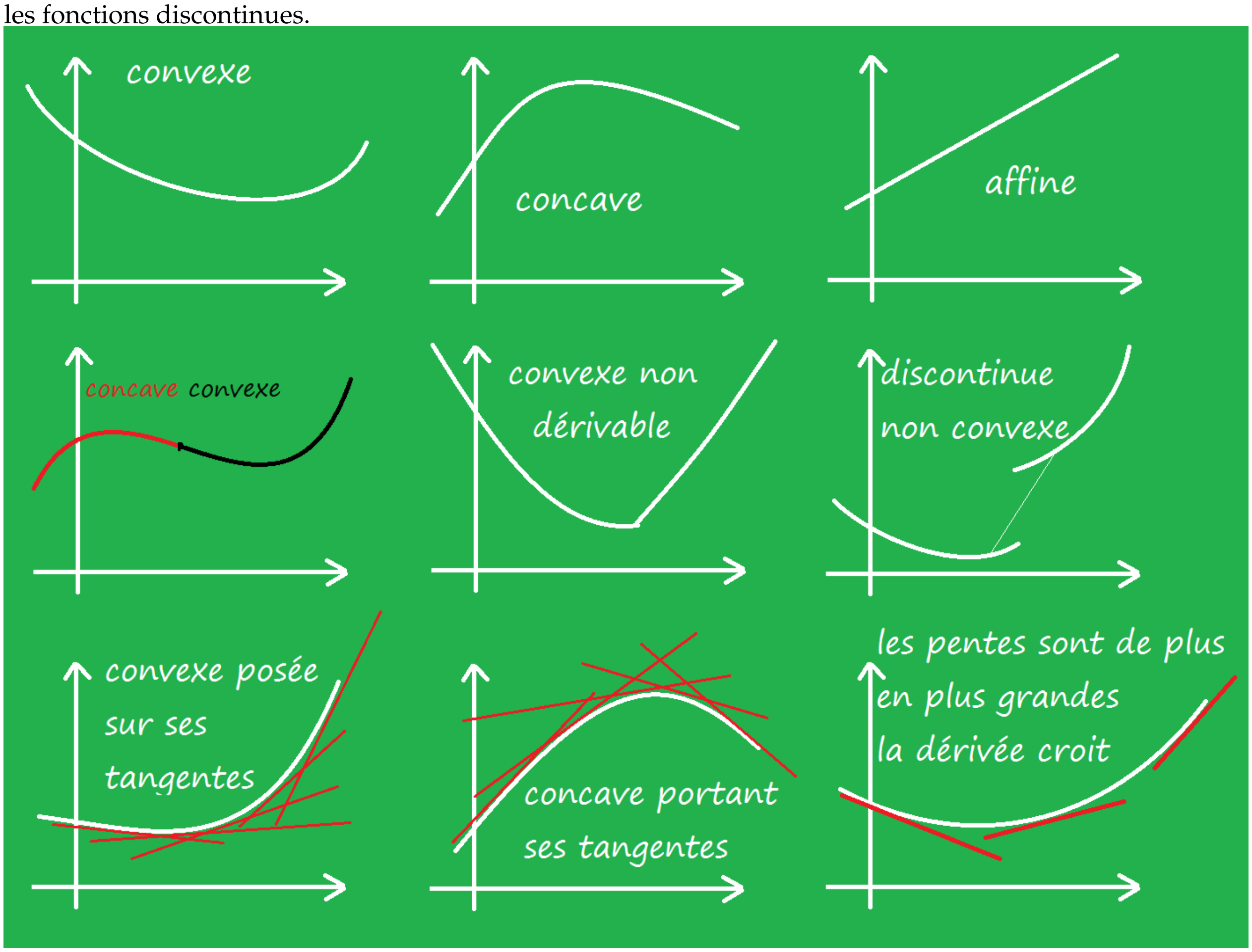
Je vous propose un survol rapide niveau Sup de la notion de convexité. C'est une notion que vous avez aperçue en Terminale, et que vous reprendrez en détail l'an prochain, y compris dans des espaces de dimension autre que 1.

Il y a certes un rapport avec les lentilles convexes de l'optique, mais on se contentera de dire « tiens, c'est le même mot ».

Pour se représenter une fonction convexe ? L'exponentielle. C'est bien, il y a la sonorité EX dans les deux.
Et une fonction concave : le logarithme (ou une voûte de cave). [1]
Visuellement, la fonction convexe repose sur ses tangentes.
La fonction concave porte ses tangentes sur son dos.
Mais ce point de vue est naïf, certaines fonctions convexes n'ont pas de tangentes. Juste des demi tangentes.

Il existe des fonctions à la fois convexes et concaves, mais elles ne sont pas si nombreuses : les fonctions affines.

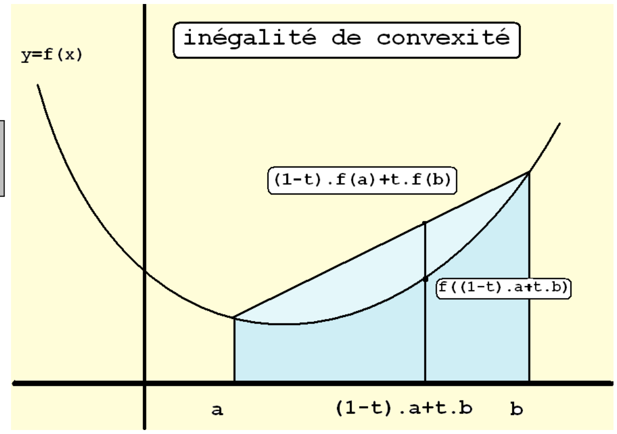
Il existe des fonctions ni convexes ni concaves, comme le sinus qui change toujours de concavité. Et même les fonctions discontinues.



Dans la vision de Terminale : les fonctions convexes sont celles dont la dérivée seconde est positive. C'est un critère facile à manier.
Dans une vision un peu moins simpliste, ce sont les fonctions dont la dérivée est croissante. Souvent, ça fait moins de calculs...
...et le naïf qui pense que tout est dérivable dire « mais c'est pareil ».

Dans la vision de Sup, une fonction convexe est une fonction qui vérifie une inégalité de convexité facile à énoncer :

1. f est concave si $-f$ est convexe



« l'image de la moyenne est plus petite que la moyenne des images ».

