

M P S I 2

LYCEE CHARLEMAGNE
2020/2021

JEUDI 13 MAI

PONT 01

Calculez $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$ par changements de variable : $t = \sqrt{x^2+x+1} - x$ puis $t = 2.u - 1$.

Sachant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, donnez une base et la dimension de $\{M \mid A.M = M.A\}$ (au fait, quel est le seul format possible pour M ?).

Un théorème affirme : pour tout couple d'entiers (a, b) distincts, il existe une infinité d'entiers naturels n vérifiant $a + n$ et $b + n$ sont premiers entre eux.

Écrivez un script Python qui pour a et b donnés cherche une liste de cent entiers n vérifiant ceci.

Donnez le couple (a, b) avec a et b entre 1 et 1000 pour lequel le dernier terme de cette liste est le plus grand.

Sur quel domaine est elle définie ? Sur quel domaine est elle continue ? Sur quel domaine est elle dérivable ?
 $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$.

Mêmes questions avec $x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$.



	D	A	B	
C	.	.	.	.
	.	.	.	.
	.	.	.	.
	.	.	.	.
	.	.	.	.

	A	B	C	
	.	.	.	.
	.	.	.	.
	.	.	.	.
A	.	.	.	.
	.	.	.	.

D D

Joël Martin (la Comtesse du Canard) à Paris :

Paris aux prestigieuses scènes est la capitale mondiale capitale du luxe. On y rencontre plein de titis qui rusent et bisent des copines à l'air cool. On voit plein de péniches à la Seine et plein de bus faciles à citer. On entend parfois soupirer des touristes subjugués par l'abîme dans la Tour : "Ah que j'aurais aimé connaître vos motivations, Eiffel !"

Et Joël Martin en Haute-Savoie (ah le goût de Mont-Blanc) :

Les amateurs de pentes collectionnent les faces, épatés par les faces et les pentes effilées. Une grimpeuse qui apprécie la Verte quand elle est jolie, et surtout la Verte enneigée, parcourt le mont sans craindre le vide. Une autre luge sous la Verte. Mais gare à l'excès de glisse quand se déchaîne le vent... détresse sur les faces !

Règle du jeu : sur chaque ligne, les lettres de A à D et une case transparente. Et au bout, l'indication de « qui on voit depuis ce bord ».

	A	C	A	
	A	C	D	B
D	D	B	C	A
A		A	B	D
C	C		A	B
	B	D		C

Montrez que l'ensemble des matrices de spectre rationnel (les valeurs propres sont dans $\mathbb{Q}$) n'est stable ni par addition, ni par multiplication.

Il suffit de contre-exemples. Ce qu'on sait déjà, c'est que si les valeurs propres sont rationnelles, la trace et le déterminant (somme et produit des dites valeurs propres) sont rationnels. Mais on n'a pas de réciproque (tout va dépendre du discriminant).

Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ont toutes deux un spectre rationnel (et même entier) : $\{1, -1\}$ pour chacune.

Leur somme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a pour spectre $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

D'autres exemples sont possibles. Il suffit d'essayer un peu au hasard.

De même, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Elles ont pour spectres $\{-1, 1\}$ pour l'une et l'autre.

Leur produit $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour spectre $\{i, -i\}$, même pas réel. On reconnaît une rotation d'angle $\pi/2$.

Donnez une base et la dimension de l'espace vectoriel des solutions de $y''_t + 3.y'_t + 2.y_t = 0$ (d'inconnue y fonction de t) dont la moyenne sur $[0, 1]$, est nulle^a (après avoir montré que c'est bien un espace vectoriel)

Donnez une base et la dimension de l'espace vectoriel des solutions de $y_t^{(4)} - 3.y_t^{(3)} + 3.y''_t - 3.y'_t + 2.y_t = 0$ (d'inconnue y fonction de t) dont la moyenne sur $[0, \pi]$, est nulle.

Donnez une base et la dimension de l'espace vectoriel des solutions de $y_t^{(4)} - 3.y_t^{(3)} + 3.y''_t - 3.y'_t + 2.y_t = 0$ (d'inconnue y fonction de t) dont la moyenne sur $[0, 2\pi]$, est nulle.

a. c'est à dire $\int_0^1 y_t dt = 0$, des fois il faut tout vous dire sinon vous partez avec vos propres définitions incohérentes

On passe par la notion de sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour prouver qu'on a bien des espaces vectoriel.

