPSI 2/2013

Cette application est définie, continue, et même de classe $C^\infty$ sur tout son domaine $]0,\ +\infty[$. Elle admet donc un développement limité en tout point à tout ordre, donné par la formule de Taylor.
Il n'est pas absurde de dériver trois fois pour avoir chacun des trois développements limités.

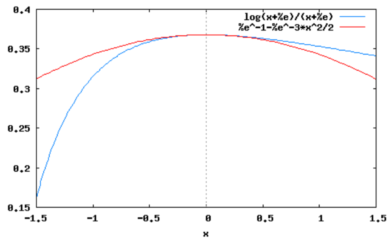



Sinon, de toutes façons, on pose $x = 2 + h$ pour le premier. On a alors $f(2+h) = \dfrac{\ln(2+h)}{2+h} = \dfrac{\ln(2) + \ln(1+h/2)}{2.(1+h/2)}$ et on utilise les développements connus $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$ et $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$. Il ne reste plus qu'à les multiplier.




On procède de même en 4, et en $e$.
En effet, le maximum est en $e$, là où la dérivée s'annule et change de signe, et la dérivée c'est $x \longmapsto \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.

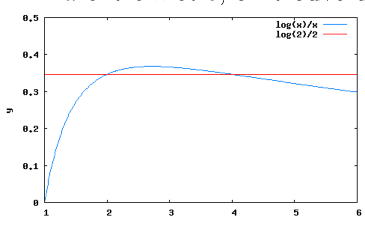
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(2+h) =$ | $\dfrac{\ln(2)}{2}$ | $\dfrac{1-\ln(2)}{4}.h$ | $\dfrac{2.\ln(2)-3}{16}.h^2$ | $\dfrac{11-6.\ln(2)}{96}.h^3$ | $+o(h^3)$ |
| $f(e+h) =$ | $\dfrac{1}{e}$ | | $-\dfrac{1}{2.e^3}.h^2$ | $\dfrac{5}{6.e^4}.h^3$ | $+o(h^3)$ |
| $f(4+h) =$ | $\dfrac{\ln(2)}{2}$ | $\dfrac{1-\ln(4)}{16}.h$ | $\dfrac{4.\ln(2)-3}{128}.h^2$ | $\dfrac{11-12.\ln(2)}{1536}.h^3$ | $+o(h^3)$ |




---

On étudie ensuite l'équation $a^x = x^a$ d'inconnue $x$ et de paramètre $a$. Par injectivité du logarithme, elle équivaut à $x.\ln(a) = a.\ln(x)$, et par division si tout va bien, elle devient $\frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(x)}{x}$. On reconnaît $f$.
Pour tout $a$ il y a bien sûr la solution $x = a$. Mais sinon, il peut y en avoir d'autres si il survient un défaut d'injectivité de $f$.
Et justement, $f$ en a, puisque $f$ n'est pas un homéomorphisme.

Pour $a$ entre 0 et 1, $f(a)$ est négatif, et la valeur $f(a)$ n'est atteinte qu'une fois. On n'a qu'une solution : $a$ lui même. On vérifie : $a^a = a^a$ (facile !).
Pour $a$ égal à 1, l'équation $1^x = x^1$ n'a pas d'autre solution que 1.
Pour $a$ entre 1 et $e$, on trouve une autre solution, plus grande que $e$.

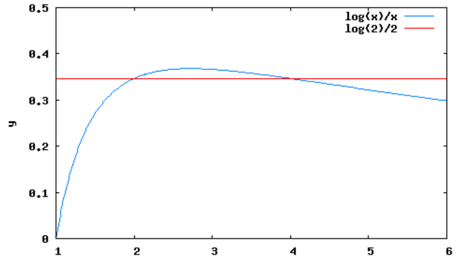



Un exemple simple est $a = 2$ : on trouve une solution : $x = 4$ en effet $2^4 = 4^2$.
Pour $a$ égal à $e$, l'équation $e^x = x^e$ n'a que la solution $x = e$.
Pour $a$ plus grand que $e$, il y a une solution $x$ entre 1 et $e$ (en inversant les rôles sur le schéma précédent).

Pour être rigoureux. On voit que $f$ réalise un homéomorphisme croissant de $]1,\ e[$ sur $]0,\ 1/e[$. On note $F$ sa réciproque de $]0,\ 1/e[$ sur $]1,\ e[$.
Ensuite, $f$ réalise un homéomorphisme décroissant de $]e,\ +\infty[$ sur $]0,\ 1/e[$. On note $\Phi$ sa réciproque de $]0,\ 1/e[$ sur $]e,\ +\infty[$.
Pour $a$ dans $]0,\ e[$, on a la solution $x$ égale à $\Phi(f(a))$.
Pour $a$ dans $]e,\ +\infty[$, on a la solution $x$ égale à $F(f(a))$.

---

$\varphi$ est une composée d'homéomorphismes et même de difféomormphismes. On sait donc que $\varphi$ admet un développement limité d'ordre 1 par exemple.
On le pose a priori : $\varphi(2 + h) = 4 + \alpha.h + o(h)$. Oui, la valeur en 2 de $\varphi$ est bien 4.
On a alors $a^{\varphi(a)} = \varphi(a)^a$ ou mieux encore : $f(2 + h) = f(4 + \alpha.h + o(h))$.



Quelle chance ! On a déjà effectué les deux développements utiles de $f$ en 2 et 4 (à un ordre trop élevé, mais on tronque).

On compose les développements : $\dfrac{\ln(2)}{2}+\dfrac{1-\ln(2)}{4}.h+o(h)=\dfrac{\ln(2)}{2}+\dfrac{1-\ln(4)}{16}.\alpha.h+o(h)$.

On identifie par unicité : $\alpha=4.\dfrac{1-\ln(2)}{1-\ln(4)}$.

On résume : $\varphi(2+h)=4-4.\frac{\ln(2)-1}{\ln(4)-1}.h+o(h)$ quand $h$ tend vers 0.

**IS22** • Trois dés, leur maximum. • MPSI 2/2013

Les trois tirages des dés sont indépendants.

La maximum vaut 1 si et seulement si les trois dés donnent 1. La probabilité est $\left(\dfrac{1}{6}\right)^3$.

La maximum (variable aléatoire appelée $M$) est plus petit que 1 si et seulement si chaque tirage est plus petit que 2. Pour un dé, on a une probabilité de $\dfrac{1}{3}$. On trouve donc $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$.

La probabilité que la variable aléatoire $M$ soit inférieure à 2 est la somme de deux événements disjoints : $M=1$ et $M=2$. On a donc $P(M=2)=P(M\leqslant 2)-P(M=1)$ par simple soustraction. On trouve $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3-\left(\dfrac{1}{6}\right)^3$.

On a ensuite $P(M=3)=P(M\leqslant 3)-P(M\leqslant 2)$ par la même soustraction.

D'autre part, $M$ est plus petite que 3 si et seulement si chaque dé (indépendant des autres) à tiré un nombre plus petit que 3 (probabilité pour chacun : 1/2). Il reste $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$.

On résume par un tableau (réflexe d'ingénieur) :

| $M=1$ | $M\leqslant 2$ | $M=2$ | $M\leqslant 3$ | $M=3$ | événement |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\dfrac{1}{6}\right)^3$ | $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$ | $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3-\left(\dfrac{1}{6}\right)^3$ | $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ | $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$ | probabilité |

**IS22** • Un script Python et a liste $L=[1,\ 5,\ 6,\ 4,\ 9,\ 7,\ 2]$. • MPSI 2/2013

On initialise deux variables nulles `a` et `b` puis on parcourt le liste (`for c in L` qui est plus léger que `for k in range(len(L))` avec `L[k]` ensuite partout).

On reconnaît un principe qui rappelle la recherche du maximum. Dès que `c` dépasse la valeur `a`, c'est lui qu'on place dans `a`, et on continue à avancer.

Ici, la chose se complique un peu. Il y a deux variables que l'on pousse devant soi : `a` et `b`.

Si on dépasse `b`, on se demande si on dépasse aussi `a`. Si tel est le cas, on repousse un peu tout le monde, `a` devient le nouvel élément `c`, et `b` est remplacé par l'ancien leader `a` *(et l'ancien `b` est perdu)*.

Si on dépasse `b` mais pas `a`, alors `a` garde son leadership, et c'est `b` qu'on remplace par le nouveau venu.

Si on ne dépasse pas `b`, on garde les deux nombres de tête.

Bref, au fil du parcours, a va prendre la valeur du maximum, et b va prendre la valeur de celui qui suit.

Comme c'est `b` qu'on affiche à la fin, on affiche le numéro 2 de la liste classée par ordre décroissant

Celui qui est juste sous le maximum.

On simule le cas de la liste `L` de l'énoncé.

| `c` | | 1 | 5 | 6 | 4 | 9 | 7 | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| `b` | 0 | 0 | 1 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | |
| `a` | 0 | 1 | 5 | 6 | 6 | 9 | 9 | 9 | |

et on affiche bien 7.

| | | |
|---|---|---|
| Charlemagne<br>MPSI-2 / 2013 | Mardi 18 mars | *IS*22 |

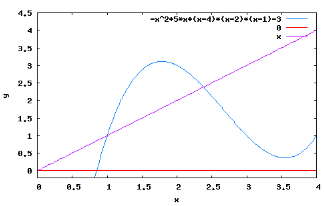
♡91 L'application $x \longmapsto 2.\cos(x+1)$ est elle dans $Vect(\cos,\ \sin,\ \cos^2,\ \sin^2)$ ? •1 pt.•

Et l'application $x \longmapsto \cos(2.x)+1$ ? •1 pt.•

Et l'application $x \longmapsto \cos(2.x+1)$ ? •1 pt.•

---

♢84 Soit $f$ une application de classe $C^1$ vérifiant $f(1)=f(4)=1$ et $f(2)=3$ *(propriété $\pi$)*. Donnez l'équation de la tangente en un point $c$. •1 pt.• Montrez qu'il existe au moins une abscisse $c$ où cette tangente est parallèle à la première bissectrice. •3 pt.•




♢85 Construisez un polynôme de degré 2 vérifiant cette propriété $\pi$ et déterminez $c$. •1 pt.•

♢86 Construisez un polynôme de degré 3 vérifiant cette propriété $\pi$ et calculez $c$. •1 pt.•

---

♠16 On définit $f = x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}} - \dfrac{1}{\sqrt{\tan(t)}}$. Prolongez la par continuité en 0 à droite. •2 pt.•

Est elle dérivable à droite en 0 ? •1 pt.•

---

♣33 Sachant que les six jours du B.H.V., c'est du 13 au 26 mars *(vérifiez, c'est écrit sur la façade)*, combien de jours dureraient les vingt quantre heures du Mans si elles avaient lieu rue de Rivoli ? •0 pt.•

---

♠17 Que fait le script Python suivant sachant que `M` est une matrice à `n` lignes et `n` colonnes *(coefficients réels)* : •2 pt.•

```
MM = [[0]*n for i in range n]
for i in range(n) :
....for k in range(n) :
........for j in range(n) :
............MM[i][k] += M[i][j]*M[k][j]
print(MM)
```

Que donnerait il pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. •2 pt.•

Justifiez le fait que `sum(MM[i][i] i in range(n))` est positif. •1 pt.•

Quel est le signe du déterminant de MM ? •1 pt.•

---

♡92 Donnez le développement limité en 1 à l'ordre 2 de $\ln(3^x - 2^x)$ quand $x$ tend vers 1. •3 pt.•

---

♢87 Complétez $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$ pour que $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ soit vecteur propre et que sa trace vaille 5. Donnez son spectre. •2 pt.•

**IS22** • L'espace vectoriel $Vect(\cos,\ \sin,\ \cos^2,\ \sin^2)$. • MPSI 2/2013

Il s'agit donc de l'espace vectoriel formé des applications de la forme
$x \longmapsto a.\cos(x) + b.\sin(x) + c.\cos^2(x) + d.\sin^2(x)$.
On développe les applications de l'énoncé

| | a | b | c | d | réponse |
|---|---|---|---|---|---|
| $2.\cos(x+1) = 2.\cos(1).\cos(x) - 2.\sin(1).\sin(x)$ | $2.\cos(1)$ | $-2.\sin(1)$ | 0 | 0 | oui |
| $\cos(2.x) + 1 = \cos^2(x) - \sin^2(x) + 1 = 2.\cos^2(x)$ | 0 | 0 | 2 | 0 | oui |

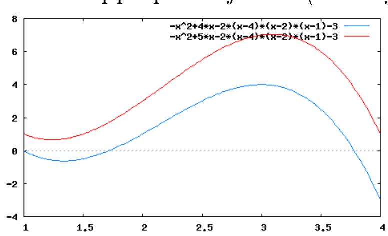
On poursuit : $\cos(2.x+1) = \cos(1).(\cos^2(x) - \sin^2(x)) - \sin(1).\sin(2.x)$.
Cette application est dans l'espace vectoriel si et seulement si $x \longmapsto \sin(2.x)$ y est aussi *(soustraction...)*.
Mais on ne peut pas trouver $a$, $b$, $c$ et $d$ vérifiant $\sin(2.x) = a.\cos(x) + b.\sin(x) + c.\cos^2(x) + d.\sin^2(x)$.
En effet, si tel était le cas, en identifiant la partie paire et la partie impaire de la fonction, on aurait $\sin(2.x) = b.\sin(x)$ et $0 = a.\cos(x) + c.\cos^2(x) + d.\sin^2(x)$. Or, déjà dans $\sin(2.x) = b.\sin(x)$ on a une incohérence en $\pi/2$ puis en $\pi/4$.
La dernière application n'est pas dans l'espace vectoriel indiqué.

**IS22** • Application dont la tangente est parallèle à la première bissectrice. • MPSI 2/2013

Si $f$ est une application dérivable, on la dérive et on trouve en tout point $c$ le coefficient directeur de la tangente : $f'(c)$. L'équation de la tangente en $c$ est donc $\boxed{y = f'(c).(x-c) + f(c)}$

La tangente est parallèle à la première bissectrice si et seulement si $f'(c)$ vaut 1.

L'exercice se ramène sous nos hypothèses à trouver un point vérifiant $f'(c) = 1$. On sent que le théorème de Rolle va servir.
On va l'appliquer à $f - Id$ *(notée g)* pour que la nullité de sa dérivée en $c$ se traduise par $f'(c) - 1 = 0$.




On trouve $g(1) = 0$, $g(2) = 1$ et $g(4) = -3$.
L'application prend la même valeur en 1 et en un point $b$ entre 2 et 4 obtenu par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $f$ sur l'intervalle $[2,\ 4]$.
O applique le théorème de Rolle entre 1 et ce point $b$. On trouve un point $c$ vérifiant $g'(c) = 0$ soit encore $f'(c) = 1$ comme souhaité.

Vous n'aviez pas utilisé la même méthode ? pas grave, c'est peut être la suivante et dans ce cas tout va bien :
on applique le théorème des accroissements finis entre 1 et 2 : il existe $a$ dans $]1,\ 2[$ vérifiant $f'(a) == 2$
on applique le théorème des accroissements finis entre 2 et 4 : il existe $b$ dans $]2,\ 4[$ vérifiant $f'(b) = \dfrac{1-3}{4-2} = -1$
comme $f$ est $C^1$ on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires entre $a$ et $b$, la valeur 1 est atteinte par $f'$.

On cherche un polynôme $P$ de degré 2 vérifiant $P(1) = P(4) = 1$ et $P(2) = 3$. On a plusieurs méthodes :

**• méthode "je suis un bourrin et j'assume" :**

On pose $P$ sous la forme $\alpha.X^2+\beta.X+\gamma$ et on trouve un système que l'on résout : $\left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & +\beta & +\gamma & = & 1 \\ 4.\alpha & +2.\beta & +\gamma & = & 3 \\ 16.\alpha & +4.\beta & +\gamma & = & 1 \end{array}\right.$,

on le résout soit par combinaisons, soit en frimant avec une matrice de VanDerMonde.

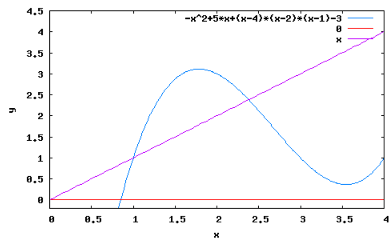
**• méthode "je suis un bourrin mais j'assume pas" :**

on suit la méthode précédente, mais au brouillon, puis on rédige par "on propose $\boxed{P(X) = -X^2 + 5.X - 3}$ et on se contente de vérifier, c'est mathématiquement pleinement satisfaisant.

**• méthode "je suis intelligent(e) et j'assume" :**

on envisage le polynôme $P(X)-1$ qui s'annule en 1 et 4 ; il est donc de la forme $\lambda.(X-1).(X-4)$ ; on ajuste $\lambda$ pour avoir $P(2)-1 = 2$ et on trouve $\boxed{P(X) = (1-X).(X-4)+1}$ *(oui, c'est de l'algèbre linéaire et pas du calcul d'algèbre linéaire).*

Ce polynôme a pour dérivée $-2.X + 5$ qui vaut 1 en 2 précisément.



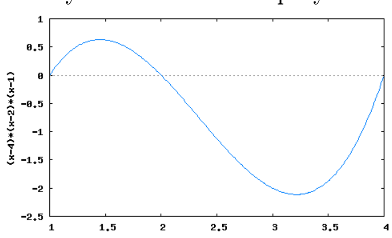

---

On veut ensuite un polynôme de degré 3. On peut encore poser un laborieux système et le résoudre en observant qu'on a un degré de liberté sur le choix d'un coefficient *(vous vous doutez que ce n'est pas la démarche que j'attend de vous après six mois de Sup en ma compagnie, mes enfants...).*

On a trouvé un polynôme de degré 2 vérifiant nos conditions.

Les conditions sont du type "linéaires". On a une solution particulière. On cherche alors les solutions homogènes au système sans second membre : $P(1) = P(2) = P(4) = 0$.

Le noyau est formé des polynômes multiples de $(X-1).(X-2).(X-4)$.




Les solutions sont donc tous les polynômes de la forme $P(X) = -X^2+5.X-3+k.(X-1).(X-2).(X-4)$ avec $k$ réel.

Vous développez, dérivez, et vous résolvez l'équation du second degré $P'(X) = 1$ et ne gardez que la solution entre 1 et 4 si vous tenez à rester cohérent avec la façon qu'on a eu de l'obtenir.

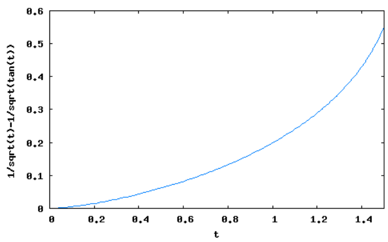
**IS22** • L'application $f = x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}} - \dfrac{1}{\sqrt{\tan(t)}}$. • MPSI 2/2013

Cette application est définie, continue, dérivable par théorèmes algébriques sur $]0,\ \pi/2[$. Il reste un problème en 0 qu'on traite par calcul de limite où on lève les indéterminations par développement limits, quantités conjuguées et équivalents :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\tan(x)} - \sqrt{x}}{\sqrt{x.\tan(x)}} = \frac{\tan(x) - x}{(\sqrt{\tan(x)} + \sqrt{x}).\sqrt{x.\tan(x)}} = \frac{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x}{(\sqrt{\tan(x)} + \sqrt{x}).\sqrt{x.\tan(x)}} \simeq \frac{x^3/3}{2.\sqrt{x}.\sqrt{x^2}}.$$

Cette fonction est équivalente à $x/6$ et tend donc vers 0. On prolonge : $\boxed{f(0) = 0}$

Pour la dérivabilité, on passe à $\dfrac{f(x) - \overline{f}(0)}{x - 0}$ qui est cette fois équivalent à $\dfrac{1}{6}$. On passe à la limite pour ces taux d'accroissement, et on trouve $\boxed{f'(0) = 1/6}$




**IS22** • Un script Python sur les matrices. • MPSI 2/2013

`MM = [[0]*n for i in range n]`

On commence par créer un nouvelle matrice MM qui est de même format que M mais ne contient que des 0.

On va faire des calculs dessus et à la fin, on l'affichera `print(MM)` *(en mode Python et pas en mode mathématique, bien sûr).*

```
for i in range(n) :
....for k in range(n) :
```

On avance case par case dans la matrice `MM`, `i` sera indice de ligne et `k` indice de colonne.

```
........for j in range(n) :
............MM[i][k] += M[i][j]*M[k][j]
```

On crée une somme qui commence à `0` (valeur qu'il y avait dans `MM[i][k]`) qui s'agrandit au fur et à mesure jusqu'à : $MM_i^k = \sum_{j=0}^{n-1} M_i^j.M_k^j$.

Tiens, ce n'est pas le calcul de $M^2$ qu'on aurait pu attendre, car celui ci passerait par $MC_i^k = \sum_{j=0}^{n-1} M_i^j.M_j^k$.

Ici, on voit les lignes de $M$ tomber sur les lignes de $M$.

On regarde sur notre exemple : on effectue le calcul $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ qui donne $\begin{pmatrix} 1.1+2.2+1.1 & 1.0+2.1+1.3 & 1.1+2.1+1.3 \\ 0.1+1.2+3.1 & 0.0+1.1+3.3 & 0.1+1.1+3.3 \\ 1.1+1.2+3.1 & 1.0+1.1+3.3 & 1.1+1.1+3.3 \end{pmatrix}$ et on trouve $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 5 & 10 & 10 \\ 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}$.

C'est en fait mathématiquement le produit $M.{}^tM$ (${}^tM$ c'est la transposée de $M$).

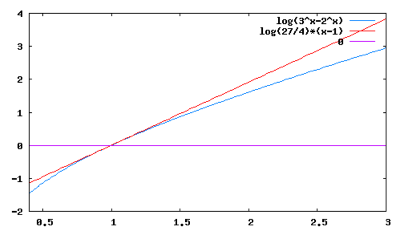
La somme mentionnée `sum(MM[i][i] i in range(n))` est celle des termes diagonaux de `MM`. Or, les termes diagonaux sont ceux de la forme $\sum_{j=0}^{n-1} M_i^j.M_i^j$ ; ce sont des sommes de carrés. De telles sommes sont positives.

La trace de $M.{}^tM$ est la somme des carrés de tous les éléments de $M$. Elle est positive. Et elle n'est nulle que pour $M$ nulle.

Quant au déterminant, c'est le produit $\det(M).\det({}^tM)$ qui donne $\det(M)^2$, positif...