Sur le graphe, la moyenne, c'est $(1-t).a+t.b$

l'image de la moyenne : $f((1-t).a+t.b)$

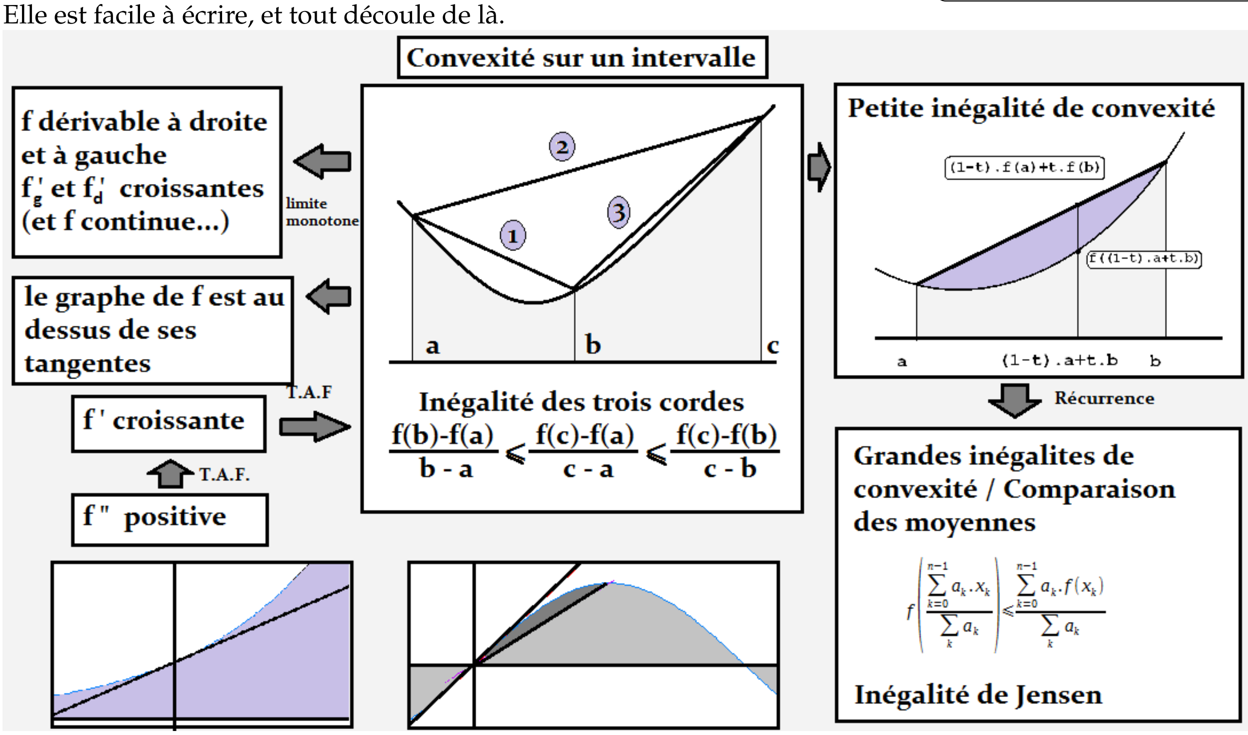
et la moyenne des images :

$(1-t).f(a)+t.f(b)$

Et les fonctions convexes servent à déterminer des inégalités de convexité telles que $e^w \geqslant 1+x$ et des comparaisions de moyennes, plus des inégalités plus fortes que les inégalités de Cauchy-Schwarz.

Et dans la vision de MPSI2, une fonction convexe est une fonction qui vérifie $\boxed{\text{l'inégalité des trois cordes}}$

Elle est facile à écrire, et tout découle de là.



Si vous suivez sur ce schéma, l'inégalité des trois cordes est au milieu, on va l'étudier largement et la prendre comme définition.
A partir d'elle on étudiera quelques stabilités (addition, multiplication par un réel positif, composition sous certaines conditions restrictives...).
On montrera l'implication « (f' croissante) implique (trois cordes) ».
Vous sortirez le théorème des accroissements finis pour dire « (f'' positive) implique (f' croissante) implique (trois cordes) ».

Mais on prendra aussi le schéma dans l'autre sens : trois cordes implique dérivable à droite en tout point
trois cordes implique dérivable à gauche en tout point
trois cordes implique donc continue en tout point.
On montrera même que la dérivée à droite est croissante, de même que la dérivée à gauche. Ce qui bouclera presque avec l'implication « f' croissante implique f convexe ».

Et on montrera les inégalités de convexité à partir de la formule des trois cordes.

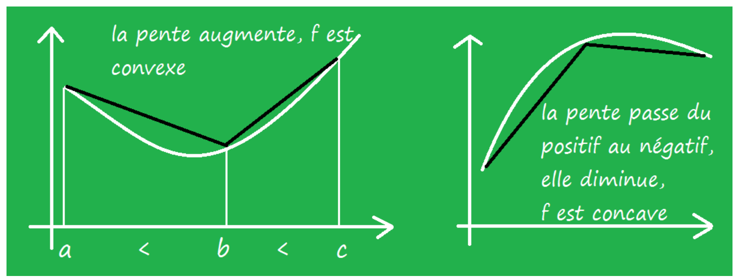
Mais surtout, avant d'attaquer : un mot capital : dans tout ce qui suit, on va envisager des $\boxed{\text{applications définies sur un intervalle de } \mathbb{R} \text{ et à valeurs dans } \mathbb{R}}$ (pour écrire des inégalités). S'il y a un trou dans votre domaine de définition, ne parlez pas de convexité.
Et on évitera de se poser des questions aux bornes éventuelles du domaine de définition.

La définition des la convexité par les trois cordes est visuelles, mais aussi très facile à écrire mathématiquement .
Et avec des mots : les cordes vont en croissant.

> *Ah pardon ? Le mot « corde » ? Vous auriez dû me le demander plus tôt : c'est le segment de droite qui joint deux points $A(a,\ f(a))$ et $B(b,\ f(b))$ d'un graphe de fonction. Et une corde telle que celle ci a pour coefficient directeur $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

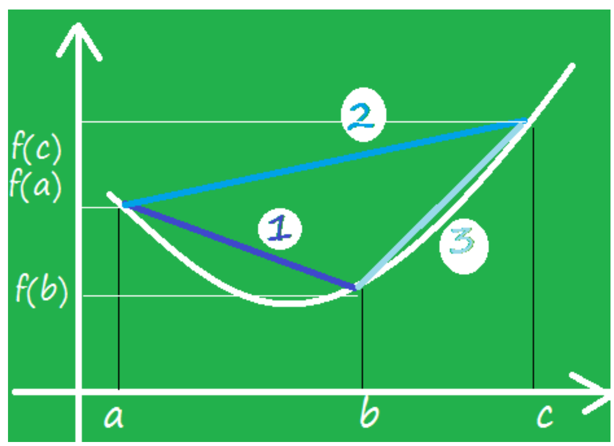
.

Nous, on va prendre trois points A, B et C d'abscisses a, b et c dans cet ordre $a < b < c$. On peut alors définir deux cordes. Et les ordonner de la plus petite à la plus grande. Et la convexité, c'est « les cordes vont en croissant » : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$.



Mais ce qui est fort, c'est qu'il y a trois cordes et que l'inégalité c'est même
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

$$\boxed{\underset{\boxed{1}}{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}} \leqslant \underset{\boxed{2}}{\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}} \leqslant \underset{\boxed{3}}{\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}}}$$



.
.
.
.

Pourquoi est ce que je dis que c'est fort ? Parce qu'en fait on compare trois cordes par a priori deux inégalités, mais dans la pratique il n'y en a qu'une.

C'est à dire que • *si on a classé* $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$ *alors l'autre taux s'insère au milieu* $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

• *de même* $\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}\right) \Rightarrow \left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)$

• *et la troisième implication aussi.*

Je m'explique et j'écris... une matrice ou plutôt un déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \geqslant 0.$

Et je vous invite à montrer des inégalités équivalentes entre elles.

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

Moi qui passe mon temps à surveiller les résolutions d'équations et à vous dire « ton système a trois équations, comment peut il être équivalent à un système qui n'en a plus que deux ! », je suis surpris ici que les comparaisons des cordes soient équivalentes.

.

Je vous le fais par les opérations classiques sur les déterminants : invariant quand on soustrait une colonne sur une autre

$$0 \leqslant \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ f(a) & f(b)-f(a) & f(c)-f(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a-b & b & c-b \\ f(a)-f(b) & f(b) & f(c)-b(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-c & b-c & c \\ f(a)-f(c) & f(b)-f(c) & f(c) \end{vmatrix}$$

.

$\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ f(b)-f(a) & f(c)-f(a) \end{vmatrix} \geqslant 0$	$\begin{vmatrix} b-a & c-b \\ f(b)-f(a) & f(c)-b(b) \end{vmatrix} \geqslant 0$	$\begin{vmatrix} c-a & c-b \\ f(c)-f(a) & f(c)-f(b) \end{vmatrix} \geqslant 0$
développer diviser par $(b-a).(c-a)$	développer diviser par $(b-a).(c-b)$	développer diviser par ...
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$ $\boxed{1}\leqslant\boxed{2}$	$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ $\boxed{1}\leqslant\boxed{3}$	$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ $\boxed{2}\leqslant\boxed{3}$

Dès lors, vous pouvez avoir un parfait comportement de MPSI2 et dire

« la convexité c'est $a < b < c \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \geqslant 0$ »

et « la concavité c'est $a < b < c \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \leqslant 0$ »

et devinez ce qu'est une application affine...