La fonction nulle est solution de l'équation homogène. Et son intégrale sur tout segment est nulle, y compris sur $[0, 1]$.

Si f et g sont dans l'ensemble, leur somme vérifie encore l'équation différentielle et on a $\int_0^1 (f(t) + g(t)).dt = 0 + 0$ par linéarité de l'intégrale.

Cela dit, on va plus vite en résolvant déjà l'équation dont les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto a.e^{-t} + b.e^{-2t}$ (résultat direct du cours) avec a et b décrivant $\mathbb{R}$ (espace vectoriel de dimension 2 pour l'instant).

La contrainte $\int_0^1 (a.e^{-t} + b.e^{-2t}).dt = 0$ impose une relation entre a et b : $b = -\frac{2}{1+e}.a$.

Finalement, on trouve les multiples de $t \mapsto (1+e).e^{-t} + 2.e^{-2t}$.

L'espace est de dimension 1.

Les solutions de $y_t^{(4)} - 3.y_t^{(3)} + 3.y''_t - 3.y'_t + 2.y_t = 0$ sont des combinaisons de

$t \mapsto e^{2t}$	$t \mapsto e^t$
$t \mapsto e^{it}$	$t \mapsto e^{-it}$

Ou si vous préférez des fonctions de la forme $t \mapsto a.e^t + b.e^{-t} + c.\cos(t) + d.\sin(t)$.

Mais ensuite, la condition « moyenne nulle » sur $[0, \pi]$, que donne-t-elle ?

$$\int_0^\pi (a.e^t + b.e^{-t} + c.\cos(t) + d.\sin(t)).dt = 0$$

$$\text{Ceci devient } 2.a.(e^\pi - 1) + b.(e^{2\pi} - 1) + d = 0.$$

Aucune condition sur c . Et sinon, on exprime d à l'aide des deux autres.

La dimension est 3.

Avec la même équation, mais la moyenne sur $[0, 2\pi]$, qu'est ce qui change ?

Cette fois, même d s'en va.

$$\text{La condition est juste } 2.a.(e^{2\pi} - 1) + b.(e^{4\pi} - 1) = 0.$$

On trouve a à l'aide de b .

Les solutions forment un espace de dimension 3.

Une base est faite de $(\cos, \sin, t \mapsto (1 - e^{4\pi}) \cdot e^t + (2 \cdot e^{2\pi} - 2) \cdot e^{2 \cdot t})$.

Sans calculatrice (mais avec un papier) : qui est le plus grand : $2 \cdot \binom{25}{12}$ ou $\binom{27}{11}$?

On calcule chacun et on le décompose en produit de facteurs premiers :

$$2 \cdot \binom{25}{12} = 2 \cdot \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}$$

$$2 \cdot \binom{25}{12} = 2 \cdot \frac{(5^2) \cdot (2^3 \cdot 3) \cdot (23) \cdot (2 \cdot 11) \cdot (3 \cdot 7) \cdot (2^2 \cdot 5) \cdot 19 \cdot (2 \cdot 3^2) \cdot (17) \cdot (2^4) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 7)}{(1) \cdot (2) \cdot (3) \cdot (2^2) \cdot (5) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (7) \cdot (2^3) \cdot (3^2) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (11) \cdot (2^2 \cdot 3)}$$

$$2 \cdot \binom{25}{12} = 2 \cdot \frac{2^{12} \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}{2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}$$

$$2 \cdot \binom{25}{12} = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$$

De même $\binom{27}{11} = 3^3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$.

Il suffit ensuite de calculer le quotient : $2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 - 3^3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 = (2^3 \cdot 5 \cdot 7 - 3^3 \cdot 13) \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$.

280 face à 351^1 c'est $\binom{27}{11}$ le plus grand.

On veut étudier les variations de $x \mapsto \frac{\ln(x^2 + 1)}{x + 1}$ sur $] -1, +\infty[$ (notée f). Montrez que f' est du signe de $x \mapsto \frac{2 \cdot x^2 + 2 \cdot x}{x^2 + 1} - \ln(1 + x^2)$ (notée g).
Montrez que g' est négative sur $] -1, 1[$ et positive sur $]1, +\infty[$.
Dédisez que f est décroissante, croissante puis décroissante.