**IS22** • Développement limité de $\ln(3^x-2^x)$. • MPSI 2/2013

L'application est définie sur un voisinage de 1, continue, dérivable autant de fois que l'on veut. On peut donner le développement limité.
Le premier terme est nul : $\ln(3^1-2^1)=0$.
On peut dériver si on y tient, et deux fois.
Mais je propose plutôt de poser $x=1+h$ (et de garder cette variable infiniment petite $h$) : $\ln(3^{1+h}-2^{1+h})=\ln(3.e^{h.\ln(3)}-2.e^{h.\ln(2)})=$
$\ln\Big(3.(1+h.\ln(3)+h^2.\ln^2(3)/2)-2.(1+h.\ln(2)+h^2.\ln(2)/2)+o(h^2)\Big)$
On développe et regroupe pour arriver à une forme en $\ln(1+u)$ avec $u$ égal à $h.\Big(3.\ln(3)-2.\ln(2)\Big)+\dfrac{h^2}{2}.\Big(3.\ln(3)^2-2.\ln(2)^2\Big)+o(h^2)$ (dont on vérifie qu'il tend bien vers 0 quand $h$ tend vers 0).
On utilise alors $\ln(1+u)=u-\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)$ avec $u^2$ se limitant à $h^2.\Big(3.\ln(3)-2.\ln(2)\Big)^2+o(h^2)$
Au final, il reste $\boxed{\ln(3^{1+h}-2^{1+h})=\ln(3^3/2^2).h-3.\ln(3/2)^2.h^2+o(h^2)}$ quand $h$ tend vers 0.
*Attention, des quantités comme $\ln(3)^2$ ne se simplifient pas, sauf en $\ln(3^{\ln(3)})$ si vous trouvez cela plus simple...*
*En ravanche, il est judicieux de remplacer $3.\ln(3)-2.\ln(2)$ par $\ln(27/4)$.*




*Et surtout, on reste en variable $h$ et on ne colle pas des $(x-1)$ et $(x-1)^2$ (et encore moins des $x$, $x^2$ et autres).*
*Et surtout, on n'oublie pas de $o(h^2)$ et on ne met à aucun prix un $o(x^2)$ qui ne serait rien de plus qu'un $o(1^2)$ !*

**IS22** • La matrice $\begin{pmatrix}1&2\\a&b\end{pmatrix}$. • MPSI 2/2013

Cette matrice $\begin{pmatrix}1&2\\a&b\end{pmatrix}$ a pour trace 5, c'est donc $\begin{pmatrix}1&2\\a&4\end{pmatrix}$. Enfin, on effectue le produit $\begin{pmatrix}1&2\\a&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\a-8\end{pmatrix}$. On le veut colinéaire à $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. On n'a pas le choix, c'est $\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$ et $a$ vaut 14.

L'une des valeurs propres de $\boxed{\begin{pmatrix}1&2\\14&4\end{pmatrix}}$ est $-3$ que l'on vient de trouver au dessus.

L'autre vaut 8 par la trace (et/ou le déterminant). Un vecteur propre sera $\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$.

MPSI 2/2013 | 655 points | $IS22$

Charlemagne
MPSI-2 / 2013

Mardi 25 mars

# $IS23$

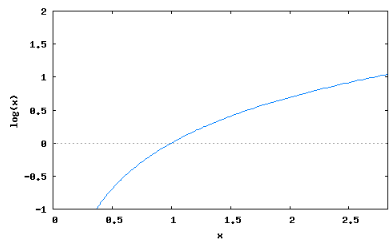
♡93 Donnez la définition de “$f$ est uniformément continue de $I$ dans $\mathbb{R}$”. •1 pt.•

---

♡94 Donnez le développement limité d'ordre 6 en 0 de $\cos^4(x)$. •1 pt.•

---

♡95 On rappelle *(car ce n'est pas au programme)* que la longueur d'un arc de courbe de classe $C^1$ de la forme $y = f(x)$ se calcule par $\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}.dt$. Quelle est la longueur de l'arc du graphe de logarithme entre $\sqrt{3}$ et $2.\sqrt{2}$. •4 pt.•
Vous serez ammené à poser $u = \sqrt{1 + t^2}$, puis vous aurez une décomposition en éléments simples à effectuer.




Quelle est la longueur de l'arc du graphe de l'exponentielle entre $\ln(3)/2$ et $3 * \ln(2)/2$ ?

---

♣34 Le M.P.3 de ma fille contient cent titres de trois minutes *(tous différents)*. La fonction random choisit suivant un hasard uniforme un titre dans la liste *(sans tenir compte des tirages précédents)*.
Quelle est la probabilité qu'elle entende deux fois le même titre quand elle le met en route ? •1 pt.•
Quelle est la probabilité que les dix premiers titres soient tous différents ? •1 pt.•
Quelle est la probabilité qu'elle entende au moins deux fois le même titre en une demi heure ? •1 pt.•
Quelle est la probabilité qu'elle entende deux fois le même titre en une demi heure quand elle écoute le top de D17 ? •0 pt.•

*Pour information, lu dans “Pour La Science” dans un article sur les événements à forte probabilité que l'on croit improbables :*
*en 1980, Maureen Wilcox a joué à la loterie du Massachussets et à celle de Rhode Island. Elle a eu les bons numéros pour chacune des deux loteries. Mais ceux du Massachussets à Rhode-Island et vice versa.*

---

♢88 On pose $E = Vect(1 + X + X^3,\ 2 + X + X^3,\ 1 - 3.X + X^2)$. Lesquels des polynômes suivants sont dans $E$ : $1$, $X$, $X^2$, $X^3$, $X^4$ ? Pouvez vous ajuster $b$ pour que $1 + b.X + X^2 + X^3$ soit dans $E$ . •4 pt.•

---

♢89 Si $A$ est une matrice carrée de taille $n$ sur $n$ *(éléments $A[i][k]$)*, écrivez un script `Python` qui calcule $Tr(A^2)$. •2 pt.•

---

♢90 On pose : $\varphi = x \longmapsto \theta + \sin(\theta)$ et $I = ]-\pi,\ \pi[$. Montrez que $\varphi$ est un difféomorphisme de $I$ dans lui même. •1 pt.•
Calculez $\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(\varphi^{-1}(t)).dt$ en posant $t = \varphi(x)$. •3 pt.•

---

♡96 Pour tout $n$ on pose $I_n = \int_1^e (\ln(t))^n.dt$. Montrez que la suite $I$ est décroissante. •1 pt.• Trouvez la relation de récurrence entre $I_{n+1}$ et $I_n$. •2 pt.•

Charlemagne
MPSI-2 / 2013

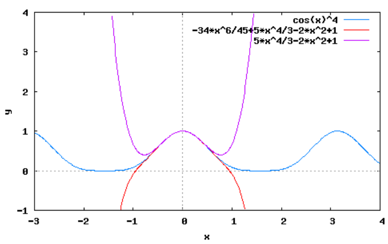
Correction

$IS23$

**IS23** • Développement limité de $\cos^4(x)$. • MPSI 2/2013

Il n'y a aucune difficulté. On peut partir de $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{6!} + o(x^6)$ *(même si on se doute que tout ne servira pas)*, puis élever au carré et encore au carré, en éliminant les termes non pertinents.
On peut aussi linéariser : $\cos^4(x) = \dfrac{\cos(4.x) + 4.\cos(2.x) + 3}{8}$. Bref :

$$\boxed{\cos^4(x) = 1 - 2.x^2 + \frac{5.x^4}{3} - \frac{34.x^6}{45} + o(x^6) \text{ quand } x \text{ tend vers } 0}$$




**IS23** • Longueur d'un arc de courbe. • MPSI 2/2013

On applique la formule pour la longueur d'arc du logarithme entre 1 et $x$ : $\displaystyle\int_1^x \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}.dt$.

On factorise en $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ *(on n'est pas en 0, il n'y a pas de problème)*.
Comme proposé, on pose : $u = \sqrt{1+t^2}$ et on inverse le $C^1$-difféomorphisme : $t = \sqrt{u^2-1}$. On différentie : $dt = \dfrac{u}{\sqrt{u^2-1}}$.

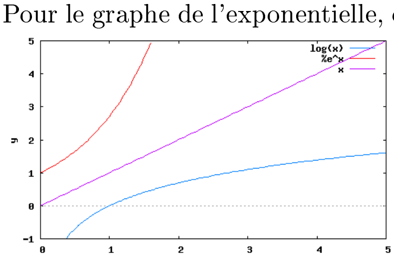
On effectue les trois étapes dans l'intégrale : $\displaystyle\int_{t=1}^{t=x} \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}.dt = \int_{u=\sqrt{4}}^{u=\sqrt{9}} \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}.\frac{u.du}{\sqrt{u^2-1}}$.

On aboutit à l'intégrale de la fraction rationnelle $\dfrac{u^2}{u^2-1}$, que l'on décompose en $1 + \dfrac{1}{2.(u-1)} - \dfrac{1}{2.(u+1)}$. On intègre en logarithme : $\left[u + \dfrac{1}{2}.\ln\left(\dfrac{u-1}{u+1}\right)\right]_{u=2}^{u=3}$.

Tous calculs faits : $\boxed{\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2.\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}.dt = 1 + \frac{\ln(3/2)}{2}}$

---

Pour le graphe de l'exponentielle, on effectue une simple symétrie par rapport à la première bissectrice.




Les abscisses et ordonnées s'échangent, l'exponentielle devient logarithme, et on retrouve le graphe précédent. La longueur reste $\boxed{1+\dfrac{\ln(3)-\ln(2)}{2}}$

**IS23** • Le M.P.3 et les probabilités. • MPSI 2/2013

Chaque titre est tiré avec probabilité 1/100 pour simplifier les calculs.
On tire un premier titre au hasard. Sa valeur *(ou son indice dans la liste si vous préférez)* n'a aucune importance. Le second tirage est indépendant du premier. La probabilité que l'on retombe sur le même titre est de $\boxed{1/100}$

On tire ensuite les titres au hasard encore, avec remise et indépendance [4]. La probabilité que le second soit différent du premier est $\dfrac{99}{100}$ *(quotient $\dfrac{cas\ favorables}{nombre\ de\ cas}$ ).*
La probabilité que le troisième soit différent des deux premiers est $\dfrac{98}{100}$ *(puisque il reste exactement 98 titres disponibles).*
Pour le suivant, c'est évidemment $\dfrac{97}{100}$ et ainsi de suite.
Pour $k$ titres : $\dfrac{100.99.98\ldots(100-k+1)}{100^k}$ *(autant de termes en haut qu'en bas et une cohérence pour $k$ égal à 1, la probabilité que le titre soit différent est égale à 1).*

On simplifie en $\dfrac{100!}{100^k.(100-k)!}$ ou même $\dfrac{k!.\binom{100}{k}}{100^k}$.

Pour $k$ égal à 10 on trouve explicitement $\boxed{\dfrac{100!}{100^{10}.90!}}$

---

La probabilité que les titres soient tous différents est celle du complémentaire : $\boxed{1-\dfrac{100!}{100^{10}.90!}}$

L'application numérique donne 37% environ.

Pour information, avec 25 titres, on arrive à 96%.
Il se peut que votre lecteur travaille autrement : il mélange à l'allumage la liste des titres *(comme un paquet de cartes)*, puis ensuite il les prend un par un.

*Sinon, sur D17, la probabilité qu'un même titre passe plusieurs fois en une demi-heure est de 1 suivant mon expérience personnelle de ce matin.*

**IS23** • Espace vectoriel engendré par trois polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$. • MPSI 2/2013

L'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4 et on ne donne que trois vecteurs. Ils vont engendrer un sous-espace plus petit que $\mathbb{R}_3[X]$, et la question de savoir si tel ou tel vecteur en fait partie est pertinenete.
Déjà, $X^4$ ne peut pas y être, car il n'est même pas dans $\mathbb{R}_3[X]$.
Sachant que la famille $(1+X+X^3,\ 2+X+X^3,\ 1-3.X+X^2)$ est libre, les vecteurs sont dans l'espace qu'elle engendre si et seulement si la famille agrandie est liée. On calcule donc simplement des déterminants sur la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ de la forme $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & . \\ 1 & 1 & -3 & . \\ 0 & 0 & 1 & . \\ 1 & 1 & 0 & . \end{vmatrix}$. On effectue :

[4]avouez que c'est plus clair et ludique avec des titres sur un M.P.3. qu'avec les sempiternelles urnes et leurs boules numérotées que l'on croisait encore dans de trop nombreux livres qui ne servaient qu'à dégouter des probabilités

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3$ et $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$.

On résume

| $1 \in E$ | $X \notin E$ | $X^2 \notin E$ | $X^3 \notin E$ | $X^4 \notin E$ |
|---|---|---|---|---|

On peut même expliciter : $1 = (2 + X + X^3) - (1 + X + X^3)$.
Au fait, qui a pensé à utiliser un tableau pour synthétiser ?

On calcule un dernier déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b + 2$. C'est pour $b$ égal à $-2$ qu'on a l'appartenance. Plus précisément :

$$\boxed{1 - 2.X + X^2 + X^3 = 2.(1 + X + X^3) - 1.(\ 2 + X + X^3) + 1.(1 - 3.X + X^2)}$$

*Attention, si vous vous contentez de résoudre par conditions nécessaires, vous arrivez bel et bien à $b = -2$, mais rien de dit que cette condition nécessaire soit suffisante. Vous obtenez juste que si $b$ ne vaut pas $-2$, le vecteur n'est pas dans $E$. Mais il reste peut être d'autres équations à vérifier, qui ne sont pas valdies, auquel cas le vecteur n'est pas dans $E$ en dépit de son effort modeste qui a consisté à prendre $b = -2$.*

**IS23** • Scrit Python pour la trace du carré. • MPSI 2/2013

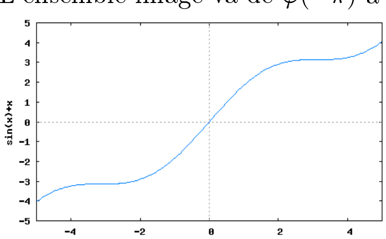
On commence par la formule mathématique : $Tr(M^2) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^k = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} a_k^i.a_i^k$. Il ne s'agit pas de carrés, puisque ce n'est pas $Tr({}^tM.M)$.
On imbrique deux boucles :

```
S=0
for k in range(n) :
....for i in range(n) :
........S += A[i][k]*A[k][i]
print(S)
```

*Remarque : il n'est pas utile de calculer tous les termes de la matrice et de calculer ensuite la trace. Vous n'avez besoin que des termes diagonaux : $n$ termes utiles et $n^2 - n$ termes inutiles...*

**IS23** • Difféomorphisme $\theta \longmapsto \theta + \sin(\theta)$. • MPSI 2/2013

Cette application est continue, dérivable. Sa dérivée $\theta \longmapsto 1 + \cos(\theta)$ est strictement positive sur $I$ *(bornes effectivement exclues)*. Cette application est strictement croissante, elle réalise un difféomorphisme de son intervalle de définition vers l'intervalle.
L'ensemble image va de $\varphi(-\pi)$ à $\varphi(\pi)$ qui valent respecticement $-\pi$ et $\pi$ précisément.




L'application $\varphi^{-1}$ est alors bien définie de $I$ dans $I$, dérivable *(sauf aux bornes où se matérialisent des demi tangentes verticales)*.
L'application $t \longmapsto 1+\cos(\varphi^{-1}(t))$ est continue, donc intégrable. On effectue le changement de variable

$t = \varphi(x)$ de réciproque $x = \varphi^{-1}(t)$.

On dérive : $\dfrac{dt}{dx} = 1 + \cos(x)$.

On effectue $\displaystyle\int_{t=-\pi}^{t=\pi} (1 + \cos(\varphi^{-1}(t)).dt = \int_{xx=-\pi}^{x=\pi} (1 + \cos(x)).(1 + \cos(x)).dx$

On a une simple intégrale dont on développe la fonction sous le signe somme et linéarise : $(1+\cos(x))^2 = 1 + 2.\cos(x) + \dfrac{1 + \cos(2.x)}{2}$.

On intègre et on trouve $\boxed{3.\pi}$

*Le graphe $t \longmapsto 1+\cos(\varphi^{-1}(t))$ est celui de la célèbre cycloïde appelée aussi brachistochrone et torochrone, dont je vous reparlerai un jour.*

**IS23** • Intégrales $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln(t))^n.dt$. • MPSI 2/2013

Chacune de ces intégrales existe, par continuité.

Pour tout $n$, on effectue la différence $I_{n+1} - I_n$ qu'on calcule par linéarité :

$I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_1^e ((\ln(t))^{n+1} - (\ln(t))^n).dt = \int_1^1 \ln(t).(\ln(t) - 1).dt$

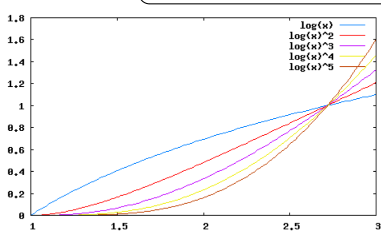
Sous la signe intégrale, $\ln(t)^n$ est positif, mais $\ln(t) - 1$ est négatif. La différence est négative, la suite décroit.

---

On intègre ensuite $I_{n+1}$ par parties, en intégrant 1 et en dérivant $\ln^{n+1}$ (en $t \longmapsto (n+1).\dfrac{\ln(t)^n}{t}$).

On trouve : $I_{n+1} = \Big[t.\ln(t)^{n+1}\Big]_{t=1}^{e} - (n+1).I_n$ car $t$ et $1/t$ se simplifient.

On a donc : $\boxed{I_{n+1} = e - (n+1).I_n}$




MPSI 2/2013 | 677 points | $IS23$

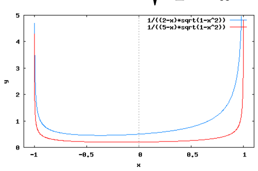
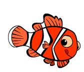
♡97 Démontrez qu'une application continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ est bornée. •2 pt.•

---

◇91 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Montrez que $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ *(noté $F$)* est un espace vectoriel et donnez en une base et la dimension. •2 pt.•
Montrez que $\{{}^tA.B \mid B \in M_2(\mathbb{R})\}$ *(noté $G$)* est un espace vectoriel et donnez en une base. •2 pt.•
A-t-on $M_2(\mathbb{R}) = F + G$ ? A-t-on $M_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$ ? •1 pt.•

---

◇92 $a$ est un réel strictement plus grand que 1. Calculez $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(a-x).\sqrt{1-x^2}}$ par changement de variable $t = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ dont vous vérifierez que c'est un difféomorphisme *(de quoi dans quoi ?)*. •5 pt.•

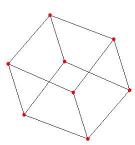



---

♣35 Calculez $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dt}{t+i}$ où $i$ est le célèbre complexe de carré $-1$ *(attention, pas de logarithme, mais de la linéarité...)*. •2 pt.•

---

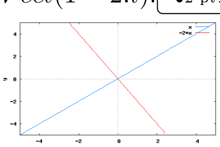
♣36 Vous lancez un dé *(six faces de 1 à 6, équilibré)*. Si vous obtenez un nombre pair, vous le gardez. Si vous obtenez un nombre impair, vous relancez le dé, et c'est le nouveau tirage que vous gardez. Donnez la loi de cette variable aléatoire, son espérance et sa variance. •3 pt.•



Je vois un 6 affiché. Quelle est la probabilité que vous ayez tiré un 3 auparavant ? •2 pt.•

---

◇93 Dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, projetez 2 et $e^{i.\pi/4}$ sur $Vect(1+i)$ parallèlement à $Vect(1-2.i)$. •2 pt.•



---

♣37 Que va faire ce script :

```
m = 0
for k in range(30) :
....m+=k
....k+=1
print(m)
```

**IS24** • Image d'un segment par une application continue. • MPSI 2/2013

On suppose donc $f$ continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ et on montre par l'absurde qu'elle est majorée.
La négation de majorée est $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in [a,\ b],\ f(\alpha) \geqslant M$.
On a donc pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ l'existence d'au moins un $\alpha_n$ dans $[a,\ b]$ vérifiant $f(\alpha_n) \geqslant n$.
On dispose dès lors d'une suite $(\alpha_n)$ dans $[a,\ b]$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass nous autorise à en extraire au moins une sous suite $(\alpha_{\varphi(n)})$ qui converge vers un certain $A$. Par passage à la limite dans l'encadrement large $a \leqslant \alpha_{\varphi(n)} \leqslant b$, on a $a \leqslant A \leqslant b$. Le réel $A$ est dans $[a,\ b]$, l'application $f$ est donc continue en $A$. Comme la suite $(\alpha_{\varphi(n)})$ converge vers $A$, le critère séquentiel de continuité donne la convergence de $(f(\alpha_{\varphi(n)}))$ vers $f(A)$.
Mais dans le même temps la minoration $f(\alpha_{\varphi(n)}) \geqslant \varphi(n) \geqslant n$ fait tendre $(f(\alpha_{\varphi(n)}))$ vers $+\infty$. On tient notre contradiction.
En appliquant ensuite le même résultat à $-f$, on minore $f$. Elle est donc bien bornée.

**IS24** • Espace svectoriel à partir de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. • MPSI 2/2013

Le premier espace s'appelle commutant de $A$. Il est formé de matrices de taille 2 sur 2 par compatibilité multiplicative $A.M$ et $M.A$. On va prouver que c'est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$.
On y trouve la matrice nulle : $A.O = O.A$.
Si on y prend deux matrices $M$ et $N$, et si on choisit deux réels $\alpha$ et $\beta$ alors on a :
$A.(\alpha.M + \beta.N) = A.\alpha.M + A.\beta.N = \alpha.A.M + \beta.A.N = \alpha.M.A + \beta.N.A. = (\alpha.M + \beta.N).A$
On reconnait : $\alpha.M + \beta.N \in F$.

Ensuite, on cherche la forme des éléments de $F$ : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifiant $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Le système de quatre équations à quetre inconnues dégénère vite, et sa résolution par équivalences ne donne que deux équations indépendantes : $b = -2.c$ et $a = d - 3.c$.
On a donc les matrices de la forme $\begin{pmatrix} d-3.c & -2.c \\ c & d \end{pmatrix}$ par exemple, que l'on sépare en $c.\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les deux matrices (non proportionnelles) de la combinaison sont dans $F$ et engendrent tous les vecteurs de $F$ : $\boxed{F = Vect\Big(\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big)\ F \text{ est de dimension } 2}$
On aurait pu prendre aussi $F = Vect(A,\ I_2)$ et je laisse les plus algébristes d'entre vous réfléchir à la chose.
On notera que l'on pouvait faire ce raisonnement et aboutir à "$F$ est un espace vectoriel".

---

Les éléments de $G$ sont de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ c'est à dire
$x.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
On écrit alors tout de suite $G = Vect\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\Big)$, et c'est donc un espace vectoriel.
Mais ces quatre en forment elles une base ? On vérifie leur indépendance :

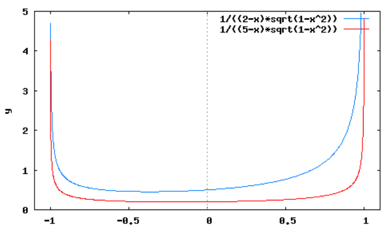
$x.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (x = y = z = t = 0)$ *(simple calcul).*
$G$ est un espace vectoriel, et il est de dimension 4.
Mais alors, c'est tout $M_2(\mathbb{R})$ ! Et là, on comprend brutalement :
• les éléments de $G$ sont tous dans $M_2(\mathbb{R})$ évidemment
• chaque élément $M$ de $M_2(\mathbb{R})$ est dans $G$ et s'écrit ${}^tA.({}^tA^{-1}.M)$ puisque ${}^tA$ est inversible.
Je résume : $\boxed{G = M_2(\mathbb{R}) \text{ et } \dim(G) = 4}$ Une base est par exemple la base canonique.

---

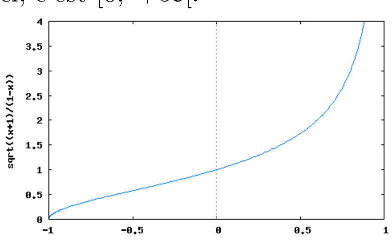
On a immédiatement $\boxed{F + G = F + M_2(\mathbb{R}) = M_2(\mathbb{R})}$
Evidemment, la somme n'est pas directe, puisque les deux espaces $F$ et $G$ ont une intersection non triviale. On ne peut donc pas écrire $F \oplus G$ et donc pas non plus $F \oplus G = E$.