Et vous mémorisez le petit dessin pour les classer effectivement.

A partir de cette définition, on peut vérifier des stabilités en passant de

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \geqslant 0$ à $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ -f(a) & -f(b) & -f(c) \end{vmatrix} \leqslant 0$

ou de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \geqslant 0$ à $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \lambda.f(a) & \lambda.f(b) & \lambda.f(c) \end{vmatrix} \geqslant 0$.

f est convexe si et seulement si $-f$ est concave.

Si f est convexe, alors chaque $\lambda.f$ avec λ positif est convexe (mais avec λ négatif...).

Attention, il n'y a pas de résultat évident par composition ni par multiplication.

Les contre-exemples sont offerts avec les fonctions affines.
$x \longrightarrow x$ et $x \longrightarrow -x$ sont convexes, mais pas leur produit.
exp *est convexe, composez la avec $x \longrightarrow -x$ (convexe car affine) et vous avez $x \longrightarrow -e^x$ qui n'est plus convexe.*

.

Petits exercices :

Montrez que $x \longrightarrow x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$, non pas en dérivant deux fois, mais en étudiant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ avec l'aide d'Alexandre[a].

Montrez que $x \longrightarrow \dfrac{1}{x}$ est convexe sur $]0, +\infty[$ en transformant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1/a & 1/b & 1/c \end{vmatrix}$ en $positif \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ et en revenant au déterminant de VanDerMonde.

Vérifiez que les fonctions affines sont convexes.

Pouvez vous prouver que $x \longrightarrow x^3$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ avec ces déterminant ?

♠ Montrez que si f est concave sur $\mathbb{R}^-$ puis convexe sur $\mathbb{R}^+$ alors il existe trois points du graphe qui sont alignés (pas facile).

a. vous avez oublié le prénom de VanDerMonde ?

Exercice plus fin.

Pour toute application f de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on définit sa conjuguée f^* par $f^* = x \longrightarrow x.f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Montrez que f est convexe si et seulement si sa conjuguée l'est.

Si on aborde ça avec l'approche simpliste « convexe équivalent à dérivée seconde positive »[2] on suppose f'' positive, et on dérive deux fois f^*. C'est déjà un exercice sympathique.

Je vous laisse vous convaincre que $(f^*)''$ donne $x \longrightarrow 2.\dfrac{f''(1/x)}{x^3}$ ou quelque chose d'approchant. Vous pouvez alors conclure f'' positive implique $(f^*)''$ positive ».

Mais comme indiqué, ceci ne traite que les cas des applications à la fois convexe et D^2.

Ensuite, vous pouvez essayer avec la définition image de la moyenne et moyenne des images, et rester perplexe devant

$\Big((1-t).a + t.b\Big).f\left(\dfrac{1}{1-t).a + t.b}\right)$ et $(1-t).a.f\left(\dfrac{1}{a}\right) + t.f\left(\dfrac{1}{b}\right)$.

Non, la bonne approche est de prendre $0 < a < b < c$ d'étudier $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a.f(\frac{1}{a}) & b.f(\frac{1}{b}) & c.f(\frac{1}{c}) \end{vmatrix}$ et d'essayer de le relier à $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}$ ou même $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/c & 1/b & 1/a \\ f(\frac{1}{c}) & f(\frac{1}{b}) & f(\frac{1}{a}) \end{vmatrix}$ puisque $0 < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$. Je vous laisse le regarder *(et Émile me demandera dans un mois « il y a une correction du petit exercice de la page tant ? »)*.

Ceci étant fait, vous n'avez montré qu'un sens : (f convexe) implique (f^*convexe). Il faut encore traiter la réciproque.

S'arrêter après un beau raisonnement ou calcul et passer à la suite sans regarder « ai je bien prouvé tout ce que je devais prouver », c'est digne de qui à votre avis ?

Réflexe MaxoQuentinien pour la réciproque : « Monsieur, on n'a pas raisonné par équivalences dans notre raisonnement ? ».

Réflexe Karelien : « Y'aurait pas un truc avec $(f^*)^*$? ».

Je vous laisse y réfléchir.

Réflexe &♉[3] : la réciproque, c'est quel sens ?

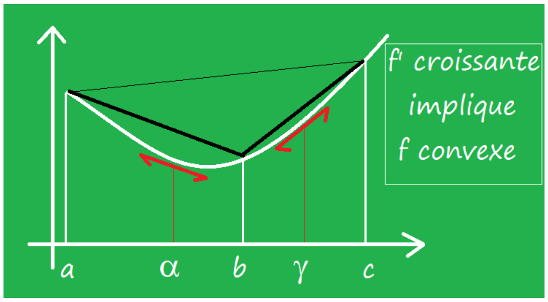
Première implication facile :

f' croissante de I dans $\mathbb{R}$ implique f convexe.

2. simpliste en ce sens que la condition est suffisante mais pas nécessaire et qu'il existe des applications qui sont convexes sans avoir de dérivée seconde qui vont vous passer au travers des mailles du filet...

3. mettez ici le prénom de quelqu'un dont vous voulez dire du mal

C'est grâce à ce résultat que va tomber en trois secondes « l'exponentielle est convexe » ou « le logarithme est concave ».
On suppose f' croissante, et on se donne trois réels a, b et c avec $a < b < c$.



On veut comparer trois taux, mais on sait qu'il suffit d'en comparer deux.

Prenons comme par hasard $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$.

Le théorème des accroissements finis nous permet de les convertir en des dérivées calculées en des points convenables :

$\exists \alpha \in]a,\ b[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\alpha)$	et	$\exists \gamma \in]b,\ c[,\ \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b} = f'(\gamma)$
$\alpha < b < \gamma$		
$f(\alpha) \leqslant f'(b) \leqslant f'(\gamma)$		
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$	$\leqslant$	$\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

C'est aussi simple que ça. ☺
On en déduit donc directement que

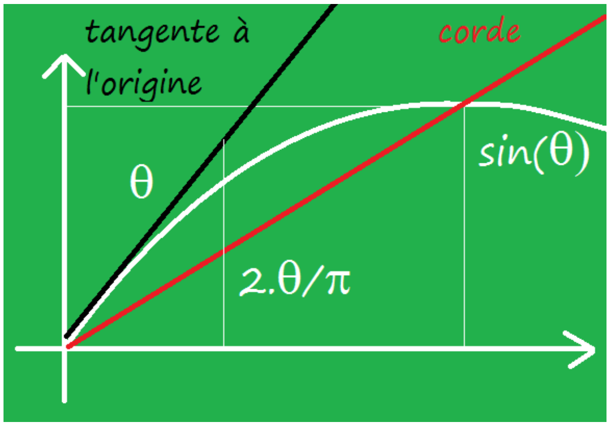
- l'application tangente est convexe sur $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ car sa dérivée $1+\tan^2$ est croissante
- l'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, car sa dérivée croît
- le sinus est concave sur $[0,\ \pi]$ car sa décriée décroît

.
On constate qu'il n'est pas forcément utile de dériver deux fois.
En effet, le prix à payer pour passer de f'' positive à f' croissante est déjà un T.A.F.
le prix à payer pour passer de f' croissante à f convexe est de deux TAF
ça fait beaucoup au total

Questions rapides :	• pourquoi peut on dire « le sinus est concave sur $[0,\ \pi]$ et sur $[2.\pi,\ 3.\pi]$? • pourquoi ne peut on pas dire « le sinus est concave sur $[0,\ \pi] \cup [2.\pi,\ 3.\pi]$? • pourquoi peut on dire que $\ln(x)$ est convex sur $[1,\ e]$? (si si !) • pourquoi une application strictement convexe dérivable n'a-t-elle pas plus d'un extrémum ?

Exemple sympathiqe :
On a montré que le sinus est concave sur $[0,\ \pi]$, car sa dérivée première décroît (et souvent, c'est vrai, on diré « sa dérivée seconde est négative).