Bon, le domaine a un trou en -1 .

On dérive : $f' = x \mapsto \frac{2 \cdot x}{(x^2 + 1) \cdot (x + 1)} - \frac{\ln(x^2 + 1)}{(x + 1)^2}$.

On compacte en $f' = x \mapsto \frac{2 \cdot x \cdot (x + 1)}{(x + 1)^2} - \frac{\ln(x^2 + 1)}{(x + 1)^2}$.

Le signe est bien celui de $g = x \mapsto \frac{2 \cdot x \cdot (x + 1)}{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1)$ (en ne se préoccupant pas de $(x + 1)^2$).

Mais cette fonction n'est pas très pratique. On va la dériver à son tour, cette fois sur $\mathbb{R}$.

Cette fois : $g'(x) = \frac{4 \cdot x + 2}{x^2 + 1} - \frac{4 \cdot x^2 \cdot (x + 1)}{(x^2 + 1)^2} - \frac{2 \cdot x}{x^2 + 1}$ pour tout x .

On réduit au dénominateur commun : $g'(x) = \frac{(4 \cdot x + 2) \cdot (x^2 + 1) - 4 \cdot x^2 \cdot (x + 1) - 2 \cdot x \cdot (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2}$.

On étudie en détail le numérateur (sans facteur 2) $(2 \cdot x + 1) \cdot (x^2 + 1) - 2 \cdot x^2 \cdot (x + 1) - x \cdot (x^2 + 1)$. C'est $(x + 1)^2 \cdot (1 - x)$.

On a donc le signe de $g'(x)$, par intervalles.

Puis les variations de g et ses limites aux bornes.

	$] -\infty, -1[$	-1	$] -1, 1[$	1	$]1, +\infty[$
signe de $g'(x)$	+		+		-
variations de g	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$
avec limites	$-\infty \nearrow -\ln(2)$		$-\ln(2) \nearrow 2 - \ln(2)$		$2 - \ln(2) \searrow -\infty$
signe de $g(x)$	négatif		change de signe		change de signe

Par sens de variations, g reste de signe constant avant -1 .

Puis, par continuité, g change de signe entre -1 et 1 . On trouve que g s'annule en 0 d'ailleurs.

1. là, c'est bon, ça se calcule sur un bout de papier

Ensuite, par continuité encore, g s'annule entre 1 et $+\infty$.
La continuité donne au moins deux racines.

Par sens de variations, g n'a que ces deux racines.

Rappel capital :

T.V.I.		signe de f'
continuité		monotonie
au moins une solution		au plus une solution
surjectivité		injectivité

Je vous rappelle que vous devez séparer dans votre esprit ainsi en deux tableaux.

En terminale on vous a tout mis en un. Fort mauvaise idée.

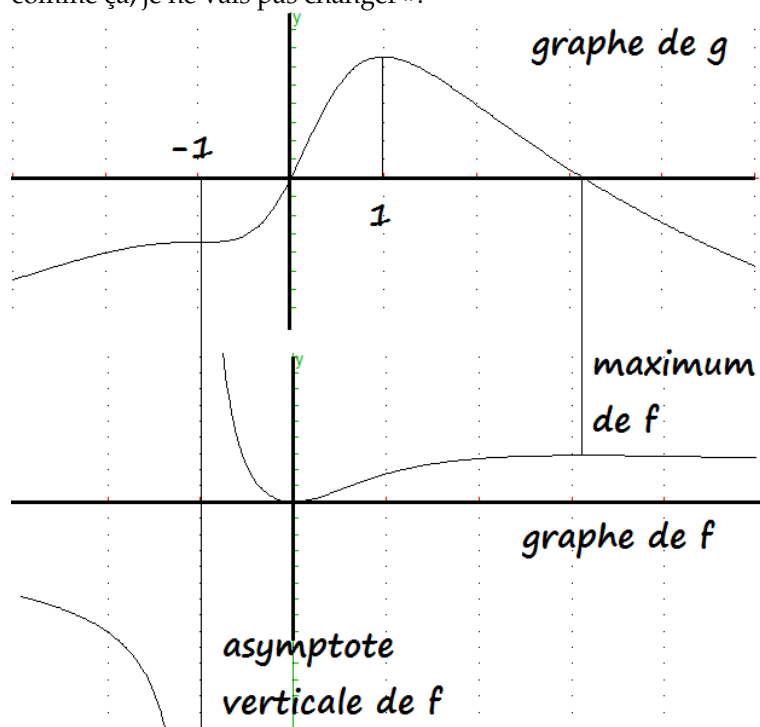
Ceci vous conduit à appliquer des phrases toutes faites, sans comprendre ce qui sert à quoi.