**IS24** • L'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(a-x).\sqrt{1-x^2}}$. • MPSI 2/2013

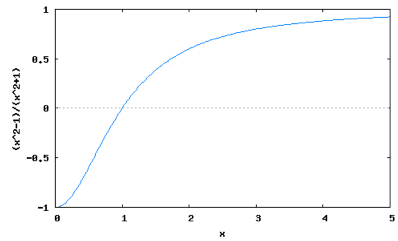
Déjà, le réflexe basique sur l'existence de l'intégrale. Il y a un petit problème en $-1$ et en 1. On va donc se limiter à $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{dx}{(a-x).\sqrt{1-x^2}}$ avec $-1 < \alpha \leqslant \beta < 1$ et on fera tendre $\alpha$ et $\beta$ vers les deux bornes.




On suit l'indication de l'énoncé. L'application $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ est définie, continue, dérivable sur $[-1,\ 1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On la dérive calmement $x \longmapsto \dfrac{1}{2.\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}.\dfrac{2}{(1-x)^2}$. On trouve $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x).\sqrt{1-x^2}}$.
Cette dérivée est positive. L'application est croissante. Et la dérivée ne s'annule en aucun point de l'intervalle $[-1,\ 1[$. On a donc un difféomorphisme de cet intervalle sur son intervalle image. Et celui ci, c'est $[0,\ +\infty[$.




A toutes fins utiles, on exprime la réciproque $t \longmapsto \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ de $[0,\ +\infty[$ dans $[-1,\ 1[$. On exploite : $dx = \dfrac{4.t.dt}{(t^2+1)^2}$.




On effectue alors les trois étapes du changement de variable : bornes, fonction et élément différentiel :
$$\int_{.}^{.} \frac{1}{\left(a - \frac{t^2-1}{t^2+1}\right).\frac{2.t.(t^2+1)}{(t^2+1)^2}}.\frac{4.t.dt}{(t^2+1)^2} = \int_{.}^{.} \frac{2.dt}{a.(t^2+1)-(t^2-1)}$$

On aboutit finalement à $\int_{.}^{.} \frac{dt}{(a-1).t^2+(a+1)}$ qui va s'intégrer en arctangente $\left[\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}.Arctan\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}.t\right)\right]_{.}^{.}$.

Il n'y a plus qu'à faire tendre les bornes $\alpha$ et $\beta$ vers $-1$ et $1$ *(et donc les bornes pour $t$ vers $0$ et l'infini).*

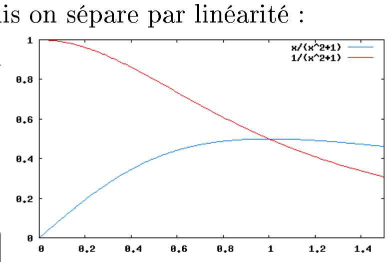
On a au final $\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(a-x).\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}}$

**IS24** • Intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t+i}$. • MPSI 2/2013

La fonction au dénominateur ne s'annulera pas, on a ensuite l'argument de continuité. L'intégrale existe, mais que vaut elle ?

On fait appel à la quantité conjuguée, puis on sépare par linéarité :
$$\int_0^1 \frac{dx}{x+i} = \int_0^1 \frac{(x-i)}{x^2+1}.dx = \int_0^1 \frac{x.dx}{x^2+1} -$$

L'une des intégrales donne $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+1^2}{1+0^2}\right)$




On résume : $\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{t+i} = \frac{\ln(2)}{2} - i.\frac{\pi}{4}}$

---

Un élève délirant aurait pu écrire $\ln\left(\frac{1+i}{i}\right) = \ln(1-i) = \ln\left(\sqrt{2}.e^{i.\pi/4}\right) = \ln(\sqrt{2}) + \ln(e^{i.\pi/4})$ et aboutir à la même chose. Etonnant non ?

**IS24** • Un dé qu'on tire une fois ou deux. • MPSI 2/2013

Par un arbre, on a immédiatement la loi :

| 2 | 4 | 6 | 1, 3 ou 5 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/2 | | | | | |
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | | | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |
| | | | toutes à 1/12 | | | | | |

On résume :

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1/12 | 3/12 | 1/12 | 3/12 | 1/12 | 3/12 |

L'espérance de cette variable est $\frac{(1+3+5)+3.(2+4+6)}{12}$ c'est à dire $\boxed{\frac{15}{4}}$ *(plus que pour le lancer d'un seul dé, car les nombres pairs sont plus grands que les impairs).*

L'espérance du carré vaut $\frac{(1^2+3^2+5^2)+3.(2^2+4^2+6^2)}{12}$ soit $\frac{203}{12}$. La variance vaut $\boxed{\frac{137}{48}}$

---

On suppose que le dé affiche 6. L'univers perd des branches :

| 2 | 4 | 6 | 1, 3 ou 5 |
|---|---|---|---|
| * | * | 1/6 | 1/2 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| * | * | * | * | * | 1/6 |

(masse : $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$)

Et dans cet univers, on ne garde qu'une branche :

| 2 | 4 | 6 | *, 3, * |
|---|---|---|---|
| . | . | * | 1/6 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . | 1/6 |

(masse $\frac{1}{36}$).

La probabilité conditionnelle *(quel sale nom pour dire "probabilité sur un univers réduit")* est alors $\boxed{\dfrac{1/36}{1/4}=\dfrac{1}{9}}$

*Rapidement : une chance sur trois que l'on ait eu à tirer deux fois, et une chance sur trois que le premier tirage (impair) soit un* 3*.*

**IS24** • Projection dans $\mathbb{C}$. • MPSI 2/2013

On sait que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, dont une base est $(1,\ i)$. Mais la famille $(1+i,\ 1-2.i)$ est aussi une base (déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ sur la base canonique).

On décompose n'importe quel vecteur sur cette base : $x+i.y=a.(1+i)+b.(1-2.i)$ en résolvant le système $\left\{\begin{array}{rcrcl} a & +b & = & x \\ a & -2.b & = & y \end{array}\right.$. On trouve $a=\dfrac{2.x+y}{3}$ et $b=\dfrac{x-y}{3}$.

Pour projeter, on efface le terme $b.(1-2.i)$. Le vecteur $x+i.y$ a pour image $\dfrac{2.x+y}{3}.(1+i)$. Matriciellement sur la base canonique $(1,\ i)$ : $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$

Plus précisément : $2 \longmapsto \dfrac{4+4.i}{3}$ et $e^{i.\pi/4} \longmapsto e^{i.\pi/4}$ puisque lui, il est sur l'axe image !

**IS24** • Un script Python. • MPSI 2/2013

Ce script va faire n'importe quoi. En effet, on effectue une boucle sur `k`, mais on modifie `k` au cours de la boucle.

Néanmoins, il affichera `435`.

| MPSI 2/2013 | 698 points | *IS*24 |
|---|---|---|

| Charlemagne MPSI-2 / 2013 | Mardi 8 avril | $IS25$ |
|---|---|---|

♡98 Démontrez que la variance $E(X^2) - E(X)^2$ d'une variable aléatoire réelle est positive ou nulle. •1 pt.•

---

♡99 Soient $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_p})$ une famille libre d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ et $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$. Montrez que $(f(\overrightarrow{e_1}), \dots f(\overrightarrow{e_p}))$ est libre si et seulement si $Vect(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_p}) \cap Ker(f)$ est réduit à $\overrightarrow{0}$. •2 pt.•

---

♡100 Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $(E, +, .)$. Montrez l'équivalence entre $Ker(f) = Ker(f \circ f)$ et $Ker(f) \cap Im(f) = \{\overrightarrow{0}\}$. •3 pt.•

---

♢94 On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Montrez que $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid Tr(A.M) = 0\}$ et $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid Tr(M.B) = 0\}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$. •1 pt.•
Donnez une base et la dimension de leur intersection. •2 pt.•
Trouvez une matrice $C$ dont cet espace intersection soit le commutant. •2 pt.•

---

♢95 Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $(E, +, .)$. Montrez que $F + G = F \cap G$ est équivalent à $F = G$. •2 pt.•

---

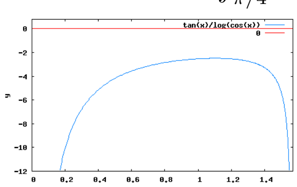
♢96 Complétez pour que $\begin{pmatrix} 1 & : & : \\ 2 & 4 & : \\ : & 8 & : \end{pmatrix}$ soit la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau soit de dimension 2. •2 pt.•

---

♣38 La piscine olympique de mon quartier est en travaux, et donc vide. Je veux réaliser une expérience *(qui a déjà été effectuée et a valu à ses auteurs un prix IG.Nobel)* : la remplir de miel pour voir si on y nage plus vite que dans l'eau *(viscosité oblige)*. Si je demande à chaque parisien d'apporter un pot de miel, pourra-t-on la remplir ? •1 pt.•

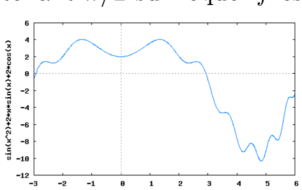
---

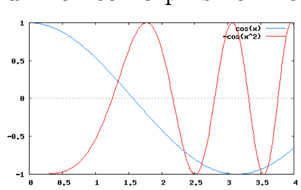
♢97 Montrez : $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\tan(\theta)}{\ln(\cos(\theta))}.d\theta = -\ln(2)$ après avoir vérifié l'existence de l'intégrale. •3 pt.•




---

♢98 On définit : $f = x \longmapsto \sin(x^2) + 2.x.\sin(x) + 2.\cos(x)$. Donnez le plus grand intervalle contenant $\pi/2$ sur lequel $f$ est un homéomorphisme. Même question avec difféomorphisme. •3 pt.•



**IS25** • Positivité de la variance. • MPSI 2/2013

*On a deux démonstrations possibles.*

Celle du cours de Terminale est simple et logique car elle revient sur ce qu'est la variance : une dispersion par rapport à la moyenne.
On prend une variable aléatoire $X$ d'espérance $\mu$. On étudie alors la variable aléatoire $(X-\mu)^2$. Elle est positive *(carré de réel)*. Son espérance est donc positive *(moyenne pondérée par des coefficients positifs)*. Or, ce n'est autre que $E(X^2 - 2.X.\mu + \mu^2)$ qui se sépare par linéarité de l'espérance en $E(X^2) - 2.\mu.E(X) + \mu^2$ *(l'espérance d'une constante, c'est cette constante)*. Mais comme $\mu$ n'est autre que $E(X)$, on a $E(X^2) - 2.E(X)^2 + E(X)^2 \geqslant 0$.

---

L'autre preuve que j'aime bien repose sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \leqslant |\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|$.
On prend pour vecteurs $\overrightarrow{u} = \left(\sqrt{p_1}.x_1,\ \sqrt{p_2}.x_2, \dots \sqrt{p_n}.x_n\right)$ et $\overrightarrow{u} = \left(\sqrt{p_1},\ \sqrt{p_2}, \dots \sqrt{p_n}\right)$ (où les $x_i$ sont les valeurs de la variable aléatoire et les $p_i$ leurs probabilités (positives, de somme 1).

• Le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ donne $\displaystyle\sum_i p_i.x_i$ : c'est $E(X)$.

• La norme $|\overrightarrow{u}|$ vaut $\displaystyle\sqrt{\sum_i p_i.(x_i)^2}$ : c'est $\sqrt{E(X^2)}$.

• La norme $|\overrightarrow{v}|$ vaut $\displaystyle\sqrt{\sum_i p_i}$ : c'est 1.

La majoration du prduit scalaire par le produit des normes c'est $E(X) \leqslant 1.\sqrt{E(X^2)}$ qui donne $E(X)^2 \leqslant E(X^2)$ puis $E(X^2) - E(X)^2 \geqslant 0$.

**IS25** • Image d'une famille libre. • MPSI 2/2013

Des hypothèses pour toute la question : $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_p})$ est libre et $f$ est linéaire.
**Premier sens :** on suppose que la famille image est libre aussi. Il faut prouver qu'une intersection est réduit à $\overrightarrow{0}$.
Déjà, le vecteur nul est dans cette intersection de sous-espaces vectoriels de $(E, +, .)$.
On prend ensuite un vecteur $\overrightarrow{u}$ dans cette intersection. Par définition, il s'écrit $\displaystyle\sum_i \alpha_i.\overrightarrow{e_1}$ et vérifie $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$. On fusionne : $\overrightarrow{0} = f(\overrightarrow{u}) = f\Big(\displaystyle\sum_i \alpha_i.\overrightarrow{e_i}\Big) = \displaystyle\sum_i \alpha_i.f(\overrightarrow{e_i})$. Par liberté de la famille image *(hypothèse)*, on déduit que les $\alpha_i$ sont tous nuls. On reporte : $\overrightarrow{u} = \displaystyle\sum_i 0.\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0}$. Il n'y a que le vecteur nul dans l'intersection.

**Deuxième sens :** On suppose que l'intersection est triviale. Il faut montrer que la famille image est libre.
On suppose donc $\displaystyle\sum_i \lambda_i.f(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{0}$ (objectif : les $\lambda_i$ sont nuls).
On utilise la linéarité de $f$ : $f\Big(\displaystyle\sum_i \lambda_i.\overrightarrow{e_i}\Big) = \overrightarrow{0}$. On reconnaît : $\displaystyle\sum_i \lambda_i.\overrightarrow{e_i} \in Ker(f)$. Mais ce vecteur est par définition même dans $Vect(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_p})$. Comme l'intersection des deux sous-espaces est réduit à $\overrightarrow{0}$ *(hypothèse)*, on déduit $\displaystyle\sum_i \lambda_i.\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0}$. Il ne rest plus qu'à utiliser l'hypothèse générale *(liberté de la famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_p})$)* : les $\alpha_i$ sont tous nuls.

**IS25** • Equivalence entre $Ker(f) = Ker(f^2)$ et $Im(f) \cap Ker(f) = \{\overrightarrow{0}\}$. • MPSI 2/2013

Il s'agit d'établir une équivalence sur des formules entre des ensembles qui sont tous des sous-espaces vectoriels de $(E, +, .)$.
On suppose $Ker(f) = Ker(f^2)$.
On doit montrer que $Im(f) \cap Ker(f)$ est réduit au vecteur nul. D'ores et déjà, on sait que le vecteur nul en fait partie *(intersection de sous-espaces vectoriels)*. Il reste à montrer que c'est le seul vecteur de cette intersection.
On prend donc $\overrightarrow{v}$ s'écrivant sous la forme $f(\overrightarrow{u})$ *(il est dans $Im(f)$)* et vérifiant $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$ *(il est dans $Ker(f)$)*. On reporte : $f(f(\overrightarrow{u})) = \overrightarrow{0}$. On reconnaît : $\overrightarrow{u}$ est dans $Ker(f^2)$. Par hypothèse, il est donc dans $Ker(f)$. On traduit : $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$. Mais $f(\overrightarrow{u})$ n'est autre que notre vecteur $\overrightarrow{v}$. On est bien passé de $\overrightarrow{v} \in Ker(f) \cap Im(f)$ à $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

---

On suppose à présent : $Ker(f) \cap Im(f) = \{\overrightarrow{0}\}$.
On doit prouver $Ker(f) = Ker(f^2)$. Le cours garantit déjà $Ker(f) \subset Ker(f^2)$ (c'est $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} \Rightarrow f(f(\overrightarrow{u})) = f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$).
On prend alors $\overrightarrow{u}$ dans $Ker(f^2)$ *(objectif : $\overrightarrow{u} \in Ker(f)$)*.
On traduit : $f(f(\overrightarrow{u})) = \overrightarrow{0}$. On regarde le vecteur $f(\overrightarrow{u})$. Il est par construction même dans $Im(f)$, mais la formule précédente dit qu'il est dans $Ker(f)$. On a donc $f(\overrightarrow{u}) \in Ker(f) \cap Im(f)$. Par hypothèse, $f(\overrightarrow{u})$ est donc nul. Inutile d'en cherchee d'avantage : $\overrightarrow{u}$ est dans $Ker(f)$. C'était l'objectif.

**IS25** • Deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. • MPSI 2/2013

On définit $\varphi_A = M \longmapsto Tr(A.M)$. C'est une application linéaire. Le sous espace $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid Tr(A.M) = 0\}$ est alors le noyau d'une application linéaire, c'est bien un sous-espace vectoriel. la formule du rang nous le donne de dimension 3.
Il en va de même pour $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid Tr(B.M) = 0\}$, lui aussi de dimension 3.

Leur intersection est à son tour un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. On sent que sa dimension va être 2.
On résout le système d'équations, en posant $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ : $\left\{ \begin{array}{ccccc} x & -y & +2.z & -t & = 0 \\ 2.x & +y & +3.z & -2.t & = 0 \end{array} \right.$. On trouve les matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & y \\ 3.y & x + 5.y \end{pmatrix}$. On sépare en combinaison de deux matrices "naturelles", dont on vérifie qu'elles sont indépendantes *(ici : non proportionnelles)*.

Une base de l'intersection est donc $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\right)}$

*Il y a bien sûr d'autres bases possibles, construites comme combinaisons de ces matrices.*
*On notera la présence de $I_2$ dans l'espace vectoriel.*

---

Cet espace peut il coïncider avec le commutant d'une matrice $C$ ? Si tel est le cas, cette matrice $C$ se doit d'être dans ce commutant. Alors on propose la matrice $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}$ *(ou toute matrice de cet espace qui ne soit pas un multiple de $I_2$)*. On détermine son commutant fait des matrices $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ vérifiant $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. On aboutit au système de quatre équations à quatre inconnues qui dégénère vite en deux équations *(par équivalences)* : $z = 3.y$ et $t = x + 5.y$. C'est bien le retour de notre espace.

**IS25** • $F+G=F\ \cap\ G$ équivalent à $F=G$. • MPSI 2/2013

**Sens rapide.** On suppose $F=G$. On a alors $F\ \cap\ G=F=G$. De plus, le plus petit sous-espace vectoriel contenant $F$ *(et $G$, puisqu'il y a égalité)* est $F$ lui même. On a donc $F+G=F\ \cap\ G=F=G$.

**Pour l'autre sens,** on suppose $F+G=F\ \cap\ G$. Mais par définition même, on a $F\subset F+G$ *(plus petit sous-espace contenant justement $F$ et $G$)*. On a donc $F\subset F+G=F\ \cap\ G\subset G$ *(l'intersection est incluse dans chacun)*.
En intervertissant les rôles : $G\subset F+G=F\ \cap\ G\subset F$.
Ayant à la fois $F\subset G$ et $G\subset F$, on a $F=G$ par antisymétrie.

**IS25** • Matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$. • MPSI 2/2013

Il s'agit de la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Son noyau doit être de dimension 2, donc par soustraction, son image doit être de dimension 1. Or, son image est engendrée par les vecteurs colonne *(images des vecteurs de la base canonique)*. C'est donc que tous les vecteurs colonne doivent être sur une même droite.
Les vecteurs colonne doivent être colinéaires. Le rapport de colinéarité est donné par les coefficients de la deuxième ligne : c'est 2. On en est à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & : \\ 2 & 4 & : \\ 4 & 8 & : \end{pmatrix}$. La dernière colonne doit être proportionnelle aux deux premières : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 4 & 2.a \\ 4 & 8 & 4.a \end{pmatrix}$. On en vient à la condition $M^2=M$ (correspondant à $p\circ p=p$).
On aboutit à l'unique solution $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}}$

**IS25** • Une piscine, des parisiens, du miel. • MPSI 2/2013

*Les valeurs exactes n'ont aucune importance. Ce qui compte, c'est les ordres de grandeur.*
Une piscine olympique, c'est cinquante mètres de long. En largeur, disons une petite vingtaine. Et on va donner une profondeur de trois mètres. Le volume à remplir est donc $50.20.3=3000m^3$.
Il y a deux millions d'habitants à Paris.
Un pot de miel, c'est entre cent grammes *(petit pot)* et cinq cent grammes *(gros pot)*. Mais en volume ? Allez, un quart de litre en moyenne me semble cohérent. Et il faut mille litres pour faire un mètre cube *(un litre, c'est dix centimètres sur dix centimètres sur dix centimètres)*.
Nos parisiens vont donc apporter $2.10^6.\dfrac{10^{-3}}{4}m^3$ de miel. On arrive à $500m^3$.
On n'en est pas si loin.
Disons que si les parisiens font des efforts et si la piscine n'est pas olympique, on peut aboutir à un remplissage pas trop ridicule.

*J'avais envisagé aussi d'essayer de vous noyer en remplissant notre salle de cours par tous les sodas bus en une journée à Paris.*

**IS25** • Intégrale $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\tan(\theta)}{\ln(\cos(\theta))}.d\theta$. • MPSI 2/2013

Sur notre intervalle, la tangente existe et est continue. Le cosinus reste positif, ne s'annule pas. Le dénominateur existe et est continu. De plus, il ne s'annule pas *(le cosinus n'atteint pas la valeur 1)*.
On va tenter un changement de variable : $c=\cos(\theta)$ (et son changement inverse : $\theta=Arccos(c)$).

C'est un difféomorphisme. On différentie : $d\theta = -\dfrac{dc}{\sqrt{1-c^2}}$. Mais on a aussi $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \dfrac{\sqrt{1-c^2}}{c}$. On remplace les trois occurences : bornes, fonction et élément différentiel. L'intégrale devient $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^{1/2} -\frac{1}{c.\ln(c)}.dc$.

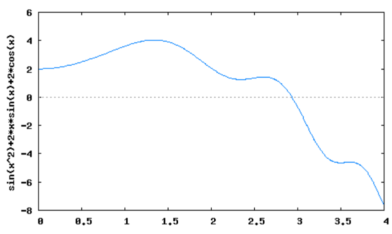
On sait alors intégrer, car on a en fait $\dfrac{1}{\ln(c)}.\dfrac{dc}{c}$ et on aboutit à $\ln(|\ln(c)|)$.

Vérifiez en dérivant $\boxed{\theta \longmapsto -\ln(\ln(\cos(\theta)))}$

On aboutit toutes simplifications faites à $\boxed{-\ln(2)}$

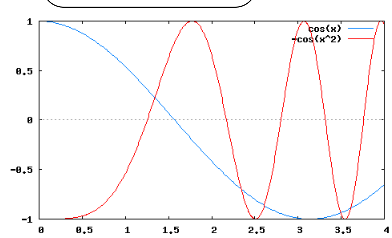
**IS25** • L'application $x \longmapsto \sin(x^2) + 2.x.\sin(x) + 2.\cos(x)$. • MPSI 2/2013

Cette application est continue, dérivable. On la dérive et on trouve $x \longmapsto 2.x.(\cos(x^2) + \cos(x))$ (les sinus se simplifient).
On cherche un intervalle sur lequel cette dérivée est de signe constant. Comme on demande que cet intervalle contienne $\pi/2$, on travaille sur $\mathbb{R}^+$ (changement de signe en 0). On résout l'équation $\cos(x) + \cos(x^2) = 0$ pour détecter les changements de signe.




On aboutit à $x^2 = \pi - x$ ou $x^2 = x - \pi$ (modulo $2.\pi$).

La première solution positive de cette équation est $\boxed{\dfrac{\sqrt{1+4.\pi^2}-1}{2}}$ (située avant $\pi/2$). La suivante est $\boxed{\dfrac{\sqrt{1+4.\pi^2}+1}{2}}$ (plus grande que $\pi/2$).