Écrivons alors l'inégalité des trois cordes entre 0, θ et $\pi/2$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \theta & \pi/2 \\ 0 & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} \leqslant 0$ (oui, concave, pas convexe).



Et on obtient en développant par rapport à la dernière ligne : $-\sin(\theta).\dfrac{\pi}{2} + \theta \leqslant 0$.
C'est à dire $\sin(\theta) \geqslant \dfrac{\theta.2}{\pi}$.
Et on complète avec ce qu'on sait déjà
$\dfrac{\theta.2}{\pi} \leqslant \sin(\theta) \leqslant \theta$.
C'est même

$\dfrac{\theta.2}{\pi}$	$\leqslant \sin(\theta)$	$\leqslant \theta$
corde	graphe du sinus	tangente à l'origine

Joli, non ? Sans bricolage avec des fonctions auxilliaires. Juste la convexité.

Maintenant, qu'est ce qu'on a comme sorte de réciproque *(et quelle petite boîte à outil va-t-on utiliser de notre cours ? TAF ? TVI ? Taylor ? borne sup ?)*.

Si f est convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $\bullet_1$ f est dérivable à gauche en tout point
$\bullet_2$ f est dérivable à droite en tout point
$\bullet_3$ f est continue en tout point
$\bullet_4$ f'_d est croissante
$\bullet_5$ f'_g est croissante
$\bullet_5$ f'_d majore f'_g

On va le démontrer pour f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si elle n'est définie que sur un intervalle I, vous pouvez modifier la démonstration au bon endroit, et comprendre que si f est convexe de $[\alpha,\ \beta]$ dans $\mathbb{R}$, alors elle n'est peut être pas dérivable en β et/ou en α (elle peut avoir une demi tangente verticale).

On suppose donc qu'on a le droit d'utiliser dès qu'on veut l'inégalité des trois cordes. Et les cordes, c'est quoi ? Des taux d'accroissement.
On va donc étudier si les taux d'accroissement en un point x ont une limite.

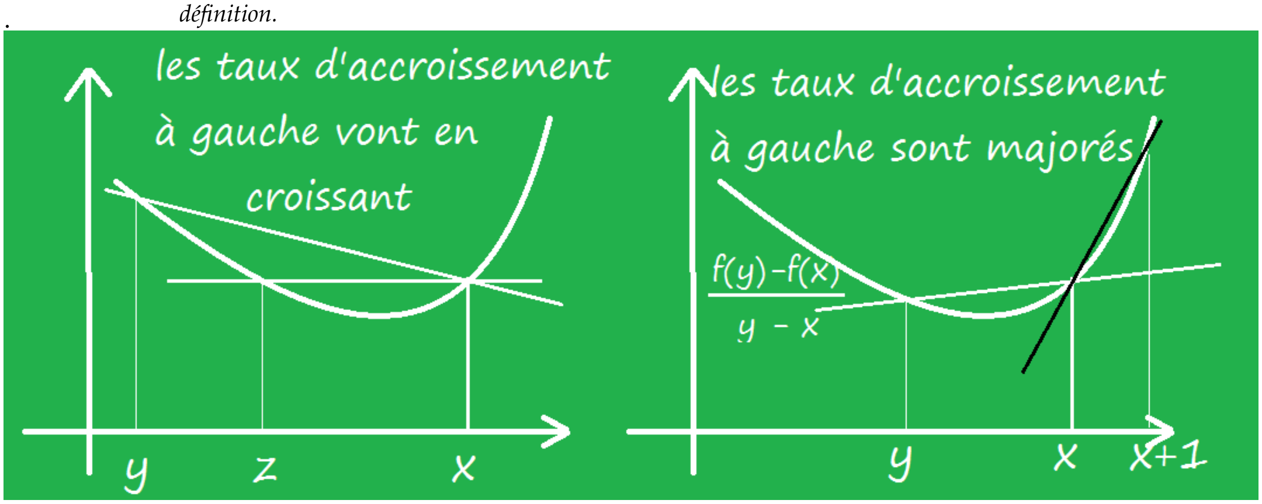
On se place en un point x, et on va montrer le point $\bullet_1$: f est dérivable à gauche en x.
On va montrer que les taux d'accroissement à gauche ont une limite.
Un taux d'accroissement à gauche, c'est $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ avec y plus petit que x.
On montre que c'est une fonction de y croissante, majorée.
Elle aura donc une limite quand y tend vers x (l'outil de notre boite « maths » est donc « borne supérieure »).
Croissance en y : $y < z < x \Rightarrow \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$ c'est les trois cordes avec

a	b	c
y	z	x

Majorée : $y < x < x+1$ donc $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \dfrac{f(x+1)-f(x)}{1}$ qui ne dépend pas de y.

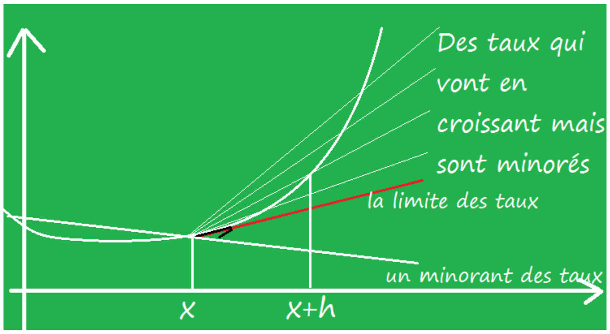
a	b	c
y	x	$x+1$

Remarque : c'est sur ce point « majoration » qu'il y a un problème si x est l'extrémité droite du domaine de définition.
.



Comment prouver que f est dérivable à droite en x ? De la même façon.
Les taux d'accroissement à droite $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ vont en croissant et sont minorés. Ils ont donc une limite quand h tend vers 0 par valeur supérieure.[4]

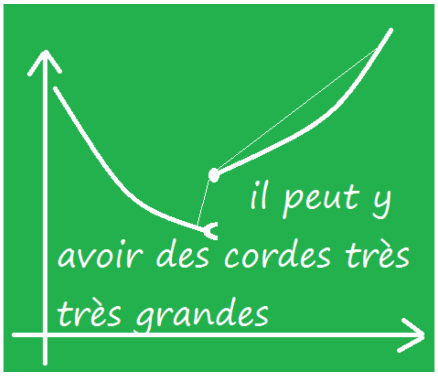
4. si on veut tendre vers 0 par valeur supérieure, on fait « descendre » h, et c'est donc bien une minoration qu'il nous faut



Leur croissance, c'est encore $0 < h < k$ implique $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \dfrac{f(x+k)-f(x)}{k}$.
La minoration, c'est en utilisant le taux entre $x-1$ et x.
f est dérivable à droite en tout point x.
$f'_d(x)$ existe pour tout x.

Bonus : étant dérivable à droit, f est continue à droite *(DL d'ordre 1 implique DL d'ordre 0).*

On s'offre le point $\bullet_3$: en tout point f est continue à droite car dérivable à droit
continue à gauche car dérivable à gauche
f est continue en tout point.



On note qu'une application discontinue poserait visuellement un problème pour les trois cordes ou pour les comparaisons des moyennes.
.
.
.
.
.
.

On note qu'on a en fait obtenu $f'_d(x) = Inf\left\{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \mid h>0\right\}$ *puisque c'était la limite « monotone » des taux d'accroissement à droite.*
Et on note qu'une phrase aurait pu revenir souvent dans notre démonstration, même si elle est un peu floue :
pour une application convexe, les taux d'accroissement vont en croissant.