Et vous finissez par dire « par le T.V.I., elle ne s'annule qu'une fois ». Et là, c'est TOTALEMENT CON. Et si vous passez pour un con, vous repasserez le concours un an plus tard.

Donc, tout sauf des formules toutes prêtes.

On réfléchit en parlant, et on prend conscience du prix à payer pour toute affirmation.

Ou alors on change de filière. J'ai connu des gens qui ont quand même fait une belle carrière en n'ayant rien compris aux maths et aux sciences. Ce sera peut être vous si vous persistez en disant « j'ai toujours fait comme ça, je ne vais pas changer ».



<i>a</i>	Pourquoi est il vrai que si f est continue à droite et continue à gauche en a , alors elle est continue en a .
	f admet une limite à droite en a , et cette limite est égale à $f(a)$. f admet une limite à gauche en a , et cette limite est égale à $f(a)$. Par transitivité, la limite à droite est égale à la limite à gauche. f admet donc une limite en a , et cette limite est égale à $f(a)$.
<i>b</i>	Pourquoi est il vrai que si f est dérivable à droite et dérivable à gauche en a , alors pourquoi elle n'est pas forcément dérivable en a .
	$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite à droite en a , et cette limite est égale à $f'_d(a)$. $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite à gauche en a , et cette limite est égale à $f'_g(a)$. Mais rien ne force la limite à droite à être égale à la limite à gauche. Les taux d'accroissement n'ont pas forcément de limite en a . La valeur absolue est un bon contre-exemple en 0.
<i>c</i>	Pourquoi est il vrai que si f est dérivable à droite et dérivable à gauche en a , alors elle est continue en a .
	Si f est dérivable à droite en a , alors elle est continue à droite. Si f est dérivable à gauche en a , alors elle est continue à gauche. On est ramené à la première question.
<i>d</i>	Un $\mathcal{E}$ tracé par Jonas B est il homéomorphe à un $\mathcal{E}$ tracé par Jonas K ? Beh, euh...
<i>e</i>	Vrai ou faux : $x \mapsto \ln(x)$ a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{ x }$?
	Faux. Cette application, définie sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur les deux. En effet, quand sur $] -\infty, 0[$ vous dérivez $x \mapsto \ln(-x)$, vous obtenez $x \mapsto \frac{-1}{-x}$. D'ailleurs la dérivée d'une application paire dérivable comme $x \mapsto \ln(x)$ est impaire. Et plus généralement, $x \mapsto \ln(a.x)$ se dérive en $x \mapsto \frac{1}{x}$, il y a deux arguments pour cela.
<i>f</i>	Vrai ou faux : f est dérivable en a si et seulement si $x \mapsto f(x + a)$ est dérivable en 0.
	Vrai. dans un cas, on regarde $x \mapsto f(x)$ et dans l'autre $h \mapsto f(a + h)$.
<i>g</i>	Vrai ou faux : si f est dérivable en a de dérivée $f'(a)$, alors $x \mapsto f(-x)$ est dérivable en $-a$ de dérivée $f'(a)$.
	Faux. Il y a un signe moins qui sort. On a symétrisé par rapport à l'axe Oy . Les coefficients directeurs des tangentes changent de signe. Mais sinon, c'est bien en $-a$ que ça se passe.
<i>h</i>	Vrai ou faux : si $x \mapsto \text{Arctan}(f(x))$ est dérivable en a alors f est dérivable en a .
	Vrai. Il suffit de composer par l'application tangente, qui est dérivable en tout point, y compris en $\text{Arctan}(f(a))$.
<i>i</i>	Vrai ou faux : si $x \mapsto (f(x))^2$ est dérivable en a alors f est dérivable en a .
	Faux. Par quoi vouliez vous composer ? Par la racine carrée ? Non dérivable en 0. Et même, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$. Élevez la au carré, elle est dérivable partout car constante. Mais l'application initiale n'est dérivable nulle part car déjà continue nulle part. Et sinon, $x \mapsto x $ est non dérivable en 0, mais son carré l'est.
<i>j</i>	Vrai ou faux : si f est paire, alors f' est nulle en 0.
	Faux. Le vrai résultat est « si f est paire et dérivable en 0 alors $f'(0)$ est nul. Mais sinon, $f'(0)$ n'existe peut être pas. Contre-exemple avec la valeur absolue.