Sur le segment entre ces deux valeurs, la dérivée sera de signe constant. L'application sera strictement décroissante et réalisera un homéomorphisme de cet intervalle vers son image.
Pour un difféomorphisme, il faut éviter que la dérivée ne s'annule (tangentes verticales se traduisant en tangentes verticales sur la réciproque). On prend cette fois l'intervalle ouvert.

MPSI 2/2013 | 720 points | $IS25$

$\heartsuit 101$ Soit $\varphi$ une forme linéaire non nulle sur un espace vectoriel $(E,+,.)$. Montrez l'existence d'au moins un vecteur $\overrightarrow{a}$ vérifiant $\varphi(\overrightarrow{a}) \neq 0$, et montrez $Ker(\varphi) \oplus Vect(\overrightarrow{a}) = E$. •2 pt.•

---

$\diamondsuit 99$ Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel de dimension finie $n$. Soit $f$ un endomorphisme de $E$. Montrez l'équivalence entre les trois propriétés : •4 pt.•
$Ker(f) = Ker(f^2)$, $Im(f) \oplus Ker(f) = E$, $Im(f) = Im(f^2)$

---

$\diamondsuit 100$ Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées de taille 3 et de rang 1. Montrez : $\det(A.B) = \det(A+B) = \det(A.B) = \det(A) + \det(B)$. •2 pt.•

---

$\clubsuit 39$ Les deux réels $a = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ et $b = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ vérifient $a+b = a.b$. Combien existet-il de couples de réels ayant cette même particularité ? •2 pt.•

---

$\clubsuit 40$ On note $A$ l'ensemble des applications $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \exists k \in \mathbb{R},\ |f(a) - f(b)| \leqslant k.|e^a - e^b|$
Montrez que $(A,+,.)$ est un espace vectoriel. Est-ce une algèbre si l'on y adjoint la multiplication ? •2 pt.•

---

$\heartsuit 102$ On pose : $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2.z \\ x+y+2.z \\ x+y \end{pmatrix}$. Déteerminez $Ker(f)$ et $Im(f)$. Vérifiez qu'on a bien $dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = 3$, mais nullement $Ker(f) + Im(f) = R^3$. •3 pt.•

---

$\diamondsuit 101$ Calculez $\displaystyle\int_0^2 Max(Ln(1+x^2), 1).dx$. •3 pt.•

---

$\diamondsuit 102$ Calculez la trace et le déterminant d'un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ envoyant $\overrightarrow{i}$ sur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ et dont le noyau a pour équation $x + 2.y - z = 0$. •3 pt.•

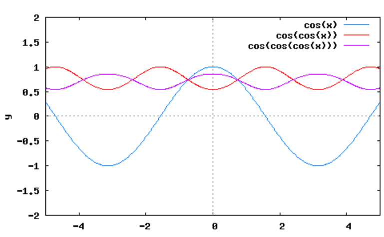
---

$\diamondsuit 103$ On définit les trois vecteurs : $\overrightarrow{u} = 2.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}$. Montrez qu'ils forment une base et donnez les formes linéaires duales $\overrightarrow{u}^*$, $\overrightarrow{v}^*$ et $\overrightarrow{w}^*$. •2 pt.•

---

$\clubsuit 41$ Complétez cette phrase pour qu'elle soit vraie :
cette phrase contient ...... consonnes de plus que de voyelles. •1 pt.•

Combien le système $\cos(a) = b$, $\cos(b) = c$, $\cos(c) = d$, $\cos(d) = a$ a-t-il de solutions ? •3 pt.•



**IS26** • Forme linéaire $\varphi$. • MPSI 2/2013

Une forme linéaire est donc une application linéaire $\varphi$ de $(E,+,.)$ dans $\mathbb{R}$. Si elle était nulle, on aurait $\forall \overrightarrow{a} \in E,\ \varphi(\overrightarrow{a}) = 0$. Comme elle n'est pas la forme nulle, on a $\exists \overrightarrow{a} \in E,\ \varphi(\overrightarrow{a}) \neq 0$. Ceci répond à la première question.
On doit ensuite prouver que tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $E$ se décompose (d'une façon unique) sous la forme $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{k} + \lambda.\overrightarrow{a}$ avec $\overrightarrow{k}$ dans $Ker(\varphi)$.
**Analyse** *(on suppose que la décomposition existe, et on en prouve l'uncité).*
On part de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{k} + \lambda.\overrightarrow{a}$ et on applique $\varphi$ *(linéaire)* : $\varphi(\overrightarrow{u}) = 0 + \lambda.\varphi(\overrightarrow{a})$. Comme $\varphi(\overrightarrow{a})$ est non nul, on isole : $\lambda = \dfrac{\varphi(\overrightarrow{u})}{\varphi(\overrightarrow{a})}$.
Par soustraction : $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{u} - \dfrac{\varphi(\overrightarrow{u})}{\varphi(\overrightarrow{a})}.\overrightarrow{a}$.
**Synthèse** *(on donne la décomposition, et on la valide).*
On par de $\overrightarrow{u}$ et on l'écrit $\boxed{\overrightarrow{u} = \Big(\overrightarrow{u} - \dfrac{\varphi(\overrightarrow{u})}{\varphi(\overrightarrow{a})}.\overrightarrow{a}\Big) + \Big(\dfrac{\varphi(\overrightarrow{u})}{\varphi(\overrightarrow{a})}.\overrightarrow{a}\Big)}$ On a alors juste à vérifier que $\dfrac{\varphi(\overrightarrow{u})}{\varphi(\overrightarrow{a})}.\overrightarrow{a}$ est dans $Vect(\overrightarrow{a})$ *(évident)* et que $\overrightarrow{u} - \dfrac{\varphi(\overrightarrow{u})}{\varphi(\overrightarrow{a})}.\overrightarrow{a}$ est dans $Ker(\varphi)$ *(simple calcul utilisant la linéarité).*
On a donc unicité et existence. Il n'est pas utile de vérifier $Ker(\varphi)\ \cap\ Vect(\overrightarrow{a}) = \{\overrightarrow{0}\}$, puisqu'on a établi l'unicité.

**IS26** • Equivalence $Im(f) = Im(f^2)$, $Im(f) \oplus Ker(f) = E$ et $Ker(f) = Ker(f^2)$. • MPSI 2/2013

La dimension étant finie, comme on a des noyaux et des images, on va peut être utiliser la formule du rang.
Comme on a un endomrophisme et plus généralement des applications linéaires, on a déjà $Ker(f) \subset Ker(f^2)$ *(implication : si $f(\overrightarrow{u})$ est nul, alors $f(f(\overrightarrow{u}))$ l'est aussi)* et $Im(f^2) \subset Im(f)$ *(implication : si $\overrightarrow{v}$ s'écrit $f(f(\overrightarrow{a}))$ alors il s'écrit $f(\overrightarrow{b})$ pour $\overrightarrow{b}$ bien choisi).*
• On suppose $Ker(f) = Ker(f^2)$. On va montrer : $Im(f)\ \cap\ Ker(f) = \{\overrightarrow{0}\}$.
On a toujours $\overrightarrow{0} \in Im(f) \cap Ker(f)$. On prend $\overrightarrow{u}$ dans cette intersection *(objectif : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$).* On l'écrit $\overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{a})$ pour un vecteur $\overrightarrow{a}$ de $E$ *(appartenance à $Im(f)$).* On a aussi $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ *(appartenance au noyau).* On en déduit $f(f(\overrightarrow{a})) = f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$. On reconnaît $\overrightarrow{a} \in Ker(f^2)$. Par hypothèse, ceci conduit à $\overrightarrow{a} \in Ker(f)$. On traduit : $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$. Et comme $f(\overrightarrow{a})$ n'est autre que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}$ est nul.
*A ce stade : $Ker(f) + Im(f) = Ker(f) \oplus Im(f)$*
On écrit alors $\dim(Ker(f) + Im(f)) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) - 0$ *(formule de Grassmann)* puis $\dim(Ker(f) + Im(f)) = \dim(E) - 0$ *(formule du rang).* Par inclusion et égalité des dimension : $E = Ker(f) + Im(f)$ et même $Ker(f) \oplus Im(f) = E$.

• On suppose : $Im(f) \oplus Ker(f) = E$. On veut arriver à $Im(f) = Im(f^2)$, sachant qu'on a déjà $Im(f^2) \subset Im(f)$.
On prend $\overrightarrow{u}$ dans $Im(f)$ *(objectif : il appartient à $Im(f^2)$).* On l'écrit $f(\overrightarrow{a})$ pour un $\overrightarrow{a}$ de $E$. On décompose ce $\overrightarrow{a}$ sous la forme $\overrightarrow{k} + f(\overrightarrow{b})$ avec $\overrightarrow{k}$ dans $Ker(f)$ et $f(\overrightarrow{b})$ dans $Im(f)$ précisément *(hypothèse $E = Ker(f) \oplus Im(f)$).* On utilise la linéarité de $f$ :
$\overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{k}) + f(f(\overrightarrow{b})) = \overrightarrow{0} + f(f(\overrightarrow{b}))$ : $\overrightarrow{u}$ est dans $Im(f^2)$.

*Bilan provisoire et malpropre :* $\Big(Ker(f) = Ker(f^2)\Big) \Rightarrow \Big(Ker(f) \oplus Im(f) = E\Big) \Rightarrow \Big(Im(f) = Im(f^2)\Big)$[5]

[5] *pourquoi "malpropre" ? parce que $a \Rightarrow b \Rightarrow c$ n'a pas de sens*

*Plutôt que de boucler, on va remonter dans l'autre sens, même si c'est un peu du gâchis.*

• On suppose : $Im(f) = Im(f^2)$. On montre alors $Ker(f) + Im(f) = E$ *(et en fait, on montre juste une inclusion, puisque ce sont des sous-espaces vectoriels de E).*
On se donne $\overrightarrow{u}$ dans $E$. Le vecteur $f(\overrightarrow{u})$ est dans $Im(f)$ donc dans $Im(f^2)$ et s'écrit $f(f(\overrightarrow{a}))$ pour au moins un $\overrightarrow{a}$ de $E$. On écrit alors $f(\overrightarrow{u} - f(\overrightarrow{a})) = \overrightarrow{0}$ par linéarité. On reconnaît $\overrightarrow{u} - f(\overrightarrow{a}) \in Ker(f)$, on l'écrit $\overrightarrow{k}$ et on a donc $\overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{a}) + \overrightarrow{k}$ avec $f(\overrightarrow{a}) \in Im(f)$ et $\overrightarrow{k} \in Ker(f)$.
Ayant $E = Ker(f) + Im(f)$ et la formule du rang $\dim(Im(f)) + \dim(Ker(f)) = \dim(E)$, on aboutit par formule de Grassmann à $Ker(f) \cap Im(f) = \{\overrightarrow{0}\}$ puis donc $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

• On suppose enfin $Ker(f) \oplus Im(f) = E$. On veut alors établir $Ker(f^2) \subset Ker(f)$. On prend donc un vecteur $\overrightarrow{u}$ vérifiant $f(f(\overrightarrow{u})) = \overrightarrow{0}$ *(objectif : il est dans $Ker(f)$)*. Mais alors $f(\overrightarrow{u})$ est à la fois dans $Ker(f)$ et $Im(f)$. Il est donc nul. Ayant $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$, on traduit : $\overrightarrow{u} \in Ker(f)$.

*Exercice : lesquelles de ces implications ont besoin de "dimension finie ?".*

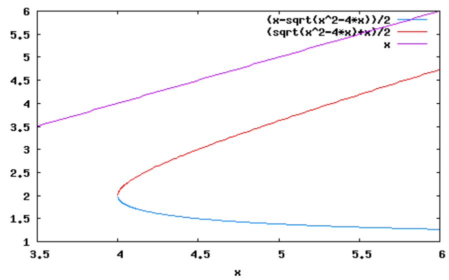
**IS26** • Déterminants de matrices de taille 3 et de rang 1. • MPSI 2/2013

Il y a évidemment une égalité facile à obtenir : $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$, c'est du cours.
Mais on dispose d'une information : $A$ et $B$ sont de rang 1. Leurs colonnes sont colinéaires. Ces deux matrices ont un déterminant nul (familles de vecteurs colonnes liées).
On a donc $\det(A) = \det(B) = 0 = \det(A.B)$.
Bref, il reste à prouver $det(A + B) = 0$.
Mais la matrice $A + B$ est au maximum de rang 2. Or, elle est de taille 3. Son déterminant est donc lui aussi nul.
*Pourquoi est elle au maximum de rang 2 ?*
*Par les colonnes : les colonnes de A sont les multiples d'un vecteur $\overrightarrow{a}$ et celle de B d'un vecteur $\overrightarrow{b}$. Les colonnes de $A+B$ sont donc combinaisons linaires de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$. Elles sont donc coplanaires et leur déterminant est nul.*
*Par les images. A et B sont les matrices de deux endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$. On a ensuite $Im(f + g) \subset Im(f) + Im(g)$ et on passe aux dimensions.*
*Par les noyaux. On garde les notations de f et g. On a alors $\dim(Ker(f)) = \dim(Ker(g)) = 2$. Dans $\mathbb{R}^3$, deux plans intersectent suivant au moins une droite (Grassmann). Et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ de cette droite vérifient $(f + g)(\overrightarrow{u})\overrightarrow{0}$. L'application $f + g$ a un noyau non réduit à $\overrightarrow{0}$, elle n'est pas injective et son déterminant est nul.*
*Par le calcul : A et B sont de la forme $\begin{pmatrix} a.\alpha & b.\alpha & c.\alpha \\ a.\beta & b.\beta & c.\beta \\ a.\gamma & b.\gamma & c.\gamma \end{pmatrix}$ (avec des primes pour B). On somme et on calcule laborieusement le déterminant.*

**IS26** • Réels dont la somme est égale au produit. • MPSI 2/2013

On a bien $a + b = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} + \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} = 5$ et $a.b = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}.\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{25-5}{4} = 5$.
On a donc un couple *(et aussi $(b, a)$)*. On connaissait aussi $0 + 0 = 0.0$.
Mais on peut en trouver d'autres. On se donne $S$ et on veut deux réels $a$ et $b$ vérifiant $a + b = S$ et $a.b = S$. Par les formules de Viète *(encore et encore)*, ce sont les solutions *(réelles)* de l'équation *(réelle)* $X^2 - S.X + S = 0$ *(inconnue X)*. Elle a des solutions réelles dès lors que $S^2 - 4.S$ est positif. Pour tout $S$ négatif ou plus grand que 4 on a des solutions. Ici, on a pris $S = 5$.
Si l'on veut une somme/produit égale à 6 : les racines de $X^2 - 6.X + 6 = 0$, c'est à dire $3 + \sqrt{3}$ et $3 - \sqrt{3}$.
Si l'on veut une somme/produit égale à $-8$ : les racines de $X^2 + 8.X - 8 = 0$ c'est à dire $-4 + \sqrt{24}$ et $-4 - \sqrt{24}$.

On a une infinité de couples possibles $\boxed{\dfrac{S-\sqrt{S^2-4.S}}{2} \text{ et } \dfrac{S+\sqrt{S^2-4.S}}{2}}$



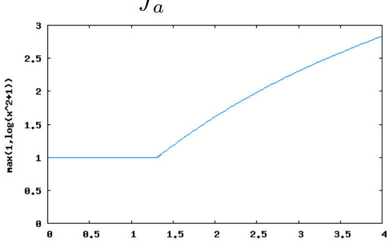

**IS26** • Applications vérifiant $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \exists k\in\mathbb{R},\ |f(a)-f(b)|\leqslant k.|e^a-e^b|$ • MPSI 2/2013

Ce n'est pas une question de cours sur les applications lipschitziennes et leurs variantes. C'est juste une question de logique.
Toutes les applications vérifient cette propriété puisque $k$ est quantifié après $a$ et $b$ *(il est donc en droit de dépendre de $a$ et $b$)*.
On se donne $f$ quelconque. Pour tout couple $(a,b)$ on a alors au moins un $k$ vérifiant cette propriété : $k=\dfrac{|f(b)-f(a)|}{|e^b-e^a|}$ (si $a\neq b$) et $k=0$ (si $a=b$).
On a donc pris simplement $A=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *(ensemble de toutes les applications)*. C'est un espace vectoriel, une algèbre.

Question : et si j'avais demandé : $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \exists k\in\mathbb{R},\ |f(a)-f(b)|<k.|e^a-e^b|$ ? Pourquoi n'aurais je pas eu un espace vectoriel ?
J'ai failli poser $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \exists k\in\mathbb{R},\ |f(a)-f(b)|\leqslant k.|a^2-b^2|$. Aurait-ce été aussi facile ?

**IS26** • L'intégrale $\displaystyle\int_0^2 Max(Ln(1+x^2),1).dx.$ • MPSI 2/2013

L'application sous le signe somme n'est peut être pas continue, mais elle l'est par morceaux. On se ramène donc à deux intégrales d'applications continues par relation de Chasles : $\displaystyle\int_0^a Max(Ln(1+x^2),1).dx+\int_a^2 Max(Ln(1+x^2),1).dx$ où $a$ est le réel de $[0,\ 2]$ vérifiant $\ln(1+a^2)=1$ (c'est $\sqrt{e-1}$).




La première intégrale vaut juste $a-0$ (hauteur fois longueur de l'intervalle).
Pour la seconde, on intègre par parties $\left\{\begin{array}{ccc}\ln(1+x^2) & \to & 2.x/1+x^2\\ 1 & \leftarrow & x\end{array}\right|$. L'intégrale en $\dfrac{x^2}{1+x^2}$ se sépare en $1-\frac{1}{1+x^2}$ et s'intègre en $x-Arctan(x)$. On a donc $\displaystyle\int_a^2 Ln(1+x^2).dx=\Big[x.\ln(1+x^2)+2.arctan(x)-2.x\Big]_a^2$.

Calcul final : $\boxed{2.\ln(5) - 4 + 2.Arctan(2)}$

**IS26** • Endormorphisme de $\mathbb{R}^3$ de noyau donné et dont on connaît une image. • MPSI 2/2013

On cherche un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Il suffira de donner sa matrice sur la bas canonique. Mais une chose est sûre : son déterminant est nul, puisque le noyau n'est pas réduit à $\overrightarrow{0}$.

Sinon, on connaît la première colonne de la matrice car $\overrightarrow{i}$ a pour image $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ : $\begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 1 & \star & \star \\ -1 & \star & \star \end{pmatrix}$.

Mais comme le noyau est un plan il est de dimension 2 et par la formule du rang, l'image est de dimension 1. Tous les vecteurs de l'image sont multiples de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. La matrice est $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a & b \\ -1 & -a & -b \end{pmatrix}$.

Comme les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans le noyau *(équation $x + 2.y - z = 0$)*, on trouve la forme finale : $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$ qu'on écrira même $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ de rang 1.

Le déterminant est nul, la trace vaut 4.

**IS26** • Trois vecteurs et leurs formes duales. • MPSI 2/2013

On donne trois vecteurs. On détermine leur matrice par rapport à la base canonique : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Le déterminant de cette matrice est non nul (c'est 1). Cette famille est une base. On inverse la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ (on vérifie). On extrait alors les formes duales :

$\overrightarrow{u}^* = (x, y, z) \longmapsto x - y - z$, $\overrightarrow{v}^* = (x, y, z) \longmapsto -2.x + 4.y + 3.z$ et $\overrightarrow{w}^* = (x, y, z) \longmapsto x - 2.y - z$

En effet, si un vecteur a pour composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sur la base canonique et $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sur la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ alors on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et aussi $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

**IS26** • Cette phrase contient ...... consonnes de plus que de voyelles. • MPSI 2/2013

Initialement, on a 28 consonnes et 19 voyelles.
Si on met le mot "neuf", on passe à 30 consonnes et 21 voyelles, et c'est gagné.
Si on met le mot "dix", on passe à 30 consonnes et 20 voyelles, et c'est gagné.
Si on met le mot "onze", on passe à 30 consonnes et 21 voyelles, c'est faux.

MPSI 2/2013 — `747 points` — *IS26*

$\diamondsuit$104 $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de spectre $\{1, 6\}$ et envoyant $\overrightarrow{i}$ sur $2.\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$. Donnez sa trace, son déterminant, son noyau et calculez l'image de $\overrightarrow{j}$. •3 pt.•

---

$\heartsuit$103 Montrez qu'une matrice et sa transposée ont le même spectre. •1 pt.•

---

$\diamondsuit$105 On pose $E = Vect(ch^4,\ ch^3.sh,\ ch^2.sh^2,\ ch.sh^3,\ sh^4)$. Montrez que la dérivation est un endomorphisme de $(E, +, .)$.
Calculez sa trace et son déterminant. •3 pt.•

---

$\diamondsuit$106 On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
Vérifiez $A.B = B.A$ et donnez le rang de cette matrice. •2 pt.•
Déterminez le noyau de $X \longmapsto A.X$ *(notée $\alpha$)*, le rang de $A$ et son déterminant. •3 pt.•
Déterminez le noyau de $X \longmapsto B.X$ *(notée $\beta$)*, le rang de $B$ et son déterminant. •3 pt.•
On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculez $A.U$ et $B.U$. •1 pt.•
Diagonalisez $A$ et $B$ *(calculez $D$ et $P$, n'inversez pas $P$, ne calculez pas $A^n$ ni $B^n$)*. •4 pt.•
Montrez pour tout couple $(u,\ v)$ d'endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ : $Ker(\alpha)\ \cap\ Ker(\beta) \subset Ker(u \circ \alpha + v \circ \beta)$. •1 pt.•

---

$\spadesuit$18 Pour tout $q$, on note $A_q$ la matrice carrée de taille $q$ et de terme général 0 si $(0 < i < q-1$ et $0 < k < q-1)$ et 1 sinon *(indexation du grand python)*. Calculez $(A_4)^2$. •1 pt.•
Calculez la trace, le déterminant et le rang de $A_q$ en fonction de $q$. •3 pt.•
Complétez `def antasm(q) :` qui crée cette matrice. •2 pt.•
Justifiez que 0 est valeur prorpe de $A_q$. •1 pt.•
Trouvez les deux valeurs propres de $A_q$ qui vous manquent en résolvant le système $A_q.X = \lambda.X$ avec $\lambda$ et $X$ non nuls. •3 pt.•
Diagonalisez $A_6$. •3 pt.•

---

$\diamondsuit$107 Une enseigne de vente de vétements *(fabriqués sans doutes au Bengladesh pour l'équivalent de cinquante euros par mois dans des conditions de non-sécurité bien connues)* propose actuellement une offre "le prix c'est votre pourcentage de réduction". Ainsi, un article affiché dix euros ne vous en coutera que neuf et un article affiché cinquante euros ne vous en coutera que vingt cinq *(et un article de cent dix euros ?)*. Si je paye finalement vingt et un euros, quel était le prix initial de l'article. J'ai acheté deux articles, il m'en a couté quarante euros. Sachant que l'un d'entre eux affichait comme prix le double de l'autre, combien coutaient chacun ? Et si j'ai payé vingt sept euros, sachant que l'un m'a couté le double de l'autre ? •4 pt.•

**IS27** • Endormorphisme de $\mathbb{R}^2$ de spectre $\{1, 6\}$ et dont l'image de $\overrightarrow{i}$ est donnée. • MPSI 2/2013

Il a deux valeurs propres, en dimension 2, il est donc diagonalisable.
Sur une base adaptée, sa matrice sera $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Comme la trace et le déterminant ne dépendent pas de la base sur laquelle on va exprimer la matrice, on trouve : $Tr(f) = Tr(D) = 7$ et $\det(f) = \det(D) = 6$.
Comme son déterminant est non nul, cet endomorphisme est un automorphisme, son noyau est réduit à $\overrightarrow{0}$.
Ensuite, on cherche sa matrice sur la base canonique : $\begin{pmatrix} 2 & . \\ -1 & . \end{pmatrix}$ à cause de l'image de $\overrightarrow{i}$. Mais pour que la trace soit 7, on trouve $\begin{pmatrix} 2 & . \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Ensuite, pour avoir un déterminant égal à 6, on complète encore $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. On interprète : $f(\overrightarrow{j}) = -4.\overrightarrow{i} + 5.\overrightarrow{j}$.
A toutes fins utiles : vecteurs propres $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ par exemple.