Et on résume notre démonstration en disant pour x fixé, $y \longrightarrow \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ *est croissante, et admet donc une limite à droite et une limite à gauche en tout point... en particulier en x.*

On se donne à présent deux points a et b dans I ($a<b$) et étudie la corde qui va de $A(a,\ f(a))$ à $B(b,\ f(b))$.
Elle a pour taux d'accroissement $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Et on peut le lire comme un taux d'accroissement particulier à droite de a.
Il est donc plus grand que la borne inférieure des taux d'accroissements en a :
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant Inf\left\{\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \mid y>a\right\} = f'_d(a).$$

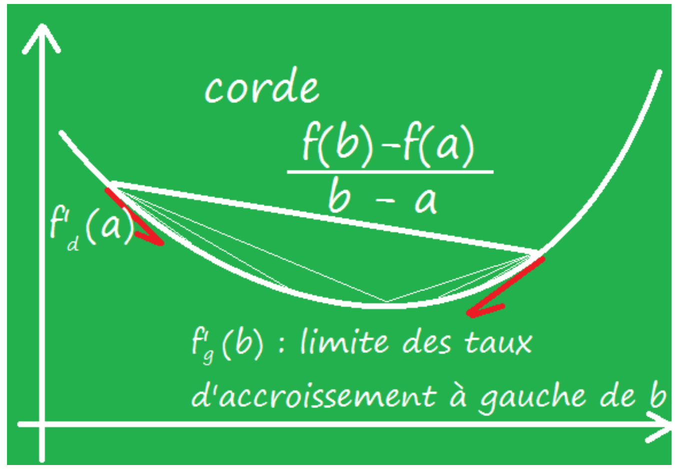
Et si on le voit comme un taux d'accroissement à gauche de b, il est plus petit que la borne Sup :
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant Sup\left\{\frac{f(y)-f(b)}{y-b} \mid y<b\right\} = \lim_{\substack{y\to b\\ y<b}} \frac{f(y)-f(b)}{y-b} = f'_g(a).$$

On recolle les morceaux : $f'_d(a) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_g(b)$.
Mine de rien, voilà un résultat important je l'écris plus gros :

$$f'_d(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_g(b).$$

Je crois que je devrais même l'encadrer :

$$\boxed{f'_d(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_g(b)}$$



Sinon, au lieu de le faire entre a et b, je peux aussi le faire de part et d'autre de a :
pour y plus petit que a et z plus grand que a, on peut comparer : $\dfrac{f(a)-f(y)}{a-y} \leqslant \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ (trois cordes).
On fait tendre y vers a par valeur inférieure. On sait maintenant qu'il y a une limite grâce au $\bullet_1$ ou $\bullet_2$:
Par passage à la limite : $f'_g(a) \leqslant \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$
On fait tendre z vers a par valeur supérieure. Cette fois on récupère $f'_d(a)$ (avec d comme droite) : $\boxed{f'_g(a) \leqslant f'_d(a)}$
Ça, je l'avais promis comme point numéro $\bullet_5$.

Et si on colle bout à bout ces différents résultats, écrits soit en a, soit en b :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & f'_g(b) & \leqslant & f'_d(b) \\
 & & f'_d(a) & \leqslant & \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} & \leqslant & f'_g(b) & & \\
f'_g(a) & \leqslant & f'_d(a) & & & & & &
\end{array}$$

Vous voyez comment on obtient que f'_d est croissante, de même que f'_g...
C'est donc fini. Smiley please ! ☻

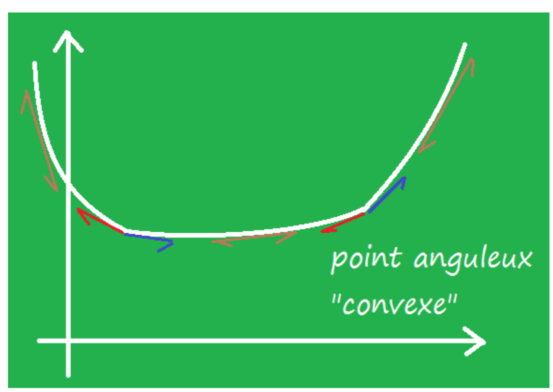
On résume ce qu'on a sû prouver :

f' croissante	implique	f convexe			
		f convexe	implique	f presque dérivable et f' « croissante »	(droite et gauche)

Si vous vivez dans un monde idéalisé D_1 vous avez en fait l'équivalence « f convexe si et seulement si f' croissante ».

Une remarque pour étoiles :
une fonction convexe a des dérivées à droite et à gauche, et celles ci sont croissantes. Les seuls problèmes que peut inventer la dérivées ont des sauts « positif ». Elle ne peut donc pas en accumuler trop (une quantité non dénombrable de sauts positifs, c'est pire qu'une série, ça fait $+\infty$ et ça pose problème.

Donc, une fonction convexe doit être « presque partout dérivable » et s'autorise juste un nombre fini ou dénombrable de points anguleux.



Maintenant, je vous ai promis des choses encore plus fortes.

Pour f convexe (et $a < b$), on a $f'_d(a) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_g(b)$.

Et dans l'univers idéalisé des applications D^1 partout : $f'(a) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b)$.

On multiplie par $b-a$ positif[5] : $f'(a).(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant f'(b).(b-a)$.

On fait passer de l'autre côté :

$f'(a).(b-a)+f(a) \leqslant f(b)$	pour $a \leqslant b$	oui !
$-f(a) \leqslant f'(b).(b-a)-f(b)$	pour $b \geqslant a$	bof
$f(a) \geqslant f'(b).(a-b)+f(b)$	pour $b \geqslant a$	c'est mieux

Mais sous cette forme, on ne voit pas trop qui va être fixé et qui va pouvoir bouger :

alors je propose $\begin{array}{ll} f'(a).(x-a)+f(a) \leqslant f(x) & \text{pour } a \leqslant x \\ f(x) \geqslant f'(b).(x-b)+f(b) & \text{pour } b \geqslant x \end{array}$

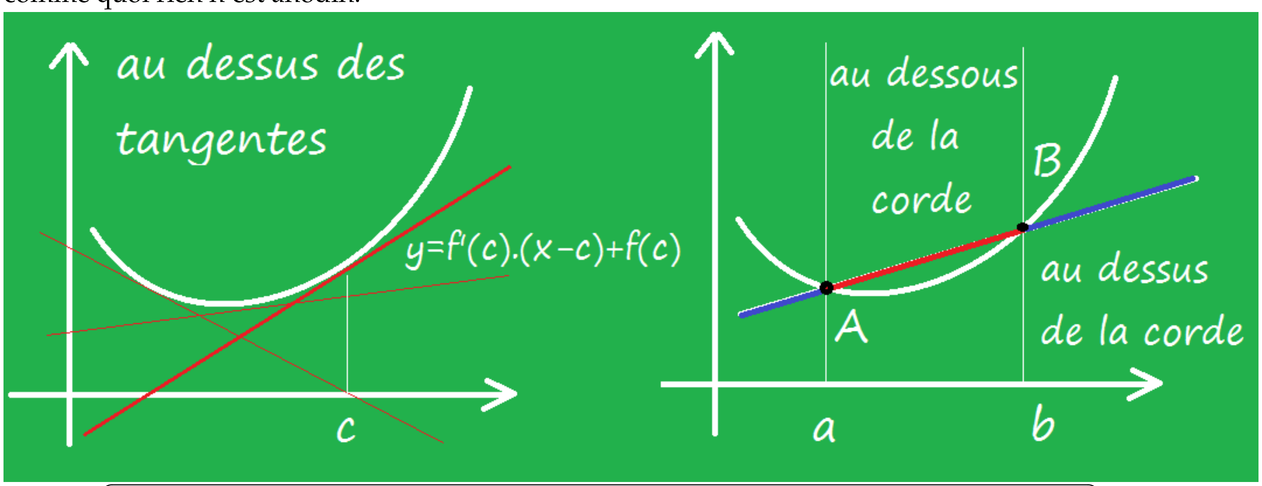
Et comme les variables sont muettes : $\begin{array}{ll} f'(c).(x-c)+f(c) \leqslant f(x) & \text{pour } c \leqslant x \\ f(x) \geqslant f'(c).(x-c)+f(c) & \text{pour } c \geqslant x \end{array}$

On fusionne en une seule : $\boxed{f(x) \geqslant f'(c).(x-c)+f(c) \text{ pour tout } x}$

On interprète géométriquement : le graphe de f (convexe) est au dessus de ses tangentes.
Et bien sûr le graphe de f concave est au dessous de ses tangentes.
Petit jeu : retrouvez de quelle fonction il s'agit et de la tangente en quel point

$e^x \geqslant 1+x$	$\ln(1+x) \leqslant x$	$\ln(x) \leqslant x-1$	$\sin(x) \leqslant x$	$Arctan(x) \leqslant x$	$\cos(x) \leqslant 1$
sur $\mathbb{R}$	sur $]-1, +\infty[$	sur $]0, +\infty[$	sur $[0, \pi]$	sur $[0, +\infty[$	sur $[-\pi/2, \pi/2]$

On note que ce sont des formules qu'on obtient aussi avec la formule de Taylor avec reste intégrale quand f'' est positive :
$f(x) = f(c)+(x-c).f'(c)+(x-c)^2.\int_0^1 (1-t).f''((1-t).c+t.x).dt \geqslant f(c)+(x-c).f'(c)$
comme quoi rien n'est anodin.