<table> <tr><td></td><td>D</td><td>B</td><td></td><td>D</td><td></td></tr> <tr><td>A</td><td>D</td><td>B</td><td>A</td><td></td><td>C</td></tr> <tr><td>D</td><td>A</td><td>C</td><td>B</td><td>D</td><td></td></tr> <tr><td>B</td><td></td><td>D</td><td>C</td><td>A</td><td>B</td></tr> <tr><td></td><td>B</td><td></td><td>D</td><td>C</td><td>A</td></tr> <tr><td></td><td>C</td><td>A</td><td></td><td>B</td><td>D</td></tr> </table>							D	B		D		A	D	B	A		C	D	A	C	B	D		B		D	C	A	B		B		D	C	A		C	A		B	D
	D	B		D																																					
A	D	B	A		C																																				
D	A	C	B	D																																					
B		D	C	A	B																																				
	B		D	C	A																																				
	C	A		B	D																																				
<table> <tr><td></td><td>C</td><td></td><td>B</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>C</td><td></td><td>C</td><td>A</td><td>B</td><td>D</td></tr> <tr><td>B</td><td>B</td><td>A</td><td>C</td><td>D</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>C</td><td>B</td><td>D</td><td></td><td>A</td></tr> <tr><td>D</td><td>D</td><td></td><td>B</td><td>A</td><td>C</td></tr> <tr><td></td><td>A</td><td>D</td><td></td><td>C</td><td>B</td></tr> </table>							C		B			C		C	A	B	D	B	B	A	C	D			C	B	D		A	D	D		B	A	C		A	D		C	B
	C		B																																						
C		C	A	B	D																																				
B	B	A	C	D																																					
	C	B	D		A																																				
D	D		B	A	C																																				
	A	D		C	B																																				
<table> <tr><td></td><td>C</td><td></td><td>A</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>B</td><td></td><td>B</td><td>A</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td></td><td>C</td><td></td><td>D</td><td>A</td><td>B</td></tr> <tr><td></td><td>A</td><td>C</td><td>B</td><td>D</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>D</td><td>A</td><td></td><td>B</td><td>C</td></tr> <tr><td></td><td>B</td><td>D</td><td>C</td><td></td><td>A</td></tr> </table>							C		A			B		B	A	C	D		C		D	A	B		A	C	B	D			D	A		B	C		B	D	C		A
	C		A																																						
B		B	A	C	D																																				
	C		D	A	B																																				
	A	C	B	D																																					
	D	A		B	C																																				
	B	D	C		A																																				

Tiens, et un programme Python qui vérifie que pour une matrice donnée sous forme de liste de listes comme $[[D,B,A,O,C], [A, C, B, D,O], [O,D,C,A,B], [B, O, D, C, A], [C, A, O, B, D]]^2$ pour la première que chaque ligne est chaque colonne est bien formée des cinq symboles ?
Et même qui ensuite vous dit même quelle est la première lettre (autre que O) visible depuis chaque extrémité de ligne et/ou de colonne.

Paris aux prestigieuses **scènes** est la capitale mondiale capitale du **luxe**. On y rencontre plein de **titis** qui **rusent** et **bisent** des copines à l'air cool. On voit plein de **péniches** à la **Seine** et plein de **bus** faciles à **citer**. On entend parfois soupirer des touristes subjugués par l'**abîme** dans la **Tour** : "Ah que j'aurais aimé connaître vos **motivations**, **Eiffel** !" !"

Et Joël Martin en Haute-Savoie (ah le **goût** de Mont-**Blanc**) :

Les amateurs de **pent**es collectionnent les **faces**, **épatés** par les **faces** et les **pent**es **effilées**. Une grimpeuse qui apprécie la **Verte** quand elle est **jolie**, et surtout la **Verte** enneigée, parcourt le mont sans craindre le **vide**. Une autre **luge** sous la **Verte**. Mais gare à l'excès de **glisse** quand se déchaîne le vent... détresse sur les **faces** !