$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2		**VENDREDI 14 MAI**
LYCEE CHARLEMAGNE 2020/2021		**PONT 02**

Vrai ou faux : $\cos(a) = \cos(b) \Rightarrow a = b + 2.k.\pi$ *ou* $a + b = 2.k.\pi$
$(a = b + 2.k.\pi\ (\forall k \in \mathbb{Z})) \Rightarrow \sin(a) = -\sin(b)$

Vrai ou faux : si A commute avec B et C alors B commute avec C (matrices de taille 2 sur $\acute{e}$).

Vrai ou faux : $x \longmapsto \int_0^x f(t).dt$ a pour dérivée $t \longmapsto f(t)$.

Vrai ou con : $x \longmapsto x.\int_0^x f(t).dt$ a pour dérivée $x \longmapsto \int_0^x f(t).dt + x.f(t)$.

Lesquelles sont bonnes :

$[2.x] = 2.[x]$		$\exists x,\ [2.x] = 2.[x]$		$\forall x,\ [2.x] \neq 2.[x]$
$[2.x] \neq 2.[x]$		$\exists x,\ [2.x] \neq 2.[x]$		$\forall x,\ [2.x] \neq 2.[x]$

On pose $f(x) = 2.x^2.\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x$. Prolongez f par continuité en 0.
Montrez : $f'(0) = 1$.
Montrez que pourtant il n'existe aucun intervalle de la forme $[0,\ a]$ sur lequel f soit croissante..

De Joël Martin toujours, extrait d'une biographe de Chirac :
Chirac en voyage. En Réunion où on l'a beaucoup touché en lui faisant des papayes (il regrette les papayes au chou des Réunionnaises), il s'est penché sur les Beaux-Arts des DOM. Sachant que l'Irak n'avait qu'une toute petite chance des zélotes du long Jacquou trouvent normal que le gouvernement n'ait mobilisé nul « Foch » pour l'Irak. Ouï à l'Élysée : « Les bourdes incessantes de l'Irak sont moches. Beaucoup de ces Irakiens sont de tristes bêcheurs, mais il faut voir comment l'Irak prend la mouche ! » Titre : « Chirac épié dès qu'il parle de la Chine ». Ayant trop longtemps béé en Corrèze et appréhendant les froids des voisins Nippons, Chirac a mis un pull en Corée et sa suite a offert des pâtes aux fruits. En Corée, il n'a pas été adulé. Il sait que la Chine parie sur les achats du Pakistan. Fasciné par la Chine, il a fait des pauses et chiné sans avoir eu besoin de beaucoup de pèze. Il a vu des troupiers tout près de la Chine. Il a plaint les pauvres paniqués par la Chine et les Tibétains (voir Tiberi) privés de carry. Mais le président chinois l'a privé de ventes fastes. Admiratif devant l'essor de Pékin, Chirac, comme vendeur, a fait un sacré bide. La Chine est dure comme un cristal d'Europe. Du coup, on dit à Tulle que Chirac n'a même pas été en Corée et qu'il coupe Bernadette dès qu'elle parle de la Chine... *27 contrepets*

Vrai ou faux : $e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\cdots}}}}}$ (avec une infinité de termes) est égal à i, puisque $i = e^{\frac{\pi}{2}.i}$.
Rappel : une maison de taille n contient les entiers de 1 à n. Et deux cases voisines[1] ne peuvent contenir le même entier.

1. même en diagonale

00165

4				2								5			
5	1					2				5					
						3						4			
		4													4
3															
			5												
		4				5				3					

Calculez $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+x+1}}.dx$ par changements de variable : $t = \sqrt{x^2+x+1} - x$ puis $u = 2.t - 1$.

Par un argument de continuité, l'intégrale existe.
t semble une fonction continue et dérivable de x. Mais bijective ? On va extraire x comme fonction de t ?
On écrit $t + x = \sqrt{x^2+x+1}$.
On élève au carré : $t^2 + x^2 + 2.t.x = x^2 + x + 1$.
On simplifie : $t^2 - 1 = x - 2.x.t$.
On extrait : $x = \dfrac{t^2-1}{1-2.t}$. Pourquoi pas.