En fait, $\boxed{\text{le graphe d'une fonction convexe est au dessus de ses demi-tangentes}}$ puisque une fonction convexe n'a que des demi-tangentes.

Quant à la position par rapport à ses cordes la phrase rigoureuse est
$\boxed{\text{« le graphe est au dessous de ses cordes entre les points d'attache ».}}$
C'est ce qu'on voit en rouge sur le dessin-ce dessus. mais une fois dépassés les deux points d'attache A et B, le graphe passe sous la corde.

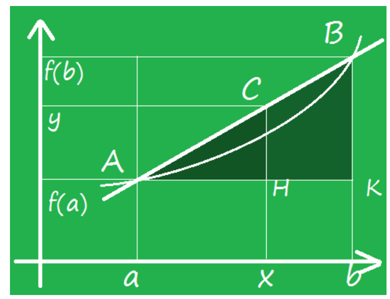
Pour ceux qui ont un doute, on se donne a et b. L'équation de la corde entre $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$, c'est...

eh oui, tiens, je vous laisse chercher ?

5. surveillez vraiment le signe des multiplicateurs dans vos inégalités

La pire des méthodes : j'écris a priori une quation de droite $y = \lambda.x + \mu$,j'écris qu'elle passe par A et pas B
je résous, je trouve un truc
et j'écris au proviseur pour demander pourquoi le prof s'oppose à ce que je passe en Spé.
(mais je vous donne quand même le bas avec mention TB (très Bac).

La méthode dynamique : je connais le coefficient directeur : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
je sais que pour $x = a$ elle passe par A
$y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a) + f(a)$
et c'est pareil que $y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-b) + f(b)$ si si



La méthode Thalès : on trace deux triangles
(A, K, B) et (A, H, C)
et on écrit la proportionnalité $\dfrac{HC}{AH} = \dfrac{KB}{AK}$
c'est à dire $\dfrac{y-f(a)}{x-a} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
vu comme ça, c'est naturel au possible
ou alors vous n'avez JAMAIS fait de maths !

La méthode barycentre : y est à $f(a)$ et $f(b)$ ce que x est à a et b :
$y = \dfrac{(b-x).f(a) + (a-x).f(b)}{b-a}$

La méthode MPSI2 : l'équation $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & x \\ f(a) & f(b) & y \end{vmatrix} = 0$ est une équation de droite
(développer par rapport à la dernière colonne)
elle passe par A (pour $(x,\ y)$ égal à $(a,\ f(a))$ il y a deux colonnes égales)
elle passe par $(b,\ f(b))$. C'est donc elle.

Bon, on a l'équation de la corde, et il faut vérifier
- $f(x) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a) + f(a)$ pour $x \in [-\infty,\ a]$
- $f(x) \geqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a) + f(a)$ pour $x \in [a,\ b]$
- $f(x) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a) + f(a)$ pour $x \in [b,\ +\infty[$

Mais c'est l'inégalité des trois cordes appliquée à $(x,\ a,\ b)$ ou $(a,\ x,\ b)$ ou $(a,\ b,\ x)$ suivant le cas.

Petit exercice : une application C^1 dont le graphe est toujours au dessus des tangentes est elle convexe (on est d'accord, c'est une réciproque).

Il est temps maintenant de passer de notre définition « trois cordes » à la définition plus classique « comparaison des moyennes ».

Si vous lisez des livres vous avez plutôt croisé la définition suivante de la convexité :

$$\forall(x,\ y),\ \forall t \in [0,\ 1],\ f\big((1-t).x + t.y\big) \leqslant (1-t).f(x) + t.f(y)$$

C'est celle qu'on va qualifier de« inégalité de convvexité »
« image de la moyenne plus petite que moyenne des images »
Dès que vous croisez $(1-t).a + t.b$, vous devez voir une moyenne de a et b.

Plusieurs façons de l'envisager : $\dfrac{(1-t).a+t.b}{(1-t)+t}$ (du type $\dfrac{\lambda.a+\mu.b}{\lambda+\mu}$)

pour t égal à 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ et 1, on trouve a, $\frac{2;a+b}{2}$, $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+2.b}{3}$ et b
c'est un curseur affine qui va de a (pour $t=0$) à b (pour $t=1$)
en passant par le milieu
il va y avoir du théorème de Thalès.

Le membre $f\big((1-t).x+t.y\big)$ est l'image de la moyenne, et $(1-t).f(x)+t.f(y)$ est la moyenne des images.

Passons de la formule des trois cordes à l'inégalité des moyennes.

Premier sens. On suppose vraie l'inégalité des trois cordes pour tout triplet.
On se donne alors x et y (avec $x<y$) puis t entre 0 et 1.

On constate $x \leqslant (1-t).x+t.y \leqslant y$ (preuve : $\begin{array}{ccccc} ((1-t).x+t.y) & -x & = & t.(y-x) & \geqslant 0 \\ y & -((1-t).x+t.y) & = & (1-t).(y-x) & \geqslant 0 \end{array}$)

On écrit donc : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & (1-t).x+t.y & y \\ f(x) & ((1-t).x+t.y) & f(y) \end{vmatrix} \geqslant 0$ puis en développant, on trouve justement
$f\big((1-t).x+t.y\big) \leqslant (1-t).f(x)+t.f(y)$.
Faites le vous même, mais le plus simple est quand même de remplacer la colonne du milieu C_2 par $C_2-(1-t)..C_1-t.C_3$, c'est si joli.

On recommence le même calcul dans le cas $x>y$ qui n'est pas interdit :
on trouve cette fois $x \geqslant (1-t).x+t.y \geqslant y$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & (1-t).x+t.y & x \\ f(y) & ((1-t).x+t.y) & f(y) \end{vmatrix} \geqslant 0$, qui aboutit finalement au même résultat à la fin.

Dans tous les cas on a bien $\forall(x,\ y),\ \forall t\in[0,\ 1],\ f\big((1-t).x+t.y\big) \leqslant (1-t).f(x)+t.f(y)$.
On peut interpréter cette formule avec le théorème de Thalès :
$(1-t).f\big((1-t).x+t.y\big)+t.f\big((1-t).x+t.y\big) = f\big((1-t).x+t.y\big) \leqslant (1-t).f(x)+t.f(y)$
puis $(1-t).\Big(f\big((1-t).x+t.y\big)-f(x)\Big) \leqslant t.\Big(f(y)-f\big((1-t).x+t.y\big)\Big)$
Bref, on peut triturer ces formules dans tous les sens. A vous de trouver celui qui vous parle le plus.

Attention, pour t hors de $[0,\ 1]$, l'inégalité change de sens.