**IS27** • Spectre d'une matrice et de sa transposée. • MPSI 2/2013

Le spectre d'une matrice $A$ est l'ensemble des valeurs propres de $A$, c'est à dire les racines de son polynôme caractéristique.
Or, $A$ a pour polynôme caractéristique $\det(A - X.I_n)$ tandis que ${}^tA$ a pour polynôme caractéristique $\det({}^tA - X.I_n)$ qu'on écrit aussi $\det({}^t(A - X.I_n))$ car $I_n$ est symétrique.
Le résultat classique $\det({}^tM) = \det(M)$ permet de conclure que $A$ et ${}^tA$ ont même polynôme caractéristique.
Rien ne dit en revanche comment avoir les vecteurs propres de l'une à l'aide de ceux de l'autre.

**IS27** • Dérivation sur un espace vectoriel en $ch$ et $sh$. • MPSI 2/2013

Déjà, $E$ est un espace vectoriel, puisque c'est celui qu'une famille engendre.
La dérivation est linéaire, depuis toujours.
Il faut encore voir qu'elle va de $E$ dans $E$. On le vérifie non pas pour les combinaisons que sont les vecteurs de $E$, mais juste pour chacun des cinq vecteurs de la base donnée par l'énoncé :

| fonction | $ch^4$ | $ch^3.sh$ | $ch^2.sh^2$ | $ch.sh^3$ | $sh^4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| dérivée | $4.ch^3.sh$ | $3.ch^2.sh^2 + ch^4$ | $2.ch.sh^3 + 2.ch^3.sh$ | $sh^4 + 3.ch^2.sh^2$ | $4.sh^3.ch$ |

Toutes ces images sont dans $E$, le caractère "endo" est établi.
Pour calculer la trace et le déterminant de cet endormorphisme, il suffit de calculer la trace et le déterminant de sa matrice sur n'importe quelle base, pourquoi pas alors celle de l'énoncé : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ comme le disait le tableau ci dessus.
La trace est nulle, sans calcul.
Le déterminant se calcule par développement par rapport à la première colonne...
*Il manque quand même un détail : cette famille est elle bien une base ? Je vous laisse la démonstration.*

**IS27** • Matrices $A$ et $B$. • MPSI 2/2013

On effectue le calcul de $A.B$ et $B.A$ et dans les deux cas, on trouve $\boxed{\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}}$ Cette matrice est de rang 1 : on l'écrit $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

*Avec un bon raisonnement sur les dimension (ici : $\dim(Ker(\alpha \circ \beta) = 3$), on peut arriver à trouver le rang de $A$ et $B$. L'une au moins des deux matrices n'est pas inversible.*
*Si même $A$ était inversible, alors $b$ serait de rang 1, ce qui n'est pas le cas.*
*De même, $B$ n'est pas inversible.*

---

On résout ensuite $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on trouve l'intersection de deux hyperplans : $y = t$ et $x = z$. Ce noyau est de dimension 2, engendré par exemple par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le rang de $A$ est donc 2. On peut constater qu'il n'y a que deux lignes indépendantes *(celles qui donnent les équations de nos deux hyperplans par exemple)* et que deux colonnes indépendantes *(qui donnent alors une base de l'ensemble image).*

---

Pour $B$, on résout aussi et on trouve deux équations indépendantes : $z = 0$ et $x - y + t = 0$. On trouve un espace de dimension 2 de base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ par exemple.
$A$ et $B$ sont donc de rang 2. $A$ et $B$ ont un déterminant nul, puisque non inversibles.

---

On calcule : $\boxed{A.U = U \text{ et } B.U = -2.U}$
On reconnaît que $U$ est vecteur propre de $A$ et de $B$ *(valeurs propres 1 et $-2$).*

---

On demande de diagonaliser $A$. Il n'y a pas de grand calcul à faire. On tient déjà trois vecteurs propres de $A$ pour commencer à construire une base. Deux vecteurs du noyau *(valeur propre 0)*, puis le vecteur $U$ *(valeur propre 1).*
Il ne nous manque qu'un vecteur propre. Pour quelle valeur propre ? La somme des valeurs propres vaut 3 *(c'est la trace).* Il manque donc juste la valeur propre 2 *($0 + 0 + 1 + \lambda = 3$).*
On cherche un vecteur $V$ vérifiant $A.V = 2.V$. On trouve $x = y$ et $z = t = 0$. On résume donc tout de suite :

$$\boxed{D_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \boxed{B : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Pour $B$ on tient le même raisonnement : base du noyau, vecteur $U$ et on cherche la troisième valeur propre par la trace. Elle vaut $-1$. On trouve $x = y = z = t$.

---

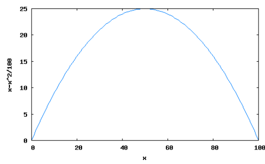
Pour l'inclusion des noyaux, c'est du cours :
on prend $\overrightarrow{a}$ dans $Ker(\alpha) \cap Ker(\beta)$, on a donc $\alpha(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$ et $\beta(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$, on compose : $u(\alpha(\overrightarrow{a})) = \overrightarrow{0}$ et $v(\beta(\overrightarrow{a})) = \overrightarrow{0}$, et on somme ; on reconnaît : $\overrightarrow{a} \in Ker(u \circ \alpha + v \circ \beta)$.

**IS27** • Des vétements achetés chez "La Halle". • MPSI 2/2013

Si l'on note $P$ le prix affiché, le taux de réduction est donc de $P/100$, ce qui donne une valeur de réduction de $P^2/100$ et une valeur finale de $\boxed{P - P^2/100}$

*On peut vérifier avec les deux exemples. Sur un article gratuit, c'est sans intérêt, sur un article à un euro, c'est ridicule, et sur un article à cent dix euros, le magasin vous en doit onze.*

*Le graphe est déjà un peu surprenant, et on se dit qu'ils ont du "bétonner" et plafonner leurs prix, car à partir de cinquante euros, plus vous achetez, moins vous payez...*



Ensuite, c'est juste de la résolution d'équation : $P - P^2/100 = 21$. On trouve $\boxed{P = 30 \text{ ou } P = 70}$

Pour l'autre question, on a un système $f(a) + f(b) = 40$ et $b = 2.a$.
On résout l'équation du second degré et on a deux solutions : 40 et 20.

On vérifie :

| prix article | taux | ristourne | prix final | |
|---|---|---|---|---|
| 20 euros | 0,2 | 4 euros | 16 euros | |
| 40 euros | 0,4 | 16 euros | 24 euros | |
| 80 euros | 0,8 | 64 euros | 16 euros | |

total : quarante euros.

Pour la dernière question, on a $f(a) + 2.f(a) = 27$, soit $f(a) = 9$. C'était donc un article à dix euros *(ou quatre vingt dix)* payé neuf euros et un autre à $50 \pm 10.\sqrt{7}$ payé dix huit.

**IS27** • Une matrice en forme d'écran. • MPSI 2/2013

On écrit la matrice pour $q = 5$. Elle est faite de 0 et de 1. Les 0 sont dans la zone où $i$ et $k$ sont entre 1 et 3. C'est "le centre de la matrice". Autour, on met des 1 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sur la diagonale, on a deux 1 et des 0. La trace vaut toujours 2 *(sauf en taille 1)*.
La première et la dernière colonne sont égales, le déterminant est nul *(famille liée)*.

La matrice est faite de deux colonnes qu'on répète. L'ensemble image est engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il est de dimension 2. Le rang de cette matrice vaut toujours 2.

Sauf pour $q$ égal à 2, où la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'existe pas. Dans ce cas, le rang vaut 1.

Le calcul de $(A_4)^2$ est simple : $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}}$

On pourrait généraliser en dimension $n$.
On constate que $(A_q)^2$ est restée de rang 2. C'est donc que $Im(A_q)$ n'intersecte $Ker(A_q)$ que selon le

vecteur nul.

---

Pour ce qui est de créer la matrice, on a plusieurs solutions.
On commence par créer une matrice faite de 0 :

```
A = [[0]*q for k in range q]
```

Ensuite, on met à 1 les termes qui nous concernent :

```
for k in range (q) :
....A[0][k] = 1
....A[q-1][k] = 1
....A[k][0] = 1
....A[k][q-1] = 1
```

On pourrait faire des affectations simultanées. On note aussi que les quatre termes des coins sont affectés deux fois à 1.
Cette procédure est valable même pour la matrice de taille 1.
On peut aussi tout faire en une fois :
`A = [[1]+[0]*(q-2)+[1] for k in range(q-2)]` Ceci crée le bloc central $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Il ne reste plus qu'à coller deux lignes de 1 : `A = [1]*q + A + [1]*q`

---

On a trouvé une valeur propre de $A_q$, c'est 0 à cause du noyau.
Elle est de multiplicité $q-2$ puisque le noyau est de dimension $q-2$ *(le rang vaut 2 on l'a dit et répété).*
Il nous manque donc deux autres valeurs propres. On sait d'ores et déjà que leur somme vaudra 2.
*On ne calcule pas le polynôme caractéristique, car on veut devenir ingénieur et pas machine à calculer. On cherche directement les couples propres, car la matrice a une forme simple.*
On résout donc $A_q.X = \lambda.X$, en notant $x_0$ à $x_{q-1}$ les composantes du vecteur $X$.
On trouve un système assez simple :
$x_0 + x_1 + \ldots + x_{q-1} = \lambda.x_0$ et $x_0 + x_1 + \ldots + x_{q-1} = \lambda.x_{q-1}$ *(première et dernière ligne)*
$x_0 + x_{q-1} = \lambda.x_1$, mais aussi $x_0 + x_{q-1} = \lambda.x_2$ jusqu'à $x_0 + x_{q-1} = \lambda.x_{q-2}$
Comme on cherche un vecteur propre de valeur propre non nulle, on a immédiatement $a_0 = a_{q-1}$ et $a_1 = a_2 = \ldots = a_{q-2}$.
On note $\alpha$ et $\beta$ ces deux réels. Le vecteur propre est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$. Mais on ne se contente pas de cette information. On n'a pas tout exploité ni raisonné par équivalences.
On reporte et on trouve : $2.\alpha + (q-2).\beta = \lambda.\alpha$ et $2.\alpha = \lambda.\beta$.
On extrait $\alpha = \lambda.\beta/2$ et on reporte : $\lambda^2.\dfrac{\beta}{2} = \lambda.\beta + (q-2).\beta$.
On ne veut pas que $\beta$ soit nul, sinon le vecteur est nul *($\alpha$ suit le mouvement).*
On aboutit à une équation du second degré en $\lambda$ de racines $1 + \sqrt{2.q-3}$ et $1 - \sqrt{2.q-3}$.
La somme vaut bien 2, et on pourra vérifier la cohérence sur la trace de $(A_q)^2$ si on en a le courage et le temps.

---

Pour $A_6$, tout le travail a été fait ou presque. On a deux valeurs propres égales à 4 et $-2$, car ici le discriminant est simple. L'autre valeur propre est 0.
On dresse la liste des vecteurs propres pour obtenir la matrice $P$ :

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \left( D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Les deux premiers vecteurs propres sont du type $\alpha/\beta$ déjà précisé *(avec $\alpha = \lambda.\beta/2$)* et les suivants sont des vecteurs du noyau. Il n'y a pas unicité de la forme de $P$.

| | | |
|---|---|---|
| MPSI 2/2013 | `785 points` | $IS27$ |

♢108 Montrez que $M \longmapsto M + Tr(M).\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Est-ce un automorphisme. •2 pt.•
Calculez sa trace, son déterminant. •2 pt.•
Déterminez son spectre et la dimension de chaque sous-espace propre. •3 pt.•

---

♡104 Montrez que 1 est toujours valeur propre d'une matrice de permutation. •1 pt.•
Montrez que les valeurs propres d'une matrice de permutation sont des racines de l'unité *(vous pourrez montrer que si $U$ est vecteur propre d'une matrice $M$ alors il est vecteur propre de $M^p$ pour tout $p$).* •1 pt.•
Montrez que toute matrice de permutation diagonalisable dans $\mathbb{R}$ est son propre inverse. •2 pt.•

---

♡105 Montrez que $(A,\ B) \longmapsto Tr({}^tA.B)$ est un produit scalaire sur $(M_n(\mathbb{R}),\ .,\ .)$. •2 pt.• Montrez que toute matrice symétrique est orthogonale à toute matrice antisymétrique. •1 pt.• Donnez une base de l'orthogonal de la matrice $I_n$. •1 pt.•

---

♡106 $n$ est un entier naturel fixé. On note $T$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures *(quantifiez "A est triangulaire supérieure")*. Montrez que $T$ est une algèbre. Quelle est sa dimension ? •3 pt.•
On se donne $A$ inversible dans $T$. Montrez que $M \longmapsto A.M$ est un endomorphisme injectif de $T$. Déduisez que $A^{-1}$ est aussi dans $T$. •2 pt.•

♡107 Montrez que pour $A$ dans $T$ alors ${}^tA.A$ *(notée G)* est une matrice symétrique à diagonale positive. •2 pt.•
Soit X un vecteur propre de $G$ de valeur propre $\lambda$. En étudiant ${}^tX.G.X$ montrez que $\lambda$ est positive. •2 pt.•

---

♣42 Soit $M$ une matrice en Python *(du type liste de listes)*. Créez une procédure qui vérifie si la matrice est symétrique *(il faudra peut être déjà vérifier que la matrice est carrée).* •3 pt.•

---

♢109 Soit $\phi$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ pour lequel la base $(\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j},\ 3.\overrightarrow{i} + 5.\overrightarrow{j})$ est orthonormée. Calculez la norme de $\overrightarrow{i}$, celle de $\overrightarrow{j}$ et l'angle qui les sépare. •2 pt.•

---

♢110 Combien y a-t-il de séries géomériques $a$ vérifiant $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k = 2.\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{3.k}$ ? •2 pt.•

---

♢111 Résolvez $y"_t + (17 - i).y_t = (3 + 2.i).y'_t$ avec condition initiale $y_0 = 0$ et $y'_0 = 1 + 8.i$. •4 pt.•

---

♣43 $a$ est un entier tiré par hasard uniforme entre $-9$ et 10 et $b$ est un entier tiré par hasard uniforme entre 1 et 10 *(indépendant de a)*. Calculez $P(a = b)$ et $P(a < b)$. •3 pt.•

**IS28** • Endomorphisme $M \longmapsto M + Tr(M).A$. • MPSI 2/2013

Si $M$ est une matrice de taille 2, sa trace existe, $Tr(M).A$ est aussi une matrice de taille 2 et la somme $M + Tr(M).A$ l'est aussi. On a établi le caractère "endo".
La linéarité, c'est $(\alpha.M + \beta.N) + Tr(\alpha.M + \beta.N).A = \alpha.(M + Tr(M).A) + \beta.(N + Tr(N).A)$ sans aucune difficulté.

---

Pour le noyau, on résout $M = -Tr(M).A$ d'inconnue $M$. Inutile d'en revenir aux coefficients comme un technicien. On se la joue "ingénieur". On passe à la trace *(condition nécessaire)* : $Tr(M) = Tr(Tr(M).A) = Tr(M).Tr(A) = 7.Tr(M)$. On aboutit impérativement à $Tr(M) = 0$. On reporte : $M = -0.A$. Le seul élément du noyau est la matrice nulle. L'application est injective. Donc bijective. $\boxed{\text{C'est un automorphisme.}}$

---

On calcule l'image de chaque vecteur de la base canonique : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et enfin $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. On trouve la matrice :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Sa trace vaut 11 et son déterminant vaut 8}}$$

---

L'élève sage et obéissant *(ce n'est pas un défaut)* calculera le polynôme caractéristique en développant $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$ par rapport à la deuxième et troisième colonne. Il trouvera $\lambda^4 - 11.\lambda^3 + 27.\lambda^2 - 25.\lambda + 8$. Et là, il aura tort d'avoir développé. On trouve $(\lambda - 1)^3.(\lambda - 8)$.
Le spectre est $\boxed{[1,\ 1,\ 1,\ 8]}$ en termes de collection ou liste.

---

On cherche sans effort des vecteurs propres de valeur propre 1 indépendants : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Il nous en faudrait un troisième. Et un vecteur propre associé à la valeur propre 8.
*Mais on aborde la question avec plus d'intelligence, en regardant le problème posé et non en déballant des méthodes purement calculatoires sans recul.*
On cherche des couples $(M,\ \lambda)$ vérifiant $M + Tr(M).A = \lambda.M$.
Comme pour l'injectivité, on passe à la trace : $Tr(M) + Tr(M).Tr(A) = \lambda.Tr(M)$. On isole : $8.Tr(M) = \lambda.Tr(M)$.
On distingue deux cas :
• : $\lambda = 8$. On n'a pas de condition sur $Tr(M)$, mais l'équation devient $M + Tr(M).A = 8.M$, soit encore $M = Tr(M).A/8$. $M$ est colinéaire à $A$.
On vérifie : $f(A) = 8.A$, on a un vecteur propre et même une droite de vecteurs propres.
• : $\lambda \neq 8$. On trouve la condition nécessaire $Tr(M) = 0$. L'équation devient $M + 0.A = \lambda.M$, soit forcément $\lambda = 1$. Les matrices de trace nulle forment un sous-espace vectoriel de dimension 3 qui est sous-espace propre de valeur prore 1.

| $\lambda = 1$ | $\lambda = 8$ |
|---|---|
| $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ |

l'endomorphisme est diagonalisable.

**IS28** • Matrices de permutation. • MPSI 2/2013

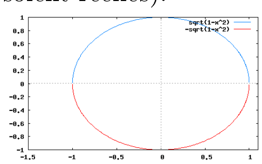
Une matrice de permutation a un seul 1 par ligne *(et par colonne)*. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de valeur propre 1. Il n'est peut être pas le seul *(je ne parle pas que de ses multiples)*, tout dépend de la permutation en question.

---

Soit $U$ un vecteur propre d'une matrice $M$ *(de permutation ou non)* de valeur propre $\lambda$. On a donc $M.U = \lambda.U$. En appliquant $M$ on a $M^2.U = M.\lambda.U = \lambda.M.U = \lambda^2.U$. Par raisonnement rapide et plus que classique : $M^p.U = \lambda^p.U$ *(on le voit en terme d'endomorphisme qui à chaque application multiplie le vecteur $\overrightarrow{u}$ par un facteur $\lambda$)*.
Dans le cas particulier où $U$ est vecteur propre d'une matrice $M$ de permutation $\sigma$, on a $M^p = I_n$ pour un certain entier $p$ égal à l'ordre de la permutation *(le p.p.c.m. de la longueur des cycles constituant $\sigma$)*. On a alors $U = M^p.U = \lambda^p.U$. Comme le vecteur $U$ est non nul, on trouve $\lambda^p = 1$. Les valeurs propres d'une matrice de permutation sont des racines de l'unité dont l'indice doit correspondre à la taille des cycles.

---

On suppose que $M$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. On l'écrit $M = P.D.P^{-1}$ avec $D = Diag([\lambda_1, \ldots \lambda_n])$. On l'élève à la puissance $p$ (ordre de la permutation). On a alors $I_n = M^p = P.D^p.P^{-1}$. On simplifie : $D^p = I_n$ *(si l'endomorphisme est l'identité sur la base canonique, il l'est aussi sur une base de diagonalisation)*.
On interprête avec les termes diagonaux de $D^p$ : $(\lambda_1)^p = \ldots = (\lambda_n)^p = 1$.
Comme on a supposé les $\lambda_k$ réels, on n'a plus le choix : ils valent 1 ou $-1$ (seules racines de l'unité qui soient réelles).




La matrice de la permutation est semblable à une matrice $D = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \pm 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mp 1 \end{pmatrix}$ de carré $I_n$.

Cette propriété se répercute par $M^2 = P.D^2.P^{-1} = P.I_n.P^{-1} = I_n$. On a une symétrie : $M^2 = I_n$ et $M = M^{-1}$.
*Interprétation : les seuls cycles qui composent la permutation $\sigma$ sont des transpositions $\tau_{i,j}$. Tout tri-cycle crée des valeurs propres $j$ et $j^2$. Par exemple* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *se diagonalise en* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & \overline{j} \end{pmatrix}$.

**IS28** • Matrices triangulaires supérieures. • MPSI 2/2013

La matrice de terme général $a_i^k$ est triangulaire supérieure si et seulement si $\forall\ (i,\ k),\ \big((i > k) \Rightarrow (a_i^k = 0)\big)$ *(avec le temps et le recul, je me dis que c'est peut être la question la plus importante de cet exercice, car ce n'est pas tout de savoir calculer à peu près correctement, encore faut il savoir communiquer et formaliser des hypothses et des questions)*.

On montre qu'on a un sous-espace vectoriel de l'espace des matrices carrées de taille $n$ sur $n$. C'est le noyau de $M \longmapsto (a_2^1,\ a_3^1,\ a_3^2, \ldots a_n^1,\ a_n^2, \ldots a_n^{n-1})$ qui est linéaire de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^{n.(n-1)/2}$. Une base est faite des matrices $(E_1^1,\ E_1^2, \ldots E_1^n,\ E_2^2, \ldots E_2^n, \ldots\ E_n^n)$ *(les $E_i^k$ avec $k \geqslant i$)*. Elle est libre car issue de la base canonique et permet d'écrire tous les éléments de $T$.

La dimension est $\dfrac{n.(n+1)}{2}$ *(nombre de coefficients à choisir...).*

---

Pour établir qu'on a une algèbre, il faut montrer la stabilité multiplicative. On peut le montrer sur les éléments d'une base :

- $E_i^k.E_p^q$ vaut 0 (dans $T$) si $k \neq q$
- $E_i^k.E_k^q = E_i^q$ avec $i \leqslant k \leqslant q$

*On peut aussi montrer proprement la stabilité.* On prend $A$ et $B$ vérifiant la propriété et on calcule le terme général du produit sous la diagonale ($i > k$) :

$c_i^k = \sum_{j=0}^{n} a_i^j.b_j^k = \sum_{j=1}^{i} a_i^j.b_j^k + \sum_{j=i+1}^{k} a_i^j.b_j^k$ chaque terme de la somme est nul soit par $a_i^j = 0$ soit par $b_j^k = 0$.

---

L'application $M \longmapsto A.M$ va de $T$ dans $T$ car $T$ est une algèbre.

Elle est linéaire par distributivité de la multiplication sur l'addition.

Elle est injective car l'équation $A.M = 0$ *(matrice nulle)* conduit immédiatement à $M = 0$ par inversibilité de $A$.

Comme il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie, le théorème du rang permet de dire qu'il est bijectif.

Il s'ensuit que $I_n$ *(qui appartient bien à $T$)* admet un unique antécédent par cette application.

Il existe une unique matrice $M$ dans $T$ vérifiant $A.M = I_n$.

On vient de prouver que l'inverse de $A$ *(dont l'existence et unicité étaient assurées)* est dans $T$.