On reporte pour vérifier : $x^2+x+1 = \dfrac{(t^2-1)^2 + (1-2.t).(t^2-1) + (2.t-1)^2}{(2.t-1)^2}$
$x^2+x+1 = \dfrac{t^4 - 2.t^3 + 3.t^2 - 2.t + 1}{(2.t-1)^2} = \dfrac{(t^2-t+1)^2}{(2.t-1)^2}$ (pas évidente la refactorisation du numérateur).
$\sqrt{x^2+x+1} = \dfrac{(t^2-t+1)}{(2.t-1)}$ ou $\dfrac{(t^2-t+1)}{(2.t-1)}$ suivant le domaine.
Puis $\sqrt{x^2+x+1} - x = t$.

On différentie : $dx = -2.\dfrac{t^2-t+1}{(2.t-1)^2}.dt$.
L'intégrale devient $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}-1} \Big(\frac{t^2-1}{1-2.t}\Big)^3.\frac{1}{\dfrac{t^2-t+1}{(2.t-1)}}.\Big(-2.\frac{t^2-t+1}{(2.t-1)^2}.dt\Big)$.
On simplifie un $t^2 - t + 1$ et on renverse le sens : $2.\displaystyle\int_{\sqrt{3}-1}^1 \frac{(t^2-1)^3}{(2.t-1)^4}.dt$.

Et maintenant, un gentil changement affine : $u = 2.t - 1$ et donc $dt = du/2$.
L'intégrale devient $2.\displaystyle\int_{2.\sqrt{3}-3}^1 \frac{(u-1)^3.(u+3)^3}{64.u^4}.du$.

On développe par formule du binôme $(u-1)^3.(u+3)^3 = (u^3 - 3.u^2 + 3.u - 1).(u^3 + 9.u^2 + 27.u + 27)$.
et même $(u-1)^3.(u+3)^3 = u^6 + 6.u^5 + 3.u^4 - 28.u^3 - 9.u^2 + 54.u - 27$.
On divise par u^4 : $u^2 + 6.u + 3 - \frac{28}{u} - \frac{9}{u^2} + \frac{54}{u^3} - \frac{27}{u^4}$.

Je ne sais pas si cela vaut la peine de terminer le calcul...

Sachant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, donnez une base et la dimension de $\{M \mid A.M = M.A\}$ (au fait, quel est le seul format possible pour M ?).

Le plus simple est ici de prendre... seize coefficient, oui.
On écrit les seize relations issues de $A.M = M.A$.
On a un système seize équations, seize inconnues. Et il va être dégénéré. On sait en effet qu'il y a des solutions non triviales.
Il y a I_4, A et A^2. Et peut être d'autres.
On peut donc dire que trois équations au moins vont disparaitre... Ça c'est du « calcul » de base en maths.

Mais on va économiser des équations en des inconnues grâce au produit par blocs. [2]
On écrit $A = \begin{pmatrix} B & O_{2,2} \\ 0_{2,2} & C \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. mais pas tant que ça en y regardant bien

On pose alors $M = \begin{pmatrix} T & U \\ V & W \end{pmatrix}$ avec quatre matrices 2 sur 2.

On effectue des produits par blocs et on identifie : $\begin{pmatrix} B.T & B.U \\ C.V & C.W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T.B & U.C \\ V.B & W.C \end{pmatrix}$.

Attention, la relation $B.U = U.C$ conduit elle à $U = 0_{2,2}$ comme avec les réels[3] ?

Mais finalement : On résout avec des coefficients : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On trouve (position 1, 1) : $a + 2.c = a - b$
(position 2, 2) : $2.b + d = -2.c + d$
Pas de chance : $b = c = 0$.
On continue (position 1, 2) : $0 + 2.d = -2.a + 0$
(position 2, 1) : $2.a + 0 = 0 - d$
Cette fois : $a = d = 0$.

De même, $C.V = V.B$ donne $V = 0_{2,2}$.

A ce stade M est de la forme $\begin{pmatrix} T & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & W \end{pmatrix}$ et vérifie $\begin{pmatrix} B.T & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & C.W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T.B & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & W.C \end{pmatrix}$.

On passe à $B.T = T.B$ c'est à dire $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On trouve quatre équations pour quatre inconnues.
Mais finalement, il n'en reste que deux.
Soit dit en passant, si vous ne raisonnez qu'à coups de $\Rightarrow$, vous n'avez toujours rien compris depuis le temps.

En effet, $\begin{array}{ccccccccc} a & & +2.c & & = & a & +2.b & & \\ & b & & +2.d & = & 2.a & +b & & \\ 2.a & & +c & & = & & & c & +2.d \\ & 2.b & & +d & = & & & 2.c & +d \end{array} \Rightarrow b = c$ par exemple.