Réciproquement. Supposons vraie la formule de comparaison des moyennes. Et montrons la formule de trois cordes.
On se donne a, $b$et c avec $a<b<c$. On va les écrire a, $(1-t).a+t.c$ et c.
Il suffit de choisir : $t=\dfrac{b-a}{c-a}$ (et donc $1-t=\dfrac{c-b}{c-a}$). Vérifiez : $(1-t).a+t.c=b$.
Et vérifiez aussi que t est entre 0 et 1 (signes de t et $1-t$).
L'hypothèse vous permet d'écrire $f(b) \leqslant \dfrac{c-b}{c-a}.f(a)+\dfrac{b-a}{c-a}.f(c)$, puis
$(c-a).f(b) \leqslant (c-b).f(a)+(b-a).f(c)$
et même $0 \leqslant (c-b).f(a)-(c-a).f(b)+(b-a).f(c)$.
Saurez vous y reconnaître $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \geqslant 0$ (développé par rapport à la dernière ligne).

Résumé : on a toutes ces quantifications équivalentes

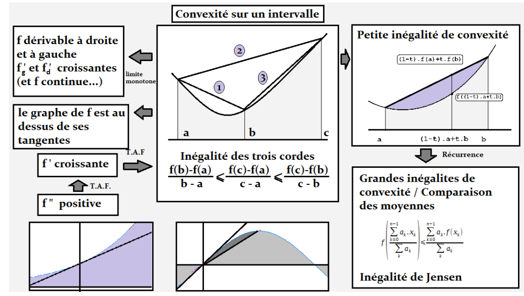
$$a<b<c \Rightarrow \bullet \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \geqslant 0$$

$$\bullet\ f(b) \leqslant \frac{c-b}{c-a}.f(a) + \frac{b-a}{c-a}.f(c)$$

$$\bullet\ \frac{f(b)-f()}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

$$t \in [0,\ 1] \Rightarrow f((1-t).x+t.y) \leqslant (1-t).f(x)+t.f(y)$$

$$(a<b) \Rightarrow f'_g(a) \leqslant f'_d(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_g(b) \leqslant f'_d(b)$$



Remarque : si on est en début d'année et qu'on n'a pas encore parlé de convexité, on peut demander aux élèves de démontrer la formule suivante
$\boxed{\text{pour tout } t \text{ de } [0,\ 1] e^{(1-t).a+t.b} \leqslant (1-t).e^a + t.e^b}$ en suivant la méthode dont vous complèterez les étapes :

- on définit $\varphi = t \longrightarrow (1-t).f(a)+t.f(b) - e^{(1-t).a+t.b}$
- on la dérive deux fois, on montre que φ'' est de signe constant
- on montre que φ' ne peut pas être de signe constant (en regardant $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$)
- on déduit que φ' est positive puis négative sur $[0,\ 1]$
- on déduit que φ est croissante puis décroissante sur $[0,\ 1]$
- les valeurs aux bornes permettent d'affirmer que φest positive sur $[0,\ 1]$ (et négative hors de $[0,\ 1]$.

.

Question : pourquoi prendre tous les t de $[0,\ 1]$?
Ne suffirait il pas, pour exprimer « image de la moyenne plus petite que moyenne des images » de dire $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$.
C'est une bonne question, pas évidente.

Un sens passe bien : si c'est vrai pour tout t, c'est vrai en particulier pour $t=\frac{1}{2}$.

Mais l'autre sens ? Tenez, serez vous capable de passer de $\forall(x,\ y),\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$ et
$\forall(x,\ y),\ f\left(\frac{3.x+y}{4}\right) \leqslant \frac{3.f(x)+f(y)}{4}$, et à $\forall(x,\ y),\ f\left(\frac{3.x+5.y}{8}\right) \leqslant \frac{3.f(x)+5.f(y)}{8}$
et aussi $\forall(x,\ y),\ f\left(\frac{13.x+3.y}{16}\right) \leqslant \frac{13.f(x)+3.f(y)}{16}$?
Si vous en êtes capable, vous devez pouvoir généraliser, et... passer à la limite.
Et si vous êtes vicieux, vous irez me construire une fonction totalement discontinue et non convexe vérifiant quand même $\forall(x,\ y),\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$, mais juste pour $t=\frac{1}{2}$ et pas pour t irrationnel par exemple...
Mais il faudra être très très tordu pour ça.
Je vous donne donc quand même le résultat favorable :
$\forall(x,\ y),\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$ et f continue implique f convexe.

Notez au passage pour cette histoire de $t=\frac{1}{2}$ que, sachant que le logarithme est concave sur $]0,\ +\infty[$, on a $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}$.
Effacez les logarithmes et dites moi ce que vous retrouvez... Agréable non ?

J'ai même mieux. On prend trois réels strictement positifs a, b et c.
par concavité du logarithme, on peut écrire $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}$ (c'est $t=\frac{1}{2}$)
$\ln\left(\frac{2.\alpha+c}{3}\right) \geqslant \frac{2.\ln(\alpha)+\ln(c)}{3}$ pour tout α (c'est $t=\frac{1}{3}$)

$\ln\left(\dfrac{2.\dfrac{a+b}{2}+c}{3}\right) \geqslant \dfrac{2.\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+\ln(c)}{3}$ pour α bien choisi

Et c'est ainsi qu'on obtient $\sqrt[3]{a.b.c} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$ bien connue de nous.

D'ailleurs, la tentation est grande de généraliser et de passer de la « petite inégalité de convexité » à la « grande inégalité de convexité ».

petite inégalité de convexité version $(1-t)$ et t $\forall(x,\ y),\ \forall t\in[0,\ 1],\ f((1-t).x+t.y)\leqslant(1-t).f(x)+t.f(y)$	
petite inégalité de convexité version α_1 et α_2 $\forall(x_1,\ x_2),\ \forall(\alpha_1,\ \alpha_2)\in(\mathbb{R}^+)^2,\ f\Big(\dfrac{\alpha_1.x_1+\alpha_2.x_2}{\alpha_1+\alpha_2}\Big)\leqslant\dfrac{\alpha_1.f(x_1)+\alpha_2.f(x_2)}{\alpha_1+\alpha_2}$	
grande inégalité de convexité $\forall n,\ \forall(x_1,\dots x_n),\ \forall(\alpha_1,\dots\alpha_n)\in(\mathbb{R}^+)^n,\ f\Big(\dfrac{\alpha_1.x_1+\dots+\alpha_n.x_n}{\alpha_1+\dots+\alpha_n}\Big)\leqslant\dfrac{\alpha_1.f(x_1)+\dots+\alpha_n.f(x_n)}{\alpha_1+\dots+\alpha_n}$	

Les deux versions de l'inégalité de convexité à deux termes sont équivalentes.
Dans un sens, on pose $t=\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$ et on vérifie qu'il est entre 0 et 1.
Dans l'autre sens, on se donne t entre 0 et 1 et on pose $\alpha_1=1-t$ et $\alpha_2=t$ (tous deux positifs).

Et pour passer de la version à deux variables à la version à n variables ? une récurrence sur n ?
Pour l'hérédité : on suppose vraie la formule $f\Big(\dfrac{\alpha_1.x_1+\dots+\alpha_n.x_n}{\alpha_1+\dots+\alpha_n}\Big)\leqslant\dfrac{\alpha_1.f(x_1)+\dots+\alpha_n.f(x_n)}{\alpha_1+\dots+\alpha_n}$
On écrit aussi la formule $f((1-t).x+t.y)\leqslant(1-t).f(x)+t.f(y)$ avec $x=\dfrac{\alpha_1.x_1+\dots+\alpha_n.x_n}{\alpha_1+\dots+\alpha_n}$, $y=x_{n+1}$ et $t=\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_1+\dots+\alpha_n+\alpha_{n+1}}$
On met tout bout à bout... c'est bon.