L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est aussi triangulaire supérieure. *On s'en doutait, on pouvait le prouver autrement en étudiant le système ou par récurrence, mais cette démonstration est jolie et concise.*

**IS28** • Matrices en ${}^tA.A$ avec $A$ triangulaire supérieure. • MPSI 2/2013

On regarde en petite dimension : $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a' & b & 0 \\ a" & b' & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & a' & a" \\ 0 & b & b' \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a.a' & a.a" \\ a.a' & a'^2 + b^2 & a'.a" + b.b' \\ a.a" & a'.a" + b.b' & a"^2 + b'^2 + c^2 \end{pmatrix}$

même si ce n'est pas une preuve.

Proprement, la matrice ${}^tA.A$ a pour transposée ${}^t({}^tA.A) ={}^t A.{}^t({}^tA) ={}^t A.A$. Elle est donc symétrique.

On calcule ensuite ses termes diagonaux : $b_i^i = \sum_{k=1}^{n} a_i^k.\alpha_k^i$ avec $\alpha_k^i = a_i^k$. On a bien une somme de carrés de réels. Il s'agit bien des carrées des normes usuelles des vecteurs colonnes de $A$. Le fait que $A$ soit triangulaire n'a aucun rôle dans cette preuve.

---

On prend un vecteur propre $U$ : ${}^tA.A.U = \lambda.U$. On multiplie à gauche par ${}^tU$ *(formats compatibles).* On factorise en ${}^t(A.U).(A.U) = \lambda.{}^tU.U$. Or, chacun des réels du type ${}^tV.V$ est positif *(somme des carrés des coefficients du vecteur $V$)* et ${}^tU.U$ est strictement positif *(car $U$ est non nul).* Le réel $\lambda$ est positif ou nul.

**IS28** • Test Python sur les matrices symétriques. • MPSI 2/2013

On ne détaillera pas ici les `assert` et autres. Une matrice se présente sous la forme $[[a,\ b,\ c],\ [a',\ b',\ c'],\ [a",\ b",\ c"]]$, et on doit éviter $[[a,\ b,\ c],\ [a',\ b'],\ [a",\ b",\ c"]]$ par exemple. Si la matrice s'appelle `M`, on extrait son nombre de lignes par `Nlig=len(M)`.

On teste ensuite que chaque ligne de `M` est de longueur `Nlig` :

```
testcarre = true
for i in range(Nlig) :
....if len(M[i]) != Nlig :
........testcarre = false
```

*Si on a passé ce test de format, on se lance dans le test* `M[i][k]==M[k][i]`

```
if testcarre :
```

```
....for i in range(Nlig) :
........for k in range(i) :
...........if M[i][k] != M[k][i] :
...............testcarre = false
return(testcarre)
```

On ne teste pas avec `k in range(Nlig)`, pour ne pas faire deux fois les mêmes tests. On pourrait aussi éviter de tester les termes diagonaux.

**IS28** • Séries vérifiant $\sum_k a_k = 2.\sum_k a_{3.k}$. • MPSI 2/2013

On prend une série géométrique de terme initial $a_0$ et de raison $r$. Pour que les sommes existent, il faut que $r$ soit de module strictement plus petit que 1.

On calcule : $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k = \frac{a_0}{1-r}$. On calcule aussi $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{3.k} = \frac{a_0}{1-r^3}$ *(la raison est pour elle $r^3$).*

Il y a évidemment le cas où $a_0$ est nul *(les deux sommes sont nulles et proportionnelles)*. Sinon, on aboutit à la condition $\dfrac{1}{1-r} = \dfrac{2}{1-r^3}$. On effectue le produit en croix et on simplifie par $1-r$ (non nul). On aboutit à une équation du second degré de racines $\boxed{r_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ et $r_1 = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. La seconde a un module trop grand. Mais la première convient.

On a donc une infinité de séries possibles, formant un espace vectoriel de dimension 1.

**IS28** • base orthonormée $(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j},\ 3.\overrightarrow{i}+5.\overrightarrow{j})$. • MPSI 2/2013

On est dans le plan, et ces deux vecteurs *(que l'on va noter $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$)* forment bien une base. D'ailleurs, on inverse et on trouve tout de suite $\overrightarrow{i} = -5.(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j}) + 2.(3.\overrightarrow{i}+5.\overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{j} = 3.(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j}) - 1.(3.\overrightarrow{i}+5.\overrightarrow{j})$.

On calcule alors $\phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}) = 25.\phi(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1}) + 4.\phi(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2}) - 20.\phi(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ et de même pour $\phi(\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{j})$ et même $\phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$. On efface $\phi(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ par orthogonalité et on remplace $\phi(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1})$ et $\phi(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2})$ par 1.

$|\overrightarrow{i}|^2 = 29$, $|\overrightarrow{j}|^2 = 10$ et $\phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}) = 11$ l'angle a pour cosinus $\dfrac{11}{\sqrt{290}}$

**IS28** • Equation différentielle $y"_t + (17-i).y_t = (3+2.i).y'_t$. • MPSI 2/2013

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients conqtants (et complexes, il est vrai), L'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. La condition initiale imposée va donner une unique solution. On résout l'équation caractéristique $X^2 + (17-i) = (3+2.i).X$ de discriminant $(3+2.i)^2 - 4.(17-i)$. Il vaut $-63+16.i$. On note $\delta$ une de ses racines carrées de la forme $a+i.b$. On a alors $a^2-b^2 = -63$, $a.b = 8$ et $a^2+b^2 = \sqrt{63^2+16^2} = 65$. On trouve $\delta = 1+8.i$ et son opposé. Les deux valeurs propres sont $1-3.i$ et $2+5.i$.

Les solutions sont donc de la forme $t \longmapsto a.e^{(1-3.i).t} + b.e^{(2+5.i).t}$ avec $a$ et $b$ complexes dépendant des conditions initiales. On a $a = -b$ et ensuite $(1+3.i).a + (2+5.i).b = 1+8.i$. La solution cherchée est donc $\boxed{t \longmapsto -e^{(1-3.i).t} + e^{(2+5.i).t} \text{ valable sur } \mathbb{R}}$ *(à valeurs das $\mathbb{C}$, mais $t$ reste réel)*

**IS28** • Tirage aléatoire de deux entiers. • MPSI 2/2013

Il y a vingt événements pour $a$, équiprobables, et dix pour $b$. Pour la variable couple $(a,\ b)$, l'univers est de cardinal 200 avec équiprobabilité des deux cent cases. Dix sont favorables.

$\boxed{P(a=b) = \dfrac{10}{200} = \dfrac{1}{20}\text{. Pour } a<b\text{, on a cette fois } 145/200.}$

MPSI 2/2013 | `823 points` | $IS28$

♢112 Complétez $\frac{1}{*}.\begin{pmatrix} 14 & 2 & 5 \\ -2 & . & . \\ . & 10 & . \end{pmatrix}$ pour que ce soit la matrice d'une isométrie de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire usuel *(∗ est positif)*. •2 pt.•
Calculez son déterminant. •1 pt.•
Montrez que $-1$ est valeur propre de cette matrice. •1 pt.•

---

♢113 Montrez que $(P,\ Q) \longmapsto \int_0^1 P(t).t.Q(t).dt$ est un produit scalaire sur l'espace des applications continues de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. •2 pt.•
Construire une base orthonormée de $(\mathbb{R}_1[X],\ +,\ .)$. •2 pt.•
Minimiser $\int_0^1 (t^2 - a.t - b)^2.t.dt$. •2 pt.•

---

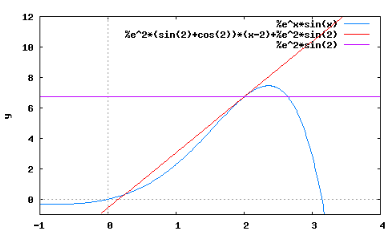
♠19 Calculez le déterminant de la matrice de taille $n$ de terme général $\left[\frac{i+j+1}{n}\right]$ *(indexation pythonienne)*. •2 pt.•
Montrez que $-1$ est valeur propre de cette matrice pour $n$ égal à 4. •2 pt.•

---

♠20 Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 13 & -5 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$. •2 pt.•
Orthonormalisez la base canonique par méthode de Schmidt. •4 pt.•
Projetez orthogonalement le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sur la droite $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour ce produit scalaire. •1 pt.•
Donnez une vecteur orthogonal au plan d'équation $2.x + y - z = 0$ pour ce produit scalaire. •3 pt.•

---

♡108 Soit $f$ un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. déterminez pour tout réel $x$ l'abscisse de l'intersection de la tangente au graphe en $x$ et de l'axe $Ox$. •2 pt.•




---

♢114 Montrez que $(u\ v) \longmapsto u_0.v_0 + u_1.v_1 + u_2.v_2$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $(E,\ +,\ .)$ des suites récurrentes linéaires vérifiant $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N},\ u_{n+3} = 17.u_{n+1} - u_{n+2} - 15.u_n$. •2 pt.•
Montrez que $(u_n) \longmapsto (u_{n+1})$ est en endomorphisme de $E$. Calculez son déterminant et sa trace. •4 pt.•
Donnez l'angle entre la suite vérifiant $(u_0,\ u_1,\ u_2) = (0, 1, 2)$ et son image.

**IS29** • Une matrice d'isométrie à compléter. • MPSI 2/2013

On a une matrice de taille 3. C'est celle d'une isométrie de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si c'est la matrice d'un changement de base orthonormée. Il faut et il suffit que ses colonnes soient normées, deux à deux orthogonales. De même pour ses lignes. On nomme les coefficients qui manquent : $\dfrac{1}{n}.\begin{pmatrix} 14 & 2 & 5 \\ -2 & a & b \\ c & 10 & d \end{pmatrix}$.

On va déjà avoir $28 - 2.a + 10.c = 0$, $70 - 2.b + c.d = 0$ entre autres.
Mais on veut aussi que le premier vecteur ligne soit normé : $(14^2 + 2^2 + 5^2)/n^2 = 1$. On trouve que $n$ vaut 15 ou $-15$.
En normant la première colonne, on trouve $|c| = 5$. En normant la seconde, on trouve $|a| = 11$.
Pour que l'équation $28 - 2.a + 10.c = 0$ soit compatible : $c = -5$ et $a = -11$.
L'orthogonalité de la troisième avec la première et la deuxième ne nous laisse plus le choix : $\boxed{\dfrac{1}{15}.\begin{pmatrix} 14 & 2 & 5 \\ -2 & -11 & 10 \\ -5 & 10 & 10 \end{pmatrix}}$ Ou son opposée.

---

Son déterminant vaut 1 ou $-1$ *(isométrie)*. Son signe se détermine rapidement, on trouve $-1$.

---

Pour vérifier que $-1$ est valeur propre, on trouve au moins un vecteur non nul vérifiant $M.U = -U$ : $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}}$

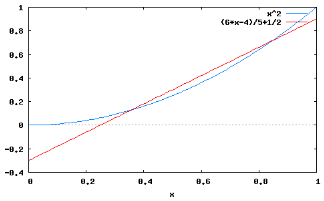
**IS29** • Produit scalaire $\int_0^1 P(t).t.Q(t).dt$ et projection orthogonale. • MPSI 2/2013

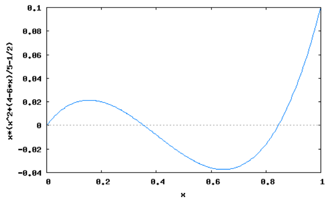
Pour $f$ et $g$ continues, le produit $f.g.Id$ l'est aussi et est donc intégrable. Existence établie.
Par commutativité de la multiplication, on a $\phi(f,\ g) = \phi(g,\ f)$.
Par distributivité et linéarité : $\lambda.\phi(f,\ h) + \mu.\phi(g,\ h) = \phi(\lambda.f + \mu.g,\ h)$ pour tout quintuplet.
Pour $f$ donnée toute seule, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t.f^2(t).dt$ est positive.
De plus, si cette intégrale est nulle, alors par positivité de la fonction intégrée et continuité, on trouve $\forall\ t\ \in\ [0,\ 1],\ t.f^2(t) = 0$. On trouve que $f$ est nulle sur $]0,\ 1]$. Mais par continuité, elle l'est aussi en 0.
On a bien un produit scalaire.

On renorme le vecteur 1 : $\sqrt{2}$ (polynôme constant) sera notre premier vecteur de base.
Son produit scalaire avec le vecteur $X$ vaut $\sqrt{2}/3$. Le vecteur $\left(X - \dfrac{\sqrt{2}}{3}.\sqrt{2}\right)$ est donc orthogonal à notre premier vecteur de base. On garde $3.X - 2$ et on le renorme : $6.X - 4$.

On dispose d'une base orthonormée : $\boxed{(\sqrt{2},\ 6.X - 4)}$

Pour projeter orthogonalement un vecteur, les formules de Parseval calculent les composantes suivant cette base orthonormée : $\phi(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1} + \phi(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{e_2}).\overrightarrow{e_2}$.
On trouve ici $\boxed{\dfrac{1}{2} + \dfrac{6.X - 4}{5}}$ Les deux graphes se ressemblent assez, sauf peut-être près de 0 mais la pondération en $x$ fait que le poids vers 0 ne compte pas beaucoup.




**IS29** • Déterminant de la matrice de terme général $[(i+j+1)/n]$. • MPSI 2/2013

On regarde en petites tailles. Pas mal de termes sont nuls. Tant que $i+j+2$ n'a pas atteint $n$. Par exemple sur la première ligne, tous les termes sont nuls, sauf celui de position $(0,\ n-1)$ qui vaut alors 1.
Sur la seconde ligne, c'est pareil, sauf les deux derniers.
Bref, la matrice est de la forme suivante : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en taille 5 par exemple *(on n'atteint jamais la valeur 2 dans les coefficients)*.
Elle est presque triangulaire. Son déterminant va être le produit des termes (anti)diagonaux, au signe près *(remise en ordre des colonnes)*.
On échange première et dernière, deuxième et avant dernière et ainsi de suite *(colonne $k$ et colonne $n-k-1$ en python suprème)*. On doit donc échanger à peu près la moitié des colonnes *(pour $n$ impair, celle du milieu ne bouge pas)*.
On résume en fontion de la valeur de $n$ modulo 4

| $n \quad mod \quad 4$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| | $+1$ | $+1$ | $-1$ | $-1$ |

on peut résumer avec $(-1)^{[n/2]}$.

---

Pour $n$ égal à 4, c'est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Si l'on est psi-chédélique, on montre que $-1$ est valeur propre en annulant $\det(A_4-(-1).I_4)$, c'est à dire en calculant $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ et en trouvant 0 (le bourrin total cacule le polynôme caractéristique $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ et montre ensuite que $-1$ en est racine *(celui là, je ne peux plus rien pour lui, hormis lui dire de se faire embaucher plus tard par un(e) de ses ancien(e)s camarades devenu ingénieur)*.
L'élève aimprévisible résout $\left\{\begin{array}{ccccc} & & & t & = & -x \\ & & z & +t & = & -y \\ & y & +z & +t & = & -z \\ x & +y & +z & +t & = & -t \end{array}\right.$ et trouve le vecteur propre $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$

**IS29** • Un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$. • MPSI 2/2013

On définit donc $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 13 & -5 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, de la forme $(U,\ V) \longmapsto {}^t U.S.V$. On a immédiatement une forme, symétrique et bilinéaire.
On doit ensuite vérifier que $x^2+13.y^2+3.z^2+6.x.y-2.x.z-10.y.z$ est toujours positif. On l'écrit $(x+3.y-z)^2+4.y^2+2.z^2-4.y.z$ puis $(x+3.y-z)^2+(2.y-z)^2+z^2$. En tant que somme de carrés

de réels, cette quantité est positive.
Elle n'est nulle que si $x+3.y-z$, $2.y-z$ et $z$ sont nuls, ce qui conduit à $x=y=z=0$.

---

Le premier vecteur de la base canonique est normé, on le garde.
Pour le second, on prend $\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{i}$ *(le 3, c'est leur produit scalaire).*
Ce nouveau vecteur a pour norme la racine de $\begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. On garde donc $\overrightarrow{e_2}=\dfrac{\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{i}}{2}$.
Pour le troisième, on par de $\overrightarrow{k}$ et on lui soustrait $-\overrightarrow{i}$, puis $-\overrightarrow{e_2}$.
On aboutit au vecteur $\dfrac{-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k}}{2}$. Il est bien orthogonal aux deux premiers.
Par chance, il est normé. On résume : $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

---

Pour projeter orthogonalement, la formule est dans le cours : $\overrightarrow{u}\longmapsto\phi(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{n}).\overrightarrow{n}$ où $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normé : $\dfrac{\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}}{\sqrt{11}}$.
La formule devient $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\longmapsto\dfrac{3.x+y+z}{11}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

---

On doit trouver l'orthogonal d'un sous-espace, mais pas pour le produit scalaire usuel. Le plan d'équation $2.x+y-z=0$ n'a pour vecteur normal $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ que pour le produit scalaire usuel.
ici, il faut trouver un vecteur orthogonal à tous les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2.x+y \end{pmatrix}$. Il faut et il suffit qu'il soit orthogonal à une base : $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. On aboutit à deux conditions : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 13 & -5 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 13 & -5 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$. On trouve deux équations : $\left\{\begin{array}{rrrcl} -x & -7.y & +5.z & = & 0 \\ 2.x & +8.y & -2.z & = & 0 \end{array}\right.$. Le vecteur $\boxed{\begin{pmatrix} 13 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}}$ convient de même que ses multiples.

**IS29** • Intersection de la tangente et de l'axe $Ox$. • MPSI 2/2013

Déjà, l'hypothèse "difféomorphisme" donne l'existence de la tangente et garantit même qu'elle ne sera pas parallèle à $Ox$ (dérivée jamais nulle).
On peut donner l'équation de la tangente en $(x,\ f(x))$ : $t\longmapsto(x-t).f'(t)+f(t)$, et trouver son interscetion avec $Ox$ en résolvant $(x-t).f'(t)+f(t)=0$. On trouve comme abscisse $\boxed{x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}}$
*(existence assurée par $f'(x)$ non nul).*
Un mathématicien n'appréciera pas cette démonstration qui est bourrine au possible et remplace le

raisonnement sain par du calcul qui ne cherche pas à comprendre. On regarde le triangle formé par le point $M(x,\ f(x))$, son projeté sur $Ox$ : $H(x,\ 0)$ et le point cherché $T(t,\ 0)$. On mesure la pente de la droite $(T,\ M)$ par quotient $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ : $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x-t}$.

**IS29** • Suites vérifiant $u_{n+3} = 17.u_{n+1} - u_{n+2} - 15.u_n$ pour tut $n$. • MPSI 2/2013

Le cours assure que ces suites forment un espace vectoriel (la suite nulle vérifie cette relation, et toute combinaison de telles suites la vérifie encore). Cet espace est de dimension 3, et on en trouve une base si nécessaire.
L'application définie dans l'énoncé est une forme. Par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$, cette forme est symétrique. Elle est bilinéaire : $u_0.(\alpha.v_0 + \beta.w_0) + u_1.(\alpha.v_1 + \beta.w_1) + u_2.(\alpha.v_2 + \beta.w_2)$ se sépare aisément en $\alpha.(u_0.v_0 + u_1.v_1 + u_2.v_2) + \beta.(u_0.w_0 + u_1.w_1 + u_2.w_2)$.
On calcule le carré de la norme (si c'en est bien une) d'une suite $u$ : $(u_0)^2 + (u_1)^2 + (u_2)^2$, c'est positif en tant que somme de carrés de réels.
De plus, si une telle norme est nulle, alors $u_0$, $u_1$ et $u_2$ sont nuls. mais alors en reportant dans la formule qui donne les termes de proche en proche, on trouve $u_3 = 0$, puis $u_4 = 0$ et ainsi de suite (récurrence immédiate). Seule la suite nulle a une norme nulle.

---

La transformation qui translate une suite d'un indice est linéaire. On a bien $(u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ u_3 + v_3, \ldots) = (u_1,\ u_2, \ldots) + (v_1,\ v_2, \ldots)$.
De plus, si la suite $u$ vérifie $u_{n+3} = 17.u_{n+1} - u_{n+2} - 15.u_n$ pour tout $n$, alors on a aussi par mutisme de la variable $u_{n+4} = 17.u_{n+2} - u_{n+3} - 15.u_{n+1}$, ce qui donne $v_{n+3} = 17.v_{n+1} - v_{n+2} - 15.v_n$ si l'on a posé $(v_n) = (u_{n+1})$. Par linéarité et caractère "endo", on a un endomorphisme de $(E,\ +,\ .)$.

---

On connaît une base de $(E,\ +,\ .)$ : les trois suites géométriques dont les raisons sont les solutions de l'équation caractéristique : $\lambda^3 = 17.\lambda - \lambda^2 - 15$. L'image d'une suite $(1,\ \lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^3, \ldots)$ par l'opérateur de translation est $(\lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^3, \ldots)$. On reconnaît $\varphi(u) = \lambda.u$. On a trois vecteurs propres.
La matrice de $\varphi$ sur cette base est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$
Le déterminant d'un morphisme est un invariant de similtude qui ne dépend pas de la base choisie. De même pour la trace : $\det(\varphi) = \lambda_1.\lambda_2.\lambda_3$ et $Tr(\varphi) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.
On peut conclure en les calculant (1, 3 et $-5$), mais aussi avec les formules de Viète :

$$\boxed{\det(\varphi) = \lambda_1.\lambda_2.\lambda_3 = -15 \text{ et } Tr(\varphi) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1}$$

---

On donne la suite dont les trois premiers termes sont 0, 1 et 2. Sa norme vaut donc $\sqrt{0+1+4}$. On sait que cette suite existe, mais on ne résout pas le système de VanDerMonde pour la décomposer sur la base des trois suites géométriques.
On calcule son quatrième terme : $u_3 = 17.u_1 - u_2 - 15.u_0 = 15$ : $u = (0,\ 1,\ 2,\ 15, \ldots)$.
On connaît alors le début de sa suite image : $(1,\ 2,\ 15, \ldots)$. Elle a pour norme $\sqrt{1+4+225} = \sqrt{230}$.
On calcule aussi leur produit scalaire : $0.1 + 1.2 + 2.15 = 32$.

On trouve l'angle : $\boxed{Arccos\left(\dfrac{32}{\sqrt{5}.\sqrt{230}}\right)}$ et on le laisse tel quel.