Mais ceci ne dit pas que les solutions sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.
Les solutions sont « parmi les matrices de cette forme », c'est tout.
Sincèrement, je me fous que vous plantiez un calcul.
Je ne vous en veux pas trop d'hésiter sur « il y a un moins dans la dérivée du cosinus ».
Mais que vous ne raisonniez qu'avec des « il faut » ou $\Rightarrow$ utilisés sans rigueur, là je vous en veux, et je comprends que vous ne pourrez jamais faire de sciences ni devenir intelligents.

Bref, on trouve les combinaisons de I_2 et B.

Et pour l'autre équation c'est pareil.
Les matrices cherchées sont de la forme $\begin{pmatrix} a.I_2 + b.A & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & c.I_2 + d.B \end{pmatrix}$ avec a, b, c et d à prendre comme vous voulez.
L'espace des solutions est de dimension 4.

On en donne une base	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

D'autres bases sont possibles...

Un théorème affirme : pour tout couple d'entiers $(a,\ b)$ distincts, il existe une infinité d'entiers naturels n vérifiant $a + n$ et $b + n$ sont premiers entre eux.
Écrivez un script Python qui pour a et b donnés cherche une liste de cent entiers n vérifiant ceci.
Donnez le couple $(a,\ b)$ avec a et $b$entre 1 et 1000 pour lequel le dernier terme de cette liste est le plus grand.

3. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ donne vite $a.w = w.b$ d'où $w = 0$

Pour tester si deux entiers sont premiers entre eux, on calcule leur pgcd par algorithme d'Euclide (divisions euclidiennes jusqu'à avoir un reste nul, et on retourne l'entier précédent, c'est a). Mais en fait, on regarde si le pgcd trouvé vaut 1 :

```
def pgcd(a, b) :
....while b > 0 :
........a, b = b, a%b
....return(a)
```

```
def PremiersEntreEux(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = b, a%b
....return(a==1)
```

Ensuite, on exploite ce test, et tant que la longueur de la liste n'a pas atteint 100, on continue à chercher.
Faut il penser à vérifier au début si a et b sont distincts ?

```
def Liste(a, b) :
....L = [ ]
....n = 0
....while len(L)<100 :
........if PremiersEntreEux(a+n, b+n) :
............L.append(n)
............n += 1
....return(L)
```

Et maintenant, pour que le centième entier de la liste soit le plus grand possible ?

<table>
<tr><td>On va prendre tous les couples $(a,\ b)$</td><td><pre>for a in range(1, 1001) :
....for b in range(1, 1001) :</pre></td></tr>
<tr><td>(avec a différent de b et en fait b plus petit que a)</td><td><pre>for a in range(1, 1001) :
....for b in range(1, a) :</pre></td></tr>
<tr><td>On va créer un record à battre.</td><td><pre>aRec, bRec = 2, 1
Record = Liste(aRec, bRec)[-1]
for a in range(1, 1001) :
....for b in range(1, a) :</pre></td></tr>
<tr><td>On va le comparer au denier test de Liste(a, b).</td><td><pre>aRec, bRec = 2, 1
Record = Liste(aRec, bRec)[-1]
for a in range(1, 1001) :
....for b in range(1, a) :
........Candidat = Liste(a, b)[-1]</pre></td></tr>
<tr><td>Si le record n'est pas battu, on passe aucun couple suivant.</td><td><pre>aRec, bRec = 2, 1
Record = Liste(aRec, bRec)[-1]
for a in range(1, 1001) :
....for b in range(1, a) :
........Candidat = Liste(a, b)[-1]
........if Candidat > Record :</pre></td></tr>
<tr><td>Si le record est battu, c'est lui qu'on mémorise.</td><td><pre>aRec, bRec = 2, 1
Record = Liste(aRec, bRec)[-1]
for a in range(1, 1001) :
....for b in range(1, a) :
........Candidat = Liste(a, b)[-1]
........if Candidat > Record :
............Record = Candidat
............aRec, bRec = a, b</pre></td></tr>
</table>

Record : 443 atteint pour les couples [a, b] suivants :

[[2, 1], [3, 1], [4, 2], [7, 1], [8, 2], [31, 1], [32, 2], [50, 20], [211, 1], [212, 2], [258, 48], [284, 74]]

Sur quel domaine est elle définie ? Sur quel domaine est elle continue ? Sur quel domaine est elle dérivable ?
$x \longmapsto \cos(\sqrt{x})$.
Mêmes questions avec $x \longmapsto \sqrt{\cos(x)}$.