Dans les petites classes, on appelle ça barycentration partielle.
Si si, $Bar\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_{n+1}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & \alpha_{n+1}\end{pmatrix}=Bar\begin{pmatrix}Bar\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\end{pmatrix} & x_{n+1}\\ \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n & \alpha_{n+1}\end{pmatrix}$.
C'est compliqué pour vous ? Vous vous souvenez quand même pour trois points :
(A,B,C) est un triangle de centre de gravité G. Et I est le milieu de AB. Alors G est un barycentre de I et C avec coefficients 2 *et* 1.
$G=Bar\begin{pmatrix}A & B & C\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $I=Bar\begin{pmatrix}A & B\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $G=Bar\begin{pmatrix}I & C\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ *et G est aux deux tiers du segment* $[C,\ I]$.

Et si vous voulez passer de la version à n variables à la version à deux variables ? Non, c'est bon, il suffit de prendre un cas particulier.

Un petit détail : dans la quantification $\forall(x_1,\dots x_n),\ \forall(\alpha_1,\dots\alpha_n)\in(\mathbb{R}^+)^n$, il importe que les α_i soient positifs, d'où $(\mathbb{R}^+)^n$.
Mais il importe aussi que leur somme soit non nulle. Sinon, comment la mettre au dénominateur.
Mais alors, comment noter ceci ? $((\mathbb{R}^+)^n)^*$, $(\mathbb{R}^{+*})^n$, $(\mathbb{R}^+)^n-0$, $(\mathbb{R}^+)^n-\{0\}$, $(\mathbb{R}^+)^n-(0,\dots 0)$?
Et comment le dire avec des mots ? Non tous nuls ? Tous non nuls ?
Réfléchissez.

Applications classiques :

- Le logarithme est concave donc (pour des α_i tous égaux à 1, c'est le plus simple) : $\ln\left(\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right) \geqslant \dfrac{\ln(a_1)+\ldots+\ln(a_n)}{n}$.
  On passe à l'exponentielle (croissante) : $\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}$ (comparaison des moyennes).
  A partir de maintenant, vous savez le démontrer en deux lignes.
- Et pour $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, devinez ce qu'on utilise ?
- Montrez que $x \longrightarrow \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
  Déduisez : $1+\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^n \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)^{\frac{1}{n}}$ pour des x_k strictement positifs.
  Déduisez $\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}+\sqrt[n]{b_1\ldots b_n} \leqslant \sqrt[n]{(a_1+b_1)\ldots(a_n+b_n)}$ pour des réels strictement positifs a_j et b_i.

Pour aller plus loin : et si on passait à une infinité de termes dans la grande inégalité de convexité. Enfin, c'est mal dit. On va écrire l'inégalité pour n termes et faire tendre n vers l'infini. C'est ce qu'on appelle l'inégalité de Jensen (sur les intégrales).

On prend f continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ et φ convexe (donc continue aussi). on a alors $\varphi\left(\int_0^1 f(t).dt\right) \leqslant \int_0^1 \varphi(f(t)).dt$.

Mais c'est tout bête ! On effectue une équisubdivision de $[0,\ 1]$ en n segments, et on applique une inégalité de convexité pour φ :
$\varphi\left(\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ (image de la moyenne...)

On fait tendre n vers l'infini. Par continuité de f, $\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ converge vers $\int_0^1 f(t).dt$.

Par continuité de φ, $\varphi\left(\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ tend vers $\varphi\left(\int_0^1 f(t).dt\right)$.

Et à droite, par continuité de $\varphi\circ f$, $\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ converge vers $\int_0^1 \varphi(f(t)).dt$.

L'inégalité large se conserve par passage à la limite : $\varphi\left(\int_0^1 f(t).dt\right) \leqslant \int_0^1 \varphi(f(t)).dt$.

Et si vous préférez la version étendue :

On prend f continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ et φ convexe (donc continue aussi). on a alors $\varphi\left(\frac{1}{b-a}.\int_a^b f(t).dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a}.\int_a^b \varphi(f(t)).dt$.

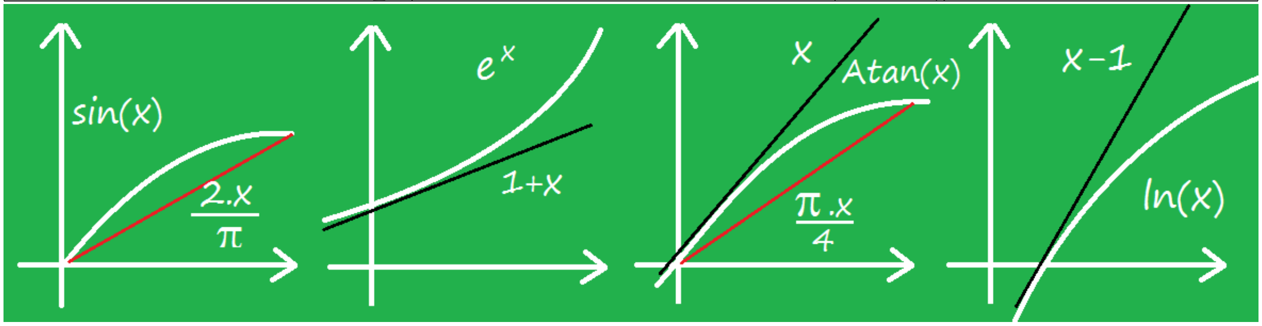
La démonstration est la même, en mettant au bon endroit les $b-a$.
Vous ne savez pas où sont les $\dfrac{1}{b-a}$? Ah non !
C'est pourtant simple : image de la valeur moyenne face à valeur moyenne de la composée. C'est pourtant une formulation élémentaire !

On le pose souvent pour $\varphi = \exp$.
Mais c'est aussi agréable de l'écrire pour

$x \longrightarrow x^2$	$\varphi = x \longrightarrow \lvert x\rvert$	$x \longrightarrow -\ln(x)$
$\left(\int_a^b f(t).dt\right)^2 \leqslant (b-a).\int_a^b (f(t))^2.dt$	$\left\lvert\int_a^b f(t).dt\right\rvert \leqslant \int_a^b \lvert f(t)\rvert.dt$	$\ln\left(\frac{1}{b-a}.\int_a^b f(t).dt\right) \geqslant \frac{1}{b-a}.\int_a^b \ln(f(t)).dt$

En gros, c'est à ça que sert la convexité. A ces inégalités dites de convexité de trois type

position par rapport à une corde	position par rapport à une tangente	grande inégalité de convexité
$\sin(x) \geqslant \frac{2.x}{\pi}$ pour x entre 0 et $\frac{\pi}{2}$	$e^x \geqslant 1 + x$ pour x réel	$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$



Mais la convexité sert aussi pour les histoires de minima [6].
En fait, on peut le dire simplement, un peu rapidement.
Si f est convexe, sa dérivée est croissante. Elle ne peut donc changer qu'une fois de signe, en passant du négatif au positif (et encore, elle peut rester de signe constant).
f est donc décroissante, puis croissante.
Elle a un minimum, et ses maxima sont au bout de l'intervalle.
cette notion intervient en physique quand votre système a un équilibre là où une fonction d'état (convexe justement) admet un minimum. Dans ce cas convexe, il y a un unique état d'équilibre.
Et la notion se généralise aux fonctions de plusieurs variables.

Petits exercices :
a- La réciproque d'une application convexe est elle convexe ? concave ?
Qu'allez vous utiliser ? Déterminant ? Trois cordes ? Petite inégalité ? Grande inégalité ?
Et d'ailleurs, la réciproque existe-t-elle ?

b- Si f est convexe et g convexe et croissante, alors $g \circ f$ est convexe. Pour démontrer ça, qu'allez vous utiliser ? déterminant ? Trois cordes ? Petit inégalité ? grande inégalité ?

c- Une application convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut elle être majorée ?

d- Pouvez vous construire f convexe de minimum 1 atteint à la fois en 2 et en 3 ?

6. *je suis resté vieux jeu, latiniste, je dis « minima sociaux » et pas « minimums », je dis « un quantum d'énergie / des quanta », je dis même « un bonus / des boni » et enfin « un thé au rhum / des théories »*