MPSI 2/2013 | 855 points | $IS29$

$\diamondsuit$115

$a$ est un réel positif fixé. Montrez que $(P,\ Q) \longmapsto \int_0^1 P(t).Q(t).t^a.dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. •2 pt.• Précisez suivant la valeur de $a$ l'angle entre 1 et $X$. •1 pt.• Cet angle peut il être droit ? Cet angle peut il valoir $\pi/8$ ? Entre quelle et quelle valeur peut varier cet angle ? •3 pt.•

---

$\clubsuit$44 Au lycée il y a deux classes dans le couloir des Sup. En MPSI, il y a trente garçons et dix filles. En PCSI il y a vingt filles et vingt garçons. Je regarde depuis le couloir, j'aperçois un élève *(au hasard uniforme)*. Quel est la probabilité que ce soit une fille (belle), si je suis devant la classe des MPSI ? Quel est la probabilité que ce soit une fille (quelconque), si je suis devant la classe des PCSI ? •2 pt.•
Je ne sais pas devant quelle salle je suis *(hasard uniforme)*. J'ai aperçu un garçon. Quelle est la probabilité que je sois devant la classe des MPSI ? •2 pt.•

---

$\heartsuit$109 Un élève dit que la covariance d'un couple c'est $E\big((X - E(X)).(Y - E(Y))\big)$. Un autre dit que c'est $E(X.Y) - E(X).E(Y)$. Qui a raison ? •1 pt.•

---

$\diamondsuit$116 Donnez la matrice de la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe orienté par $\overrightarrow{k}$ et d'angle $\pi/2$. •1 pt.•
Donnez un vecteur faisant un angle $\pi/3$ avec son image. •1 pt.•
Donnez la matrice de la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe orienté par $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et d'angle $\pi/2$. Calculez sa trace et son déterminant. •3 pt.•

---

$\diamondsuit$117 Votre chocolat favori est fait pour moitié de cacao et pour moitié de sucre. Le cours du cacao a augménté de dix pour cent, celui du sucre a baissé de dix pour cent. Attendez vous que son prix ne change pas ? •1 pt.•
Vous apprenez que le prix de votre chocolat a augmenté de cinq pour cent. Pouvez vous trouver son prix quand le cacao retrouvera son cours initial ? •1 pt.•

---

$\diamondsuit$118 Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & 17 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un produit scalaire de $\mathbb{R}^3$. •2 pt.•
Montrez que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 9.x & -35.y & +7.z \\ 2.x & -8.y & +z \\ -x & +4.y & -z \end{pmatrix}$ est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ pour ce produit scalaire. •2 pt.•
Trouvez son axe. •1 pt.•

---

$\diamondsuit$119 Existe-t-il un dé à six faces, même déséquilibré vérifiant $P(D < 4) = \dfrac{1}{4}$, $P(D\ pair) = \dfrac{11}{20}$, $P(D\ premier) = \frac{9}{20}$, $P(D\ premier\ impair) = \dfrac{2}{5}$ ? •3 pt.•
Pouvez vous alors calculer l'espérance et la variance de ce dé ? •1 pt.•

**IS30** • Norme sur l'espace des polynômes. • MPSI 2/2013

Pour $P$ et $Q$ donnés, $t \longmapsto P(t).Q(t).t^a$ est continue, l'intégrale existe. Si l'on échange $P$ et $Q$, la valeur reste la même. Si l'on part de $\alpha.\phi(P,\ Q) + \beta.\phi(P,\ R)$ on arrive par linéarité de l'intégrale à $\phi(P,\ \alpha.Q + \beta.R)$. Si l'on teste $P$ contre lui même, on a l'intégrale d'une application positive sur un intervale pris dans le sens croissant, $\phi(P,\ P)$ est positif.
On suppose $\phi(P,\ P)$ nul. On regarde la fonction $x \longmapsto \int_0^x P^2(t).t^a.dt$. Elle est croissante *(intégrale d'une application positive sur un intervalle dans le sens croissant)*. Elle est nulle en 0 et en 1. Elle est donc constante sur $[0,\ 1]$. Sa dérivée y est donc nulle. L'application $t \longmapsto P^2(t).t^a$ est nulle sur $[0,\ 1]$. Le polynôme $P$ admet pour racines tous les réels de $]0,\ 1]$. Ayant une infinité de racines, il est nul.
On a bien une forme bilinéaire symétrique positive, défini positive.

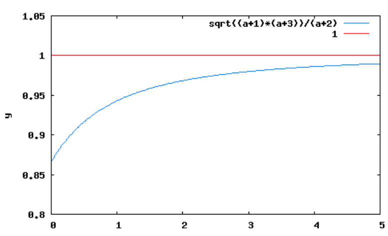
---

On calcule produits scalaires et normes : $\phi(1,\ 1) = \dfrac{1}{a+1}$, $\phi(X,\ X) = \dfrac{1}{a+3}$, $\phi(1,\ X) = \dfrac{1}{a+2}$. On effectue le qutient : l'angle entre 1 et $X$ a pour cosinus $\boxed{\dfrac{\sqrt{(a+3).(a+1)}}{a+2}}$

---

On ne peut pas annuler ce cosinus puisque $a$ est positif. L'angle ne sera jamais droit.

On étudie les variations de cette fonction de $a$, ou même de son carré *(même sens de variations car signe positif)*. On dérive donc : $\left(a \longmapsto \dfrac{(a+3).(a+1)}{(a+2)^2}\right) = \left(a \longmapsto \dfrac{2}{(a+2)^3}\right)$.




Cette application croît. L'arccosinus va décroître.

Sa plus grande valeur atteinte est en 0 et vaut $Arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *(c'est notre $\pi/6$ des T.D.)* et sa plus petite valeur est sa limite quand $a$ tend vers l'infini : 0.
L'angle entre les deux vecteurs va de $\pi/6$ à 0. $X$ et 1 se rapprochent quand $a$ tend vers l'infini.

---

La valeur $\cos(\pi/8)$ sera donc atteinte au moins une fois.
S'il le faut, on résout $\dfrac{\sqrt{(3+a).(1+a)}}{(2+a)} = \cos\dfrac{\pi}{8}$ *(de valeur connues : $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$)*.

**IS30** • Probabilités conditionnelles. • MPSI 2/2013

Si l'on est devant la classe de $MPSI$, la probabilité de voir une fille est $\dfrac{10}{40}$ *(nombre de cas favaorables, nombre total de cas, puisque vous êtes des cas)*.
Si on est devant la classe de $PCSI$, la probabilité de voir une fille est $\dfrac{20}{40}$.

---

On ne sait pas devant quelle classe on est. L'énoncé nous informe d'un hasard uniforme. On a probabilité 1/2 pour la $PCSI$ et 1/2 pour la $MPSI$. On remplit alors le tableau de la loi de probabilités sur notre univers fait de la classe et de l'observation d'élève :

| | MPSI | PCSI | <- classe |
|---|---|---|---|
| fille | 1/8 | 1/4 | |
| garçon | 3/8 | 1/4 | |
| observation | 1/2 | 1/2 | |

Les deux variables ne sont pas indépendantes. Savoir si on a vu une fille plutôt qu'un garçon nous renseignera sur la classe.

On restreint l'univers par notre observation :

| | MPSI | PCSI | <- classe |
|---|---|---|---|
| fille | . | . | |
| garçon | 3/8 | 1/4 | |
| observation | 1/2 | 1/2 | |

La masse de l'univers est $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}$ ce qui fait $\frac{5}{8}$ *(on dépasse 1/2, c'est normal, il y a plus de garçons que de filles en Sup).*

La masse de l'évément favorable est $\frac{3}{8}$. Le rapport "événement face à univers" est donc $\boxed{\frac{3}{5}}$

**IS30** • Covariance d'un couple de variables. • MPSI 2/2013

Première réponse : les deux ont raison :
$E\Big(\big(X-E(X)\big).\big(Y-E(Y)\big)\Big)=E(X.Y-a.X-b.Y+a.b)$ avec $a$ et $b$ de valeurs $E(Y)$ et $E(X)$. On trouve alors $E(X.Y)-a.E(X)-b.E(Y)+a.b$ par linéarité de l'espérance.
On simplifie, il reste $E(X.Y)-E(X).E(Y)$.
*Deuxième réponse : les deux ont tort. En effet, ils calculent la covariance d'un couple de variables aléatoires $(X,\ Y)$, alors que l'énoncé n'a pas donné de nom ce couple.*

**IS30** • Matrices de rotations. • MPSI 2/2013

L'axe étant $Vect(\overrightarrow{k})$, on prend directement le modèle du cours : $\begin{pmatrix} c & -s & 0\\ s & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ *(rotation dans le plan, et invariance sur l'axe).*

On nous a donné l'angle : $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$ *($\overrightarrow{i}$ va sur $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{j}$ va sur $-\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{k}$ ne bouge pas).*

---

On prend un vecteur $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et son image $\begin{pmatrix} -y\\ x\\ z\end{pmatrix}$. Le produit scalaire de ce vecteur et son image est $z^2$. Le cosinus de l'angle qui les sépare est $\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$. On veut un angle $\pi/3$ soit un cosinus égal à $1/2$. On aboutit à la condition $x^2+y^2=z^2$ *(mathématiquement c'est un cône).*
Un vecteur convenable est par exemple $\boxed{\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}}$ (image : $\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$).

---

On change de base. La trace et le déterminant ne changent pas :

| trace | déterminant |
|---|---|
| 1 | 1 |

Sinon, on utilise la formule $P.D.P^{-1}$ avec $D$ ci dessus et $P={}^t P$ si $P$ est la matrice de passage en base orthonormée.
On crée donc une base adaptée à notre rotation : troisième vecteur de base : $\frac{\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}}{\sqrt{2}}$. On cherche un vecteur du plan orthogonal : $\overrightarrow{k}$. On complète en base orthonormée directe par produit vectoriel :

$\dfrac{\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}}{\sqrt{2}}$. La matrice $P$ devient donc $\begin{pmatrix} 0 & r & r \\ 0 & -r & r \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $r = \sqrt{2}/2$ *(attention à l'ordre dans lequel vous les citez, le dernier est l'axe)*. On vérifie qui est son inverse : ${}^tP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ r & -r & 0 \\ r & r & 0 \end{pmatrix}$. On trouve

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}}$$

On peut vérifier déterminant et trace. On vérifie aussi que les colonnes sont normées deux à deux orthogonales. On regarde aussi si $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ a bien pour image lui même.

**IS30** • Le cours du cacao et du sucre. • MPSI 2/2013

On ne peut pas dire de combien le prix du chocola va varier. En effet, on ignore le prix de chacun des constituants.
Si le sucre et la cacao coutent le même prix, alors le prix global ne doit pas varier. Si le sucre est totalement gratuit *(oui, je sais, c'est un peu idiot alors de dire qu'il a diminué de dix pour cent)*, alors le prix va augmenter de dix pour cent. Et si c'est le cacao qui est gratuit, le prix va pouvoir baisser.

---

On note $C$ le prix initial du kilo de cacao et $S$ le prix initial du kilo de sucre [6].
Le prix du kilo de chocolat est $\dfrac{C+S}{2}$.
On tient compte des deux variations de prix : $\dfrac{1,1 \times C + 0,9 \times S}{2}$.
Le rapport des deux prix est alors $\dfrac{1,1 \times C + 0,9 \times S}{C+S}$. On nous dit que ceci représente cinq pour cent de hausse : $\dfrac{1,1 \times C + 0,9 \times S}{C+S} = 1,05$.
On trouve que le sucre coutait trois fois moins que le cacao.
On calcule alors tous les prix

| avant | maintenant | plus tard |
|---|---|---|
| $C,\ S$ | $1,1 \times C,\ 0,9 \times S$ | $C,\ 0,9 \times S$ |
| $\dfrac{C+S}{2}$ | $\dfrac{1,1 \times C + 0,9 \times S}{2}$ | $\dfrac{C + 0,9 \times S}{2}$ |

et on trouve le prix après retour au cours initial du cacao : $\dfrac{3.S + 0,9.S}{2}$ contre $\dfrac{3.S + S}{2}$. Le taux de variations est de $\dfrac{3.S + 0,9}{4.S}$ c'est à dire $0,975$. $\boxed{\text{Le prix devra baisser de } 2,5 \text{ pour cent.}}$

**IS30** • Produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$. • MPSI 2/2013

On a tout de suite la forme bilinéaire symétrique. Pour sa positivité, on doit calculer :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & 17 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 - 8.x.y + 2.x.z + 17.y^2 - 4.y.z + 6.z^2$$

On met sous forme d'une somme de carrés de réels : $(x - 4.y + z)^2 + y^2 + 5.z^2 + 4.y.z = (x - 4.y + z)^2 + (y + 2.z)^2 + z^2$.
Non seulement on a la positivité, mais cette somme n'est nulle que si chaque coordonnée est nulle.

---

[6] on sous-entend que la proportion moitié/moitié de l'anoncé concerne le poids et que l'on ne nous facture pas la manutention, la fabrication, bref, c'est n'importe quoi

On a une matrice d'application linéaire $\begin{pmatrix} 9 & -35 & 7 \\ 2 & -8 & 1 \\ -1 & 4 & * \end{pmatrix}$. Comme on n'est pas sur la base canonique, ce n'est pas le critère ${}^tM.M = I_3$ qui sert mais ${}^tM.G.M = G$ où $G$ est la matrice de Gram définie plus haut.
Sinon, on peut aussi calculer la norme d'un vecteur image :
$\Big((9.x-35.y+7.z)-4.(2.x-8.y+z)+(-x+4.y-z)\Big)^2+\Big((2.x-8.y+z)+2.(-x+4.y-z)\Big)^2+\Big(-x+4.y-z\Big)^2$
On effectue, et on trouve $(y-2.z)^2+(-z)^2+(-x+4.y-z)^2$.
C'est exactement la même quantité que $(x-4.y+z)^2+(y-2.z)^2+z^2$. Le carré de la norme est conservé. On a bien une isométrie.

---

Pour trouver son axe, on cherche un vecteur invariant non nul : $\left\{\begin{array}{rrrcl} 9.x & -35.y & +7.z & = & x \\ 2.x & -8.y & +z & = & y \\ -x & +4.y & -z & = & z \end{array}\right.$. On trouve par exemple $\boxed{\begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}$

**IS30** • Un dé avec des conditions. • MPSI 2/2013

On note $p_1$ à $p_6$ la probabilité de chaque face, puis on traduit les hypothèses :

$$\begin{array}{cccccccccl} p_1 & +p_2 & +p_3 & +p_4 & +p_5 & +p_6 & = & 1 & (a) \\ p_1 & +p_2 & +p_3 & & & & = & 1/4 & (b) \\ & p_2 & & +p_4 & & +p_6 & = & 11/20 & (c) \\ & p_2 & +p_3 & & +p_5 & & = & 9/20 & (d) \\ & & p_3 & & +p_5 & & = & 2/5 & (e) \end{array}$$

On extrait par différence directe $(d)-(e)$ : $p_2 = 1/20$.
On somme $(c)+(d)$ connaissant $p_2$ : $p_3+p_4+p_5 = 18/20$
On compare avec $(a)$ : $p_1+p_2 = 1/10$ et on trouve $p_1 = 1/10$.
On reporte dans $(b)$ : $p_3 = 3/20$.
On reporte dans $(d)$ : $p_5 = 1/4$.
On a aussi $p_4+p_6 = 1/2$.
Il suffit de faire une choix pour cette somme positive, et on a un dé.
Il y a donc beaucoup de dés possibles.
On n'est pas en mesure de calculer l'espérance, faute d'avoir eu assez de données *(on a raisonné par conditions nécessaires et suffisantes)*.

MPSI 2/2013 | 882 points | $IS30$

♡110 Montrez que si $A$ et $B$ sont deux événements indépendants sur un univers probabilisé $(\Omega,\ P)$, alors $A$ et $\overline{B}$ *(complémentaire de $B$)* le sont aussi. •2 pt.•

---

♣45 $S$ est une matrice de Su-Do-Ku convenablemenet remplie. Calculez $V.S.{}^tU$ avec $V = (1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ et $U = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$. Quelles valeurs peut prendre $A.S.{}^tA$ avec $A = (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ ? •3 pt.•

---

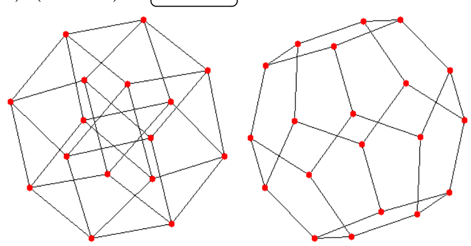
♢120 On effectue six expériences indépendantes de même loi $P(X = 0) = 2/3$ et $P(X = 1) = 1/3$. Leur somme est notée $B$.
On effectue cinq expériences indépendantes de même loi $P(Y = 0) = 1/2$ et $P(Y = 1) = 1/2$. Leur somme est notée $S$.
Calculez espérance et variance de chacune des deux variables $B$ et $S$. •3 pt.•
Calculez la probabilité qu'elles soient égales *(sans mener le calcul jusqu'au bout)*. •2 pt.•

---

♢121 On vous donne une matrice carrée $A$ sous forme de liste de listes *(taille $n$ sur $n$)* et deux indices $i$ et $k$ entre 0 et $n-1$. Ecrivez la procédure qui renvoie la matrice de taille $n-1$ sur $n-1$ où l'on a effacé la ligne $i$ et la colonne $k$. •3 pt.•

---

♠21 Un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4 *(en passant par 2 et 3, il n'y a pas de piège)* a pour espérance 3, pour variance 1 et son cube [7] a pour espérance 35.
Pouvez vous retrouver la probabilité que le dé affiche 1 ? Pensez si possible au polynôme $(X-2).(X-3).(X-4)$, [8] •3 pt.•



oui, aucun n'est un dé à quatre faces...

---

♢122 Déterminez la limite quand $n$ tend vers l'infini de $\dfrac{1}{n.\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$. Donnez un équivalent en $a.n^\alpha$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[\sqrt{k}]$ *(les crochets désignent la partie entière)*. •3 pt.•

---

♣46 Déterminez le chiffre des unités de $1997^{(2001^{2003})}$. •3 pt.•

---

♢123 Une rotation d'angle $Arccos(-1/4)$ envoie $\overrightarrow{i}$ sur $\overrightarrow{k}$. Déterminez son axe (deux possibilités). •3 pt.•

MPSI 2/2013 | 907 points | $IS31$

[7] alors que le dé n'est pas un cube
[8] ou alors tant pis, calculez comme un bourrin, c'est vous que ça regarde, je ne vous force pas à être matheux

**IS31** • Indépendance de $A$ et $\overline{B}$ quand $A$ et $B$ sont indépendants. • MPSI 2/2013

On a par hypothèse $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.
On écrit alors $P(A) = P\big(A \cap (B \cup \overline{B})\big)$.
On distribue par les lois de Morgan : $P(A) = P\big((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\big)$.
Comme les deux événementes $(A \cap B)$ et $(A \cap \overline{B})$ sont incompatibles (intersaction vide), on obtient par définition même d'une mesure de probabilité : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$
On remplace $P(A \cap B)$ par $P(A).P(B)$ (hypothèse d'indépendance) puis ont fait passer de l'autre côté : $P(A) - P(A).P(B) = P(A \cap \overline{B})$.
On factortise : $P(A).(1 - P(B)) = P(A \cap \overline{B})$ et on reconnaît : $P(A).P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B})$. Et c'est précisément la définition de l'indépendance de $A$ et $\overline{B}$.

**IS31** • Une matrice de Su-Do-Ku. • MPSI 2/2013

Le produit $U.S.^tV$ récupère une partie des termes de la matrice $S$ : la zone $\begin{array}{|c|c|c|}\hline . & \text{là} & . \\ \hline . & . & . \\ \hline . & . & . \\ \hline \end{array}$. Cette zone est faite des entiers de 1 à 9. La somme vaut 45.
Avec l'autre produit, on récupère une zone de taille 4 qui est à cheval sur de vraies zones du Su-Do-Ku. $\begin{array}{ccccccccc} . & . & . & , & , & , & : & : & : \\ . & . & . & , & , & , & : & : & : \\ . & . & O & O & , & , & : & : & : \\ ! & ! & O & O & - & - & , & , & , \\ ! & ! & ! & - & - & - & , & , & , \\ ! & ! & ! & - & - & - & , & , & , \\ / & / & / & . & . & . & ; & ; & ; \\ / & / & / & . & . & . & ; & ; & ; \\ / & / & / & . & . & . & ; & ; & ; \end{array}$. On a quatre entiers entre 1 et 9. La somme est encadrable par 4 et 36.
Mais on ne peut pas descendre jusqu'à 4 car il faudrait qu'il y ait deux 1 sur une même ligne et une même colonne. Rien n'interdit $\begin{array}{ccccccccc} . & . & . & , & , & , & : & : & : \\ . & . & . & , & , & , & : & : & : \\ . & . & 1 & 2 & , & , & : & : & : \\ ! & ! & 2 & 1 & - & - & , & , & , \\ ! & ! & ! & - & - & - & , & , & , \\ ! & ! & ! & - & - & - & , & , & , \\ / & / & / & . & . & . & ; & ; & ; \\ / & / & / & . & . & . & ; & ; & ; \\ / & / & / & . & . & . & ; & ; & ; \end{array}$. valeur minimale 6. la valeur maximale est $9 + 8 + 9 + 8$ c'est à dire 34. Et les valeurs intermédiaires sont réalisables aussi.

**IS31** • Deux lois binomiales. • MPSI 2/2013

$B$ a pour loi la somme de deux lois d'expérience en $(2/3,\ 1/3)$. Chacune des expériences a pour espérance $1/3$. L'espérance de $B$ est donc $6.1/3$ c'est à dire 2.
sa variance est la somme des variances (variables indépendantes). Or, chaque expérience $X$ a pour variance $p - p^2$ qui vaut ici $2/9$. la variance de $B$ est donc $4/3$.
On procède de même pour la loi binomiale $B(5,\ 1/2)$ avec les notations du programme.

| | espérance | variance |
|---|---|---|
| B | 2 | 4/3 |
| S | 5/2 | 5/4 |

On découpe l'événement "variables égales" suivant la valeur commune prise par les deux variables simultanément :
$P(B=S=0)+P(B=S=1)+P(B=S=2)+P(B=S=3)+P(B=S=4)+P(B=S=5)$ et c'est tout.

Par indépendance, on se ramène à $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} P(B=k).P(S=k)$ et comme on a des lois binomiales : $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\Big(\binom{6}{k}.\Big(\frac{2}{3}\Big)^{6-k}.\Big(\frac{1}{3}\Big)^{k}.\binom{5}{k}.\Big(\frac{1}{2}\Big)^{5-k}.\Big(\frac{1}{2}\Big)^{k}$.

On factorise ce qu'on peut : $\boxed{\displaystyle\frac{1}{2^5.3^6}\sum_{k=0}^{5}\binom{6}{k}.\binom{5}{k}.2^{6-k}}$

Et si on a le temps, on calcule et on trouve $\dfrac{667}{2976}$ ce qui donne 23 pour cent.

**IS31** • Limite de $\frac{1}{n.\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$. • MPSI 2/2013

On reconnaît une somme de Riemann de la forme $\displaystyle\frac{b-a}{n}.\sum_{k=1}^{n} f\Big(a+k.\frac{b-a}{n}\Big)$, avec $a=0$, $b=1$ et $f=x\longmapsto\sqrt{x}$.

Par continuité, une telle somme tend vers $\displaystyle\int_0^1\sqrt{t}.dt$ c'est à dire $\boxed{2/3}$

On encadre ensuite la partie entière : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-1)\leqslant\sum_{k=1}^{n}[\sqrt{k}]\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$. On divise par $n.\sqrt{n}$ parce qu'on sent que c'est là la réponse attendue :

$$\frac{(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k})-n}{n.\sqrt{n}}\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}[\sqrt{k}]}{n.\sqrt{n}}\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n.\sqrt{n}}$$

Par l'étude précédente, les deux encadrants tendent vers 2/3.

Par définition, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[\sqrt{k}]\text{ est équivalent à }\frac{2.n.\sqrt{n}}{3}}$ quand $n$ tend vers l'infini.

**IS31** • Une procédure pour affacer une ligne et une colonne. • MPSI 2/2013

On va faire deux boucles, en surveillant quand l'indice vaut $i$ ou $k$ :

```
def Hasdaf-Fichet(M, i, k) :
....n = len(A)
....A =[]
....for ii in range(n) :
........if ii != i :
............L = []
............for kk in range(n) :
................if kk != k :
................L.append(M[ii][kk])
............A.append(L)
....return(A)
```

Plus rapide :

```
for L in M :
....L.pop(k)
```

`M.pop(i)`
sachant que la méthode `pop` appliquée à une liste `L` en enlève le $k^{ieme}$ élément.

On peut aussi ruser avec des `M[ii+(ii>i)][kk+(kk>k)]` sachant que `kk>k` est un booléen qui vaut donc `0` ou `1`.

**IS31** • Un dé à quatre faces. • MPSI 2/2013

On note $p_1$ à $p_4$ les quatre probabilités cherchées et on écrit le système des informations :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} p_1 & +p_2 & +p_3 & +p_4 & = & 1 \\ 1.p_1 & +2.p_2 & +3.p_3 & +4.p_4 & = & 3 \\ 1.p_1 & +4.p_2 & +9.p_3 & +16.p_4 & = & 10 \\ 1.p_1 & +8.p_2 & +27.p_3 & +64.p_4 & = & 35 \end{array}\right. \text{ ou encore } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \\ 35 \end{pmatrix} \quad 10$$

c'est parce que $10 - 3^2 = 1$.
On peut bien sûr inverser la matrice, mais on ne cherche qu'un coefficient. Alors à quoi bon tout calculer ? Une ligne de la matrice inverse suffira. Mais c'est quand même trop.
On suit alors l'indication. On définit le polynôme $(X-2).(X-3).(X-4)$. Il est nul en 2, en 3 et en 4. En 1 il vaut $-6$. Développé, il s'écrit $X^3 - 9.X^2 + 26.X - 24$.
On l'applique sur les signes de notre système :

$$\sum_{i=1}^{4} p_i.(i^3 - 9.i^2 + 26.i - 24) = \sum_i p_i.i^3 - 9.\sum_i p_i.i^2 + 26.\sum_i p_i.i - 24.\sum_i p_i$$

On a alors $p_1.(-6) + p_2.0 + p_3.0 + p_4.0 = 35 - 9.10 + 26.3 - 24.1$.

On trouve $\boxed{p_1 = \frac{1}{6}}$

Sinon, j'ai vérifié, les quatre probabilités sont positives : 1/6, 0, 1/2 et 1/3.

**IS31** • Chiffre des unités de $1997^{(2001^{2003})}$. • MPSI 2/2013

Ce nombre est trop monstrueux pour qu'on le calcule. On va donc raisonner partout modulo 10.
1997 a pour chiffre des unités. Il s'ensuit que le chiffre des unités de $1997^n$ sera celui de $7^n$. On dresse la liste des puissances de 7 réduites modulo 10 :

| $7^0$ | $7^1$ | $7^2$ | $7^3$ | $7^4$ | $7^5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 9 | 3 | 1 | 7 | |

On détecte une périodicité de période 4 : $7^{n+4} = 7^n.7^4 = 7^n.1 \quad mod \quad 10$.
La question se limite à : combien vaut $2001^{2003}$ modulo 4. Mais c'est pareil que $1^{2003}$ puisque $2001 = 1 \quad mod \quad 4$.
L'exposant est un multiple de 4 plus 1.
Le chiffre des unités de $7^{(2001^{2003})}$ est celui de $7^1$.
Le chiffre cherché est un $\boxed{7}$

**IS31** • Une rotation de $\mathbb{R}^3$. • MPSI 2/2013

On cherche la matrice de notre isométrie. Comme $\overrightarrow{i}$ a pour image $\overrightarrow{k}$ : $\begin{pmatrix} 0 & . & . \\ 0 & . & . \\ 1 & . & . \end{pmatrix}$. Comme c'est une matrice d'isométrie, les colonnes sont deux à deux orthogonales et normées : $\begin{pmatrix} 0 & . & . \\ 0 & . & . \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis

$\begin{pmatrix} 0 & c & -s \\ 0 & s & c \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $c$ et $s$ sont un sinus et un cosinus (mais pas ceux de l'angle de rotation).

La trace est un invariant de similitude : $Tr(M) = 1 + 2.\cos(Arccos(-1/4))$. La trace vaut 1/2. On déduit $s = 1/2$. On complète : $c = \sqrt{3}/2$ au signe près.

On a deux solutions $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *(isométries directes obéissant à nos deux critères).*

On trouve les deux axes possibles par recherche de vecteur invariants :

$\boxed{Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}) \text{ et } Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix})}$

Il est normal que l'angle entre $\overrightarrow{i}$ et son image ne soit pas l'angle de la rotation, puisque $\overrightarrow{i}$ n'est pas dans le plan orthogonal à l'axe.

| | | |
|---|---|---|
| MPSI 2/2013 | 907 points | $IS31$ |

$\boxed{\heartsuit 111}$ $A$ et $B$ sont deux évenements sur un univers probabilisé $(\Omega,\ P)$. Montrez que si $A$ et $B$ sont indépendants, alors $A$ et $\overline{B}$ le sont aussi, puis $P(A\cap\overline{B}).P(\overline{A}\cap B)=P(A\cap B).P(\overline{A}\cap\overline{B})$. $\boxed{\bullet 2\text{ pt.}\bullet}$

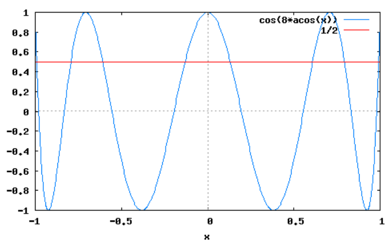
$\boxed{\clubsuit 47}$ On suppose réciproquement $P(A\cap\overline{B}).P(\overline{A}\cap B)=P(A\cap B).P(\overline{A}\cap\overline{B})$ pour deux évenements d'un univers probabilisé. Montrez que $A$ et $B$ sont indépendants. $\boxed{\bullet 2\text{ pt.}\bullet}$
Indication : $\big(P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})\big).\big(P(B\cap A)+\dots\big)$.

---

$\boxed{\diamondsuit 124}$ Déterminez la limite en $+\infty$ de $x\longmapsto\dfrac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^{x}}$. $\boxed{\bullet 2\text{ pt.}\bullet}$

---

Explicitez le huitième polynôme de Tchebitchev $T_8$. $\boxed{\bullet 2\text{ pt.}\bullet}$
Donnez la somme des racines de l'équation $2.T_8(x)=1$, et donnez la plus grande de ces racines. $\boxed{\bullet 3\text{ pt.}\bullet}$




---

$\boxed{\spadesuit 22}$ L'application $x\longmapsto a.\cos(x)+b.\sin(x)$ a pour maximum 4 et s'annule en $\pi/6$. Quelle est sa valeur en 0 ? $\boxed{\bullet 2\text{ pt.}\bullet}$

---

$\boxed{\spadesuit 23}$ $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On suppose : $Ker(f)=Vect(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k})$, $Ker(f-Id)=Vect(2.\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j})$ et $Ker(f^2)$ a pour équation cartésienne $x+y+2.z=0$. Vérifiez $Ker(f)\subset Ker(f^2)$ et $\mathbb{R}^3=Ker(f-Id)\oplus Ker(f^2)$. $\boxed{\bullet 3\text{ pt.}\bullet}$
Donnez la matrice de $f$ sur la base canonique. $\boxed{\bullet 3\text{ pt.}\bullet}$
Calculez son rang, son déterminant et sa trace. $\boxed{\bullet 2\text{ pt.}\bullet}$

---

$\boxed{\diamondsuit 125}$ On note $A_n$ la matrice de taille $n$ sur $n$ de terme général 1, et $B_n$ la matrice de taille $n$ sur $n$ de terme général $1_{i\neq k}$, et $C_n$ la matrice de taille $n$ sur $n$ de terme général $n.1_{i=k=1}$ *(rappel : $1_{condition}$ vaut 1 si condition==True et 0 sinon).*
Calculez la trace et le rang de chacune. $\boxed{\bullet 2\text{ pt.}\bullet}$
Montrez que $A_n$ est semblable à $C_n$. $\boxed{\bullet 2\text{ pt.}\bullet}$
Déduisez que $B_n$ est semblable à $C_n-I_n$. Calculez $\det(B_n)$. $\boxed{\bullet 2\text{ pt.}\bullet}$

---

$\boxed{\diamondsuit 126}$ Indiquez pour les quatre séries dont les termes généraux sont indiqués dans ce tableau si elles convergent ou divergent. Si elles convergent, calculez leur somme : $\boxed{\bullet 4\text{ pt.}\bullet}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{1}{n+1}$ | $\left[\dfrac{1}{n+1}\right]$ | $\dfrac{(-1)^n}{2^n}$ | $\left[\dfrac{(-1)^n}{2^n}\right]$ |

---

$\boxed{\diamondsuit 127}$ Calculez le reste de la division euclidienne de $X^{100}-50.X^{50}.\cos(50.\theta)+1$ par $X^2-2.X.\cos(\theta)+1$ *($\theta$ n'est pas multiple de $\pi$).* $\boxed{\bullet 2\text{ pt.}\bullet}$

Charlemagne
MPSI-2 / 2013

Correction

$IS32$

**IS32** • $P(A\ \cap\ B).P(\overline{A}\ \cap\ \overline{B}) = P(A\ \cap\ \overline{B}).P(\overline{A}\ \cap\ B)$. • MPSI 2/2013

L'indépendance de $A$ et $\overline{B}$ sous condition d'indépendance de $A$ et $B$ a été vue dans le devoir précédent.
Je le refais :
$P(A) = P(A \cap (B \cup \overline{B})) = P((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A).P(B) + P(A \cap \overline{B})$
et il n'y a plus qu'à faire passer de l'autre côté.
Sous hypothèse de "$A$ et $B$ indépendants", on a donc "$A$ et $\overline{B}$ indépendants", "$\overline{A}$ et $B$ indépendants" et la même avec les deux complémentaires. On calcule alors :
$P(A\ \cap\ B).P(\overline{A}\ \cap\ \overline{B}) = P(A).P(B).P(\overline{A}).P(\overline{B}) = P(A).P(\overline{B}).P(\overline{A}).P(B) = P(A\ \cap\ \overline{B}).P(\overline{A}\ \cap\ B)$

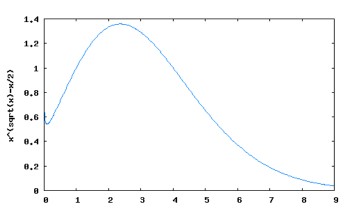
---

On passe à la réciproque. On reprend le raisonnement déjà fait plus haut :
$P(A) = P(A\ \cap\ B) + P(A\ \cap\ \overline{B})$ et $P(B) = P(B\ \cap\ A) + P(B\ \cap\ \overline{A})$
On effectue le produit :
$P(A).P(B) = (P(A\ \cap\ B) + P(A\ \cap\ \overline{B})).(P(B\ \cap\ A) + P(B\ \cap\ \overline{A}))$
On développe :
$P(A).P(B) = P(A\ \cap\ B)^2 + P(A\ \cap\ B).P(A\ \cap\ \overline{B}) + P(A\ \cap\ B).P(\overline{A}\ \cap\ B) + P(A\ \cap\ \overline{B}).P(\overline{A}\ \cap\ B)$
On remplace par hypothèse le dernier terme :
$P(A).P(B) = P(A\ \cap\ B)^2 + P(A\ \cap\ B).P(A\ \cap\ \overline{B}) + P(A\ \cap\ B).P(\overline{A}\ \cap\ B) + P(\overline{A}\ \cap\ \overline{B}).P(A\ \cap\ B)$
On factorise :
$P(A).P(B) = P(A\ \cap\ B).\Big(P(A\ \cap\ B) + P(A\ \cap\ \overline{B}) + P(\overline{A}\ \cap\ B) + P(\overline{A}\ \cap\ \overline{B})\Big)$
On reconnaît dans $(A\ \cap\ B,\ A\ \cap\ \overline{B},\ \overline{A}\ \cap\ B,\ \overline{A}\ \cap\ \overline{B})$ une partition de l'univers [9].
La somme des quatre probabilités vaut 1. Il reste $P(A).P(B) = P(A\ \cap\ B)$. C'est la définition de l'indépendance.

**IS32** • Limite de $x^{\sqrt{x}}/\sqrt{x}^x$. • MPSI 2/2013

L'application envisagée existe sur $]0,\ +\infty[$. Pour sa limite, on revient à la forme exponentielle : $\exp\big(\sqrt{x}.\ln(x) - x.\ln(\sqrt{x})\big)$. La quantité dans l'exponentielle est $\ln(x).(\sqrt{x} - x/2)$. Comme $\sqrt{x}$ est un $o(x)$ en $+\infty$, ceci est équivalent à $-\ln(x).x/2$, de limite $-\infty$.

On remonte dans l'exponentielle : $\boxed{\dfrac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^x} \longrightarrow_{x\mapsto+\infty} 0^+}$




**IS32** • Huitième polynôme de Tchebitchev. • MPSI 2/2013

C'est rapide : $\cos(8.x) = 2.\cos^2(4.x) - 1 = 2.(2.\cos^2(2.x) - 1)^2 - 1$ et on remplace $\cos(2.x)$ par $2.\cos^2(x) - 1$.

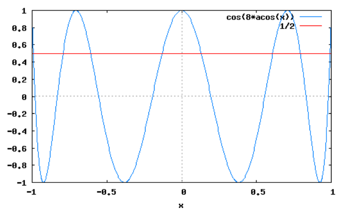
Au final $\boxed{T_8(X) = 128.X^8 - 256.X^6 + 160.X^4 - 632.X^2 + 1}$

Attention, c'est un polynôme. Sa variable s'appelle $X$. Et la formule $128.\cos^8(x) - 256.\cos^6(x) +$

[9] ce que les textes officiels appellent "formule des probabilités totales" pour embrouiller et éloigner les probabilités du reste du programme de mathématiques

$160.\cos^4(x) - 632.\cos^2(x) + 1$ n'est pas un polynôme. Il faut pouvoir donner à $X$ aussi des valeurs plus grandes que 1, ou même complexes.
On ne résout pas l'équation $128.x^8 - 256.x^6 + 160.x^4 - 632.x^2 + 1 = \dfrac{1}{2}$. On sait par les formules de Viète que **la somme des racines est nulle**...

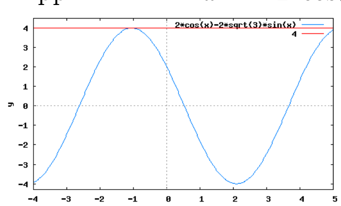
On la résout quand même, puisqu'on veut la plus grande racine. On fait un changement de variable : $x = \cos(\theta)$ *(on cherche les racines dans* $[-1,\ 1]$*, on verra si on les a toutes)*. L'équation devient $2.\cos(8.\theta) = 1$. On trouve que $8.\theta$ est de la forme $\dfrac{\pi}{3} + 2.k.\pi$ avec $k$ entier et $\varepsilon$ égal à $-1$ ou 1. On revient à la variable $x$ : on a la liste des $\cos\left(\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k.\pi}{4}\right)$ *(le signe* $\varepsilon$ *est absorbé par parité du cosinus)*. On fait varier $k$ de 0 à 7 et on a huit racines distinctes. On les a donc toutes.




La plus grande est celle correspondant à l'angle le plus petit : $\boxed{\cos(\pi/24)}$

**IS32** • L'application $x \longmapsto a.\cos(x) + b.\sin(x)$. • MPSI 2/2013

On sait qu'une telle application se met sous la forme $x \longmapsto A.\cos(x - \varphi)$. On identifie *(liberté de la famille* $(\cos,\ \sin)$*)* :
$A.\cos(\varphi) = a$ et $A.\sin(\varphi) = b$ on extrait : $a^2 + b^2 = A^2$. Or, le maximum c'est justement l'amplitude $A$ : $a^2 + b^2 = 16$.
On annule en $\pi/6$ : $a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} + b.\dfrac{1}{2} = 0$. On reporte : $a^2 + a^2.3 = 16$. On trouve $a = 2$ puis $b = -2.\sqrt{3}$.
L'application est $x \longmapsto 2.\cos(x) - 2.\sqrt{3}.\sin(x)$, ou son opposée.




La valeur en 0 est 2 ou $-2$.

**IS32** • Un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ avec trois conditions. • MPSI 2/2013

On vérifie $Ker(f) \subset Ker(f^2)$ car le vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ et ses multiples vérifient $x + y + 2.z = 0$.
Le vecteur $2.\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ n'est pas dans $Ker(f^2)$ (il n'en vérifie pas l'équation). On a donc $Ker(f^2) \cap Ker(f - Id) = \{\overrightarrow{0}\}$, puis $\dim(Ker(f^2) + Ker(f - Id)) = \dim(Ker(f^2)) + \dim(Ker(f - Id)) = 3$. Par inclusion et égalité des dimensions : $Ker(f^2) + Ker(f - Id) = \mathbb{R}^3$. Par intersection triviale, cette somme est même directe.

On pense alors à prendre une base de $\mathbb{R}^3$ formée de $2.\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ et d'une base de $Ker(f^2)$ dont un vecteur est même dans $Ker(f)$ : $(2.\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$ par exemple.
On calcule l'image de chacun à l'aide de ce que l'on sait :

$f(2.\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) = 2.\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ *(vecteur propre)* $\begin{pmatrix} 1 & . & . \\ 0 & . & . \\ 0 & . & . \end{pmatrix}$

$f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k})=\overrightarrow{0}$ *(vecteur du noyau, propre lui aussi)* : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & . \\ 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & . \end{pmatrix}$

$f(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j})$ n'est pas nul *(il n'est pas dans $Ker(f)$)* mais est dans $Ker(f)$ *(puisque $\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$ est dans $Ker(f^2)$)* : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $a$ à calculer.

OOn dispose de la matrice sur une base adaptée. Il reste à revenir sur la base canonique. On écrit la matrice de passage : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *(inversible, d'inverse $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$)*. On effectue le produit de changement de base : $P.D.P^{-1}$ avec des notations naturelles : $\boxed{\dfrac{1}{3}.\begin{pmatrix} a+2 & 2-2.a & 4-a \\ a+1 & 1-2.a & 2-a \\ -a & 2.a & a \end{pmatrix}}$

On peut choisir $a$ comme on veut.

---

Même sans avoir calculé la matrice, on peut trouver son rang : 2 *(noyau de dimension 1)*. Son déterminant est donc nul *(noyau non trivial)*. Sa trace est 1 *(invariant de similitude, calculé sur la base adaptée)*.

**IS32** • Des matrices $A_n$, $B_n$ et $C_n$. • MPSI 2/2013

On les écrit, on calcule leurs traces en sommant les termes diagonaux. On trouve sans effort le rang de $A_n$ *(colonnes proportionelles)* et de $C_n$ *(une seule colonne non nulle)*.

| | | |
|---|---|---|
| $A_n=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $B_n=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $C_n=\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| trace $=n$ | trace $=0$ | trace $=n$ |
| rang $=1$ | rang $=n$ | rang $=1$ |

Pour $B_n$, l'élève qui ne lit pas l'énonce tente de calculer son déterminant et échoue faute d'indications figurant dans la suite de l'exercice.

Sinon, on résout l'équation $B_n.U=0$ *(vecteur nul)*. Chaque ligne donne $u_2+\ldots+u_n=0$, $u_1+u_3+\ldots+u_n=0$ jusqu'à $u_1+\ldots+u_{n-1}=0$. On les somme toutes : $(n-1).(u_1+\ldots+u_n)=0$. On extrait : la somme des $u_i$ est nulle. On compare avec la ligne 1 : $u_1$ est nul, et on fait de même avec les autres lignes.

Au final, dans le "noyau de $B_n$", il n'y a que le vecteur nul, $B_n$ est inversible, de rang $n$.

---

Pour montrer que $A_n$ est semblable à $C_n$, il suffit de voir $C_n$ comme une matrice diagonale *(termes diagonaux $n$ et 0, de multiplicités 1 et $n-1$)*.

Pour la valeur propre $n$, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ fait parfaitement l'affaire *(de même que tout multiple)*.

Pour la valeur propre 0, on cherche en fait une base du noyau. Ce noyau est de dimension $n-1$ et apporte donc $n-1$ vecteurs propres indépendants *(les $n-1$ autres colonnes de la matrice $P$)*.

On peut résumer et expliciter : $A_n=P.C_n.P^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

*L'élève qui n'a pas encore assimilé les clefs de l'algèbre linéaire se contentera de vérifier $A_n.P=P.D_n$ mais ne comprendra pas ce qu'il fait.*

---

On part de $A_n=P.C_n.P^{-1}$. On soustrait $I_n$ :

$B_n = A_n - I_n = P.C_n.P^{-1} - I_n = P.(C_n - I_n).P^{-1}$ puisque $I_n = P.I_n.P^{-1}$
*(on soustrait un multiple de $I_n$ à une matrice diagonalisable, ses valeurs propres sont justes diminuées de 1, pour l'algébriste c'est naturel et ça concerne l'endomorphisme et pas la matrice, pour le bourrin, c'est du calcul froid).*

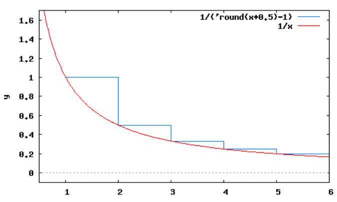
---

Les matrices $B_n$ et $C_n - I_n$ sont semblables, elles ont le même déterminant. Or, $C_n - I_n$ est diagonale, de la forme $\begin{pmatrix} n-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Son déterminant est le produit des termes diagonaux.

$\boxed{\det(B_n) = (-1)^{n-1}.(n-1)}$ *le tout sans pivot de Gauss ou petits points partout et développements par rapport à des colonnes où il faut compter des indices. Bref, de l'algèbre linéaire, pas du calcul (on vise MP ou PSI, pas PC !*

**IS32** • Séries. • MPSI 2/2013

La série harmonique, de terme général $\dfrac{1}{n+1}$ diverge, on le sait depuis la nuit des temps *(septembre)*, par minoration par une intégrale.




En revanche, la série de terme général $\left[\frac{1}{n+1}\right]$ converge, puisque ses sommes partielles valent toutes 1 *(le premier terme général est égal à 1 et les autres sont nuls par arrondi dû à la partie entière).*

La série de terme général $\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$ est une série géométrique de raison strictement plus petite que 1. Elle converge *(on connaît ses sommes partielles)* et sa somme vaut $\dfrac{1}{1 - \dfrac{-1}{2}}$ de valeur $\dfrac{2}{3}$.

En revanche, le terme général $\left[\dfrac{(-1)^n}{2^n}\right]$ vaut une fois sur deux 0 *(terme général positif plus petit que 1)* et une fois sur deux $-1$ *(terme général entre 0 et $-1$).*
Bref, on somme des 0 et des $-1$. Le terme général ne tend pas vars 0, la série diverge grossièrement.

| $\dfrac{1}{n+1}$ | $\left[\dfrac{1}{n+1}\right]$ | $\dfrac{(-1)^n}{2^n}$ | $\left[\dfrac{(-1)^n}{2^n}\right]$ |
|---|---|---|---|
| $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots)$ | $(1 + 0 + 0 + 0 + \dots)$ | $(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots)$ | $(1 - 1 + 0 - 1 + 0 - 1 + \dots)$ |
| diverge | converge | converge | diverge |
| somme $+\infty$ | somme 1 | somme $2/3$ | somme $-\infty$ |

**IS32** • Reste d'une division euclidienne. • MPSI 2/2013

On porte les deux racines du diviseur dans le dividende. On trouve 0. C'est donc que le reste est nul : $(X - e^{i.\theta}).(X - e^{-i.\theta})$ divise $(X - e^{50.i.\theta}).(X - e^{-50.i.\theta})$.

MPSI 2/2013 | 940 points | $IS32$